

位相振動子の相互同期による巨視的秩序の動的性質・西川郁子

学位申請論文

西川郁子

2

学位申請論文
 位相振動子の相互同期による
 巨視的秩序の動的性質

西川郁子

1992年12月

目次

0	はじめに	3
0.1	リミットサイクル振動	3
0.2	引き込み現象	4
I	数理モデルの解析：位相モデル	6
1	Phase Dynamics	8
1.1	位相による記述	8
1.2	位相モデルによる振動子結合系	10
1.2.1	強制引き込み；周期外力を受ける振動子系	10
1.2.2	相互引き込み；2振動子の結合系	11
1.2.3	外部雑音下の振動子結合系	13
2	平均場結合集団	15
2.1	平均場相互作用	15
2.2	巨視的定常解	17
3	秩序変数の動的性質 (主論文1、2)	22
3.1	臨界点近傍での系の振舞い	22
3.2	定常解への緩和特性	26
3.2.1	線形緩和関数	26
3.2.2	$H = 0$ ；非同期解への緩和	28
3.2.3	$H \neq 0$ ；同期解への緩和	32
3.3	結合系での緩和過程；クエンチ系に見る緩和	33
3.3.1	秩序変数の緩和	33
3.3.2	位相分布関数の緩和	35
3.4	まとめと議論	35

II 現象の記述・機能的側面	44
4 バーストのモデル	45
4.1 周期的バースト	45
4.1.1 バースト現象とそのモデル	45
4.1.2 Rintzel による 2 タイプの定式化	49
4.1.3 2 タイプの範例	50
4.2 複素変数モデル (タイプ I の例) (主論文 3)	51
4.2.1 複素変数によるバーストモデル	51
4.2.2 二つの極限	53
4.3 Integrate-and-Fire 型モデル (タイプ II の例)	56
4.3.1 Integrate-and-Fire モデルとパルス型結合	56
4.3.2 平均場パルス結合による雑音下の集団同期	59
4.3.3 同期集団による機能単位	63
A 式 (3.15) の導出	69
B 式 (3.61) の導出	71

Chapter 0

はじめに

0.1 リミットサイクル振動

散逸力学系において、エネルギーや物質の出入りの上に形成される時間的・空間的な秩序構造は、散逸構造として様々な形態が知られている。その最も単純な動的秩序は、規則的な振動として現れる。これは散逸力学系のアトラクターとしてはリミットサイクル上の運動であることから、リミットサイクル振動とも呼ぶ。リミットサイクル振動は保存系に現れる振動と異なり、初期状態がアトラクターの吸引領域 (*basin*) 内にある限り、過渡的な時間の後にリミットサイクル軌道に引き込まれてゆくため、初期状態によらず同じ振幅・振動数での振動に漸近することになる。これは保存系として例えば、摩擦による減衰のない単振子が行なう単振動では、与えられたエネルギーにより決まる周期軌道上を運動し、初期に与えた振幅や振動数での振動を続けることと対比して捉えられる。エネルギーや物質の流入と散逸の釣合いの上に成り立つリミットサイクル振動は、そこからのずれを与えられても再び軌道を復元することができる安定な振動なのである。更にこの軌道の安定性のみならず、摂動に対する構造安定性もリミットサイクルの重要な特徴である。すなわち、流入と散逸を持つ系自身が摂動を受けても、新たな釣合いのもとでのリミットサイクル振動が一般には得られる。

この安定性ゆえにリミットサイクル振動に特徴的に見られる現象に、引き込みあるいは同期 (*synchronization*あるいは *entrainment*) と呼ばれるものがある [1, 2]。これは、リミットサイクル振動をしている系が、振動数の近い周期的摂動を受けた結果、摂動の振動数と一致したりリミットサイクル振動を始める現象である。つまり振動が‘揃う’わけである。この時加えられる周期的摂動が、外力による強制振動であって摂動側の運動はこちらの影響を受けることなく不変な振動数での振動を続ける場合と、摂動側も同じくリミットサイクル振動であってこちらからの影響を受けて振動数が変わる為に、相互の折り合いのもとで共通の振動数を獲得する場合がある。前者は強制引き込み、後者は相互引き込みと呼ばれる。特にリミットサイクル振動系が複数存在し、互いに影響し合っている集団においては、複数の振動数が一致し集団として揃った相互引き込みが生じることがある。そこでの各振動子は集団を構成する要素系であって、振動子間の相互作用による協同現象として、集団

という巨視的なレベルでの秩序が形成されるわけである。本論では特に、多数の振動子から形成されるこのような集団引き込みについて、その振舞いを解析していく。

0.2 引き込み現象

前節ではいくぶん抽象的に引き込みを説明したが、実際に見られるいくつかの現象例を次に挙げておこう。

概日リズム 生体機能は時間との関わりなく考えることはできず、その中軸をなすのが時間的に繰り返される生体リズムである。生物は、環境への適応の一つとして、規則的な環境変化に対応して生体リズムを適応させる。地球物理的な周期に適応して生じ定着した生体リズムのなかで、特に日周期に関して多くの研究がなされてきた [3]。24 時間を周期とするリズムは、単細胞生物をはじめ全ての動植物に見られる。時間を推定する手がかりが全くない隔絶された恒常環境下に置かれると、この周期は 24 時間に近い値となることから（恒常環境下で現れるこのリズムを自発リズム (*free running rhythm*)、その周期を自発周期 (*free running period*) と呼ぶ）、概日リズム (*circadian rhythm*) と呼ばれ、ヒトでも睡眠・覚醒、体温変化をはじめ多くが知られている。一般に生物は、24 時間周期で変化する光や温度などの環境因子を周期的な強制外力として受け、近い周期を持つ自発リズムがそれに引き込まれることにより、正しく 24 時間周期のリズムを呈現することが出来ると考えられ、それを裏付ける実験結果がヒトに対しても色々報告されている（自発周期は一般にはほぼ 25 時間、これが引き込まれ得るのは周期 25 ± 2 時間程度である）。一つの生体リズムは、環境条件の周期的変化や他の生体リズムの影響を受けて引き込みを生じ、同一位相あるいは一定の位相差を保っているわけである。生体リズムを発現させる体内機構の時計とのアナロジーから、生体時計という言葉もしばしば用いられている。

Belousov-Zhabotinsky 反応 Belousov により発見され、Zhabotinsky が実験系を確立した為このように呼ばれる化学反応である。その非常に複雑な反応系をここで詳しくは紹介できないが、硫酸媒質中での、セリウムイオンを触媒とした臭素酸によるマロン酸の酸化反応であり、自己触媒過程を含む。ペトリ皿などの容器に入れられた反応溶液を十分攪拌しておく、一様な溶液中のイオン濃度が周期的に変化する、いわば化学時計となる。つまり、 Br^- の濃度、そして $\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}$ の濃度比が時間的に振動する。それに伴って反応溶液が 1 分程度の周期で橙赤色 (Ce^{4+}) と淡青色 (Ce^{3+}) に交互に変化するのが見られる¹。化学反応系における濃度の時間的あるいは空間的振動現象は、必ずしも新しい問題ではないが、空間的に一様な反応系における時間的振動の例として実験報告が正しく評価されたのは、この B-Z 反応が最初である。

また溶液を攪拌しなかった場合には、時間的振動が空間的振動を生じ、様々な空間パターンを見ることができる。これは容器上での、 Br^- 濃度や $\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}$ の濃度比の 2 次元進行波

¹触媒として Ce^{4+} の代わりに Fe^{3+} や Mn^{2+} を用いても同様の現象が見られ、例えばフェロインを触媒にした場合、 Ce^{4+} と Ce^{3+} が Fe^{3+} と Fe^{2+} に対応し、やはり橙赤色→青色の周期的変化が見られる。

であり、適当なペースメーカーを与えることで簡単に作る事が出来る。ペースメーカーとしては、不純物や容器のガラス傷などがあればよく、最近では小さな濾紙片を用いた面白い実験例も報告されている。こういったペースメーカーを中心にして、橙赤色や淡青色の円形領域が周期的に発生しては一定速度の進行波として周囲に広がり、同心円状のパターンを形成する。更にこれに対し、反応液を傾けたりガラス棒で同心円構造を攪乱すると、螺旋状のパターンが出来、成長していく。

溶液の体積素片を考えるとそれ自身振動系であるため、全系は空間的に分布した無数の局所的振動子から構成されたリミットサイクル振動子集団とみなすことができる。隣接する素片間では化学物質の拡散が存在し、それが振動子間の相互作用となる。先のペースメーカー部では、他の部分より早い振動数での濃度振動を行なう。周囲の遅い部分との位相差がペースメーカーを中心とした進行波として伝搬することで、同心円状パターンが形成される。遅い部分の媒質は中心の早い振動に引き込まれた結果、一つの同心円領域内では同一振動数で振動することになる。複数の同心円領域が存在する場合には、衝突した進行波は消滅しそこが領域境界となる。振動数が異なるペースメーカー間では、早いペースメーカーが形成する波長の短い同心円領域の境界が前進し、領域が拡大されてゆく。

心臓細胞の搏動 生きている動物の心臓を構成する細胞は、同じリズムで搏動していることは言うまでもないが、これも細胞間相互作用による同期の結果である。心臓の各細胞は、自律的搏動を行なっている [4]。ニワトリやマウスの胚から心臓を取り出し、ばらばらにした単一細胞の集団としたものを培養すると、単一の心筋細胞がガラス皿上で自律的に搏動を続けるのが見られる。その時の振動数（搏動数）は細胞ごとに異なるが、24 時間も培養すると多くの心筋細胞の搏動数が一致してくる。細胞は培養皿上を動きまわっており、一旦互いに接触すると 3~38 分程度で両細胞の搏動は同期する。つまりここでの同期には細胞間の接触による相互作用が必要なわけであり、ギャップジャンクションでの電気的結合を行なうと考えられる。培養数日で全てが同期するが、その過程では搏動数の高い方に低い方が引き込まれる場合が多く見られる。

ホタルの集団発光 最後に視覚的にも魅力ある例を挙げておこう。Buck らの報告 [5] によると、東南アジアのマングローブの森に多数のホタルが集まり、各個体が光を点滅させる。この点滅の周期がホタルの集団において相互に引き込み、森全体にわたって一斉に点滅する巨大な光のリズムが出現する。500 ミリ秒程度の周期での点滅が、数週間あるいはそれ以上も持続すると言われる。

Part I

数理モデルの解析：位相モデル

第I部では、リミットサイクル振動現象を単純化した数理モデルとして位相モデルを用い、それによって記述される振動系（以下では振動子とも呼ぶ）が多数集まって相互作用している集団を対象とし、その相互引き込み現象を解析する。本論では特に集団の巨視的状态に注目し、そのダイナミクスを解析する。

リミットサイクル振動を行なう自律振動系に対して、他の振動系との相互作用や外力が及ぼす影響を、孤立系に対する摂動として扱うことができる場合には、動的縮約としての位相表現が有効である。その結果導入される位相モデルをまず第1章で紹介する。簡単な適用例として、強制引き込みや相互引き込みなどが位相モデルによりどのように得られるかを見る。

続く第2章で、その中でも特に理論的に詳細な解析が可能な例として、自然振動数が不均一な振動子から成る平均場結合系をとりあげ、そこで見られる相互引き込みについて、定式化や既知の基本的な性質を示す。そこで導出されるのは、秩序変数に対する self-consistent 方程式の解として得られる定常状態など、静的な性質に限られる。

以上の準備の後に第3章で、平均場結合系の巨視的状态のダイナミクスとして、特に前章で得た定常解の安定性を解析する。それにあたっては、臨界点近傍であることと、定常解近傍であることの二つの条件下で考える。その結果非同期状態に対応する定常解については解析的に、また同期状態に対応する定常解についても計算機シミュレーションによって、同期解出現の分岐点において線形安定性が互いに交替することが示される。特に解析的に求められる非同期解に対しては、自然振動数分布により決定される緩和定数など、定量的評価も与えられる。安定性そのものは、分岐構造から通常予想されるものと一致するが、そういった巨視的状态の線形安定性を達成している微視的な機構は自明ではない。系全体の巨視的状态が $O(1)$ の時間スケールで示す線形緩和過程は、遅い時間スケールを持つ（すなわち自然振動数が平均値に近い為に平衡状態での巨視的秩序を形成する）振動子群によってではなく、それを打ち消しつつ見かけ上の平衡状態を達成する、早い時間スケールを持つ振動子群により支配されていることがわかる。

Chapter 1

Phase Dynamics

1.1 位相による記述

自励振動系を考える。すなわちここで考える力学系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \text{ は } n \text{ 次元ベクトル} \quad (1.1)$$

は散逸系であって、特にその解軌道として安定なリミットサイクル軌道 C を一つ持つとする。対応するリミットサイクル解を $\mathbf{x}_0(t)$ (添字 0 は非摂動系を示す) と書くことにし、その周期を T 、振動数を ω とする ($T \equiv 2\pi/\omega$)。

まず、軌道 C 上の各点 \mathbf{x} に対して、座標 ϕ を次のように定義する。軌道上の任意の一点 $\mathbf{x}_0(0) \in C$ を座標原点 $\phi = 0$ と決め、時刻 $t = 0$ にその点から (1.1) の力学系に従って時間発展を行なったとき、時刻 t における点 $\mathbf{x}_0(\omega t) \in C$ の座標値を ϕ とする。このように決めた座標 ϕ は、まだ $\mathbf{x} \in C$ に対してのみ定義されているが、 $\text{mod } 2\pi$ でリミットサイクル軌道上のいわば位相 (phase) を表現しているとみなせることより、位相変数と呼ぶことにしよう。定義より明らかに

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega \quad (1.2)$$

である。

次に、位相変数の定義を C を含むある領域 C' に拡張する (Fig.1(a))。これは、以後での議論において、アトラクターとして C を持っているもとの系 (1.1) が、何らかの摂動を受けた際の振舞いを摂動論的に考察するための準備である。十分小さい摂動に対しては、考える領域 C' もそれに応じて小さくてよい。ここではまず次のような定義を最も自然なものとして採用することにしよう。その意味についてはすぐ後で触れる。すなわち、非摂動系 (1.1) において、 C' 内の各点 \mathbf{x} に対しても C と同様 (1.2) 式が成立するように、 C' 内の位相変数 ϕ を定義する。これは、非摂動系 (1.1) の C 近傍 (C' 内) でのダイナミクスに依存して ϕ を決めたことになる。つまり、

$$\frac{d\phi}{dt} = \text{grad}_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \omega \quad (1.3)$$

によって陰に ϕ が定義され、形式的にはこれを解くことで $\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in C'$ が得られるわけである。ここで n 次元空間中で余次元 1 の多様体となる等位相面 $\phi(\mathbf{x}) = \text{const}$ をアイソクロン (isocron) と呼ぶ [2]。

以上では多分に現象論的に ϕ を位相変数として導入したが、このような位相による記述は、摂動系に対する動的縮約に基づくものに他ならない。動的縮約とは、ある力学系の方程式の解を求める前に、その方程式自体を何らかの手法でより単純化し、系のダイナミクスを抽出することである。動的縮約として挙げられるいくつかの手法において、次のような構造が共通に見られることが指摘されている [11]。すなわち、対象となる摂動系における縮約が可能であるための必要条件として

- 非摂動系に中立モードが存在すること
- 摂動が微小である限り解軌道が $t \rightarrow \infty$ で漸近する slow manifold が存在し、それゆえ系の漸近的振舞いがその多様体上での運動を記述する遅い変数のみで閉じた方程式系に縮約できること

などが共通して挙げられる。先の位相変数のみによる記述という動的縮約が可能なのは、非摂動系において連続対称性を破った解、すなわちリミットサイクル解 $\mathbf{x}_0(t)$ 、が存在している場合である。このときそれに付随する Goldstone モード $\mathbf{u}_0 \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{x}_0/dt$ の振幅を位相と呼んだのである。非摂動解 $\mathbf{x}_0(t)$ においては、位相はいわば任意定数を取り得るパラメータである。系が何らかの摂動を受けたとき、その結果生じる解軌道の変位自体は微小に留まることができないが、逆にその永年性を位相のゆっくりした変化 (時空間依存性) として吸収し、それをを用いて、系全体のダイナミクスを位相のダイナミクスに射影して見ることができるわけである。

このように見ると、アイソクロンも以下のように理解できる。縮約したダイナミクスにおける主役となる遅い変数として位相を導入したことにより、記述のための変数が一つ過剰になり、記述に任意性が生じる。これを一意に決めることがすなわち、非摂動軌道 C 上以外の C' 内の各点 \mathbf{x} に対して位相変数 $\phi(\mathbf{x})$ を定義することに対応する。前述のように (1.2) で定義したアイソクロンも、その決定法の一つだったわけである。これは、非摂動系に対して周期 T 毎のスナップショットをとって得られる離散力学系の解軌道 $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t+T), \mathbf{x}(t+2T), \dots$ による安定多様体に相当しており (Fig.1(b))、摂動展開の最低次のみを考える際にはわかりやすいであろう。ただし、より高次の摂動展開を行なうためには、線形固有空間で考える方がはるかに有用である。

C' 内の ϕ の定義が与えられたことで、系の漸近的な振舞いを $\phi(t)$ の運動により求めることができる。すなわち、非摂動系 (1.1) では C 上の周期運動であったが、これが

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \quad (1.4)$$

と微小な摂動 $\epsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ を受けた時に、系が示す振舞いを $\phi(t)$ により求めよう (ここで ϵ は微小量を表すものとして摂動項に用いたが、代わりに $\mathbf{p} \ll 1$ と考えてもよい)。上式を (1.1) に代入して得られる

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \text{grad}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)] \\ &= \omega + \epsilon \text{grad}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (1.5)$$

が摂動系の方程式であり、これを摂動展開することにより ϵ の任意の次数 $O(\epsilon^n)$ で $\phi(t)$ について閉じた式が得られる。最低次 $O(\epsilon)$ の近似を得るには、単純に右辺第二項の \mathbf{x} を $\mathbf{x}_0(\phi)$ に置き換えればよい。これは、 C 内の各点 \mathbf{x} での値を同一アイソクロン上にある C 上の点 $\mathbf{x}_0(\phi)$ での値で置き換えているわけであり、

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \omega + \epsilon \text{grad}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(\phi)} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_0(\phi), t) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \omega + \epsilon \Omega(\phi, t)\end{aligned}\quad (1.6)$$

ここで感度

$$\mathbf{Z}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(\phi)}\quad (1.7)$$

を用いて、

$$\Omega(\phi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Z}(\phi) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_0(\phi), t)\quad (1.8)$$

を定義した。

このようにして得た位相 ϕ のみによる記述、位相モデルを用いて、リミットサイクル振動が示す振舞い、特に引き込み現象を解析出来ることがわかる [7, 8]。次に3例の摂動 $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ に対して、具体的表式を書き下してみよう。

1.2 位相モデルによる振動子結合系

1.2.1 強制引き込み；周期外力を受ける振動子系

最初の例として、周期外力を受ける振動子を考える。すなわち、 $\epsilon \mathbf{p}$ が周期 $T' (\equiv 2\pi/\omega')$ の弱い外力として加えられるとする。ここで摂動が微小であるとは、 \mathbf{p} の強度が小さいこと及びその振動数 ω' が非摂動系の振動数 ω とわずかしが異なることを意味する。この微小量のオーダーをここではどちらも ϵ とするが、これは何らかの仮定をしているわけではない。両者を区別して例えば ϵ_1 と ϵ_2 としても、以下に見る摂動の一次の近似では加算的に作用するわけであるから、特に必要がない限り同じ ϵ で二つの微小量を表現しても混乱はないだろう。よって、 $\epsilon \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \omega - \omega'$ とする。また振動子の運動を、周期外力の位相との相対的なずれによって見るために、位相変数 ϕ を変数変換し、

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \phi - \omega' t\quad (1.9)$$

を用いることにする。この位相ずれ ψ が摂動系における遅い変数である。この時 (1.6) 式は、

$$\frac{d\psi}{dt} = \epsilon \cdot [\Delta + \Omega(\psi + \omega' t, t)]\quad (1.10)$$

として、位相ずれ ψ に対する最低次の式を与える。ここで右辺 Ω は、 t の関数として見ると二つの引数いずれにおいても T' 周期的である。つまり ψ は、 T' 周期で変化する力を受けながら、ゆっくりと変化するわけである。 T' 周期内では、 ψ がほとんど変化しないことより、*near identity transformation* を行なう。これは、 t 依存性を持つ上式 (1.10) に対して、変数変換を行なうことで t 依存性のない式を与えるものである。その変換の結果得られる式とは、(1.10) の右辺を一周期 T' 内で平均したものであることがわかる。すなわち、

$$\Gamma(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T'} \int_0^{T'} \Omega(\psi + \omega' t, t) dt\quad (1.11)$$

を用いて、

$$\frac{d\psi}{dt} = \epsilon \cdot [\Delta + \Gamma(\psi)]\quad (1.12)$$

となる。このようにして得られた定数係数の一変数一階微分方程式が、直ちに外力による強制引き込みの有無を与える。つまり、(1.12) 式が安定平衡点 $\psi = \psi_0$, s.t. $d\psi_0/dt = 0$, $d\Gamma/d\psi|_{\psi=\psi_0} < 0$ を持てば、振動子は $\phi = \omega' t + \psi_0$ で、外力と同じ周期 T' で位相差 ψ_0 により振動し、すなわち外力に引き込まれる。安定平衡点がない場合には、位相差 ψ は一方向に拡がり続ける。この場合の周期は、外力の影響を受けて $\int_0^{2\pi} \{\Delta + \Gamma(\psi)\}^{-1} d\psi$ となる。このように、周期外力との振動数の差の大きさ Δ と、 Γ として表される外力の強さとの拮抗により、周期外力への引き込みが決められることがわかる。

1.2.2 相互引き込み；2振動子の結合系

次の例として、2個の振動子が結合した系を考えよう。2つの僅かに異なる力学系が、共に安定なリミットサイクルを持ち、弱く相互作用をしている結合系である。それぞれの非摂動系を (1.1) 式の形で与え

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1) + \epsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_2) + \epsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \end{cases},$$

とする。ここで添字 1, 2 は各系を示す。また相互作用としては対称なものを考えた。非摂動系 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ の微小な差異も、同じく ϵ によって表すことにし、どちらもある共通の力学系 \mathbf{F} を用いて、

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F} + \epsilon \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2\quad (1.13)$$

と書くことにする。つまり非摂動系として仮想的な力学系 \mathbf{F} を考え、それとの差異を相互作用と同じく摂動として取り扱い

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \epsilon \{ \mathbf{V}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) \}, \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \epsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \\ &\quad (i, j) = (1, 2), (2, 1)\end{aligned}\quad (1.14)$$

とする。以下は前と全く同様の方法により、

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + \epsilon \{ \mathbf{Z}(\phi_i) \cdot \mathbf{V}(\phi_i, \phi_j) + g_i(\phi_i) \} \quad (1.15)$$

が得られる。ただしここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\phi_i, \phi_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{V}(\mathbf{x}_0(\phi_i), \mathbf{x}_0(\phi_j)) \quad , \\ g_i(\phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Z}(\phi) \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_0(\phi)) \end{aligned}$$

とした。非摂動系 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ の振動数 (一般に非摂動系の振動数を以後自然振動数と呼ぶ) ω による振動からのずれ ψ_i をそれぞれ

$$\psi_i \stackrel{\text{def}}{=} \phi_i - \omega t \quad (1.16)$$

で定義すると、これに対して

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \epsilon \{ \mathbf{Z}(\psi_i + \omega t) \cdot \mathbf{V}(\psi_i + \omega t, \psi_j + \omega t) + g_i(\psi_i + \omega t) \} \quad (1.17)$$

となり、ここでも定数係数の方程式への変換を

$$\begin{aligned} \Gamma(\psi_i - \psi_j) &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{Z}(\psi_i + \omega t) \cdot \mathbf{V}(\psi_i + \omega t, \psi_j + \omega t) dt \quad , \\ \delta\omega_i &= \frac{1}{T} \int_0^T g_i(\psi_i + \omega t) dt \end{aligned}$$

により行なった結果、

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \epsilon \{ \Gamma(\psi_i - \psi_j) + \delta\omega_i \} \quad (1.18)$$

が得られ、相互作用は位相差により与えられることがわかる。これをもとの変数 ϕ_i で書くと、 $\omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \omega + \epsilon \delta\omega_i$ (これらは $\mathbf{F}_i(\mathbf{x})$ の自然振動数と考えられる) を用いて

$$\begin{cases} \frac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 + \epsilon \Gamma(\phi_1 - \phi_2) \quad , \\ \frac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 + \epsilon \Gamma(\phi_2 - \phi_1) \end{cases}$$

となる。ここで $\Gamma(\phi)$ は ϕ の 2π 周期関数である。これらが相互に引き込むか否かは、振動子間の位相差 $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1 - \psi_2 = \phi_1 - \phi_2$ が従う次の式

$$\frac{d\psi}{dt} = \epsilon \{ \delta + \Gamma(\psi) - \Gamma(-\psi) \} \quad , \quad \delta \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 - \omega_2 \quad (1.19)$$

から与えられる。すなわち、この式の安定平衡点の存在を調べればよい。ここでもやはり、二つの自然振動数の差 δ と結合の強さとの拮抗により相互引き込みの成立が決定される。

このように2個の振動子系に対して得られた結果は、その導出手順から、一般に N 個の結合系に対しても全く同様に成り立つことは明らかである。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \epsilon \mathbf{p}_i(\{\mathbf{x}_j\}_j) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.20) \\ \mathbf{p}_i(\{\mathbf{x}_j\}_j) &= \sum_{i' \neq i} \mathbf{V}_{i i'}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i'}) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

に対して、

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_j \Gamma_{ij}(\phi_j - \phi_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.21)$$

を得る (ϵ は表記上省いた)。ここで j による和は、 i 番目の振動子と相互作用をしているものについてとる。 $\Gamma_{ij}(\phi)$ は ϕ の 2π 周期関数である。

次章では、十分多数の N 個の振動子結合系 (1.21) について考えるが、その前に雑音を含む系に対する確率的な取り扱いを見ておこう。

1.2.3 外部雑音下の振動子結合系

先には振動子ごとのばらつき、つまり構成要素の不均一性を考えたが、最後の例では均一な振動子群がそれぞれ独立に受けるランダムな外部雑音を摂動的な効果として考えよう。ここでもやはり弱い雑音を仮定する。再び2個の結合系を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \epsilon \{ \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \} \quad , \quad (1.22) \\ (i, j) &= (1, 2), (2, 1) \quad . \end{aligned}$$

ここで第二項が外部雑音、第三項が振動子間の対称な相互作用を示す。二つの振動子に加わる雑音は統計的性質が同じであるものとし、また一般性を失わずに雑音の平均値を0とおくことにする； $\langle \mathbf{f}_i \rangle = 0$ 。ここで $\langle \rangle$ は雑音に対する統計平均を表すものとする。このとき、位相モデルでは先と同様に

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + \epsilon \{ \mathbf{Z}(\phi_i) \cdot \mathbf{V}(\phi_i, \phi_j) + g_i(\phi_i, t) \} \quad , \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \mathbf{V}(\phi_i, \phi_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{V}(\mathbf{x}_0(\phi_i), \mathbf{x}_0(\phi_j)) \quad , \\ g_i(\phi, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Z}(\phi) \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_0(\phi), t) \end{aligned}$$

となり、2変数の連立 Langevin 方程式が得られることになる。これに対する単純な時間平均操作は行なえないが、 $g_i(\phi_i, t)$ が特に Gaussian 白色雑音；

$$\begin{aligned} \langle g_i(\phi_i, t) \rangle &= 0 \\ \langle g_i(\phi_i, t) g_j(\phi_j, t') \rangle &= 2D(\phi_i) \delta_{ij} \delta(t - t') \end{aligned}$$

の場合には以下のような取り扱いができる。すなわち、上式 (1.23) を確率分布関数 $\mathcal{P}(\phi_1, \phi_2, t)$ に対する Fokker-Planck 方程式に書き換え、

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{I}_i}{\partial \phi_i} \\ \mathcal{I}_i = \left\{ \omega + \epsilon \left[\mathbf{Z}(\phi_i) \cdot \mathbf{V}(\phi_i, \phi_j) + \frac{1}{2} \frac{dD(\phi_i)}{d\phi_i} \right] \right\} \mathcal{P} - \epsilon \frac{\partial}{\partial \phi_i} [D(\phi_i) \mathcal{P}] \quad , \end{cases} \quad (1.24)$$

あるいは更にこれを $\psi_i \stackrel{\text{def}}{=} \phi_i - \omega t$, $i = 1, 2$ で書くと、

$$\mathcal{Q}(\psi_1, \psi_2, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\psi_1 + \omega t, \psi_2 + \omega t, t)$$

に対する

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} = -\epsilon \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial \psi_i} \\ \mathcal{J}_i = [\mathbf{Z}(\psi_i + \omega t) \cdot \mathbf{V}(\psi_i + \omega t, \psi_j + \omega t) + \frac{1}{2} \frac{dD(\psi_i + \omega t)}{d\psi_i}] Q - \frac{\partial}{\partial \psi_i} [D(\psi_i + \omega t) Q] \end{cases} \quad (1.25)$$

を得る。このように変数変換後の Q では時間変化がゆっくりしたものとなり、 $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{V}$ や D の周期 T の間では殆んど変化しないところから、先と同様の手続き、すなわち T 時間内の平均によって得られる変数変換；

$$\begin{aligned} \Gamma(\psi_i - \psi_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathbf{Z}(\psi_i + \omega t) \cdot \mathbf{V}(\psi_i + \omega t, \psi_j + \omega t) \\ D &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T dt D(\psi_i + \omega t) \end{aligned}$$

により簡略化した表式をとることができ、最終的に

$$\mathcal{J}_i = \Gamma(\psi_i - \psi_j) Q - D \frac{\partial Q}{\partial \psi_i} \quad (1.26)$$

となる。具体的に書き下すと（ここでは右辺全体にかかっている ϵ を省略して）、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \psi_1} [\Gamma(\psi_1 - \psi_2) Q] - \frac{\partial}{\partial \psi_2} [\Gamma(\psi_2 - \psi_1) Q] + D \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi_2^2} \right) Q$$

またこれを再び、 ψ_i に対する Langevin 方程式で表すと、

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i}{dt} &= \Gamma(\psi_i - \psi_j) + g_i(t) \\ \text{ここで } g_i(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T dt g_i(\psi + \omega t, t) \end{aligned} \quad (1.27)$$

を得る。雑音下におかれたこの場合には、前の例のように完全な引き込みは起こり得ないことがわかるが、結合している振動子数 $N \rightarrow \infty$ の極限では、有限温度での相転移現象同様、引き込み転移が起こることが示されている。

Chapter 2

平均場結合集団

2.1 平均場相互作用

N 個の不均一な振動子が雑音のない環境下におかれ、特に全てが互いに二体相互作用している場合、

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_{ij}(\phi_j - \phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

を考えよう。すなわち各リミットサイクル振動子はほぼ同等であって、それぞれの自然振動数 ω_i が僅かずつ異なって分布しており、互いに他の $N-1$ 個の振動子と弱く相互作用をしている。動的縮約による摂動の最低次で得られたこの式は、各振動子に対する N 組の微分方程式 (1.2) をそのまま連立し位相差により結合した形をとっている。二振動子の相互引き込みは、互いの振動数が等しくなる振舞いとして与えられたが、同様の現象が一般に N 個の振動子系に対しても期待できる。すなわち、 N 振動子のうちいくつかの振動数が互いに揃う相互引き込みである。その場合には、どの程度の割合の振動子が互いに引き込むか、引き込んだ集団は複数形成し得るかなど多様性が出てくる。そこで本章ではまず上式の解として得られる相互引き込み（同期）状態を見ることにする。ここで (2.1) 式は、任意の定数 ϕ_c に対して、全 ϕ_i に一様に $\phi_i \rightarrow \phi_i + \phi_c$ という変数変換を行なっても不変であることに注意しよう。

二体相互作用 Γ_{ij} として次のような単純な形を考える；

$$\Gamma_{ij}(\phi) = \frac{K}{N} \Gamma(\phi), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

すなわちいずれの振動子 ϕ_i も、他の全ての $N-1$ 個の振動子と等しい強度 K 及び同じ関数型 $\Gamma(\phi)$ で結合している。よって振動子が存在する実空間での距離といったものは考慮されず、各振動子を区別するのはその自然振動数 ω_i だけである。ここで係数に N^{-1} が含まれるのは、相互作用の効果が N に依存し $N \rightarrow \infty$ で発散するといった非現実性を排除するためである。(2.2) 式による相互作用を平均場相互作用と呼ぶが、これは次に見るように、いわゆる平均場近似式そのものが厳密であるような結合形になっているからである。実空間で

の次元性を無視した一極限であるが、モデル化において必ずしも不適當な近似とは限らない。これについては、第 II 部で振動子集団の機能とも関連して触れることにする。

非振動系の性質は、自然振動数 ω_i ($i = 1, 2, \dots, N$) の分布のみにより与えられる。つまり N 個の数密度分布

$$g(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\omega_j - \omega) \quad (2.3)$$

により決められる。ここで単純化のため $g(\omega)$ には対称分布を仮定しよう。すなわちある振動数 ω_0 に関して対称；

$$g(\omega_0 + \omega) = g(\omega_0 - \omega)$$

であるとする。対称の中心となる振動数 ω_0 は一般性を失わずに $\omega_0 = 0$ とおけるが、これは次のように、位相変数 ϕ_i を新たな変数 ψ_i に変換すれば明らかである。すなわち一般に $\omega_0 \neq 0$ の場合でも、

$$\psi_i \stackrel{\text{def}}{=} \phi_i - \omega_0 t \quad (2.4)$$

による位相 ψ_i の振動数分布は、 $\omega = 0$ に関して対称な分布である。よって以後は位相 ψ_i を用い、 $\omega_i - \omega_0$ を新たに ω_i と置くことにより、(2.1) 式は

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_{ij}(\psi_j - \psi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

を、 $\omega = 0$ に関して対称な自然振動数分布 $g(\omega)$ のもとで考えることになる。また十分大きな集団 $N \gg 1$ での統計的性質を考えるため、 $g(\omega)$ は $N \rightarrow \infty$ において滑らかな関数に収束する性質の良いものとする。

平均場結合 (2.2) に限定すると、相互作用は結合定数 K と結合の関数型 $\Gamma(\psi)$ を与えることで決められる。ここで $\Gamma(\psi)$ は ψ の 2π 周期関数であることに注意しよう。このうち最も単純なものとして、基本モード $\sin(\psi)$ のみから成る場合を考えることにする。 $\cos(\psi)$ を含む場合に関する解析も既に与えられており、また K の符号により引き込みへの効果が変わることも示されるが、ここでは互いに同位相で引き込む効果を与える相互作用である

$$K > 0, \quad \Gamma(\psi) = \sin \psi$$

に限定して見ていくことにする。

以上をまとめると、考えるモデルは、

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_i - \psi_j) \quad (2.5)$$

ここで、 ω_i は $\omega = 0$ に関して対称な分布 $g(\omega)$ に従うものとする。

2.2 巨視的定常解

(2.5) 式で与えられる系の巨視的状态を求めよう [8]。巨視的状态とは、個々の振動子の振舞いではなく系全体の統計量によって特徴付けられる状態であって、ここでは特に振動子間の相互引き込みに注目する。

相互引き込みの有無や程度を定量化するために、次のような複素変数 $Z(t)$ を定義する。

$$Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(i\psi_j(t)) \quad (2.6)$$

$$Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} |Z(t)|, \quad \Theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \arg Z(t) \quad (2.7)$$

これは時刻 t に N 個の振動子をとる位相の値 $\psi_j(t)$ をそれぞれ複素平面上での単位ベクトルの向きで表した時のベクトルの平均値であり、 N 個の位相の偏り方を示している。例えば、 $\psi \in [0, 2\pi)$ に一様分布している場合には $Z = Z \equiv 0$ 、全ての振動子がある位相 ψ_* に揃っている場合； $\forall i, \psi_i = \psi_*$ には $Z = \exp(i\psi_*)$ すなわち $Z = 1, \Theta = \psi_*$ となる。このように $Z(t)$ は各振動子の振動の位相の揃い方を表すことで、引き込みによって出現する秩序を定量化する秩序変数である。有限振幅 $Z \neq 0$ の出現は、オーダー $O(N)$ 個の振動子の位相の一致を示す。

また、時刻 t に位相 ψ をとる振動子の数密度により、次のような位相分布関数を定義しよう；

$$n(\psi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\psi_j(t) - \psi) \quad (2.8)$$

すると上記の秩序変数 $Z(t)$ は、これを用いて

$$Z(t) = \int_0^{2\pi} n(\psi, t) \exp(i\psi) d\psi \quad (2.9)$$

と書くことができる。つまり $Z(t)$ は $n(\psi, t)$ の基本モードの振幅である。

ここで平均場結合型をとった直接の帰結として、相互作用系を形式的に一体化することが出来る。すなわち方程式 (2.5) 第二項の相互作用項は、 $Z(t)$ を用いて

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i - K Z(t) \sin(\psi_i - \Theta(t)) \quad (2.10)$$

となる。他の振動子との相互作用の効果が、あたかも秩序変数 $Z(t)$ のみを介して与えられるとみなせるわけであり、その意味で他の全振動子の状態を知ることなく $Z(t)$ のみから解ける、一体化された表式であると言える。一体化方程式がこのように単純な形で得られるのは、特に $\sin(\psi)$ 型の結合をとったことによるが、一体化できること自体は平均場結合に一般的な性質である。このようにして N 個の常微分方程式の連立系であった (2.5) 式は、一体化方程式 (2.10) と秩序変数の定義式 (2.6) を連立して $\{\psi_i(t)\}_{i=1,2,\dots,N}$ と $Z(t)$ を求めることに置き換えられる (あるいは同等だが、(2.10), (2.8), (2.9) から、 $\{\psi_i(t)\}_i$ と $n(\psi, t)$ 、 $Z(t)$ を求める)。その場合、(2.10) 式からある Z のもとでの各 $\psi_i(t; Z)$ を求め、これを Z の定義式 (2.6) へ代入することにより両者を同時に (self-consistent に) 得ることになる。

そのような self-consistent な解を厳密に求めることが出来るのは、時間に依存しない定常解に限定される。ここでいう定常状態とは、 $Z(t)$ や $n(\psi, t)$ などの巨視変数が時間的に変化しない状態を指し、各振動子の運動という微視的な状態は定常とは限らない。また巨視変数の定常解も、厳密には $N \rightarrow \infty$ 極限で得られるものである。以下この章の残りの部分で、定常解を求める手順を示す。それをもとに次の第3章でダイナミクスの解析を行なうからである。

ところで、定常状態にはどのようなものが予想されるだろうか。ただし $N \rightarrow \infty$ で考え、そのとき位相分布関数

$$n|_{N \rightarrow \infty}(\psi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} (\delta\psi)^{-1} \int_{\psi - \delta\psi/2}^{\psi + \delta\psi/2} n(\psi', t)|_{N < \infty} d\psi'$$

は滑らかであるとする。章の初めで触れたように、この系は位相の一樣並進 $\psi_i \rightarrow \psi_i + \psi_c$ といういわば回転に対する不変性を持っている。そこで考えられる最も単純な（すなわち最も対称性の高い）状態は、一樣な位相分布；

$$n(\psi, t) = \text{const} = (2\pi)^{-1}$$

であろう。そのとき $Z \equiv 0$ より各振動子は ω_i で自由回転を行なうため、一樣分布が定常解として存在することは明らかである。この一樣分布解は K の値によらず常に存在する。回転不変性より次に予想される状態は、非一樣分布がある一定の角速度 Ω で回転する進行波解；

$$n(\psi, t) = n(\psi - \Omega t) \neq \text{const}$$

である。この場合、一般には 0 でない Z も明らかに同じ振動数 Ω で複素平面上を回転する；

$$Z = Z \exp(i\Omega t) \quad , \quad \dot{Z} = \text{const} \quad .$$

このような巨視変数の振動は、振動子の相互引き込みによる集団振動を示していると考えられる。それでは以下で実際にその様子を明らかにしていこう。

まず (2.10) 式を積分し、 Z をパラメータとして $\{\psi_i(t; Z)\}_i$ を求める。上記のような引き込み解を求めるために、特に $Z \neq 0$ の解を考える。また $g(\omega)$ が $\omega = \omega_0$ (今一般性を失わずに $\omega_0 = 0$) に関する対称分布の場合、それに対応して対称な初期位相分布をとれば $\Omega = \omega_0$ となる。よって以下では記述の簡便化のため位相 θ を落し、振幅 $Z \neq 0$ のみを記すことにする。ここで N 個の振動子はその自然振動数 ω_i の値に応じて、二つの定性的に異なる集団に分離されることがわかる。すなわち、 $|\omega_i/KZ| \leq 1$ のために (2.10) 式が安定平衡点を持つものと、 $|\omega_i/KZ| > 1$ でそれを持たず周期解となるものの二つである。前者は相互に引き込んで集団振動を形成しているもの（それゆえ以後同期集団と呼ぶ）であり、後者は相互引き込みには加わずに振動しているもの（同じく非同期集団とする）であることが導かれる。巨視変数 Z, n はいずれも各振動子からの寄与の加算量であるため、二つの集団からの寄与の和として求めることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} n(t) &= n_s(t) + n_d(t) \quad , \\ Z(t) &= Z_s(t) + Z_d(t) \quad , \\ &= \int_0^{2\pi} n_s(\psi, t) \exp(i\psi) d\psi + \int_0^{2\pi} n_d(\psi, t) \exp(i\psi) d\psi \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで s, d は、それぞれ同期集団 (Synchronized group)、及び非同期集団 (Desynchronized group) を示す添字である。二つの集団それぞれについて (2.10) 式を積分しその振舞いを見てみよう。

同期集団 N_s 個 ($N_s = N \int_{-KZ}^{KZ} g(\omega) d\omega$) の振動子より構成され、それぞれ唯一の安定固定点 ψ_{i0} ；

$$\psi_{i0}(Z) = \sin^{-1}\left(\frac{\omega_i}{KZ}\right) \quad (2.12)$$

を持つ（添字 0 は平衡状態を示す）。つまり平衡状態では、

$$\rho_{s0}(\psi) = \delta^{N_s}(\psi_s - \psi_{s0}) \quad , \quad \psi_{s,s0} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_{1,10}, \psi_{2,20}, \dots, \psi_{N_s, N_s0})$$

というデルタ測度となる。これより、

$$\begin{aligned} n_{s0}(\psi; Z) &= \iint \cdot \int_0^{2\pi} d\psi_s \rho_{s0}(\psi_s) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N_s} \delta(\psi_j - \psi) \\ &= \int_{-KZ}^{KZ} d\omega g(\omega) \delta(\sin^{-1}\left(\frac{\omega}{KZ}\right) - \psi) \\ &= g(KZ \sin \psi) KZ \cos \psi \quad , \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} Z_{s0} &= \int_0^{2\pi} n_{s0}(\psi; Z) \exp(i\psi) d\psi \\ &= 2 \int_0^1 dx KZ g(KZx) \sqrt{1-x^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる。ここで右辺の Z は self-consistent 解かれるべき未知パラメータであることに注意しよう。

非同期集団 残り $N_d = N - N_s$ 個の振動子は一定方向への回転を行なうが、同期集団の存在のために自由回転から歪んだ運動となる。角速度が $v_i(t) = \omega_i - KZ \sin \psi_i(t)$ であることから、歪んだ回転の振動数 $\tilde{\omega}_i$ は

$$\tilde{\omega}_i = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{v_i(\psi)}} = \sqrt{\omega_i^2 - |KZ|^2} \quad (2.15)$$

である。ここで、これらの回転は互いに独立で N_d 次元トーラス上でのエルゴード運動をしていると仮定すると、そのとき得られる不変測度は

$$\begin{aligned} \rho_{d0}(\psi_d) &= \prod_{i:N_d} \rho_{i0}(\psi_i) \\ &= \prod_{i:N_d} \frac{\tilde{\omega}_i}{2\pi |v_i(\psi_i)|} \\ &= \prod_{i:N_d} \frac{\sqrt{\omega_i^2 - |KZ|^2}}{2\pi |\omega_i - KZ \sin \psi_i|} \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} n_{d0}(\psi; Z) &= \iint \cdots \int_0^{2\pi} d\psi_d \rho_{d0}(\psi_d) \frac{1}{N} \sum_{j=N-N_d+1}^N \delta(\psi_j - \psi) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{KZ}^{\infty} d\omega g(\omega) \frac{\omega \sqrt{\omega^2 - |KZ|^2}}{\omega^2 - |KZ \sin \psi|^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} Z_{d0} &= \int_0^{2\pi} n_{d0}(\psi; Z) \exp(i\psi) d\psi \\ &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

以上2集団の結果を合わせて、 Z についての self-consistent 方程式が得られる；

$$\begin{aligned} Z &\stackrel{\text{def}}{=} S(Z) \\ &= Z_s(Z) + Z_d(Z) \\ &= 2 \int_0^1 dx K Z g(KZx) \sqrt{1-x^2} \\ &= (1+\epsilon)Z - \beta Z^3 + O(Z^5) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\text{ただし } \epsilon = \frac{K - K_c}{K_c}, \quad K_c = \frac{2}{\pi g(0)}, \quad \beta = -\frac{1}{16} \pi K_c^3 g''(0) \quad (2.21)$$

最後の等号は、 $Z \ll 1$ の場合（すなわち引き込みにより現れた秩序が小さい場合）に行なった Z についての展開である。また、常に存在する $Z \equiv 0$ を最初に除外して求めたが、式(2.20)はこれをも含んだ形で得られた。一般に Z の位相 θ も含めて、

$$Z = (1+\epsilon)Z - \beta |Z|^2 Z + O(|Z|^5) \quad (2.22)$$

と表すことが出来る。これより $Z = \text{const}$ の解 Z_0 は、

- 非同期解

$$Z_0 \equiv 0, \quad \text{for } \forall K \quad (2.23)$$

- 同期解

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}} \quad (2.24)$$

$$\text{for } \begin{cases} K \geq K_c & (\beta > 0, \text{すなわち } g''(0) < 0 \text{ のとき}) \\ K \leq K_c & (\beta < 0, \text{すなわち } g''(0) > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と得られ、 $K = K_c$ において同期解が分岐により生じることがわかる。ここでは $Z_0 = 0, Z_0 \neq 0$ に応じて、それぞれ非同期解及び同期解と呼んだが、実際に実現が予想されるのは、 $\beta > 0$ すなわち $g(\omega)$ が $\omega = 0$ において凸の場合に結合強度 K を K_c 以上にしたとき出現する同

期解である。つまりこれが集団の相互引き込みに対応した解であって、 K_c 以下での唯一の定常解である非同期解と臨界点 $K_c = 0$ において安定性が交替し、超臨界分岐によって生じる安定解であることが予想される。逆に $g(\omega)$ が $\omega = 0$ で凹の場合に K_c 以下で得られた解は、亜臨界分岐による不安定解で、実際には実現しないものと考えられる。事実従来の研究では計算機シミュレーションによりそのことが確認されてきた。しかし理論的には示されておらず、これらの解を与えた self-consistent 方程式による方法では、それを実現するダイナミクスが考慮されていない為、その安定性や $t \rightarrow \infty$ における系の漸近的振舞いとといった動的性質はわからない。つまり上の導出で見たように、 Z のダイナミクスを考慮せず、まず Z を固定されたパラメータとして $n_0(\psi; Z)$ を求めた為、そこで得られる $n_0(\psi; Z)$ の安定性は、 Z の安定性とは異なるものである。実際には $n_0(\psi; Z)$ とともに変化する Z を考慮して、ダイナミクスを論じる必要がある。

そこで次章において、系の特に巨視的状态のダイナミクスの解析を行う。その結果、上の予想や従来のシミュレーション結果と一致した線形安定性が導かれ、その実現は自明でない機構に依っていることがわかる。

Chapter 3

秩序変数の動的性質 (主論文 1、2)

3.1 臨界点近傍での系の振舞い

前章の方程式 (2.22) は、self-consistent に存在可能な秩序変数の定常解を与えるものであり、そこからのずれが生じた時に起こる振舞い、すなわち解の安定性については何も与えなかった。まず本節ではこれを動的に拡張することを考える。特に、引き込み転移が起こる臨界点 $K = K_c$ の近傍に限定して解析を行なう。その場合には臨界減速により $Z(t)$ が遅い変数となり、個別の振動子 $\psi_i(t)$ の運動がそれに断熱的に追従するすることによって、系全体のダイナミクスが遅い変数 $Z(t)$ のみによる記述に縮約できるからである。更に、定常解からのずれは小さいものとし、定常状態近傍での振舞いに注目する。すなわち、

条件 I $\epsilon \ll 1$ ($K \simeq K_c$)

条件 II $Z \ll 1$

という二つの微小量のもとで考えることになる。 ϵ 以外にもう一つ微小量 Z が存在することが、この系に特徴的な振舞いが与える。そのため、前章の方法の単純な拡張で示唆される秩序変数のダイナミクスは通常線形特性とは異なり、次節で改めて線形緩和領域の有無という観点から論じることになる。

遅い変数 $Z(t)$ への縮約とは、近似の最低次では早い変数 $\psi_i(t)$ の時間 t 依存性を全て $Z(t)$ 依存性に帰着する、すなわち断熱近似である。今の場合それは例えば

$$n(\psi, t) \simeq n_{s0}(\psi; Z(t)) + n_{d0}(\psi; Z(t)) \quad (3.1)$$

となるが、これは定常解を与える self-consistent 方程式 (2.22) に他ならない。それゆえ $Z(t)$ の時間発展を得るには、 t における $\psi_i(t)$ が同時刻 t での $Z(t)$ のみに依存する形をとるこの断熱近似からのずれを取り込む必要がある。

前章と同様、同期集団と非同期集団とに分けて考えよう。ただし $Z(t)$ が変化している場合には、両集団への分離境界を与える $\omega = \pm KZ(t)$ も当然ながら時間によって変化する。そ

の際問題となり得るのは境界 $|\omega| = KZ(t)$ 付近の振動子であり、実際これらの中には $Z(t)$ よりも遅い時間スケールを持つものもあるが、それらの数が少ないことより Z への寄与は無視できることが示せる。

特にここでは、同期集団の振舞いを見てみよう。断熱近似では Z により決まる唯一の安定固定点 $\psi_{i0}(Z)$ をとるに過ぎず、ここではそれからの微小ずれ $\delta\psi_i(t)$ を考えることになる；

$$\psi_i(t) = \psi_{i0}(Z(t)) + \delta\psi_i(t) \quad (3.2)$$

これを $\psi_i(t)$ の方程式 (2.10) に入れ、ずれ $\delta\psi_i(t)$ について線形化すると、

$$\frac{d\delta\psi_i(t)}{dt} = -KZ \cos \psi_{i0} \cdot \delta\psi_i(t) - \frac{d\psi_{i0}}{dt} = -\sqrt{|KZ|^2 - \omega_i^2} \cdot \delta\psi_i(t) - \frac{d\psi_{i0}}{dt} \quad (3.3)$$

ここで線形項の係数は、同期集団に対する $|\omega_i| \leq KZ$ に注意すると高々 $O(KZ)$ の微小量である (条件 II)。これより同期集団の振動子の時間スケールは $O((KZ)^{-1}) \gg 1$ であり、これもまたゆっくりした運動であることに注意しよう。上式を積分し、 $t \gg 1$ で考えることにより初期値による項を落とすと、

$$\delta\psi_i(t) = -\int_{-\infty}^t dt' \frac{d\psi_{i0}(Z(t'))}{dt'} \exp\left\{-\int_{t'}^t dt'' [|KZ(t'')|^2 - \omega_i^2]^{1/2}\right\} \quad (3.4)$$

部分積分の後、(3.2) 式に代入すると、

$$\psi_i(t) = \int_0^\infty dt' \psi_{i0}(Z(t-t')) P(t, t'; \omega_i) \quad (3.5)$$

と書ける。ここで $P(t, t'; \omega)$ は、時刻 t での $\psi_i(t)$ に及ぼされる、それより t' 時間前の $Z(t-t')$ の影響を表すいわば時間平均の重み関数 (積分核) であり、

$$P(t, t'; \omega) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{dt'} \exp\left\{-\int_{t-t'}^t dt'' [|KZ(t'')|^2 - \omega^2]^{1/2}\right\} \quad (3.6)$$

ここで

$$\int_0^\infty dt' P(t, t'; \omega) = 1 \quad (3.7)$$

と得られる。これは各振動子固有の時間スケールである自然振動数 ω_i に依存している。この $P(t, t'; \omega)$ を $t' > 0$ において無視できないことが、非断熱効果である。 $P(t')$ の時間スケール (その i 依存性も考え、これを τ_i とする) は、以上の導出からもわかるように $\psi_i(t)$ の時間スケール $O((KZ)^{-1})$ に他ならず、やはり大きいものである。しかし、これは非断熱効果が大きく摂動的に取り扱えないことを意味する訳ではない。 Z の臨界減速は、もう一つの微小量 ϵ によるものであり、更に大きな時間スケールとなる条件下で考えることができるからである。このように $Z(t)$ が $P(t')$ より更に遅い場合、次のような二つの単純化を更に行なうことができる。第一に、(3.6) 式の P を $t' \leq O(\tau_i)$ において考えると、 t' 時間にわたって積分される $Z(t')$ は、その間の変化を無視し最終時刻 $Z(t)$ での値で近似できる。こ

のとき

$$\begin{aligned} P(t, t'; \omega_i) &\simeq -\frac{d}{dt'} \exp\left\{-\left[|KZ(t)|^2 - \omega_i^2\right]^{1/2} t'\right\} \\ &= \left[|KZ(t)|^2 - \omega_i^2\right]^{1/2} \exp\left\{-\left[|KZ(t)|^2 - \omega_i^2\right]^{1/2} t'\right\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} P(t'; Z(t), \omega_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

となり、 t 依存性は $Z(t)$ のみによることになる。第二は、(3.5) 式に対する近似である。ここでも P による積分に有効なのは $t' \leq O(\tau_i)$ の範囲であることを利用する。その間の Z の変化を無視すると断熱近似になってしまうが、変化量が微小であることより、 $Z(t-t') \simeq Z(t) + \delta Z(t-t')$ に対して

$$\psi_{i0}(Z(t-t')) \simeq \psi_{i0}(Z(t)) + \frac{d\psi_{i0}}{dZ} \Big|_{Z=Z(t)} \cdot \delta Z(t-t')$$

と線形近似を行なう。すると (3.5) 式の右辺は

$$\begin{aligned} \text{r.h.s.} &\simeq \int_0^\infty dt' \left(\psi_{i0}(Z(t)) + \frac{d\psi_{i0}}{dZ} \Big|_{Z=Z(t)} \cdot \delta Z(t-t') \right) P(t, t'; \omega_i) \\ &= \psi_{i0}(Z(t)) + \frac{d\psi_{i0}}{dZ} \Big|_{Z=Z(t)} \cdot \int_0^\infty dt' \delta Z(t-t') P(t, t'; \omega_i) \\ &\simeq \psi_{i0}\left(Z(t) + \int_0^\infty dt' \delta Z(t-t') P(t, t'; \omega_i)\right) \\ &= \psi_{i0}\left(\int_0^\infty dt' Z(t-t') P(t, t'; \omega_i)\right) \end{aligned}$$

と変形できる。 $P(t, t'; \omega_i)$ に関する第一の近似と合わせると、(3.5) 式は、

$$\psi_i(t) \simeq \psi_{i0}\left(\int_0^\infty dt' Z(t-t') P(t'; Z(t), \omega)\right) \quad (3.9)$$

となる。ここで、 $P(t'; Z(t), \omega)$ による t' 平均を

$$\overline{\mathcal{F}(t)}^i \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt' \mathcal{F}(t-t') P(t'; Z(t), \omega_i) \quad (3.10)$$

で定義する（添字 i は ω_i 依存性を示す）と、これは最終的に

$$\psi_i(t) \simeq \psi_{i0}\left(\overline{\mathcal{Z}(t)}^i\right) \quad (3.11)$$

$$= \overline{\Theta(t)}^i + \sin^{-1} \frac{\omega_i}{K|\overline{\mathcal{Z}(t)}^i|} \quad (3.12)$$

と表すことができる。すなわち各振動子は非断熱的な効果として、固有の時間にわたる平均量 $\overline{\mathcal{Z}(t)}^i$ をあたかも各時刻 t での秩序変数として感じ、それに追従しているように振舞うと見ることができる。

重み関数 $P(t'; Z(t), \omega_i)$ は ω_i 依存性を持つため、巨視変数への縮約はできない。しかしここで、特に $Z(t)$ の時間平均に対しては、 $P(t'; Z(t), \omega_i)$ に代わる適当な関数 $\Pi_s(t'; Z(t))$ を用いて、

$$\overline{\mathcal{Z}(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt' Z(t-t') \Pi_s(t'; Z(t)) \quad (3.13)$$

ととることにより、

$$n_s(\psi, t) \simeq n_{s0}(\psi; \overline{\mathcal{Z}(t)}) \quad (3.14)$$

という表式を得ることができる。実際このような関数 $\Pi_s(t'; Z(t))$ は

$$\begin{aligned} \Pi_s(t'; Z(t)) &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 dy \sqrt{1-y^2} P(t'; Z(t), KZ(t)y) \\ &= \frac{4}{\pi} KZ(t) \int_0^1 dy (1-y^2) \exp\{-KZ(t)\sqrt{1-y^2}t'\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

で与えられる*。 P と同様

$$\int_0^\infty \Pi_s(t'; Z) dt' = 1 \quad (3.16)$$

を満たすこの関数は、次節で見る線形応答関数として理解できることがわかる。式 (3.13) で積分形によって定義されている $\overline{\mathcal{Z}(t)}$ に対して、微分形により書き直すこともできる。式 (3.13) の右辺を部分積分し、

$$\overline{\mathcal{Z}(t)} = Z(t) + \int_0^\infty dt' \frac{dZ(t-t')}{dt'} \Theta_s(t'; Z(t)) \quad (3.17)$$

ここで Π_s の積分である Θ_s ;

$$\Theta_s(t'; Z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t'}^\infty \Pi_s(t''; Z) dt'' \quad (3.18)$$

$$\Theta_s(0; Z) = 1 \quad (3.19)$$

は、次節での線形緩和関数と考えられる。式 (3.8), (3.15), (3.18) より、 $P(t')$, $\Pi_s(t')$ ゆえにまた $\Theta_s(t')$ での t' 依存性は KZt' というスケーリング表式で入っていることから、その時間スケールは $O((KZ)^{-1})$ であって

$$\int_0^\infty \Theta_s(t'; Z) dt' = O((KZ)^{-1})$$

となる。これらより、式 (3.17) の積分内で $\Theta_s(t')$ より時間スケールの長い $Z(t')$ に対して Markov 近似を行なうことで、

$$\overline{\mathcal{Z}(t)} = Z(t) - \frac{dZ(t)}{dt} \cdot O((KZ)^{-1}) \quad (3.20)$$

という表式で求めることができる。式 (3.14) より、

$$Z_s(t) \simeq S(\overline{\mathcal{Z}}) \quad (3.21)$$

*付録 A 参照

となるが、上式(3.20)を用いると、

$$\begin{aligned} Z_s(t) &\simeq S\left(Z(t) - \frac{dZ(t)}{dt} \cdot O((KZ)^{-1})\right) \\ &\simeq (1+\epsilon)\left(Z(t) - \frac{dZ(t)}{dt} \cdot O((KZ)^{-1})\right) - \beta Z^2 Z + o(Z^3) \end{aligned}$$

と微分形で得られる。

$Z(t)$ の時間発展方程式を得るためには、更に非同期集団からの寄与、 $Z_d(t)$ を求める必要があるが、ここで次の点に気が付く。 $Z(t)$ の時間スケールに、 $O((KZ)^{-1})$ という大きな係数が存在することである。 $Z(t)$ は遅い変数であるという条件下で議論を進めてきたが、それは臨界点近傍； $\epsilon \ll 1$ に依るものである。得られた表式では、更に $KZ \ll 1$ に依るものが見られる。この起源は、 P, Π_s, Θ_s の時間スケール $O((KZ)^{-1})$ に他ならない。ここで例えば式(3.10)；

$$\overline{Z(t)}^i = \int_0^\infty dt' Z(t-t') P(t'; Z(t), \omega_i)$$

で定義される、関数 $P(t'; Z(t), \omega_i)$ による t' 平均を、また次のように見ることもできる。上式においては、右辺の $Z(t')$ の時間変化が、 P を介して左辺の時刻 t における $\overline{Z(t)}$ を決め、それにより $Z(t)$ 時間発展則を与えている。このように P 、よって同様に Π_s, Θ_s は、いわば場 $Z(t')$ の変化に対する応答を与える関数であり、これらの時間スケールこそが、 $Z(t)$ の時間スケールを決めているわけである。ところがその時間スケールが、 $O((KZ)^{-1})$ として場 $Z(t')$ 自身の値に依存するならば、その応答は線形ではないことを意味する。そこで系の応答特性すなわち線形応答の存否を次節で求めることにしよう。

3.2 定常解への緩和特性

3.2.1 線形緩和関数

線形緩和領域の有無を調べるため、本節では先ず、平均場結合集団という枠を一旦離れよう。つまり self-consistent な内部場として共通の $Z(t)$ を感じる集団ではなく、外部から与えられる場 $H(t)$ 中に、相互結合のない N 個の振動子

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = \omega_i - H \sin \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.22)$$

が置かれているとしよう。外場 H のもとでの Z の平衡値を $Z = S(H)$ と書くことにし、この平衡値への緩和を、 $H + h(t)$, $h \ll 1$ と摂動を加えることにより求める。線形緩和を定式化する為、規格化された線形応答関数 $\Pi(t)$ 及び線形緩和関数 $\Theta(t)$ を以下のように定義しておく；

$$Z(t) - S(H) = \int_{-\infty}^t dt' M(t-t') h(t'), \quad (3.23)$$

$$\Pi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{S'(H)} M(t), \quad (3.24)$$

$$\Theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^\infty dt' \Pi(t') \quad (3.25)$$

(ただしここで定義された関数は、前節の $\Pi_s(t), \Theta_s(t)$ とは一応区別する)。

$h(t)$ が、その時間平均を与える関数 $\Pi(t)$ より十分ゆっくりと変化するとき、 $\Pi(t')$ の時間スケール内では $h(t)$ に対する Markov 近似を行ない、すなわち $h(t-t') \simeq h(t) - t' \cdot \frac{dh(t)}{dt}$ という Taylor 展開による線形近似により

$$\begin{aligned} \text{r.h.s. of Eq.(3.23)} &= S'(H) \int_0^\infty dt' h(t-t') \Pi(t') \\ &\simeq S'(H) \int_0^\infty dt' \left\{ h(t) - t' \cdot \frac{dh(t)}{dt} \right\} \Pi(t') \\ &= S'(H) \left\{ h(t) - \frac{dh(t)}{dt} \int_0^\infty dt' \Theta(t') \right\} \\ &= S'(H) \left\{ h(t) - \frac{dh(t)}{dt} \gamma^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

ここで γ^{-1} は、緩和関数 $\Theta(t)$ の積分

$$\gamma^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt' \Theta(t') \quad (3.27)$$

として定義した。 γ の物理的意味は次のように理解できる。前節のように、平均場結合による self-consistent な内部場を考えたとする。すなわち $H(t) = KZ(t)$ 。このとき定常解 $Z = Z_0$ への緩和を、それからのずれ

$$\eta(t) \stackrel{\text{def}}{=} Z(t) - S(KZ_0) \quad (3.28)$$

により求めてみよう。この系では式(2.20)により与えられる $S(KZ_0)$ の具体的表式[†]から、臨界点近傍 $\epsilon \ll 1$ では

$$S'(H)h(t) = \begin{cases} (1+\epsilon)\eta(t) & (Z_0 \equiv 0) \\ (1-2\epsilon)\eta(t) & (Z_0 = \sqrt{|\epsilon/\beta|}) \end{cases} \quad (3.29)$$

となり、これを式(3.26)に入れると、

$$\frac{d\eta}{dt} = \begin{cases} \gamma\epsilon\eta & (Z_0 \equiv 0) \\ -2\gamma\epsilon\eta & (Z_0 = \sqrt{|\epsilon/\beta|}) \end{cases} \quad (3.30)$$

と得られる。これは、ずれ $\eta(t)$ が減衰係数 $\propto \gamma \cdot \epsilon$ により指数関数的に緩和することを示している(ただし、 $Z_0 \equiv 0$ と $Z_0 = \sqrt{|\epsilon/\beta|}$ に対する γ は異なるものであることに注意)。このように $h \rightarrow 0$ 極限で有限値として $\gamma^{-1} = \text{const}$ が得られれば、それは線形緩和の存在を

[†]ここで S の定義は、式(2.19)とは定数 K だけ異なることに注意

意味し、その場合上式 (3.30) は $c = 0$ における両定常解の安定性の交替を示すことになる。しかしながら、前節で得られた同期集団に対する $\Theta_s(KZt)$ (前章で与えた Θ_s の定義とは異なるため、一応ここでの Θ とは区別したが、実際には同期集団に対する緩和関数に他ならない) というスケール表示式では、 $\gamma^{-1} \propto \frac{1}{KZ}$ ($Z \rightarrow 0$) で発散する。それにも関わらず線形緩和が存在するという、一見矛盾する機構が以下で明らかになる。

先の式 (3.23) は、特に $h(t)$ として次のもの；

$$h(t) = h \cdot \theta(-t), \quad 0 < h \ll 1$$

$$\text{ただし、Heviside 関数 } \theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

を選ぶと、以下のように非常に簡単な表式となる；

$$Z(t) = \begin{cases} S(H) + h \int_t^\infty dt' M(t') & (t > 0) \\ S(H) + h \int_0^\infty dt' M(t') & (t < 0) \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\simeq \begin{cases} S(H) + h S'(H) \Theta(t) & (t > 0) \\ S(H + h) & (t < 0) \end{cases} \quad (3.32)$$

これを解くことにより、 $\Theta(t)$ の具体的な表式が得られる。次にこれを $H = 0$ と $H \neq 0$ の場合に分けて求める。

3.2.2 $H = 0$; 非同期解への緩和

引き込みが起こっていない定常解 (2.23) への緩和に相当するこの場合には、完全に解析的な取り扱いが可能である。それは、摂動 $h > 0$ により同期している $t < 0$ において、振動子をその自然振動数によって同期集団と非同期集団の二つに分けることができるからである。更に $S(0) = 0, S'(0) \simeq K^{-1}$ より、

$$\Theta(t) = h^{-1} K Z \quad (3.33)$$

となるため、 Z 同様 $\Theta(t)$ も二つの集団からの寄与に分けることができる。それぞれを求めてみよう。

同期集団 これは、 $|\omega_i| < h$ により $t < 0$ において同期している振動子から構成される。その解は、 $\phi(t) = \omega t + \sin(\frac{\omega}{h})$ であることより

$$\begin{aligned} Z_s(t) &= \int_{|\omega| \leq h} d\omega g(\omega) \exp(i\phi(t)) \\ &\simeq 2g(0)h \int_0^1 dx \cos(htx + \sin^{-1} x) \end{aligned}$$

よってまた

$$\Theta_s(t) \simeq 2Kg(0) \int_0^1 dx \cos(htx + \sin^{-1} x)$$

となる。それゆえ明らかに $\forall t < \infty$ に対して、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Theta_s(t) \simeq \frac{K}{K_c} \simeq 1 \quad (3.34)$$

となるのがわかる。ここで緩和関数 Θ_s は、前節のそれと同様 $\Theta_s(th)$ というスケール表式を示している。注意せねばならないのは、これは同期集団のみの寄与であり、積分 $\gamma^{-1} = \int_0^\infty dt' \Theta(t')$ は、あくまで $\Theta(t) = \Theta_s(t) + \Theta_d(t)$ の和の後の行なわねばならず、 $\int_0^\infty dt' \Theta_s(t')$ の発散では線形緩和の存在を否定できない。更にまた、 $h \rightarrow 0$ 極限での積分を求めていることより、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0}$ の順序で極限をとらねばならない。これは $t \ll h^{-1}$ で起こる緩和過程を考えていることに相当する。

非同期集団 自然振動数 $|\omega_i| > h$ の振動子より構成されるこの集団は、 $h \neq 0$ の存在下でも集団振動に引き込まれることなく独立に回転している。そのため $t = 0$ における状態は、外場 h のもとでの平衡位相分布によって与えられることを考慮すると

$$\begin{aligned} Z_d(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| > h} d\omega g(\omega) \sqrt{\omega^2 - h^2} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\exp i\phi}{|\omega - h \sin(\phi - \omega t)|} \\ &= -2 \int_h^\infty d\omega g(\omega) \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - h^2}}{h} \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

より、 $\forall t < \infty$ に対して $h \rightarrow 0$ の極限で、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \Theta_d(t) &= -K \int_0^\infty d\omega g(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ &= -K \int^t dt' G(t') \end{aligned} \quad (3.35)$$

と、自然振動数の分布関数 $g(\omega)$ の Fourier 変換 $G(t)$ ；

$$G(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty d\omega g(\omega) \cos \omega t \quad (3.36)$$

を用いて表される。更にこれは

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \Theta_d(t) &= -K \int_0^\infty d\omega g(\omega) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ &= -\frac{\pi}{2} K \int_0^\infty d\omega g(\omega) \delta(\omega) \\ &= -\frac{K}{K_c} \\ &\simeq -1 \end{aligned} \quad (3.37)$$

となり、先の式 (3.34) とあわせて、自明の公式

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \Theta(t) = 0$$

が満たされていることが確かめられる。

以上より、線形緩和関数に対する次の表式が得られる；

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Theta(t) = K \left(K_c^{-1} - \int^t dt' G(t') \right) \quad (3.38)$$

この $\int_0^\infty dt \lim_{h \rightarrow 0} \Theta(t) < \infty$ により、線形な緩和領域の存在が示されたことになる。ここで

$$\int_0^\infty dt \lim_{h \rightarrow 0} \Theta(t) = \int_0^\infty dt \lim_{h \rightarrow 0} \Theta_s(t) + \int_0^\infty dt \lim_{h \rightarrow 0} \Theta_d(t)$$

において、右辺の第一項、第二項とも発散する量であることは注目すべきことである。 $\Theta_s(t)$ の時間スケールは遅いものであり、他方 $\Theta_d(t)$ はすばやく ($O(1)$ で) 緩和することで系全体が平衡状態に達することに寄与しているからである。これは本系特有の興味ある点である。

また上式を用いると、いくつかの典型的な分布 $g(\omega)$ に対する線形応答関数や減衰係数の具体的表式が得られ、それにより平均場結合系での $Z_0 \equiv 0$ の定常解への指数緩和型を書き下すことができる。上の表式 (3.38) を、式 (3.23) で与えられる規格化されていない線形応答関数 $M(t)$ について書き換えると

$$\begin{aligned} M(t) &= S'(0)\Pi(t) \\ &= K^{-1} \left(-\frac{d}{dt} \Theta(t) \right) \\ &= -K^{-1} \frac{d}{dt} \left(K \left(K_c^{-1} - \int^t dt' G(t') \right) \right) \\ &= G(t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

これを $h(t) = KZ(t)$ とともに式 (3.23) に代入すると

$$Z(t) = K \int_0^\infty dt' G(t') Z(t-t') \quad (3.40)$$

特に $Z(t) \propto \exp(\lambda t)$ とおくと

$$1 = K \int_0^\infty dt G(t) \exp(-\lambda t) \quad (3.41)$$

となる。これらから以下のように求めることができる。

• Lorentz 分布；

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{\pi} \frac{a}{\omega^2 + a^2} \\ M(t) &= \frac{K}{2} \exp(-at) \\ \lambda &= \frac{K}{2} - a \end{aligned}$$

$K_c = 2a$ より、

$$\lambda = \frac{K - K_c}{2} = \frac{K_c}{2} \epsilon = a \epsilon = \begin{cases} < 0 & (\epsilon < 0) \\ > 0 & (\epsilon > 0) \end{cases}$$

• Gauss 分布；[†]

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}\right) \\ M(t) &= \frac{K}{2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} t^2\right) \\ 1 &= \frac{K}{\sqrt{2}\sigma} \exp\frac{\lambda^2}{2\sigma^2} \text{Erfc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned}$$

$K_c = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma$ より、

$$\lambda \simeq \text{positive const} \times \epsilon = \begin{cases} < 0 & (\epsilon < 0) \\ > 0 & (\epsilon > 0) \end{cases}$$

• 一様分布；

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|\omega| \leq a) \\ 0 & (|\omega| > a) \end{cases} \\ M(t) &= \frac{K}{2a} \frac{\sin at}{t} \\ \lambda &= a \cot \frac{2a}{K} \end{aligned}$$

$K_c = 4a/\pi$ より、

$$\lambda = a \cot\left(\frac{\pi K_c}{2K}\right) = a \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\epsilon}\right) = \begin{cases} < 0 & (\epsilon < 0) \\ > 0 & (\epsilon > 0) \end{cases}$$

• デルタ分布；

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \delta(0) \\ M(t) &= \frac{K}{2} \\ \lambda &= \frac{K}{2} \end{aligned}$$

この場合、明らかに $K_c = 0$.
以上では非同期解 $Z_0 = 0$ について、いずれも

$$\lambda = \begin{cases} < 0 & ; \text{安定} & (\epsilon < 0) \\ > 0 & ; \text{不安定} & (\epsilon > 0) \end{cases}$$

となり、非同期解 $Z_0 = 0$ の線形安定性が実際に $\epsilon = 0$ において交替することが示されたわけである。

[†]誤差関数； $\text{Erfc}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^\infty \exp(-t^2) dt$

3.2.3 $H \neq 0$; 同期解への緩和

同期解 (2.24) への緩和に相当する場合の振舞いはより複雑である。先と異なり、 $t > 0$ で外場 h がなくなった後も、集団振動を行ない $S(H) \neq 0$ を形成する同期集団が存在する。このように三つの集団がある点を除けば、先と同様 Θ をそれぞれからの寄与に分けて考えることができる。

同期→非同期集団 自然振動数 $H < |\omega| \leq H + h$ を持つ振動子は、時刻 $t = 0$ において引き込みからはずれ、独立回転を始める。これの初期条件 $\phi(0)$ のもとでの解 $\phi(t > 0)$ を解くことは容易であるが、その必要はない。というのは、この集団からの寄与は

$$\Theta_{s-d}(t) = O(h^{3/2})$$

となり無視できるからである。この評価は、 $O(h^1)$ が振動子の数、更に $O(h^{1/2})$ はそれらによる Z への寄与から得られる。

同期→同期集団 先に述べたこの集団は $\omega \leq H$ の振動子から成り、 h が取り除かれる時刻 $t = 0$ での初期点 $\phi(0) = \sin^{-1}(\frac{\omega}{H+h})$ から、新たな安定平衡点 $\phi(t = \infty) = \sin^{-1}(\omega/H)$ へと移動することになる。これを近似的に解くことにより、 $\Theta(t)$ への寄与は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Theta_{s-s}(t) \simeq 2K \int_0^1 dx g(Hx) \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \exp(-H\sqrt{1-x^2}t) \quad (3.42)$$

となり、 $H \neq 0$ の場合には指数関数的に減衰することがわかる。

非同期→非同期集団 早い振動数 $|\omega| > H + h$ を持つ振動子は回転を続けるが、 $H \neq 0$ の場合には一様回転ではない。それゆえこの集団の解析的な取り扱いが困難である。この中で、特に早い振動子 $|\omega| \gg H$ に対しては、 $H = 0$ の場合に非同期集団について得られたのと同様に次式が得られる；

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \Theta_{d-d}(t) &= K \int_{\omega \ll H} d\omega g(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ &= \begin{cases} -K \int^t dt' G(t') & (t \ll H^{-1}) \\ 0 & (t \gg H^{-1}) \end{cases} \end{aligned}$$

しかしながら、 $H + h$ とほぼ同じオーダーの振動数 ω の振動子の影響は当然無視できず、上記の $\lim_{h \rightarrow 0} \Theta_{d-d}(t)$ に振動成分をもたらずと考えられる。よってこれを計算機シミュレーションにより求めた。Fig.2 に $\Theta_{d-d}(t)$ を $\Theta_{s-s}(t)$ とともに示す ($\Theta_{s-d}(t)$ は殆んど 0 となり横軸と重なるため図中には表示していない)。

図では、振動する $\Theta_{d-d}(t)$ が見られ、それゆえ $H = 0$ の場合と比較して、三集団による寄与の釣り合いは不完全である。しかしこの場合にも緩和関数 Θ が発散することなく得られ、線形緩和領域の存在が確かめられる。ここで $H \neq 0$ に対しても同じ Θ を用いたが、こ

れは先に求めた $H = 0$ での緩和関数とは当然異なるものであり、具体的な解析的表式は得られていない。

以上で見た線形緩和は、 $0 < h \ll 1$ の外場がステップ入力的に加わった場合に、系が既に達成していた平衡状態から新たな平衡状態へと緩和する過程としてその存在が確認された。線形緩和関数を求めるために、ここでは平均場結合系を離れて議論を進めたが、これを平均場結合による振動子集団に対応させて考えると、臨界点近傍において、平衡状態に十分近付いた系がゆっくりと平衡に達する過程を記述している。すなわち臨界減速により系の秩序変数 $Z(t)$ は遅い変数となり、ミクロな自由度である個々の振動子の運動は大部分がこれに断熱的に追従することによりその自由度を消去することができる。いわば slow manifold に漸近するまでの過渡的時間 $O(1)$ の後の、slow manifold ごく近傍での $Z(t)$ の $O(\epsilon)$ でのゆっくりしたダイナミクスを考えることで、巨視変数 $Z(t)$ のみで閉じたダイナミクスの記述が可能になるのである。

このように、非同期解・同期解のいずれに対しても $h \ll 1$ における線形緩和領域の存在が確認され、式 (3.30) が示す安定性は、

• 非同期解

$$Z_0 \equiv 0 ; \quad \begin{cases} \text{安定} & (\epsilon < 0) \\ \text{不安定} & (\epsilon > 0) \end{cases} \quad (3.43)$$

• 同期解

$$Z_0 = \sqrt{|\epsilon/\beta|} ; \quad \begin{cases} \text{不安定} & (\epsilon < 0) \text{ for } \beta < 0 \\ \text{安定} & (\epsilon > 0) \text{ for } \beta > 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

となる。

3.3 結合系での緩和過程；クエンチ系に見る緩和

前節で得られた緩和過程を結合系で見ることができる例として、ここでは結合強度 K をステップ的に変化させてみよう。特に、 $\epsilon < 0$ により非同期解が安定な相（以下ではこれを無秩序相と呼ぶ）での平衡状態にある系に対して、時刻 $t = 0$ に $\epsilon > 0$ へと変化させる場合を考える。いわば系を、同期解が安定な秩序相にクエンチした場合に起こる動的過程を見るわけであるが、先の外場中での線形緩和と同様の考察ができる。

3.3.1 秩序変数の緩和

初期には無秩序相での平衡状態にある系に対して、 $K > K_c$ を加える。そのとき新たな平衡として出現する集団振動状態へと緩和する過程は、次のような三つの段階に大きく分けられている。それにあつて、ここでもやはり振動子を同期集団と非同期集団の二つに分離しておく。前者は自然振動数が小さいために新たに達成される同期平衡状態において集団振動に引き込まれる（よってすなわち、それらを形成する）振動子群であり、後者はそれ以外の振動子から成っている。

第一段階：非同期解の不安定性（非同期集団） $t=0$ で $\epsilon > 0$ の結合強度を与えられた系において、位相分布が $-\infty < t < 0$ での平衡状態であった一様分布からわずかにずれ、微小振幅の秩序変数 $Z(t=0) \ll 1$ が生じたとする。このわずかなずれ $Z(t)$ の $t \ll 1$ における時間変化を考えてみる。遅い時間スケールを持つ同期集団は、 $t \ll 1$ では $Z(t)$ への寄与をもたらすことはできない。他方非同期集団には早い振動子も存在する。その結果、前節の式 (3.40) と同様の考察から、

$$\begin{aligned} Z(t) &= K \int_0^t dt' G(t') Z(t-t') \\ &\simeq K Z(0) \int_0^t dt' G(t') \end{aligned} \quad (3.45)$$

となるのがわかる。これは、系にあたかも外場 $K R(0)$ が加えられたと考えても理解できる。 $\int_0^t dt' G(t')$ が通常的时间スケールで K_c^{-1} に漸近することから、 ϵ の正負による $Z_0 \equiv 0$ の安定性の交替は、この非同期集団によっているということが出来る。

第二段階：ずれの成長（同期集団） 上記の不安定性により増幅したずれは、次に同期集団の寄与を導く。第一段階で非同期集団の中の早い振動子により線形不安定性を示した Z は、成長するに従い非同期集団中のより遅い振動子にも次々と影響を与える。つまり、より強まった外場によってより多数の振動子が $Z \neq 0$ の形成に寄与し（これが不安定性に他ならない）、そしてこの過程が遅い振動子から成る同期集団にも進行する。このように早い振動子の存在の為に、遅い振動子による秩序形成が早められることになる。

同時にこの第二段階で、非同期集団の Z への寄与 Z_d が減少に向かうことになる。つまり第一段階での非同期集団による Z の成長は、非摂動系の一様分布から得られたものであった。 Z が大きくなるにつれ、一様分布からのずれは無視できないものとなる。場 Z が存在する場合の平衡分布は、 Z の方向に対して垂直に歪んだ形をしており（式 (2.17) 参照）、同期集団をも含んだ Z の成長はこの歪みを増すことになる。これは前節の '非同期→非同期集団' の緩和過程に見られるのと同様の機構により安定に続くことになる。非同期集団の位相分布の歪みの方向の変化は、 Z_d が減少することを意味する。それゆえこの第二段階において、 Z を形成する主役は非同期集団から同期集団へと移行することになる。

第三段階：平衡への接近（同期集団） 第一・二段階は合わせて $\epsilon > 0$ における $Z_0 \equiv 0$ の不安定性を表している。 $Z = 0$ から離れた後は、同期集団の各振動子はそれぞれ唯一の安定平衡点に単調に近づくことで、 $Z \neq 0$ を形成していく。他方非同期集団は $Z \neq 0$ により一般には振動しながら $Z_d \rightarrow 0$ となる。このようにして self-consistent 方程式 $Z = S(Z)$ の唯一の安定定常解である、同期解 $Z = Z_0 = \sqrt{|\epsilon/\beta|}$ に漸近することになる。

これらを示す計算機シミュレーション結果を、Fig.3 にあげる。

3.3.2 位相分布関数の緩和

上記では、巨視変数として秩序変数 Z の緩和過程を考えたが、そこでも見たように系のより微視的な状態を示す位相分布関数についても同様である。非同期集団の一様分布に一旦微小ずれが生じると、これが $O(1)$ の時間スケールで安定に成長し、微小量として無視できなくなると今度はそれとは垂直な方向への歪みが生じる。他方同期集団は、 $O((KZ)^{-1})$ でのゆっくりした応答しかできないが、非同期集団が最初に作り上げた場 Z に駆動されて、安定かつ単調に各振動子が新たに持つ固定点で形成される平衡状態へと向かう。それゆえ全系の位相分布関数の平衡状態は、最初は非同期集団により、そしてその後は同期集団により形成されるものである。すなわち系全体の緩和の時間スケールは非同期集団が決めることになる。ただしこの緩和は釣合いによる見かけ上のものであり、より微視的なレベルでは、同期集団のもつ長い時間スケールによって平衡状態が達成されるわけである。

分布関数の緩和過程を、関数形を書き下すことで明確に見るには、ここでもまた外場下の系を考えればよい。すなわち一定外場 $H > 0$ を時刻 $t=0$ において切った時、既に見たように、初期の歪んだ位相分布から一様分布への緩和を得ることができる。この場合にもやはり二つの集団が釣合うことにより、 $t \simeq O(1)$ において最終平衡状態である一様分布が達成されることが、次の式より示される；

$$\begin{aligned} n_d(\phi, t) &\simeq \frac{1}{\pi} \int_H^\infty d\omega g(\omega) \frac{(\omega + H \cos \phi \sin \omega t) \sqrt{\omega^2 - H^2}}{(\omega + H \cos \phi \sin \omega t)^2 - (H \sin \phi \cos \omega t)^2} \\ n_s(\phi, t) &\simeq \begin{cases} g(0) H \frac{\cos y}{1 + H t \cos y} & (|\phi| \leq \frac{\pi}{2} + H t) \\ 0 & (|\phi| > \frac{\pi}{2} + H t) \end{cases} \\ &\quad \text{ただし、} \phi = y + H t \sin y \end{aligned} \quad (3.46)$$

Fig.4 にこの数値計算結果を示す。

このように系の巨視的ダイナミクスは非同期集団が支配していることが、秩序変数 $Z(t)$ のみでなく、位相分布 $n(\phi, t)$ についても見られた。同期集団における遅いダイナミクスの存在にもかかわらず、前者によりまず系全体としての平衡状態を達成する。すなわち先に前者が後者による遅い応答を打ち消すように働き、その後それぞれが遅いダイナミクスにより平衡に達することがわかる。

3.4 まとめと議論

Self-consistent 方程式の解として得られた秩序変数 Z の定常解の安定性を解析した。それにあたっては、臨界点近傍であることと、定常解近傍であることの二つの条件下で考えた。非同期解 $Z_0 \equiv 0$ に対しては解析的表式により、 $K < K_c$ では線形安定、 $K > K_c$ では線形

不安定であることが示せ、同期解 $Z_0 \neq 0$ 出現の分岐点として得られていた $K = K_c$ において、実際にその安定性が変化することがわかった。線形領域での $Z(t)$ の発展方程式

$$\frac{dZ}{dt} = \gamma c Z$$

における定数 γ

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt' \Theta(t') \\ &= \int_0^\infty dt' K \left(K_c^{-1} - \int^t dt' G(t') \right) \end{aligned}$$

を数例の分布関数 $g(\omega)$ に対して具体的に求めた。同期解 $Z_0 \neq 0$ に対しても数値的に線形緩和の存在が認められ、それにより $K = K_c$ における両定常解の線形安定性の交替が通常分岐構造から予想されるとおり示された。また簡単な適用例として、結合定数を $K < K_c$ から $K > K_c$ に急激に変えた (クエンチした) ときに系が示す緩和も記述することができた。これらにより、次のような非自明の機構が明らかになった。 $Z \neq 0$ に寄与する振動子である同期集団とそうでない非同期集団の二つに各振動子 (すなわち微視的な各自由度) を分けた時、各集団は線形緩和領域を持たず時間スケールが $O((KZ)^{-1})$ の遅い変数であるが、両者が釣合うことによって系全体としての巨視状態の時間スケールは $O(1)$ となり線形応答を示す。この機構は、秩序変数の $Z_0 \equiv 0$ 及び $Z_0 \neq 0$ への緩和過程に共通に見られ、また位相分布関数に対しても同様であった。

ここで行なった解析の性質を理解する為に、同様のダイナミクスを扱った研究である Strogatz らの方法 [18] と比較・検討する形で論じよう。

Fokker-Planck 方程式を用いた方法 (参考文献 [18])

Strogatz らは、同じ平均場結合系 (2.5) に対して定常解の安定性解析を試み、非同期状態に関して Fokker-Planck 方程式をそのまわりで線形化することで安定性を求めた。まずその方法及び結果を簡単に紹介した上で、本論での結論との相違やその理由を論じる。

自然振動数 ω ごとの位相分布; $\rho(\psi, t, \omega)$, $\int_0^{2\pi} \rho(\psi, t, \omega) d\psi = 1$ を考える。これが従う Fokker-Planck 方程式は、特に雑音のない場合を考えると連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \psi} (\rho v) \quad (3.47)$$

に過ぎない。ここで速度 $v(\psi, t, \omega)$ は

$$\begin{aligned} v(\psi, t, \omega) &= \omega + KZ \sin(\Theta - \psi) \quad , \\ Z \exp(i\Theta) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp(i\psi) \rho(\psi, t, \omega) g(\omega) d\omega d\psi \quad . \end{aligned}$$

このとき非同期定常解を

$$\rho_0(\psi, t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}, \quad \forall \psi, t, \omega \quad (3.48)$$

と定義する。これは $Z_0(t) \equiv 0$ を与える位相分布の一つであることは明らかであり、この ρ_0 の線形安定性が解析された。

$$\rho(\psi, t, \omega) = \frac{1}{2\pi} + \epsilon \eta(\psi, t, \omega)$$

としたとき、ずれ $\eta(\psi, t, \omega)$ の線形成長を $O(\epsilon)$, $\epsilon \ll 1$ のオーダーで求める。このとき式 (3.47) は

$$\begin{aligned} v &= \omega + O(\epsilon) \\ Z &= \epsilon Z_1 + O(\epsilon^2) \\ Z_1 \exp(i\Theta) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp(i\psi) \eta(\psi, t, \omega) g(\omega) d\omega d\psi \quad (3.49) \end{aligned}$$

であることより、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \eta}{\partial \psi} + \frac{K}{2\pi} Z_1 \cos(\Theta - \psi) \quad (3.50)$$

という $\eta(\psi, t, \omega)$ に対する式を与える。そこで $\eta(\psi, t, \omega)$ を Fourier モードに展開すると、 $\int_0^{2\pi} \eta(\psi, t, \omega) = 0$ に注意して

$$\eta(\psi, t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} c(t, \omega) \exp(i\psi) + c^*(t, \omega) \exp(-i\psi) + \eta^+(\psi, t, \omega) \quad (3.51)$$

と書ける。ここで、 $\eta^+(\psi, t, \omega)$ は基本モード以外を含む項である。これを先の式に代入して

$$\begin{aligned} Z_1 \cos(\Theta - \psi) &= 2\pi \Re \left[\left(\int_{-\infty}^\infty c^*(t, \omega) g(\omega) d\omega \right) \exp(-i\psi) \right] \\ &= \pi \left(\int_{-\infty}^\infty c(t, \omega) g(\omega) d\omega \right) \exp(i\psi) + \text{c.c.} \quad (3.52) \end{aligned}$$

を得る。ここで c.c. は前項の複素共役を示す。このように式 (3.50) で相互作用を表す第二項には、基本モード $c(t, \omega), c^*(t, \omega)$ のみが寄与することがわかる。式 (3.51)、(3.52) を (3.50) に代入することにより、 $c(t, \omega), c^*(t, \omega)$ 及び $\eta^+(\psi, t, \omega)$ についての発展方程式が得られることになる。

まず c, c^* については、

$$\frac{\partial c(t, \omega)}{\partial t} = -i\omega c(t, \omega) + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^\infty c(t, \nu) g(\nu) d\nu \quad (3.53)$$

これらの離散スペクトル λ を

$$c(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} b(\omega) \exp(\lambda t) \quad (3.54)$$

としたとき、これは

$$1 = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{g(\nu)}{\lambda + i\nu} d\nu \quad (3.55)$$

の解として得られる。分布 $g(\omega)$ として $\omega = 0$ に関して対称であり、 $\omega \geq 0$ で広義単調減少するものを考えると、これは

$$1 = K \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \nu^2} g(\nu) d\nu \quad (3.56)$$

となり、スペクトル λ は結合強度 K や振動数分布 $g(\omega)$ の関数として与えられる。この解 λ は、高々一つであって

$$\lambda > 0 \quad (3.57)$$

を満たさねばならないことが示されるが、これは系に線形安定には成り得ないことを意味しているのに他ならない。またここで $\lambda \rightarrow 0^+$ をとると、

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \text{r.h.s.} &= K \int_0^{\infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + \nu^2} \right) g(\nu) d\nu \\ &= K \int_0^{\infty} \pi \delta(\nu) g(\nu) d\nu \\ &= K \frac{\pi}{2} g(0) \end{aligned}$$

λ は K について単調増加であることから

$$K > \frac{2}{\pi g(0)} \stackrel{\text{def}}{=} K_c$$

に対して $\lambda > 0$ であることがわかる。これに加えて連続スペクトル

$$\{-i\omega : \omega \in \text{Support}(g)\}$$

が存在する。それゆえ Strogatz らは、 $K > K_c$ では線形不安定、 $K < K_c$ では中立安定であると結論付けている。

同様に $\eta^+(\psi, t, \omega)$ については、

$$\frac{\partial \eta^+(\psi, t, \omega)}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \eta^+(\psi, t, \omega)}{\partial \psi}$$

より、

$$\eta^+(\psi, t, \omega) = \eta^+(\psi - \omega t, \omega)$$

という進行波解の存在がわかる。注意すべきことは、これは近似によるものではなく任意の K に対して系に本来存在する解である。すなわち、

$$\int_0^{2\pi} \exp(i\psi) \rho(\psi, t, \omega) d\psi = 0 \quad \forall \omega \quad (3.58)$$

を満たすとき、異なる振動数 ω を持つ振動子が互いに独立に自由回転を続けることを意味し、これが上記の進行波解に対応する

$$\rho(\psi, t, \omega) = \rho(\psi - \omega t, \omega)$$

となるに過ぎない。これらは (3.58) 式が満たされている限り $\rho(\psi, t, \omega)$ にずれを与えても復元力がないためいずれも中立安定であるが、Strogatz らはこれを先に $K < K_c$ に見られた中立安定解と区別して自明な中立安定解としている。以上を本論での結果と関連付けて考察してみる。

- 本論では巨視変数である秩序変数 $Z(t)$ の安定性を考えた。彼らもそれを主張しているが、実際には自然振動数 ω ごとの位相分布関数 $\rho(\psi, t, \omega)$ に対する線形解析を行なっている。これは本論で行なった同期集団と非同期集団の分離よりはるかに細分化された、微視的な量である。これらの各自由度においては線形緩和領域を持たないこと、それにも関わらず秩序変数 $Z(t)$ は線形緩和を示すことを本論では示した。他方彼らは $\rho(\psi, t, \omega)$ に対する線形解析の結果をそのまま、 ω 積分によって得られる秩序変数 $Z(t)$ の安定性としている。この積分の後にはじめて線形緩和が成立するというのが、本論の結果である。彼らが $Z(t)$ に対して $\lambda < 0$ を得られなかったのは、これに起因すると考えられる。
- 秩序変数 $Z(t)$ と位相分布関数 $\rho(\psi, t, \omega)$ との関係は、

$$Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\psi) \rho(\psi, t, \omega) g(\omega) d\omega d\psi$$

で与えられる。これに、線形化した Fokker-Planck 方程式である (3.53) 式を積分して得られる

$$c(t, \omega) = c(0, \omega) \exp(-i\omega t) + \frac{K}{2} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \exp\{i\omega(\tau - t)\} c(\tau, \omega') g(\omega')$$

を代入することにより、

$$\begin{aligned} Z(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\psi) \eta(\psi, t, \omega) g(\omega) d\omega d\psi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c^*(t, \omega) g(\omega) d\omega d\psi \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega c^*(0, \omega) \exp(i\omega t) g(\omega) \\ &\quad + \frac{K}{2} \int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' c^*(\tau, \omega') g(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) \exp\{i\omega(t - \tau)\} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega c^*(0, \omega) \exp(i\omega t) g(\omega) + K \int_0^t d\tau G(\tau) Z(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.59)$$

という秩序変数 $Z(t)$ についての式を求めることが出来る。この最後の表式を本論の式 (3.40) と比較すると、上式で第一項を落し、第二項において $t \gg 1$ とすると (3.40) 式と完全に一致する。この二つの近似はそれぞれ、初期振幅 $c^*(0, \omega)$ の影響として減衰せずに残る揺らぎを無視し、また十分時間が経ったのちには減衰する初期記憶を無視することに対応する。すなわちこの表式によって、本論で行なった近似がいかなる仮定のもとで成り立つのかを明確にすることが出来るわけである。例えば第一項が

無視できるのは、どのように初期振幅 $c^*(0, \omega)$ をとった場合に対応するのかといった解析は行っていないが、臨界点近傍では殆んど全ての初期振幅 $c^*(0, \omega)$ から統計的には同じ結果が得られることが期待できる。すなわち、臨界減速している秩序変数 Z に対して、第一項は $O(1)$ の時間スケールでの早い揺らぎとして働くとみなせる。この揺らぎとは、無限系 $N \rightarrow \infty$ においても存在する、初期分布によるものであることに注意しよう。臨界点近傍ではまた、第二項において $t \gg 1$ とし、初期状態の記憶を保持している時間 $t \sim O(1)$ での過渡的な振舞いと、それ以降 Z が定常解 Z_0 に十分近付いた後の、いわば slow manifold 近傍でのゆっくりしたダイナミクスを区別して取り扱うことができる。このようにして

- 臨界点近傍 $\epsilon \ll 0$
- 定常解近傍 $Z(t) \simeq Z_0$

の二つの条件のもとで、本論で求めた $Z(t)$ に対する表式 (3.40) を得たわけである。

- $K \neq 0$ においても存在する、 N 個の振動子が互いに相互作用なく自由回転する解は、

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{ \rho(\psi, t, \omega) : \int_0^{2\pi} \exp(i\psi) \rho(\psi, t, \omega) d\psi \equiv 0, \quad \forall \omega \}$$

に含まれる。ここで、各 ω について $\rho(\cdot, \cdot, \omega)$ の関数形を決めるとそれらは相空間内での N 次元トーラスであり、Fokker-Planck 方程式に対する自明な不変多様体となっている。このように S を構成する不可算無限個の N 次元トーラスは、さらに不可算無限個の解軌道によって稠密に埋められている。そこでの各解軌道は、全振動子が自然振動数 ω により独立に自由回転しているもので、全て中立安定で互いに乗り移る。このような N 次元トーラス上での摂動、および S のなかで $\rho(\cdot, \cdot, \omega)$ を連続的に変えるような、つまり S 内での摂動に対しては、系は中立安定であってこれを彼らは自明な中立安定解と呼んだ。他方、基本モード $c(\psi, t, \omega)$ に対する連続スペクトル $\{-i\omega : \omega \in \text{Support } g\}$ が示す中立安定性は非自明なものとして区別された。つまりこれが S を離れた摂動に対する安定性を示すと考えられた。それに対して、本論では $Z = 0$ の安定性を求めた。 $Z = 0$ は相空間において S を含むはるかに広い領域である。 $Z = 0$ への緩和とは、それゆえ S への緩和とも区別されるものである。実際本論で示されたのは、 $Z = 0$ への緩和が達成された後にゆっくりと達成される S 上の安定定常解への緩和である。臨界点近傍では、 $O(1)$ の時間スケールでの過渡的時間の後に遅い変数 $Z(t)$ のダイナミクスを見ることができ、まず $O(\epsilon)$ で $Z = 0$ へと緩和し、次に $O((KZ)^{-1})$ で S 上の安定定常解へと緩和する。彼らが示した線形解析による中立安定性、すなわち線形安定性の不在は、この S の安定性に関してであって、これが $O((KZ)^{-1})$ と秩序変数 Z 自身に依存した時間スケールを持ち線形緩和を示さないという本論での結果をまさに示している。

- ω 積分により線形緩和が回復される状況をより直観的に理解してみる。例えば次のような自明な例において、 $\rho(\psi, t, \omega)$ に生じた歪みが、 ω 積分した関数 (ここでは便宜

上 $P(\psi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\psi, t, \omega) g(\omega) d\omega$ と定義しておくが、これが本論での位相分布関数 $n(\psi, t)$ に他ならない) において回復されることを見ることができる。

非結合系 $K = 0$ を考えてみよう。この場合、全ての位相分布 $\rho(\psi, t, \omega)$ は自明に中立安定であるが、 $P(\psi, t)$ に関しては何が言えるだろうか。各 ω において、一様分布 $\rho_0(\psi, t, \omega) \equiv \frac{1}{2\pi}$ 、 $\forall \psi, t, \omega$ に対して、わずかに歪みを与えたとする。そのとき歪みを $\rho(\psi, t, \omega)$ でみると角速度 ω で回転するだけで復元力は全くない。しかしながら $P(\psi, t)$ では、異なる ω で回転する歪みは急速にその初期の形を失い、殆んど全ての場合に (すなわち殆んど全ての歪みの形に対して) 時間発展とともに $P(\psi, t) \rightarrow P_0(\psi, t) \equiv \frac{1}{2\pi}$ となることが予想される。あるいはまた、時刻 $t = 0$ に $\rho(\psi, 0, \omega) = \delta(\psi)$ 、 $\forall \omega$ を与えた場合を考えると、 $Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\psi) g(\omega) d\omega = G(t)$ に他ならず、例えば Lorentz 分布 $g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{\omega^2 + a^2}$ の場合には指数関数的減衰 $Z(t) = \exp(-at)$ となる。もちろん ρ は中立安定であって各 ω でみると歪みは形を変えずに回転しているに過ぎないにも関わらずである。ここで注意しなければならないのは、殆んど全ての歪みに対して $P_0(\psi, t)$ が回復されるだろうということに関する具体的な解析は行っておらず、これは $\rho(\psi, t, \omega)$ の空間で $P_0(\psi, t)$ を与える領域の占める測度から評価されねばならない。これが先に式 (3.59) の第一項が無視できるような初期振幅 $c^*(0, \omega)$ の測度の評価として触れたことであり、ある再帰時間で再び無視できない $P(\psi, t)$ の歪みを形成することも含めて測度論的に評価されるべきことであろう。

このように $K = 0$ では自明な $\rho(\psi, t, \omega)$ の中立安定性が $K < K_c$ の領域で成立することを Strogatz らは示したのであるが、これを直ちに $P(\psi, t)$ あるいは $Z(t)$ の中立安定性とはできないわけである。

- 本論で導いた式 (3.41)

$$1 = K \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\omega g(\omega) \cos \omega t \exp(-\lambda t)$$

において、 $\lambda > 0$ の場合には

$$\int_0^{\infty} dt \cos \omega t \exp(-\lambda t) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$

より、

$$1 = K \int_0^{\infty} d\omega \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} g(\omega)$$

となり彼らの結果、式 (3.56) を得る。すなわち式 (3.56) において既に $\lambda > 0$ の条件のもとで考えていることに対応しており、この式の解として $\lambda < 0$ を得ることが出来なかったわけである。式 (3.54) での定義のように ω に依らない線形成長率として λ を求めた結果 $\lambda > 0$ しか得られなかったことは、本論で $K < K_c$ で得られた $\lambda < 0$ が、 ω 積分の後にはじめて有限の値として求められたことと合わせて理解できる。

- 緩和定数 λ を与える式(3.56)から、 $g(\omega)$ として具体的に一様分布、Lorentz分布、Gauss分布、デルタ分布を与えた場合の表式を求めることができ、全て本論で導いたものと一致する。ただし式(3.56)は $K > K_c$ でのみ成立するが、他方本論の結果は ϵ の正負によらず成立する。仮定よりこの表式は $\epsilon \ll 1$ に限って成立するが、 ϵ が微量であることは、緩和定数 λ の具体的な表式を得るためにのみ必要であり、線形緩和の存在は K の値には依らない。

これと関連して主論文2では、(3.27)で定義された γ を(実際には更にMarkov近似を行なった表式を用いて)各分布について導出したが、 $Z_0 \equiv 0$ に対する(3.30)式；

$$\frac{d\eta}{dt} = \gamma \epsilon \eta$$

から、

$$\lambda = \gamma \epsilon \quad (3.60)$$

が成り立たねばならない。実際、

○ Lorentz分布：

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{\omega^2 + a^2}$$

$$\Theta(t) = \frac{K}{2a} \exp(-at)$$

$$\gamma^{-1} = \frac{K}{2a^2}$$

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \epsilon = \frac{a\epsilon}{1+\epsilon} = a\epsilon + O(\epsilon^2)$$

となり、前の式

$$\lambda = a\epsilon$$

と一致；

○ Gauss分布：

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Theta(t) = \frac{K}{\sqrt{2}\sigma} \text{Erfc}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} t\right)$$

$$\gamma^{-1} = \frac{K}{2\sigma^2}$$

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \epsilon = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \frac{\epsilon}{1+\epsilon} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \epsilon + O(\epsilon^2)$$

となり[§]、前の式での ϵ について展開[¶]から得られる

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \epsilon + O(\epsilon^2)$$

と一致；

○ 一様分布：

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|\omega| \leq a) \\ 0 & (|\omega| > a) \end{cases}$$

$$\Theta(t) = K \left(K_c^{-1} - \frac{1}{a} \int_0^a d\omega \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

$$= -\frac{K}{2a} \text{si}(at)$$

$$\sim \frac{K \cos(at)}{2a \cdot at} \quad (t \rightarrow \infty)$$

の漸近形^{||}に注意して**

$$\gamma^{-1} = \frac{K}{2a^2} \quad (3.61)$$

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \epsilon = a \frac{\pi}{2} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} = a \frac{\pi}{2} \epsilon + O(\epsilon^2)$$

となり、前の式

$$\lambda = a \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\epsilon}\right) = a \frac{\pi}{2} \epsilon + O(\epsilon^2)$$

と一致；

となり、いずれも $O(\epsilon)$ において式(3.60)を満たすことがわかる。

- 最後に、本論では触れることができなかった重要な課題として、揺らぎに関する研究もいくつか報告されている[12, 13, 14]。系に内在する揺らぎを考える場合、その起源はどのように考えられるだろうか。 $N < \infty$ の系に対する有限サイズ効果か、あるいは $N \rightarrow \infty$ においても残る初期位相分布による違いか。これは先に述べた初期位相分布の測度論的評価とも関連して考える必要がある。

[§] $\int_0^\infty \text{Erfc}(ax) dx = \frac{1}{2a}$

[¶] $\text{Erfc}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - x + \frac{x^3}{1 \cdot 3} - \frac{x^5}{2 \cdot 5} + \frac{x^7}{3 \cdot 7} - \dots$

^{||} 積分正弦関数； 積分余弦関数；

$$\text{si}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt, \quad \text{ci}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

**付録B参照

Part II

現象の記述・機能的側面

Chapter 4

バーストのモデル

本章では振動現象のうち特に周期的に起こるバーストを、そのモデル化の立場から取り上げる。ここでバーストとは、おおよそ次のような直観的描像で捉えておこう。定常においては何らかの値が低い状態にあった系が、ある時そこを離れ高レベル状態、いわば興奮状態に移り、再びある時間の後に低レベル状態に戻るといった振舞いである。系が通常の低レベル状態及び興奮状態に滞在する時間に比べ、両状態間を移行する時間は十分に短い。このような現象は、例えば生物の神経系などによく見られ、従来からいくつかの数学的定式化がなされてきた。

第1節では、特に生体系において報告されている周期的バースト現象とそのモデルの例を紹介する。そこには代表的な二つの機構が見られる。そのうちタイプIの典型例として、続く第2節で複素変数により記述されるモデルを導入する。これは一極限として位相モデルの形をとり、また別の自明な極限ではスピン型の on/off 素子となる。第3節では、タイプIIの一極限としてある興奮素子モデルを扱う。これは位相変数で記述される神経細胞のモデルで、そのパルスの相互作用による平均場結合系は相互引き込み現象を示すことが知られている。振動子集団の引き込みに期待される機能的側面から、モデルの示す振舞いを見る。

4.1 周期的バースト

周期的に起こるバーストは、特に生体现象にしばしば見られる。本節ではそれらをモデル化の立場から紹介するが、Rintzel [20] による指摘のごとく、その発生の機構には代表的な二つのタイプを見ることができる。

4.1.1 バースト現象とそのモデル

まず、今まで提案されてきた周期的バーストのモデルを見てみよう。活性化の低い状態を静止状態、高い状態をバースト状態と呼ぶことにするが、ここで活性化とは例えば細胞のインパルス発火頻度などである。以下で紹介するモデル方程式の理解を助けるため、最

初に Hodgkin-Huxley 方程式 [21] を見ておく。

Hodgkin-Huxley 方程式 ヤリイカ巨大神経軸索での膜電流の解析に基づいて導出され、神経伝達のモデル方程式として有名であるが、空間自由度を考えない場合には次の四変数の微分方程式系；

$$I = C_m \frac{dV}{dt} + g_{Na}(V - V_{Na}) + g_K(V - V_K) + \bar{g}_L(V - V_L) \quad (4.1)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_\infty(V) - m}{\tau_m(V)} \quad (4.2)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h_\infty(V) - h}{\tau_h(V)} \quad (4.3)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)} \quad (4.4)$$

となる。ここで I は単位面積当たりの膜電流、 C_m は単位面積当たりの膜容量で、変数 $V(t)$ が膜電位であり、(4.1) 式では全膜電流を右辺の各項、すなわち膜電位依存性 Na チャネルを通る Na^+ 電流 I_{Na} 、膜電位依存性 K チャネルを通る K^+ 電流 I_K およびその他のチャネルを通るリーク電流 I_L の和として表している。他の三変数 $m(t), h(t), n(t)$ はそれぞれ、Na チャネルの活性化因子がチャネルを開いた状態にある確率、同じく不活性化因子がチャネルを開いた状態にある確率、および K チャネルの活性化因子がチャネルを開いた状態にある確率を表す。また添字 ∞ は膜電位 V における定常値を示し、 τ_* はそれぞれの時定数である。一般には τ_m は他より一桁ほど小さく、すなわち $m(t)$ は $h(t), n(t)$ より早い変数となっている。 V の関数としての $m_\infty(V), h_\infty(V), n_\infty(V), \tau_m(V), \tau_h(V), \tau_n(V)$ は、膜電位固定法により得ることができる。ここで g_* は、各イオンのコンダクタンスを表すが、これに対しモデルでは

$$g_{Na} = \bar{g}_{Na} \cdot m^3 h, \quad g_K = \bar{g}_K \cdot n^4 \quad (4.5)$$

ととる。ここで \bar{g}_{Na}, \bar{g}_K は、それぞれ全 Na チャネルが開いている時の Na^+ コンダクタンス、全 K チャネルが開いている時の K^+ コンダクタンスを表す定数である。また V_{Na}, V_K, V_L は、各電流が 0 の時の膜電位を表す定数である。以上を $V(t)$ に対する初期値問題として解くことで、細胞膜電位が得られることになる。

Chay and Keizer のモデル (哺乳類膵臓の β 細胞) 哺乳類膵臓に散在するランゲルハンス島 (*Langerhans' islands*) は内分泌細胞から成るが、そのうち 70% 余りを占めインシュリン (*insulin*) を分泌する β 細胞が代表的である。これはグルコース投与に対してパースト的電位応答を示し、単独のラ島でのインシュリンの分泌量は、この電気的活動度と相関を持つことが見られる。この β 細胞のモデルとして、Chay and Keizer が五変数からなる微分方程式系を提案し、実験結果の様々な定性的・定量的側面を良く再現してみせた [22]。更に Rintzel がこのモデルに対し定性的解析を行ない、一つの遅い変数とともにヒステリシスを持った早いサブシステムの存在を明らかにした。彼は同等な振舞いをするより簡単化

した Chay-Keizer モデルとして三変数のモデル；

$$C_m \frac{dV}{dt} = -I_{Ca}(V) - \left[\bar{g}_K n^4 + \bar{g}_{K-Ca} \left(\frac{Ca}{1+Ca} \right) \right] (V - V_K) - \bar{g}_L (V - V_L) \quad (4.6)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)} \quad (4.7)$$

$$\frac{dCa}{dt} = f[\alpha I_{Ca}(V) - k_{Ca} Ca] \quad (4.8)$$

をも提案し、それに対する詳細な解析を行なった。ここで (4.6), (4.7) の二式は、Hodgkin-Huxley 方程式をこの場合に応じてほぼ次のように変形・縮約したものとなっている；

1. 膜電流は I_{Na} より主として I_{Ca} による ((4.6) 式右辺第一項)、
2. $n(t)$ に比べて $m(t), h(t)$ は早い変数として断熱的に振舞う、
3. 通常の膜電位依存性の以外の K チャネルを通る K^+ 電流が存在し、細胞内のフリー Ca^{2+} 濃度により活性化される ((4.6) 式右辺第三項)。

そこで細胞内のフリー Ca^{2+} 濃度を新たな変数 $Ca(t)$ として導入し、それが従う第三式 (4.8) では、膜電流 I_{Ca} としての流入と指数減少 (小胞体やミトコンドリアへの吸収や膜外への流出など) を考える。ここで係数 f は、細胞内の全 Ca^{2+} に対するフリーなものの割合を示すが、これは微量であって、そのため $Ca(t)$ は遅い変数となる。他方前二式は $V(t) - n(t)$ による早いサブシステムを記述する。そこでまず Ca をパラメタとした時の $V(t) - n(t)$ 系の振舞いを考えると、

1. Ca が大きい場合： $V \sim V_K$ の唯一の定常解を持つ。
(このとき Ca^{2+} に誘導された K チャネルは開いている。)
2. Ca が小さい場合： $V_K < V < V_{Ca}$ の唯一の定常解を持つ。
(このとき Ca^{2+} に誘導された K チャネルは閉じている。)
3. Ca がある適当な中間領域にある場合：三つの定常解が存在する。パラメタ値によっては、うち上と下の二つ定常解が安定となる。また別のパラメタ値では、上の解は不安定でそのまわりに安定なリミットサイクル解が存在することがわかるが、ここでは特にその場合に注目する。その時 Ca 値を上げると、それとともにリミットサイクル軌道の半径も大きくなり、あるところで軌道は不安定な定常解とぶつかり消滅する。すなわちそれ以上の Ca 値では、1 の場合に相当する定常解を唯一の安定解として持つことになる。

これらの $V - n$ 系の分岐の様子を示すものとして、 $Ca - V$ 図を Fig.5(a) に示す。上記 1 の場合に見られる低い V 値での定常解が細胞の静止状態に対応し、3 の場合に現れるリミットサイクル解が細胞のパースト発火状態に対応している。

ここで Ca の遅い変化を考える。 Ca 値が高く静止状態にあるときには、Fig.5(a) より $dCa/dt < 0$ であるため Ca はゆっくり減少する。そしてこの定常解が不安定化する Ca 値に達すると、その時の唯一の安定解であるリミットサイクル解へとび移り、系はパースト状態をとる。その際 $dCa/dt \equiv 0$ を越え、代わって $dCa/dt > 0$ となるため、パースト状態

では Ca はゆっくり増加し、リミットサイクル解がなくなる Ca 値 (図中 Ca_{HC}) に達した時再び静止状態へと落ちる (Fig.5(b))。このように、早いサブシステム $V-n$ により遅い変数 Ca は駆動され、翻って Ca のゆっくりした周期的変化によって、早いサブシステム $V-n$ は静止状態とバースト状態を交互にとび移るヒステレシスループを描くことになる。

Plant のモデル (アメフラシのペースメーカー細胞) アメフラシの腹部神経節 R-15 神経細胞は、神経細胞のパルス発火を調べるために好適な実験対象として広く研究されてきた。ある種の薬物の投与により興奮状態におけるパルス発火を抑制することができるが、その場合にも膜電位の *slow wave* が観察され、それゆえこの *slow wave* がパルス発火をひき起こす機構として働いているように見える。Plant は、このバーストと *slow wave* に対して、次のような五変数のモデルを提案した [23] * ;

$$C_m \frac{dV}{dt} = -\bar{g}_{Na} m_\infty^3(V) h(V - V_{Na}) - \bar{g}_{Ca} x(V - V_{Ca}) - \left[\bar{g}_K n^4 + \bar{g}_{K-Ca} \left(\frac{Ca}{0.5 + Ca} \right) \right] (V - V_K) - \bar{g}_L (V - V_L) \quad (4.9)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h_\infty(V) - h}{\tau_h(V)} \quad (4.10)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)} \quad (4.11)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_\infty(V) - x}{\tau_x} \quad (4.12)$$

$$\frac{dCa}{dt} = \rho [K_c x (V_{Ca} - V) - Ca] \quad (4.13)$$

ここでも (4.9), (4.10), (4.11) の三式は Hodgkin-Huxley 型の表式であるが、ここでは $m(t)$ を断熱的に扱ったこと以外に次のような変更が加えられている:

1. 膜電流に新たな二項が加えられている。一つは先の Chay-Keizer モデルと同様の細胞内 Ca^{2+} により活性化される K^+ 電流 ((4.9) 式右辺第四項)、
2. 新たなもう一つは、ゆっくりと活性化するコンダクタンスによるイオン流 (Na^+ と Ca^{2+} の混合と考えられる) であり、その遅い変数を $x(t)$ として導入した ((4.9) 式第二項)。

τ_x は V に依らない定数とするが、他の時定数に比べて十分大きく (実験値では二桁程度)、また先の f 同様ここでも ρ は十分小さい定数であるため、この系には二つの遅い変数 $x(t), Ca(t)$ が存在することになる。

Rintzel はこれに対しても先の同様の解析を行ない、以下のような構造を示した。この場合には先と異なり、早いシステムはヒステレシスを持たず、よって遅い変数一つだけでは周期的に現れるバースト状態を生み出すことはできない。この様子を図 6 の分岐図 $Ca-V$ に見ることができる。静止状態に対応する安定定常解が不安定定常解と saddle-node 分岐を起こす点において、同時に、安定なリミットサイクル解も消滅する (図中 Ca_{HC})。すな

*ただしここでは若干の変更を加えた Rintzel [20] の表式に従った

わち Ca_{HC} 点が静止状態とバースト状態の境界となっているわけである。この状況を、二つの遅い変数 $Ca-x$ 面で見たとのが Fig.7(a) である。ここでは両状態の境界が二次元相図上の曲線 HC として示されている。二変数からなる遅いダイナミクスが $Ca-x$ 面上で描く閉じた軌道の例が Fig.7(b) に示されている。軌道 b のように曲線 HC を横切る周期軌道の場合には静止状態とバースト状態が交互に現れることになる。すなわちこの系では、早いサブシステムからのフィードバックなしに、遅い変数による振動的振舞いが現れることになる。ここで遅いダイナミクスのパラメタを適当に選ぶことにより、軌道 a のようにバースト状態にはならない振動も見出し得る。これが最初に述べた *slow wave* の起源であると考えられる。

4.1.2 Rintzel による 2 タイプの定式化

Rintzel [20] はバーストモデルの定性的理解からその機構の分類を考え、上記二つを代表的な例として解析した。大部分のバーストモデルには、早いサブシステムと遅いサブシステムが存在する。ここで早い変数を X 、遅い変数を Y とすると、これは一般に

$$\frac{dX}{dt} = F(X, Y) \quad (4.14)$$

$$\frac{dY}{dt} = \epsilon G(X, Y) \quad (4.15)$$

と微小パラメタ ϵ により特徴付けられる。(4.14) 式の早い系は、パラメタ値によって興奮性となりインパルス発火を示し、あるいはリミットサイクル振動による連続発火を示し得るようなものである。この系 (4.14) に対し遅い変数 Y がパラメタとして働き、(4.15) 式で与えられる振動的振舞いによって系 (4.14) が静止状態とバースト状態を移る機構を与える。(4.15) 式における Y 依存性は、早いサブシステムからのフィードバックを示している。

ここで、Plant のモデルに見られた機構をタイプ I のバーストモデル、Chay-Keizer のそれをタイプ II のバーストモデルと呼ぶことにしよう。数理モデルとしてそれぞれを以下のようにまとめることができる。

タイプ I: Y が二自由度以上あるため、遅い系 (4.15) での自励振動が可能である。早い系 (4.14) は、パラメタ値によって静止状態あるいはバースト状態をとる。 Y の振動が *slow wave* として早い系の周期的バースト状態の起源となり、よってまたその振動はバーストの発生によらず見ることができ、比較的滑らかなものである。

タイプ II: Y は一自由度だが、早い系 (4.14) が静止状態とバースト状態を双安定状態として持つ。早い系から遅い系へのフィードバックにより、具体的には二状態での dY/dt の符号の交替による Y の振動的振舞いにより、早い系はヒステレシスループを描くことになり、周期的にバースト状態をとる。よってその振動は減衰振動的である。

Fig.8 にそれぞれのバーストの様子を示す。

4.1.3 2タイプの範例

上記2タイプに対する範例（あるいはtoy model）として、ここで以下のような簡単な数理モデルを考える。これに基づき第2節および第3節で解析を行なう。

以下では、バーストを起こす系を神経細胞と呼ぶことにする。神経細胞に見られるバースト的発火がしばしば注目され、そのモデルとして議論されることが多いからである。神経細胞の振動的応答として見られるものには連続的なパルス発火もあるが、むしろ平均発火率（適当な短時間平均で見た発火頻度）の周期的変化を指すことも多い。そこで早い変数として神経細胞の平均発火率 $S(t)$ をとることにし、更にそのダイナミクスを与える(4.14)式には、 $\mathbf{Y}(t)$ のみによって決まる閾値関数 \mathcal{F} を与えることにしよう。すなわちここで細胞は早いダイナミクスとして

$$S(t) = \mathcal{F}(\mathbf{Y}(t) - \mathbf{h}), \quad \mathbf{h} = \text{const} \quad (4.16)$$

に従うものとする。

タイプ I のバーストモデル これは続く第2節で述べるため詳細はそちらに譲るが、次のようなモデルを考える。遅い変数は二つとし、よって複素変数 $\mathbf{Z}(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) + iy(t)$, $x, y \in R$ を用いる。それに対する自励振動として、 \mathcal{G} は角速度 Ω による $\mathbf{Z}(t)$ の単純な回転を与える。

タイプ II のバーストモデル 遅い変数は一つとし、実変数 $x(t) \in R$ をとる。すなわち

$$S(t) = \mathcal{F}(x(t) - h) .$$

ここで $\mathcal{F}(x - h)$ は、 x の適当な区間において二価となりヒステレシスを持つ関数である。これを非常に単純化し

$$\mathcal{F}(x - h) = \begin{cases} 1 & (x > h) \\ 0, 1 & (0 \leq x \leq h) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

とする。更に

$$\frac{dx(t)}{dt} \begin{cases} < 0 & (S = 1) \\ > 0 & (S = 0) \end{cases}$$

となるよう、

$$\frac{dx(t)}{dt} = a - x(t) - p \cdot S(t) \quad (4.17)$$

により

$$h < a < p \quad (4.18)$$

を満たす定数 a, p を用いて、 $S(t)$ からのフィードバックにより振動する遅い変数 $x(t)$ のダイナミクスを与える。図9に概念図を示す。

更に均一な N 個の細胞から成る結合系を考える場合には、相互作用の効果は早い変数 $S(t)$ を介して遅いダイナミクスに与えられるとする。すなわち

$$S_i(t) = \mathcal{F}(x_i(t) - h) , \quad (4.19)$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a - x_i(t) - p \cdot S_i(t) + \sum_j J_{ij} S_j(t) . \quad (4.20)$$

ここで J_{ij} は j 番目の細胞から i 番目の細胞への結合強度を表す。

4.2 複素変数モデル (タイプ I の例) (主論文 3)

4.2.1 複素変数によるバーストモデル

本節ではタイプ I の基本構造を持った典型例として、新たに複素変数モデルを提案する。ここでは周期的バーストの起源として細胞に内在する振動性を、振動する遅い変数 $\mathbf{Z}(t)$ を導入することによって表現する。実際に現れる神経細胞の活性レベルは、平均発火率 $S(t) \in [0, 1]$ で表す。ここでいわば細胞の仮想的ポテンシャル $\mathbf{Z}(t)$ を複素変数

$$r(t) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{Z}(t)|, \quad \phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \mathbf{Z}(t)$$

で記述する。これが本モデルの特徴であり、後で実変数のみを用いる従来の神経回路モデルと対比させて触れることにする。更に、多数の神経細胞が互いに発火入力を与えることで相互作用をする神経回路網を考えるが、各細胞が他から受けた入力はその $\mathbf{Z}(t)$ のダイナミクスに変化を与えるものとする。結合が存在する j 番目の細胞から i 番目の細胞への入力は、 j の発火状態 $S_j(t)$ と j から i への (シナプス) 結合強度 C_{ij} によって決められる。ここで定数 C_{ij} もまた複素数値をとるものとする；

$$C_{ij}(t) \stackrel{\text{def}}{=} |C_{ij}(t)|, \quad \alpha_{ij}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \arg C_{ij}(t) .$$

以上より i 番目の細胞の発火状態は離散時間 t におけるダイナミクスとして

$$S_i(t) = \mathcal{F}(\Re \mathbf{Z}_i(t) - h) , \quad (4.21)$$

$$\mathbf{Z}_i(t+1) = \mathbf{Z}_i^*(t) \exp(i\Omega) + \sum_j C_{ij} S_j(t) . \quad (4.22)$$

に従うものとする。ここで、

$$\mathbf{Z}_i^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} r^* \exp(i\phi_i(t))$$

は、ある固定された振幅 $r^* = \text{const}$ での値を示す。また $\mathcal{F}(x)$ は、実数上 $x \in R$ で定義された単調増加関数； $\mathcal{F}(x) \in (0, 1)$, $\mathcal{F}(x = -\infty) = 0$, $\mathcal{F}(x = \infty) = 1$ で、特に $x \simeq 0$ で $\mathcal{F}' \gg 1$ となり急激に 0 から 1 へ変化するようなものとする。これは細胞発火に対応して、 $\mathcal{F} = 0$ が無発火状態、 $\mathcal{F} = 1$ が最大頻度発火状態を表している。それゆえ h は、発火を決

める膜電位の脱分極に対する閾値を示している。ポテンシャル $Z(t)$ の振動性は、(4.22)式第一項にある。これより非結合系の $Z(t)$ は一定の振動数 Ω で振動するものとなっている。

従来用いられてきた神経細胞モデルの最も基本的な形は、 i 番目の細胞の平均発火率 $S_i(t)$ に対する Hebb 型のシナプス結合と、発火に対する閾値を考慮した

$$S_i(t+1) = \mathcal{F}\left(\sum_j J_{ij} S_j(t) - h\right) \quad (4.23)$$

で表される。ここで実数 J_{ij} は、 j 番目の細胞から i 番目の細胞へのシナプス結合を示す。補助的な変数として他の細胞からの入力 $x_i(t)$ を用いて上式を書きかえると、

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \mathcal{F}(x_i(t) - h) \quad , \\ x_i(t+1) &= \sum_j J_{ij} S_j(t) \quad . \end{aligned}$$

これと対比すると、上記で実数 $x_i(t)$ に代わって $Z_i(t)$ を導入した複素変数モデル(4.21),(4.22)の特徴は明らかである。

(4.22)式による $Z_i(t)$ の時間発展は、また次のように表現できる。すなわち単位時間更新 $Z_i(t) \rightarrow Z_i(t+1)$ は、以下の3つの操作に分けてみる事ができる；

- $Z_i(t) \rightarrow Z_i^*(t)$ ；まず最初のステップとして $Z_i(t)$ は、 $r^* \exp(i\phi_i(t))$ という非振動系(他の細胞との結合がない場合)が持つ振幅 r^* での周期軌道 C 上の点へと素早く緩和する。ここでは C が安定な周期軌道であると仮定しており、これへの緩和において $Z_i(t)$ の位相は保たれる。
- $Z_i^*(t) \rightarrow Z_i^*(t) \exp(i\Omega)$ ；次に軌道 C 上での振動として、複素平面上での Ω 回転を行なう。これが $Z_i(t)$ の時間更新として最も本質的な過程である。
- $Z_i^*(t) \exp(i\Omega) \rightarrow Z_i^*(t) \exp(i\Omega) + \sum_j C_{ij} S_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} Z_i(t+1)$ ；最後に、他からの入力を受けた結果軌道 C から外れ、それが時刻 $t+1$ における Z_i の値となる。

以上の複素平面における概念図を Fig.10 に示す。

ここで複素変数による振動性をモデル化として、複素 Ginzburg-Landau 方程式；

$$\frac{dZ_i(t)}{dt} = (1 + i\Omega)Z_i(t) - (1 + ig)|Z_i(t)|^2 Z_i(t)$$

を用いることも考えられる。これは、 $Z_i(t) \sim \exp(i(\Omega - g)t)$ での回転を与える系であり、これを離散化した結合系は、

$$Z_i(t+1) - Z_i(t) = (1 + i\Omega)Z_i(t) - (1 + ig)|Z_i(t)|^2 Z_i(t) + \sum_j C_{ij} S_j(t)$$

となる。本論では特に神経回路モデルとしての表式のため、(4.21),(4.22)の系をとったが、上の複素 Ginzburg-Landau 型のモデルにおいても同様の振舞いが期待される。

4.2.2 二つの極限

上記モデルのある二つの極限を見ることで、既存のモデルとの関係が理解できる。一つはスピン型の on/off 素子(4.23)となる自明な極限であり、もう一つは前記の位相モデルが得られる弱結合極限である。

1. $r^* \ll 1$

これは非振動系の振幅 r^* が非常に小さい場合、換言すると入力が非常に大きく非振動系の振動性を押えるような場合 $\sum_j C_{ij} S_j(t) \gg 1$ である。この時 $r^* \rightarrow 0$ として

$$S_i(t+1) = \mathcal{F}\left(\Re \sum_j C_{ij} S_j(t) - h\right) \quad .$$

ここで $J_{ij} = \Re C_{ij} = C_{ij} \cos \alpha_{ij}$ あるいは $x_i(t) = \Re Z_i(t)$ と置くと、(4.23)式となることは明らかである。この時また、

$$\begin{cases} J_{ij} > 0 & \text{for } |\alpha_{ij}| < \frac{\pi}{2} \quad , \\ J_{ij} < 0 & \text{for } |\alpha_{ij}| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

となることより、複素結合定数 C_{ij} において、 $|\alpha_{ij}| < \frac{\pi}{2}$ は興奮性のシナプス結合、 $|\alpha_{ij}| > \frac{\pi}{2}$ は抑制性のシナプス結合と見ることが出来る。

2. $\sum_j C_{ij} S_j(t) \ll 1$

これは弱結合極限である。

まず非結合系は

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \mathcal{F}(r^* \cos \phi_i(t) - h) \quad , \\ \phi_i(t+1) &= \phi_i(t) + \Omega \end{aligned}$$

となり自励振動する $Z_i(t)$ により $S_i(t)$ が変化するに過ぎない。連続時間では、 $d\phi_i/dt = \Omega$ の位相モデルである。上式はまた

$$S_i(t) = \mathcal{F}(r^* \cos \Omega t - h) \quad .$$

このような $\cos \Omega t$ でのポテンシャルの滑らかな振動は、膜電位に現れる前述の *slow wave* として見ることが出来る。ここで $\mathcal{F}(x)$ として Heviside 関数 $\theta(x)$ をとると、 $|h| < r^*$ の場合には、 $S_i(t) = 0$ の静止状態と $S_i(t) = 1$ のバースト状態が振動数 Ω で周期的に交替することになる。

次に弱い結合を考えた場合、入力 $\sum_j C_{ij} S_j(t) \ll 1$ を振動と考えることにより、ここでも位相モデルで記述できることが期待できる。その場合各細胞のバースト周期が結合により同期する集団的秩序が予想される。そこでバーストの同期を特徴付ける量として、ここでも複素秩序変数；

$$\begin{aligned} Z(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_j Z^*(t) \quad , \\ X(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \Re Z(t), \quad Y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Im Z(t) \end{aligned}$$

を定義する。更に $\mathcal{Z}(t)$ 自体の回転を表す量として、そのトルクに相当する

$$R(t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t) - \mathcal{Y}(t)\mathcal{X}(t)}$$

ただし、 $\dot{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) - x(t+1)$

を定義しておこう。ここで $\overline{x(t)}$ は、長時間平均を表すものとする。

弱い結合強度 $C_{ij} \ll 1$ に対する摂動の最低次の近似では、

$$r_i(t+1) = r^* + \sum_j C_{ij} \cos(\alpha_{ij} - \phi_i(t) - \Omega) \cdot S_j(t) \quad (4.24)$$

$$\phi_i(t+1) = \phi_i(t) + \Omega + \sum_j \frac{C_{ij}}{r^*} \sin(\alpha_{ij} - \phi_i(t) - \Omega) \cdot S_j(t) \quad (4.25)$$

このうち振幅 $r_i(t)$ は、時間更新の各時刻において非摂動軌道 C に緩和することに注意すると、 $r_i(t) \simeq r^*$ とし位相に対する式 (4.25) のみを考えれば良い (ただしこのように (4.24) 式第二項を無視する近似は、後で見るように $r^* \simeq h$ のためにバースト発火可能な臨界値近傍のときには行なうことができない)。そこで (4.25) 式で $S_j(t) \simeq \mathcal{F}(r^* \cos \phi_i(t) - h)$ とし、更に位相変数を変換し $\psi_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_i(t) - \Omega t$ を用いると

$$\psi_i(t+1) = \psi_i(t) + \sum_j \frac{C_{ij}}{r^*} \sin(\tilde{\alpha}_{ij} - \Omega t - \psi_i(t)) \cdot \mathcal{F}(r^* \cos(\Omega t + \psi_j(t)) - h)$$

ここで $\tilde{\alpha}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{ij} - \Omega$ 。このとき $\psi_i(t)$ は遅い変数であることより、微分形で表すと

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = \sum_j \frac{C_{ij}}{r^*} \sin(\tilde{\alpha}_{ij} - \Omega t - \psi_i(t)) \cdot \mathcal{F}(r^* \cos(\Omega t + \psi_j(t)) - h)$$

第I部での手順と同様、右辺を周期 $2\pi/\Omega$ にわたって時間平均し

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i(t)}{dt} &= \sum_j \frac{C_{ij}}{r^*} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \sin(\psi_j - \psi_i + \tilde{\alpha}_{ij} + \lambda) \mathcal{F}(r^* \cos \lambda - h) \\ &= \sum_j K_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i + \tilde{\alpha}_{ij}) \quad (4.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} K_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{C_{ij}}{2\pi r^*} \int_0^{2\pi} d\lambda \cos \lambda \mathcal{F}(r^* \cos \lambda - h) \\ &= \frac{C_{ij}}{\pi r^*} \int_{-1}^1 dx \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathcal{F}(r^* x - h) \quad (4.27) \end{aligned}$$

となる。あるいはこれを再び $\phi_i(t)$ で書き直すと

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = \Omega + \sum_j K_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i + \tilde{\alpha}_{ij}) \quad (4.28)$$

これは、既に見た位相モデルによる N 振動子結合系に他ならない。

特に全ての神経細胞が等しい強度で結合した平均場結合系の場合；

$$C_{ij} \equiv \frac{1}{N} r^* C (1 - \delta_{ij}), \quad \alpha_{ij} \equiv \alpha, \quad \text{for } i, j = 1, 2, \dots, N$$

を考えてみよう。興奮性結合である $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ をとることとする。活性化関数 $\mathcal{F}(x)$ として Heviside 関数を用いると、

$$\begin{aligned} K_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K}{N} &= \begin{cases} \frac{C}{N\pi} \int_h^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx & (|h| < r^*) \\ 0 & (|h| \geq r^*) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{C}{N\pi} \sqrt{1-h^2} & (|h| < r^*) \\ 0 & (|h| \geq r^*) \end{cases} \end{aligned}$$

より、

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = \Omega + \frac{K}{N} \sum_j \sin(\phi_j - \phi_i + \alpha - \Omega)$$

となる。ここで各細胞の振動数 Ω に僅かにばらつきをもたせ、分布 $g(\Omega)$ として $\Omega = \alpha$ に関して対称なもの考えると、上式は近似的に

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = \Omega_i + \frac{K}{N} \sum_j \sin(\phi_j - \phi_i)$$

となり、前記の式 (2.5) となる。それゆえこの場合には、例えば Lorentz 分布 $g(\Omega) = \frac{a}{2\pi} \frac{1}{(\Omega - \alpha)^2 + a^2}$ に対して、臨界点近傍に対する既知の表式

$$\mathcal{Z} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{2a}{K}} \exp(i\alpha t), & (K \geq 2a) \\ 0 & (K < 2a) \end{cases}$$

よってまた、

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \alpha(1 - \frac{2a}{K}), & (K \geq 2a) \\ 0 & (K < 2a) \end{cases}$$

を得ることができる。

最後に、他の細胞からの入力以外に系外部からの入力がある場合を考察しよう。ここでも弱い相互結合系で考え、外部入力も同程度に弱いものを仮定する。(4.22) 式において、相互作用項に加算的に外部入力 I を与え、

$$\mathcal{Z}_i(t+1) = \mathcal{Z}_i^*(t) \exp(i\Omega) + \sum_j C_{ij} S_j(t) + I$$

簡単のため、外部入力は正の実数 I とし、更に全細胞で等しく時間的にも一定とすると、先と同じく摂動の最低次の近似で

$$\begin{aligned} r_i(t+1) &= r^* + \sum_j C_{ij} \cos(\alpha_{ij} - \phi_i(t) - \Omega) \cdot S_j(t) + I \cos(\phi_i(t) + \Omega) \\ \phi_i(t+1) &= \phi_i(t) + \Omega + \sum_j \frac{C_{ij}}{r^*} \sin(\alpha_{ij} - \phi_i(t) - \Omega) \cdot S_j(t) - \frac{I}{r^*} \sin(\phi_i(t) + \Omega) \quad (4.29) \end{aligned}$$

となる。ここで特に、先に解析した相互作用項と比べ外部入力項が主要な摂動となる状況を考えよう。相互作用項には、発火状態により時間的に変化する $S_i(t)$ そのものが含まれているため、発火条件の臨界近傍 $r^* \simeq h$ であり殆んどの時間で発火していない ($S_i(t) = 0$) 場合には、外部入力項に比べて無視されることになる。この場合また、先のように振幅に対する近似 $r_i(t+1) \simeq r^*$ も行なうことができない。よって $S_j(t) \simeq \mathcal{F}(r^* \cos(\phi_j(t-1) + \Omega) + I - h) \simeq \mathcal{F}(r^* \cos \phi_j(t) + I - h)$ に注意すると、位相に対する式 (4.29) は $\psi_i(t)$ を用いた形で

$$\psi_i(t+1) = \psi_i(t) + \sum_j \frac{C_{ij}}{r^*} \sin(\tilde{\alpha}_{ij} - \Omega t - \psi_i(t)) \cdot \mathcal{F}(r^* \cos(\Omega t + \psi_j(t)) + I - h) - \frac{I}{r^*} \sin(\psi_i(t) + \Omega \cdot (t+1))$$

ここで周期 $2\pi/\Omega$ にわたる時間平均を行なうと、最後の外部入力項は消え、結局先と同様の表式

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = \sum_j \frac{C_{ij}}{r^*} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \sin(\psi_j - \psi_i + \tilde{\alpha}_{ij} + \lambda) \mathcal{F}(r^* \cos \lambda + I - h) = \sum_j K_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i + \tilde{\alpha}_{ij})$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} K_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{C_{ij}}{2\pi r^*} \int_0^{2\pi} d\lambda \cos \lambda \mathcal{F}(r^* \cos \lambda + I - h) \\ &= \frac{C_{ij}}{\pi r^*} \int_{-1}^1 dx \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathcal{F}(r^* x + I - h) \end{aligned} \quad (4.30)$$

が導かれる。すなわち $I > 0$ は、 K_{ij} の定義式 (4.30) で閾値 h を下げる効果としてのみ働くことがわかる。それゆえ $I = 0$ の非摂動系が $r^* \lesssim h$ の場合には、外部入力 $I > 0$ の存在によりバーストの集団同期が起こることが、特に平均場結合系に対して示されたわけである。

4.3 Integrate-and-Fire 型モデル (タイプ II の例)

次にタイプ II の例を考える。Integrate-and-Fire モデルとして知られ既にいくつかの解析がされているもので、ここでも位相モデルとして集団同期が示されている。特に平均場結合系の場合に得られている性質を紹介し、その機能的有効性を考察する。

4.3.1 Integrate-and-Fire モデルとパルス型結合

本節では、タイプ II の基本構造を持った典型例として、Integrate-and-Fire モデルと呼ばれるものを取り上げる。これはタイプ II の範例としてあげた式 (4.17) における、 $p \rightarrow \infty$ の極限として得ることができる。このときバーストの持続時間は $h/p \rightarrow 0$ となり、式 (4.20) は

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a - x_i + \sum_j J_{ij} \delta(t - t_j), \quad (0 < x_i < h) \quad (\text{mod } h)$$

ただし、 $x_j(t_j) \stackrel{\text{def}}{=} 0$

となる。ここで、 $J_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} p/h \cdot J_{ij}$ と新たに置き直した。

上式の系の性質を理解するために、まず非結合系を考えてみる。

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a - x_i \quad (\text{mod } h)$$

という最も単純な一変数の定数係数一階微分方程式は、 $\exp(-t)$ によって唯一の安定固定点 $x = a$ に緩和するに過ぎないが、ここでは $x \text{ mod } h$ により系の本質的性質が決められる。

1. $a > h$ の場合には、 $x(t)$ は $x = a$ に向かって単調に増加し、緩和の途中で $x = h$ に達すると強制的に 0 に戻される。すなわち x は、指数的なノコギリ波状の振動を示す。
2. $a < h$ の場合には、安定固定点 $x = a$ を持つ。しかしそこから何らかの外力により強制的にある幅以上のずれを与えられた時には (すなわち $h - a$ 以上ずらされた時には)、復元することができず $x = h \rightarrow 0$ という過程を経た後、再び固定点 $x = a$ へ戻る。

ここで $x \text{ mod } h$ を S^1 上の変数と考え、以下では $x(t)$ に代わって前にリミットサイクルに対して用いた位相変数 $\phi(t)$ を、また位相周期として h に代わって 2π を用いることにしよう。すると

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = a - \phi \quad (\text{mod } 2\pi), \quad \phi \in [0, 2\pi) \quad (4.31)$$

に対して、 $a > 2\pi$ の場合には系は振動子、 $a < 2\pi$ の場合には興奮素子として振舞うことになる。

次に (4.31) 式の結合系を考える。ここで N 個の (振動あるいは興奮) 素子の相互作用は、前章で仮定した滑らかなものと異なり

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = a - \phi_i + \sum_j J_{ij} \delta(t - t_j) \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (4.32)$$

$$\text{ただし、} \phi_j(t_j) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.33)$$

と互いにパルス型の相互作用を行なっている。すなわち、時刻 t_j において j 番目の素子が $\phi_j(t_j) = 0$ をとると、同時刻にそれと結合している他の全ての素子 i に対してパルス入力 $J_{ij} \delta(t - t_j)$ を与える。ここでパルス入力は、 $\phi_j(t_j) = 0$ を満たす全ての時刻 t_j で与えられ、(4.33) 式では

$$\phi_j(t_j^{(k)}) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

という各回のパルス入力を示す添字 k が省略されている (k を陽に記すと相互作用項は $\sum_{j,k} J_{ij} \delta(t - t_j^{(k)})$ となる)。

このようなパルス型の結合形態は、特にインパルス応答による相互作用がしばしば見られる生体系においては重要である。初期の研究としては、Peskin [24] によって提案された日周リズムのペースメーカー細胞の同期モデルがあり、彼はこれを integrate-and-fire 振動子と呼んだ系；

$$\frac{dx_i}{dt} = S_0 - \gamma x_i, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.34)$$

で記述した。\$N\$個は全て同一のダイナミクスに従い、(4.31)式での \$a \ge 2\pi\$ の場合に相当する \$S_0 \ge \gamma\$ という振動条件で考える。ここで \$i\$ 番目の振動子は、\$x_i(t) = 1\$ において発火 (fire) し 0 に戻される。これらが次のようなパルス結合により相互作用する；ある振動子が発火するとそれは他の全ての振動子の \$x\$ 値をある一定量 \$c > 0\$ ずつ増加させ、また \$c\$ 以内で発火点 \$x = 1\$ に達するものに対しては \$x = 1\$ と置き発火させる。すなわち

$$x_i(t) = 1 \implies x_j(t^+) = \min(1, x_j(t) + c) \quad \forall j \neq i \quad (4.35)$$

(4.33)式で与えた相互作用と比較すると、\$J_{ij}\$ を振動子に依らず \$c\$ と置いた、すなわち平均場的な結合である。更に発火点 \$x = 1\$ との \$\min\$ をとる点も異なるが、これは \$c\$ (あるいは \$J_{ij}\$) が十分微小な弱結合の極限においては、相互作用においてその差が現れる場合が殆んどなくなり両者は同等になると考えられる。また以下では、同時発火したものの相互にはパルス入力を与えないものとする。Peskin はパラメータのある条件下で \$N = 2\$ の場合に対して、この系が殆んど全ての初期状態に対して相互同期を起こすことを示した。

近年 Mirollo ら [25] がこれを拡張し、より一般的条件のもとでの同期の存在を証明した。彼らは (4.34) 式を一般化し、単調増加かつ凸であるという二条件下で考えた。すなわちここで補助的に、一周期 \$T\$ で一定速度で増加する位相 \$\psi(t) \in [0, 1]\$ を導入し†

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{T}$$

$$f: \psi \in [0, 1] \rightarrow x \in [0, 1], \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

とすると†、\$f\$ が滑らかで単調増加する凸関数である (i.e. \$f' > 0, f'' < 0\$) 場合には、(4.35)式で与えられるパルス型相互作用を行なう \$N\$ 個の振動子集団は、任意の \$N\$ について、殆んど全ての初期状態に対して全振動子が同期することを示した。直観的にはこの同期は次のように理解できる (Fig.11 参照)。(4.35)式の相互作用は興奮性 \$c > 0\$ であって、ある振動子の発火は他の振動子の \$x\$ をよってまた位相 \$\psi\$ を増加させる。ここで二つの振動子 \$\psi_1(t), \psi_2(t)\$ に注目し、これらが位相差 \$\delta\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t) < 1/2\$ により \$\psi_1\$ の位相が先行していたとしよう。まず \$\psi_1\$ が発火し、その時 \$\psi_2 (> 1/2)\$ が \$x_2 \to x_2 + c\$ となることにより位相差は縮小され、次に \$\psi_2\$ が発火した時 \$\psi_1 (< 1/2)\$ は \$x_1 \to x_1 + c\$ となり位相差は逆に拡大する。ところが \$f\$ の凸性より、後行しているため \$\psi_2 \in (1/2, 1)\$ で受けるパルスによる位相の増加量の方が、先行している \$\psi_1\$ が \$(0, 1/2)\$ でかせぐ増加量よりも大きく、よって位相差は縮小されていく。\$\delta x\$ が \$c\$ よりも小さくなったとき二つは同時に発火し、同一のダイナミクスに従うことより、一旦揃った \$x_i\$ は以後同期することになる。Mirollo らの結果は、これが任意の \$N\$ 個の平均場結合系に対して有限時間内で起こることを示しているのである。

†周期 \$T\$ に対して、\$T\psi = t\$ に注意。

‡(4.34)式に対しては、

$$f(\psi) = \frac{S_0}{\gamma} (1 - \exp(-\gamma T \psi)), \quad T = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{S_0}{S_0 - \gamma}$$

このように、全ての振動子が同じ自然振動数を持っている系では、正の結合定数による興奮性の平均場パルス結合によって、殆んど全ての場合に完全同期 (全振動子が同期している) 状態をとることが示されている。

4.3.2 平均場パルス結合による雑音下の集団同期

均質な結合系に対する興奮性の平均場結合では、常に完全同期が得られたが、ここで興奮性の相互作用に拮抗する効果として、各系の不均一性や外部からの雑音を加わると系の振舞いはどのように変わるだろうか。第1章で位相モデルに対して各種の摂動を考えた場合の結果からは、不均一性と雑音は同様の効果を持つと考えられ、また次節でこの系によって神経細胞をモデル化するに当たっては雑音の存在を考慮するため、ここでは均一な系に外部雑音を加えられた場合を考えよう [26]。また振動条件 \$a \ge 2\pi\$ に限らず、興奮条件 \$a < 2\pi\$ でも考える。特に神経細胞のモデル化には興奮素子がより適当であると思われる。

以下では結合として (4.32) 式の形をとる。平均場結合では

$$J_{ij} \equiv \frac{K}{N} (1 - \delta_{ij}), \quad \forall i, j$$

となるが、この \$O(1/N)\$ 依存性のため十分大きな集団 \$N \gg 1\$ では各結合定数 \$J_{ij}\$ は十分小さくなり、先の Peskin や Mirollo らの形 (4.41) と等価になる。

外部雑音は各振動子 \$\phi_i\$ に独立に \$\eta_i(t)\$ が加えられるものとし、ここでは次の Gaussian 白色雑音としよう；

$$\begin{aligned} \langle \eta_i(t) \rangle &= 0, \\ \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle &= 2D \delta_{ij} \delta(t - t'). \end{aligned}$$

よって考える結合系のモデル方程式は

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = a - \phi_i + \frac{K}{N} \sum_{j \neq i} \delta(t - t_j) + \eta_i(t), \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (4.36)$$

$$\phi_j(t_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.37)$$

以下、前と同様の解析ができる。(4.36)式の相互作用項で仮に \$i\$ 自身の発火も含めると、平均場結合系では

$$\begin{aligned} J(0, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(t - t_j) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\phi_j(t)) \dot{\phi}_j(t) \end{aligned} \quad (4.38)$$

を用いて

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = a - \phi_i + K \cdot J(0, t) + \eta_i(t), \quad (4.39)$$

と書くことができ、つまり相互作用の効果を共通の内部場 $K \cdot J(0, t)$ で見ることによって一体化される。 i 自身の発火入力の効果はモデルでは不応期の導入等で避けることができる。更に一般の位相 ϕ に対して

$$J(\phi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\phi_j(t) - \phi) \dot{\phi}_j(t) \quad (4.40)$$

によって、時刻 t での位相流密度分布 $J(\phi, t)$ を定義しておこう。雑音を加えられている (4.39) 式を、時間依存性を持つ場 $K \cdot J(0, t)$ の下での Langevin 方程式として解き、self-consistent に $\{\phi_i(t)\}_i$ と $J(0, t)$ を求めることにする。そこで $\phi_i(t)$ に対する確率分布関数 $\mathcal{P}(\phi_i, t)$ に対する Fokker-Planck 方程式に書きかえると[§]

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \phi_i} \\ \mathcal{I} = \{a - \phi_i + K \cdot J(0, t)\} \mathcal{P} - D \frac{\partial}{\partial \phi_i} \mathcal{P} \end{cases}$$

(2.8) 式と同様、位相分布関数

$$n(\phi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\phi_j(t) - \phi) \quad (4.41)$$

を定義すると、各 $\phi_i(t)$ の統計的独立性によりこの $n(\phi, t)$ もまた $\mathcal{P}(\phi, t)$ と同じ上の Fokker-Planck 方程式に従うことになる；

$$\frac{\partial n(\phi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \phi} \left[\{a - \phi + K \cdot J(0, t)\} n(\phi, t) \right] + D \frac{\partial^2 n(\phi, t)}{\partial \phi^2} \quad (4.42)$$

ここで位相流分布関数 $J(\phi, t)$ と位相分布関数 $n(\phi, t)$ の間には、いわば連続方程式；

$$\frac{\partial n(\phi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(\phi, t)}{\partial \phi} \quad (4.43)$$

が成り立っている（素子数 N の保存）ことに注意すると、両式 (4.42), (4.43) より、 $J(\phi, t)$ と $n(\phi, t)$ の関係が

$$J(\phi, t) = \left\{ a - \phi + K \cdot J(0, t) \right\} n(\phi, t) - D \frac{\partial}{\partial \phi} n(\phi, t) \quad (4.44)$$

と得られることになる。これより特に $\phi = 0$ での値として

$$J(0, t) = \frac{a \cdot n(0, t) - D \frac{\partial}{\partial \phi} n(\phi, t)|_{\phi=0}}{1 - K \cdot n(0, t)} \quad (4.45)$$

となり、これを $n(\phi, t)$ に対する Fokker-Planck の表式 (4.42) に代入することで、最終的に $n(\phi, t)$ について閉じた

$$\frac{\partial n(\phi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left\{ a - \phi + K \cdot \frac{a \cdot n(0, t) - D \frac{\partial}{\partial \phi} n(\phi, t)|_{\phi=0}}{1 - K \cdot n(0, t)} \right\} n(\phi, t) \right] + D \frac{\partial^2 n(\phi, t)}{\partial \phi^2} \quad (4.46)$$

が得られる。この解 $n(\phi, t)$ により系の巨視的状态を見ることができる。

[§]各 $\phi_i(t)$ は同一の式 (4.39) に従うことより、 $\mathcal{P}_i \equiv \mathcal{P}$.

定常状態 上式 (4.46) の解として、まず定常分布 $n(\phi, t) \equiv n_0(\phi)$ の存在を調べる。 $D \equiv 0$ においては、 $a > 2\pi$ で先にみた完全同期が出現し

$$\begin{aligned} n(\phi, t) &= \delta(\phi - \phi(t)), \\ \phi(t) &= a(1 - \exp(-t')), \quad t' \stackrel{\text{def}}{=} t \bmod T, \quad T = \ln \frac{a}{a - 2\pi} \end{aligned}$$

であるが、雑音 $D \neq 0$ の存在により完全同期を起し得ない場合にはどうだろうか。定常分布 $n(\phi, t) = n_0(\phi)$ のもとでは、位相流分布 $J(\phi, t) \equiv J_0$ は ϕ, t に依らない定数となるため、この J_0 を self-consistent に解くことにしよう。このとき (4.44) 式は

$$J_0 = \left\{ a - \phi + K \cdot J_0 \right\} n_0(\phi) - D \frac{\partial}{\partial \phi} n_0(\phi) \quad (4.47)$$

となり、 $n_0(\phi)$ についての一階微分方程式を与える。この解 $n_0(\phi; J_0)$ を一般形で書き下すとかなり複雑になるが、特に弱雑音の極限 $D \rightarrow 0$ を考えると、その場合 (4.47) 式は

$$J_0 = (a - \phi + K J_0) n_0(\phi; J_0) \quad (4.48)$$

となる。 $n_0(\phi)$ が $\phi \in [0, 2\pi)$ 上で定義された関数であることに注意すると（ここではダイナミクスの不連続性より $n_0(\phi = 0) \neq n_0(\phi = 2\pi^+)$ ）、

★ $a + K J_0 > 2\pi$ の場合

$$n_0(\phi; J_0) = C(J_0) \cdot \frac{1}{a + K J_0 - \phi} \quad (4.49)$$

$$C(J_0) = \ln \left| \frac{a + K J_0}{a + K J_0 - 2\pi} \right| \quad (4.50)$$

これは各素子が独立に $v(\phi) = a - \phi + K J_0$ で自由回転している状態を示す。よってまた (4.48) 式より

$$J_0 = C(J_0) \quad (4.51)$$

★ $a + K J_0 \leq 2\pi$ の場合

$$n_0(\phi; J_0) = \delta(\phi - a - K J_0) \quad (4.52)$$

これは各素子が安定固定点 $\phi = a + K J_0$ にある状態を示す。よってまた (4.48) 式より

$$J_0 \equiv 0 \quad (4.52)$$

のように式 (4.51), (4.52) を、 J_0 が self-consistent に満たすべき式として得る。その解 J_0 を Fig.12 に幾何学的に示す。これより系のとり得る状態は、 a の値によって三つの場合に分かれることがわかる。

(i). a が十分小さいときは、 $J_0 \equiv 0$ により発火が全く起こらず、全素子が固定点 $\phi = a$ にある状態が唯一の定常状態である

- (ii). $a > 2\pi$ のときには、 $J_0 \neq 0$ が唯一の定常状態とある
- (iii). a の値が上記二つの間では $J_0 \equiv 0$ 及び二つの $J_0 \neq 0$ の解が存在し、そのうち両端の二つが双安定状態となることが予想される
- ただし Fig.12 では $K < 2\pi$ とした。

漸近形でみた同期発火状態 そこで特に $a > 2\pi$ (すなわち非結合系は振動性) で $J_0 \neq 0$ が唯一の定常状態となる場合を考える。雑音のある系における発火の集団同期に興味があるからである。

$n(\phi, t)$ に対する (4.46) 式を一般に解くのは困難であるため、ここでも結合及び雑音が弱くともに摂動的に扱える場合に限定し、前と同様の方法で解析する。Mirollo らと同じく補助的な位相 $\psi(t)$ (ただしここでは $\psi \in [0, 2\pi)$ より先とは 2π 倍だけ異なる) を定義する;

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{T} \quad (4.53)$$

すなわちここで

$$f_{2\pi} : \psi \in [0, 2\pi) \rightarrow \phi \in [0, 2\pi), \quad f_{2\pi}(0) = 0, \quad f_{2\pi}(2\pi^+) = 2\pi$$

は

$$f_{2\pi}(\psi) = a(1 - \exp(-\omega\psi)), \quad T = \ln \frac{a}{a - \pi}$$

で与えられる。Integrate-and-fire ダイナミクスによってノコギリ波状に動く $\phi(t)$ に代わってこの滑らかに変化する $\psi(t)$ により記述し、摂動が与えられた場合にゆっくり変化する $\psi(t) - \omega t \stackrel{\text{def}}{=} \Psi$ のダイナミクスを摂動の最低次で求めるわけである。対応する確率密度関数 $\hat{P}(\psi_i, t)$ 及び位相分布関数 $\hat{n}(\psi_i, t)$ に対して得られる Fokker-Planck 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{n}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left\{ \omega + \frac{1}{N} \sum_j \Gamma(\psi - \psi_j(t)) \right\} \hat{n} \right] + \mu \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial \psi^2}, \\ N \rightarrow \infty & \quad -\frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left\{ \omega + \int_0^{2\pi} d\psi' \Gamma(\psi - \psi_j(t)) \hat{n}(\psi') \right\} \hat{n} \right] + \mu \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial \psi^2}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{K\omega}{a} \exp\left(\frac{\psi}{\omega}\right) \\ \mu &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{D\omega^3}{4\pi a^2} \left\{ \exp\left(\frac{4\pi}{\omega}\right) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

となり、再び力学変数 $\psi_i(t)$ に対する Langevin 方程式として

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega + \frac{1}{N} \sum_j \Gamma(\psi_i - \psi_j) + \xi_i(t) \quad (4.56)$$

が得られることになる。ここで変換された雑音 $\xi(t)$ は、

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle &= 2\mu \delta_{ij} \delta(t - t') \end{aligned}$$

の Gaussian 白色雑音である。位相分布関数 $\hat{n}(\psi, t)$ に対する (4.54) 式の解として、先の (4.49) 式 $n_0(\phi; J_0)$ は $\hat{n}_0(\psi, t) \equiv \frac{1}{2\pi}$ となるが、さらに非定常解として進行波解 $\hat{n}(\psi, t) = \hat{n}(\psi - \Omega t)$ を得ることができる。これは $\hat{n}_0(\psi, t)$ が不安定化した結果 Hopf 分岐により生じることが示され、雑音強度 μ を制御パラメータとして減少させたとき ((4.55) 式よりこれはもとの系での雑音強度 D に比例することに注意)、その臨界値

$$\mu_c = \frac{K}{2\pi a} \frac{\omega}{1 + \omega^2} \left(\exp\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - 1 \right) \quad (4.57)$$

以下で現れる。分岐点直後では伝搬速度が

$$\Omega \simeq \omega + \Re \Gamma_0 + \Im \Gamma_1, \quad (4.58)$$

$$\text{ここで} \quad \Gamma(\psi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Gamma_l \exp(il\psi)$$

と得られるが、これは $\psi(t)$ の平均振動数

$$\tilde{\omega} \simeq \omega + \Re \Gamma_0$$

とは一致しないことがわかる。このように得られた $\hat{n}(\psi - \Omega t)$ は、振動数 Ω により同期した発火状態を示している。

4.3.3 同期集団による機能単位

$K \rightarrow 0, D \rightarrow 0$ の極限で示された同期発火の存在は、より一般的なパラメータ領域において数値的に確認されている (参考論文 5 [29])。ここではそれに期待される機能について考えてみたい。特に生体系では様々な振動的応答が見られるが、以下ではそのうち近年の実験で得られた視覚系における細胞発火の同期を取り上げる。まず生理学実験により報告されている現象を紹介し、上記のパルス結合系による神経細胞集団のモデル化を示す。これを通して、与えられた刺激に対する動的な応答として一般に振動同期現象が担い得る機能的側面を見ることにする。

大脳皮質視覚領における振動同期 刺激応答における振動電位を報告した実験は多数あり、例えばウサギの嗅球 [31] などが知られているが、ここでは大脳皮質視覚領で見られる振動的応答 [32, 33, 34, 35] を取り上げる。Eckhorn らは哺乳類を用いた生理学実験によって、視覚皮質 17・18 野において、外部刺激に対する特徴的な振動を見出した。外部刺激としてある方向を持った光の棒が一定速度で受容野を横切った時、多電極応答に 40 ~ 60Hz の周波数帯付近での振動が現れる。これはまず、単一の機能単位 (大脳皮質におけるカラム (column)、一つの受容野にはほぼ対応) 内の神経細胞群の発火の同期を示すもので、カラムの持つ方向選択性が外部刺激と一致した場合に顕著に現れ、同時に LFP (local field potential) にも振動が見られる。更に、網膜上の異なる受容野にわたる空間的に広がった外部刺激 (1本の長い棒や複数の短い棒など) に対しては、それに対応した離れたカラム (すなわち異

なるハイパーカラム (*hypercolumn*) に属する) 間にも同期した振動が見られる場合がある。同期する場合に見られる振動は、刺激には依らずほぼ一定の上記の振動数であり、位相的にも引き込んでいる。同期の有無や程度は各カラムの持つ方向選択性やカラム間の空間的距離に依存し、また視覚刺激として与えられたパターンの大域的特徴 (例えば、1本の長い棒か2本に分かれた短い棒か、といった単一の受容野からは得られない情報) に依っても変わる。そのため神経細胞集団の発火の同期が、各受容野に与えられた刺激に個別に应答するだけでなく、大域的な特徴の抽出・表現や関連する入力刺激を互いに結び付けるの機構として働いていることが考えられた。

興奮素子によるモデル化 上記の実験結果に対するモデルがいくつか提案された [36, 37] が、ここでは特に前述の位相モデルによる興奮素子を用いた例 [29] を紹介する。他のモデルと比較した特徴として

- * 各素子が神経細胞に対応しており、それゆえ微視レベルのダイナミクスに立脚して細胞集団としてのカラム、更にハイパーカラムという構造および機能的階層を構築できること (集団振動による内部場を予め仮定した巨視レベルの記述から始めるモデル [36, 37] も多い)
- * 素子は外部入力を受けることで初めて振動性を示す、興奮素子であること

などが挙げられる。

各神経細胞は、(4.31) 式の integrate-and-fire 型の位相モデルにより記述し、それらの間にパルスの相互作用を考える。すなわち各細胞は、位相値 $\phi = 2\pi^-$ において発火し、同時に結合している他の細胞に撃力的な入力を与え、 $\phi = 0$ に戻る。ここで位相変数 ϕ は、細胞膜電位の脱分極をパラメトライズする量とみなし、それがある値に達するとインパルスを生じるものとする。正の結合によってパルスを受けた側の細胞では位相 ϕ が増加することより、興奮性のシナプスに対応している。ここでとった形では発火の影響が瞬時に他の細胞に伝わるため、伝達速度は無限大でシナプス遅延も考慮されていないが、それらの時間遅延や発火後の不応期を取り込んだモデルの拡張は容易にできる。これらの細胞によりカラムを構成するが、カラム内部は均質としそれ以上微細な構造は考えない。よって一つのカラムを構成する N 個の細胞は、互いに他の全ての細胞と等しい強度で結合するものとし、すなわち平均場結合をとる。実際の神経細胞は当然三次元空間に分布しているが、その神経軸索はかなり長く互いに密に結合している。また鉛直方向に見られる層構造は、ここでは直接関係ないものとして考慮しない。更に各細胞ごとに独立に加えられる雑音を仮定する。雑音の起源や性質として様々なものが考えられるが、ここでは特に細胞ごとのランダムな雑音のみを考慮した。以上よりまず一カラムのモデルは、(4.36), (4.37) 式;

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = a - \phi_i + \frac{K}{N} \sum_{j \neq i} \delta(t - t_j) + \eta_i(t), \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (4.59)$$

$$\phi_j(t_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.60)$$

$$\langle \eta_i(t) \rangle = 0, \\ \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t - t')$$

となる。ここで、 $K > 0$ により興奮性の結合のみを考える。系に与え得るパラメータは、細胞の自然振動数に相当する a 、パルス結合の強度 K 、雑音強度 D の三つである。

この系に対して外部から与えられる視覚刺激は、該当する神経細胞の膜電位を脱分極させるように作用する。これは (4.59) 式において、定数 a の値を変化させることに相当する。ここで a は各細胞が持っている唯一のパラメータであり、 $a = 2\pi$ を境に興奮性から振動性となりその振動数が決められることに注意しよう。単独の細胞は全て同一の構造をもつものと考え、外部刺激がない時の a の値は均一にとる。

まず一つを受容野を考える[†]。そこにある方向線分の光が外部刺激として加えられた結果、一つのカラムを構成する各カラムの神経細胞は、それぞれのカラムが持つ方向選択性に応じて a の値が変化する。すなわち選択的方向に一致した刺激を受けたカラムでは最も大きく a が増加し、一致の程度が減少するに従って a の増加量も少なくなる。つまり、ある特定方向の入力を受けている間は、同一カラム内の細胞では同一の、そしてカラムごとに異なる $a(t)$ の値をとることになる。こういった数個のカラムが一組となり一ハイパーカラムとして各受容野ごとに備わっており、複数のハイパーカラムにより空間的に広がりのある視覚刺激を受けることになる。すなわちハイパーカラム内の各カラムは同等であって、外部刺激を受けた時点で各々の方向選択性に応じて異なる a 値をとることで役割を分担しており、それにより入力刺激を反映する。

カラム間の結合もやはり細胞間の全結合により与える。相互に結合する二カラムに属する細胞は、決められた強度 K' で、互いの全細胞と均一にパルス結合をする。カラム間の結合の概念図を Fig.13 に示す。図では選択的方向を線分でラベル付けされた円が一つのカラムを表しているが、ここでは隣接カラム間のみ結合を考え、長距離の相互作用は考えていない。ただし隣接カラムとは、同一ハイパーカラム内で方向選択性が最も近いもの及び隣接ハイパーカラムにおいて同一方向選択性を持つものの二通りの場合を指す。

以上のように、(4.59), (4.60) 式によりカラム、更にその結合によりハイパーカラムをモデル化することで、先の実験と同様の刺激応答が得られることがわかる。例えば視覚刺激として折れ線を与えた場合、微小な折れ角の場合には刺激を受けた全カラムが同期することで一本の線分とみなし、折れ角が大きくなるに従って同期集団は二つに分離し二本の線分と捉える様子が見られる ([29] 参照)。その詳細には触れないが、このモデルでは振動的応答によって各カラムへの入力刺激を表現するとともに、カラム間の振動同期が入力パターンの大域的特徴を担っており、実験結果と同様の振舞いが得られる。

Dynamic Feature Linking についての一考察 (参考論文 6) 上のモデルでは、空間的に広がったパターンにおいて要素となる複数の線分、より一般的には素情報あるいは特徴 (*feature*) をあるまとまりごとに一つの対象として識別するにあたり、振動の同期ということが利用された。そこで振動現象が果たし得る役割について考察したい。

[†]ここで考える細胞の受容野 (*receptive field*) とは、いわゆる古典的定義として、視野上にスポット光を与えた時、その細胞のインパルス応答に影響をあたえ得る視野上の範囲とする。

特に *feature linking* と呼ばれる機構を考えてみよう。以下ではおおよそ次のような意味で用いる。処理系への入力情報が、空間的・時間的あるいは例えばスペクトル空間において広がりを持ったパターンであったとする。初期処理過程においてパターンから素情報/特徴（両者をここではほぼ同一視して使用する）を抽出した後、次の段階として更に高次の対象認識を行なうためには、同時に得られた多数の特徴を何らかの方法で統合する必要がある。特に潜在的には無限に多様なパターンの入力があり得る生物の処理系においては、予め保持している有限個のテンプレートとの照合によって対象の認識行なうわけにはいかない。抽出された多数の特徴が相互に何らかの関係性のあるまとまりを成すこと（まとまりごとに一つの対象として認識するために特徴を結び付けること）、またそのメカニズムを *feature linking* と呼ぶことにする。より高次処理過程からのフィードバックはここでは考えないものとする。

例えば、複数の互いに独立な会話が開いてくる中であって、特定の話し相手の音声を聞き分けて会話を続ける状況（*cocktail-party* 効果）や、一見無秩序に見えるドットパターンの中にまとまった図柄を見出すといったことを考えれば良い。あるいは視覚情報の統合過程一般を考えてもいい。網膜上の各細胞に入力された情報が、大脳皮質において各受容野上の線分として知覚され、次にそれが統合されて長さのある連続した線分とみなされ、更に他の線分と共により大きな対象を形成することになる。このように、素情報はあるまとまりごとに、同一対象に属するものとして結び付けられる。

当然ながら、‘それが机であり背景にある黒板を遮っている’といった認識にはより高次からの情報が必要である。先ほどの *cocktail-party* 効果にせよ、実際には会話の内容や話し相手に関する高次機能からのフィードバックなしに論じることができない。しかし初期から高次へと処理過程を進めるためには、まず初期過程における *feature linking* が必要であり、更にまた高次からのフィードバック信号を統合して処理する機構としても不可欠であることが指摘できる。そこでは、個別の特徴に分けられた入力情報を構造的または機能的関係によって動的に結び付けることが必要である。

共通の構造や機能に属する特徴群が相互に統合されることによってこそ、記憶されている概念を照合することが出来るとして、多様で複雑な入力情報の処理におけるこのメカニズムの重要性に早くから注目していた研究は、H. J. Reitboeck [38, 39] や von der Malsburg [40, 41, 42] らに代表される。そのいくつかを、提案された神経回路モデルを中心に見てみよう。

- ◎ H. J. Reitboeck は多電極実験で有名な生理学者であるが (Reitboeck 電極の開発者である)、視覚情報処理の初期過程から高次の統合過程、更には他の感覚情報や記憶との連想的統合における *feature linking* の重要性を強調しており、その基本は神経細胞集団の発火の時間的相関であるとしている。相関のある信号に意味を求める考え方は、神経回路モデル研究初期の McCulloch-Pitts にまで遡るが、これをより生理学的見地に立って発展させており、先に紹介した Eckhorn らの実験に結び付いた。
- ◎ Ch. von der Malsburg も、時間的に変動する発火パターンにおいて神経細胞間の相関に意味を持たせ、動的な *feature linking* を行なうような Dynamic Link Architecture を提案している。それが従来の神経回路モデルに対して果たす役割を次のように論じ

ている。柔軟で知的と呼び得るシステムには、少なくとも四つの構成要素が不可欠である；すなわち、短期記憶および長期記憶のデータ構造（現在の多くの神経回路モデルではそれぞれ神経細胞の活性化パターンとシナプス結合強度に対応）、およびそれぞれを組織するメカニズムである。しかしながら、短期記憶を定常状態における神経細胞の活性化パターンという静的なパターンでコーディングしている神経回路モデルでは、階層的なデータ構造を持つような記憶を表現するのは困難である。例えば神経細胞の階層的なグループ化を表現するには、それを記述する多くのデータが新たに必要となる。またモデルの応用例として、ヒトの顔を認識する視覚情報処理システムを構築している。Gabor 関数による Wavelet 展開で抽出された特徴に対して、動的に *linking* を行なっており、入力データを表現する画像領域と多数のパターンを記憶している対象領域のそれぞれにおいて特徴間の相関に基づくリンクを作り、二つの領域間でのグラフ照合を行なうものである。

聴覚系に対しても Neural Cocktail-Party Processor なるシステムを作っている。名前の示すとおり、雑音中であって一つの音声に選択的に注意を向ける機構のモデルであり、基本的には神経細胞発火の同期を用いている。現実の聴覚系をヒントにして、スペクトルの各周波数成分に対応した神経細胞によって特徴を抽出し、同時に発火した神経細胞群は同一の入力刺激を受けているとみなす。各神経細胞は入力により振動的発火をするため、複数の音源は振動の位相によりラベル付けをされることになる。このグループ化を *segmentation* とも呼んでいる。

同じく振動子を用いたモデルにより複数の図と地の *segmentation* を行なっている。興奮性—抑制性の神経細胞対による振動子でネットワークを構成し、その同期を利用した例である。

以上に見られるように、振動的性質を持つ素子がしばしば *feature linking* の機構に本質的な役割を果たしている。動的に変化する入力情報の統合、あるいは同時に複数の *segmentation* を行なう機構を考えるとき、情報を表現する素子の動的な性質に着目することが必要になる。振動は、最も単純な時間的秩序である。その位相が持つ連続自由度により、同時に複数のコーディングを行なうことも可能となるわけである。

おわりに

本論では、非平衡開放系に現れる単純な時間的パターンであるリミットサイクル振動に注目し、それによる集団秩序としての引き込み現象をダイナミクスを中心に見てきた。前半の第I部では、振動現象を縮約して記述するための位相モデルを紹介し、それによる解析例として平均場結合集団での引き込みを示す巨視的状态とその安定性について考察した。その結果予想外の機構も明らかになった。ここでは一つの数理モデルに絞り、それに対してどのような解析がどこまで可能かを考察したが、これはある特別な例に対する数理的興味にとどまらず、一般に適用し得るものだと考えられる。解析可能な範例に対する徹底的な数理的解析は、複雑で多様な非線形現象であるからこそ一層必要となる研究であろう。後半の第II部では、現象との対応や期待される機能的価値という観点から捉えた。散逸構造は非平衡開放系の代表的な例である生体系に広く見られ、振動現象も例外ではない。ここでは特に生体现象に現れるパーストのメカニズムを考察し、そのモデルとして複素変数モデルや位相記述による Integrate-and-Fire モデルを用いた。最近特に振動の引き込みを用いた工学的な応用もいくつか提案されており、生体にみられる現象の解析が、工学的応用のヒントとなることも期待できるであろう。従来は時間的自由度を持った素子が積極的に用いられることはなかったため、振動素子を用いたシステムに対する研究は今後の発展が望まれる。

付録 A

式 (3.15) の導出

同期集団による秩序変数への寄与 $Z(t)_s$;

$$Z(t)_s \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} n_s(\psi, t) \exp(i\psi) d\psi$$

であり、これは同期集団の各振動子に対する (3.12) 式 ;

$$\psi_\omega(t) = \overline{\Theta(t)}^\omega + \sin^{-1} \frac{\omega}{K|\overline{Z(t)}^\omega|}$$

より

$$n_s(\psi, t) d\psi = g(\omega) d\omega$$

に注意すると、

$$Z(t)_s = \int_{S_{\text{group}}} d\omega g(\omega) \exp\left\{i\left[\overline{\Theta(t)}^\omega + \sin^{-1} \frac{\omega}{K|\overline{Z(t)}^\omega|}\right]\right\}$$

となる。ここで、変数変換により ω から新たに y ; $y \stackrel{\text{def}}{=} \omega / K|\overline{Z(t)}^\omega|$ を用い、これに応じて積分範囲を

$$\int_{S_{\text{group}}} d\omega \simeq \int_{-1}^1 dy K|\overline{Z(t)}^\omega|$$

で近似する (引き込みの境界 $\omega = \pm K|\overline{Z(t)}^\omega|$ を $\omega = \pm K|\overline{Z(t)}^\omega|$ で近似) と、

$$\begin{aligned} Z(t)_s &\simeq \int_{-1}^1 dy K|\overline{Z(t)}^y| g\left(K|\overline{Z(t)}^y|\right) \times \exp\left[i\left(\sin^{-1} y + \overline{\Theta(t)}^y\right)\right] \\ &= \int_{-1}^1 dy K|\overline{Z(t)}^y| \exp(i\overline{\Theta(t)}^y) g\left(K|\overline{Z(t)}^y|\right) \sqrt{1-y^2} \quad (y \text{ に関する偶奇性より}) \\ &\simeq 2 \int_0^1 dy K|\overline{Z(t)}^y| g\left(K|\overline{Z(t)}^y|\right) \sqrt{1-y^2} \\ &\quad \left(|\overline{Z(t)}^y| \exp(i\overline{\Theta(t)}^y) \simeq \overline{Z(t)}^y \text{ により } Z(t) \text{ と } \Theta(t) \text{ の相関を無視} \right) \end{aligned}$$

と変形でき、右辺の最後の式は平均操作 $\overline{\mathbf{Z}(t)^y}$ での y 依存性がなければ $S(\overline{\mathbf{Z}(t)})$ となる。そこで、これを微小振幅 $\overline{\mathbf{Z}(t)^y}$ により展開すると

$$\mathbf{Z}(t) \simeq 2Kg(0) \int_0^1 dy \overline{\mathbf{Z}(t)^y} \sqrt{1-y^2} + K^3 g''(0) \int_0^1 dy y^2 \sqrt{1-y^2} |\overline{\mathbf{Z}(t)^y}|^2 \overline{\mathbf{Z}(t)^y} + \dots$$

であるが、この第一項が

$$2Kg(0) \int_0^1 dy \overline{\mathbf{Z}(t)^y} \sqrt{1-y^2} = (1+c) \overline{\mathbf{Z}(t)}$$

と書けるためには、振動子に依らない時間平均を

$$\overline{\mathbf{Z}(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{\pi} \int_0^1 dy \overline{\mathbf{Z}(t)^y} \sqrt{1-y^2}$$

と定義すればよい。このとき、第二項以降の高次項で $\overline{\mathbf{Z}(t)^y}$ を $\overline{\mathbf{Z}(t)}$ で置き換えることによるずれは第一項のそれより更に高次の補正となる。このようにして求めた上記の表式が本文中の(3.15)式に他ならない。

付録 B

式(3.61)の導出

一様分布の場合には、

$$M(t) = \frac{K \sin at}{2a t}$$

となり $M(t)$ が $O(t^{-1})$ でしか減衰しないため、式(3.26)のように $h(t)$ に対する Markov 近似による展開；

$$h(t-t') \simeq h(t) - t' \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

を行なうことができず、よってこれに基づく主論文2での γ の定義式；

$$\gamma^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty M(t) t dt$$

を用いることはできない。実際これは $\frac{K}{2a^2} \int_0^\infty \sin t dt$ となり収束しない。同様のことを、積分 $\gamma^{-1} = -\frac{K}{2a} \int_0^\infty \text{si}(at) dt$ を実行する際にも注意する必要がある。すなわち、

$$-\int_0^\infty \text{si}(at) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt \int_{at}^\infty d\omega \frac{\sin \omega}{\omega}$$

に対して、 t 積分と ω 積分の順序交換をしてしまうと

$$\int_0^\infty d\omega \int_0^{\frac{\omega}{a}} dt \frac{\sin \omega}{\omega} = \frac{1}{a} \int_0^\infty \sin \omega d\omega = \infty$$

となり求めることができない。ここでは

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} &= \frac{K}{2a^2} \int_0^\infty dt \int_{at}^\infty d\omega \frac{\sin \omega}{\omega} \\ &= \frac{K}{2a^2} \int_0^M dt \int_{at}^\infty d\omega \frac{\sin \omega}{\omega} + \frac{K}{2a^2} \int_M^\infty dt \int_{at}^\infty d\omega \frac{\sin \omega}{\omega} \quad (\forall M \gg 1) \end{aligned}$$

としたとき、

$$\text{第一項} = \frac{K}{2a} \int_0^M dt \int_{at}^\infty d\omega \frac{\sin \omega}{\omega}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K}{2a} \int_0^{aM} d\omega \int_0^{\frac{\omega}{a}} dt \frac{\sin \omega}{\omega} + \frac{K}{2a} \int_{aM}^{\infty} d\omega \int_0^M dt \frac{\sin \omega}{\omega} \\
&= \frac{K}{2a} \left(\frac{1}{a} \int_0^{aM} \sin \omega d\omega + M \int_{aM}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega \right) \\
&= \frac{K}{2a} \left\{ \frac{1}{a} (1 - \cos(aM)) - M \text{si}(aM) \right\} \\
&\sim \frac{K}{2a} \frac{1}{a} \quad (M \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{第二項} &\sim \frac{K}{2a^2} \int_{at}^{\infty} dt \frac{\cos t}{t} \quad (M \rightarrow \infty) \\
&= -\frac{K}{2a^2} \text{ci}(aM) \\
&\sim -\frac{K}{2a^2} \frac{\sin(aM)}{aM} \quad (M \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

より、 $\gamma^{-1} = \frac{K}{2a^2}$ を得る。

謝辞

大学院課程を通じて常に貴重な御指導・御議論を賜わり、暖かい励ましを与えて下さり、また本論文の作成にあたっては的確な御助言を頂きました蔵本由紀教授に深く感謝致します。研究を進めるにあたって、様々な議論をして下さった蔵本研究室の皆様、特に共同研究者として、最初に実験論文を読み構想を練るところから最終的な論文の完成まで研究の全過程にわたりあらゆることを議論し意見交換して下さい、青柳富誌生氏、茶碗谷毅氏、奥田浩司氏に感謝致します。生理学実験に関して様々な情報を提供して下さい、素人である筆者の質問にも丁寧に答えて下さった津田一郎助教授に感謝致します。大学院入学当初から様々な形で御激励頂き、特に修士課程での研究を一貫して御指導下さいました相沢洋二教授に心から感謝致します。電子メールの交換という形で活発な議論を繰り返し、新たに多くの刺激を与えて下さったS.Strogatz博士に感謝致します。神戸大学において筆者の研究に御理解を下さり、様々な議論等を通して常に刺激を与え御指導下さいました北村新三教授に深く感謝致します。最後に計算機環境を整え本論文の完成を助けて下さいました村尾元氏、武藤武士氏をはじめとする同室の皆様心から感謝致します。

参考文献

- [1] A. T. Winfree, *Journal of Theoretical Biology*, Vol.16, p.15, 1967.
- [2] A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time*, Biomath. Vol.8 (Springer-Verlag Berlin), 1980.
- [3] 川上正澄、高坂睦年編、「生体リズムの発現機構」(理工学社), 1984.
- [4] 岡田節人、「生物と協同現象」(日本生物物理学会編), p.109, 1981.
- [5] J. Buck and E. Buck, *Nature*, Vol.211, p.562, 1966.
- [6] J. Guckenheimer, *Journal of Mathematical Biology*, Vol.1, p.259, 1975.
- [7] Y. Kuramoto, in *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, edited by H. Araki, Lecture Notes in Physics, Vol.39 (Springer-Verlag Berlin), p.420, 1975.
- [8] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, (Springer-Verlag Berlin), 1984.
- [9] Y. Kuramoto, RIFP-577, 1984.
- [10] Y. Kuramoto, *Progress of Theoretical Physics Suppl.*, No.79, p.223, 1984.
- [11] 蔵本由紀、動的縮約の構造(講義ノート)、物性研究, 49-3, p.299, 1987.
- [12] H. Daido, *Journal of Physics A*, Vol.20, L629, 1987.
- [13] H. Daido, *Progress of Theoretical Physics*, Vol.81, p.727, 1989.
- [14] H. Daido, *Journal of Statistical Physics*, Vol.60, p.753, 1990.
- [15] H. Sakaguchi, *Progress of Theoretical Physics*, Vol.79, p.39, 1988.
- [16] Y. Kuramoto, I. Nishikawa, *Journal of Statistical Physics*, Vol.49, Nos.3/4, p.569, 1987.
- [17] Y. Kuramoto, I. Nishikawa, *The Second Yukawa International Symposium on Cooperative Dynamics in Complex Physical Systems*, edited by H. Takayama, Springer Series in Synergetics, Vol.43 (Springer-Verlag Berlin), p.300, 1988.
- [18] S. Strogatz and R. Mirollo, *Journal of Statistical Physics*, Vol.63, Nos.3/4, p.613, 1991.
- [19] R. Mirollo and S. Strogatz, *Journal of Statistical Physics*, Vol.60, p.245, 1990.
- [20] J. Rinzel and Y. S. Lee, in *Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry*, edited by H. G. Othmer (Springer-Verlag Berlin). Lecture Notes in Biomathematics, Vol.66, p.19, 1986.
- [21] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, *J. Physiol.*, Vol.117, p.500, 1952.
- [22] T. R. Chay and J. Keizer, *Biophys. J.*, Vol.42, p.181, 1983.
- [23] R. E. Plant, *Journal of Mathematical Biology*, Vol.11, p.15, 1981.
- [24] C. S. Peskin, *Courant Inst. of Math. Sci. Publication*, New York, p.268, 1975.
- [25] R. Mirollo and S. Strogatz, in *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1990.
- [26] Y. Kuramoto, Collective Synchronization of Pulse-Coupled Oscillators and Excitable Unis, *Physica D*, Vol.50, p.15, 1991.
- [27] Y. Kuramoto, T. Aoyagi, I. Nishikawa, T. Chawanya and K. Okuda, *Progress of Theoretical Physics*, Vol.87, No.5, p.1119, 1992.
- [28] L. F. Abbott, *Journal of Physics A*, Vol.23, p.3835, 1990.
- [29] T. Chawanya, T. Aoyagi, I. Nishikawa, K. Okuda and Y. Kuramoto, *Biological Cybernetics*, in press, 1992.
- [30] K. Okuda and Y. Kuramoto, *Progress of Theoretical Physics*, Vol.86, p.1159, 1990.
- [31] W. J. Freeman, *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.*, Vol.44, p.586, 1978.
- [32] R. Eckhorn et al., *Biological Cybernetics*, Vol.60, p.121, 1988.
- [33] C. M. Gray, A. K. König and P. Singer, *European Journal of Neuroscience*, Vol.2, p.607, 1990.
- [34] C. M. Gray, A. K. König, P. Engel and P. Singer, *Nature*, Vol.338, p.334, 1989.
- [35] C. M. Gray and P. Singer, *Proceedings of National Academy of Science U.S.A.*, Vol.86, p.1698, 1989.

- [36] H. Sompolinsky, D. Golomb and D. Kleinfeld, *Proceedings of National Academy of Science U.S.A.*, Vol.87, p.7200, 1989.
- [37] H. Sompolinsky, D. Golomb and D. Kleinfeld, *Physical Review A*, Vol.43, p.6990, 1991.
- [38] H. J. Reitboeck, *Sensory Processing in the Mammalian Brain*, edited by J. S. Lund (Oxford Univ. Press), p.307, 1989.
- [39] H. J. Reitboeck et al., *Synergetics on Cognition*, edited by H. Haken, (Springer-Verlag Berlin), p.112, 1989.
- [40] Ch. von der Malsburg and W. Schneider, *Biological Cybernetics*, Vol.54, p.29, 1986.
- [41] J. Buhmann and Ch. von der Malsburg, *Proc. of IJCNN Seattle, WA* p.11603, 1991.
- [42] M. Lades et al., *IEEE Trans. on Computers*, in press, 1992.

図の説明

Fig.1 (a) リミットサイクル軌道 C 上で定義された位相 ϕ_n と C を含む微小領域 C' . (b) C' 内で式 (1.2) により定義された位相によるアイソクロン $\phi(\mathbf{x}) = \text{const.}$

Fig.2 $H \neq 0$ への緩和に対する線形緩和関数 $\Theta(t)$. 図には $s-s$, $d-d$ 及び全系に対する $hS'(H)\Theta(t)$ を示す ($\Theta_{s-d}(t)$ は殆んど 0 となり横軸と重なるため表示していない). $H = 0.05, h = 0.001$. ここでは $N = 1000$, $g(\omega)$ は $a = 1.0$ の Lorentz 分布とした.

Fig.3 $\epsilon = 0.01$ へクエンチした場合の秩序変数 $Z(t)$ の緩和. 同期集団 (s) 及び非同期集団 (d) による $Z(t)$ を示す. ここでは $N = 1000$, $g(\omega)$ は $a = 0.5$ の Lorentz 分布とした.

Fig.4 式 (3.46) の数値積分により求めた分布関数. $H = 0.05$, $g(\omega)$ は $a = 1.0$ の Lorentz 分布とした. $n_d(\phi, t), n_s(\phi, t)$ 及びその和 $n(\phi, t)$ を $t = 0, 1, 5, 10$ に対して示す. $t = 5$ では、 $t = 10$ では完全に一様分布 $n(\phi) = 1/2\pi \approx 0.1591549$ となる.

Fig.5 (a) Chay-Keizer モデルにおける早い変数 $V-n$ 系のパラメータ Ca に対する分岐を示す $Ca-V$ 図. 添字 ss は定常解, osc はリミットサイクル解を表す. 図中では Ca_{HB} における Hopf 分岐により生じるリミットサイクル解の最大値 (max), 最小値 (min) 及び時間平均値 (mean) を示す. リミットサイクル解はその周期が Ca とともに増加し、サドル解とぶつかる Ca_{HC} において無限大となり消滅する. (b) Ca が遅い変数として変化した場合の解軌道に見られる、静止状態 (定常解 V_{ss} に相当) とバースト状態 (リミットサイクル解 V_{osc} に相当、図中では網掛けにより示されている) のヒステレシスループ. ([20] より引用)

Fig.6 Plant モデルにおける早い変数系のパラメータ Ca に対する分岐を示す $Ca-V$ 図. このリミットサイクル解 V_{osc} では、 Ca_{HB} における Hopf 分岐は亜臨界であり、 Ca_{HC} におけるホモクリニックコネクションは定常解 V_{ss} の saddle-node 分岐と縮退している. ([20] より引用)

Fig.7 (a) Plant モデルにおける早い変数系の分岐面をパラメータ Ca, x に対して示す. Fig.6 は破線の x 値における分岐図とみなせる. (b) Ca, x が遅い変数として変化した場合の解軌道. パラメータにより定性的に異なる振舞いが見られ、b, c が周期的バースト、a が slow wave に対応すると考えられる. ([20] より引用)

Fig.8 2 タイプの周期的バーストの波形の違いを定性的に示す. ([20] より引用)

Fig.9 タイプ II のバーストの例であるモデル (4.17), (4.18) におけるヒステレシスループ.

Fig.10 タイプ I のバーストの例であるモデル (4.21), (4.22) における複素変数 $Z_i(t)$ の時間発展の概念図.

Fig.11 タイプIIのバーストの例である Integrate-and-Fire モデルで、興奮性パルス型相互作用を行なう二振動子間の位相同期過程。

Fig.12 (4.46) 式の定常解を (4.51), (4.52) 式の解としてグラフより求めたもの。a 値の異なる i,ii,iii を示す。白点は不安定解。

Fig.13 (4.59),(4.60) 式で与えられるカラムを複数結合したハイパーカラム。各円がカラムを表し、その選択的方向が線分の方角で示されている。ここでは選択的方向の異なる8つのカラムから一ハイパーカラムが構成され、一つの受容野に対応する(簡単のため、視野の空間を一次元とした)。隣接する円間を結ぶ線がカラム間相互作用の存在を表す。

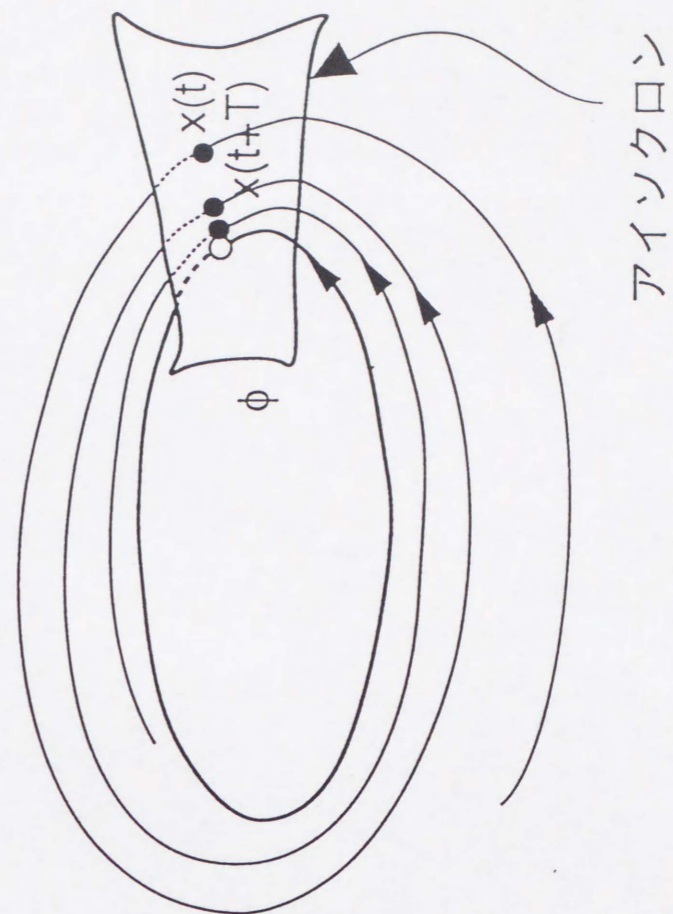


Fig.1(b)

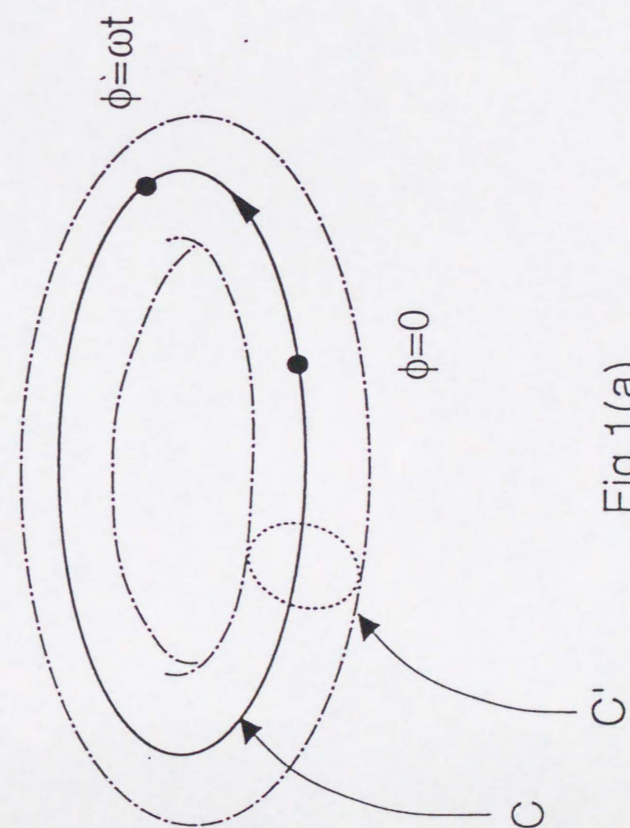


Fig.1(a)

Fig.2 Relaxation Function

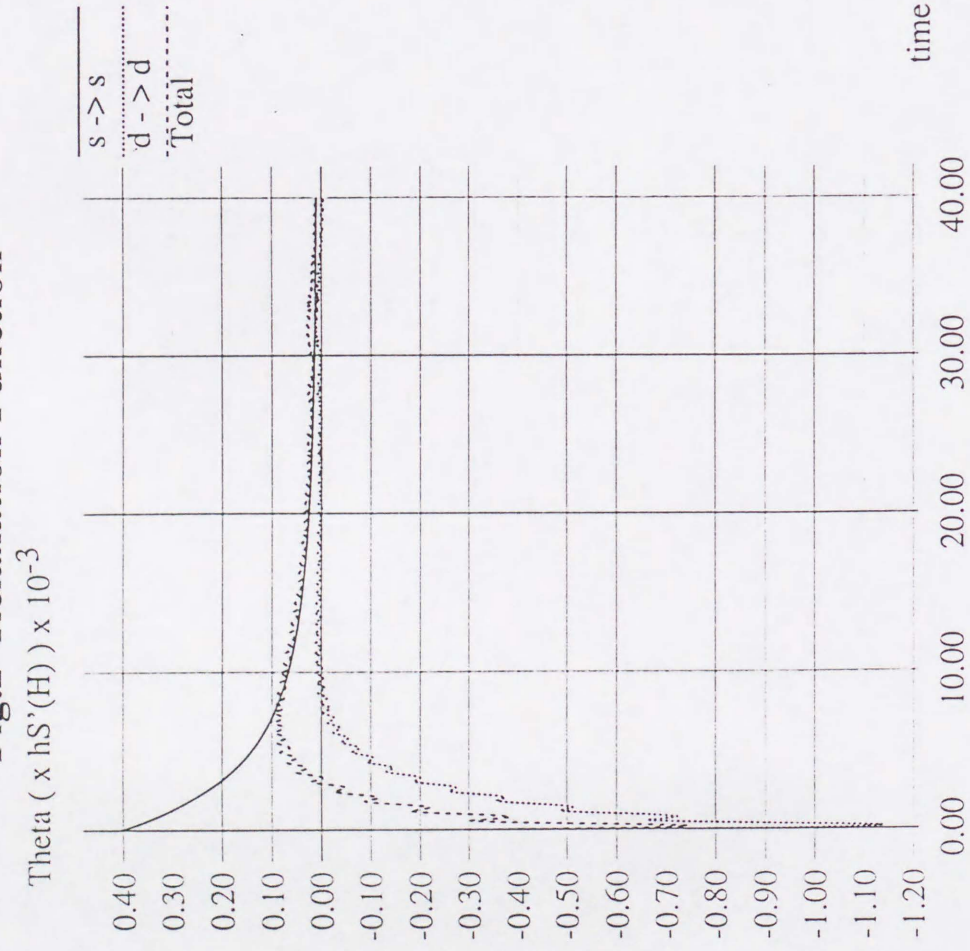


Fig.3 Relaxation of Order Parameter Z(t)

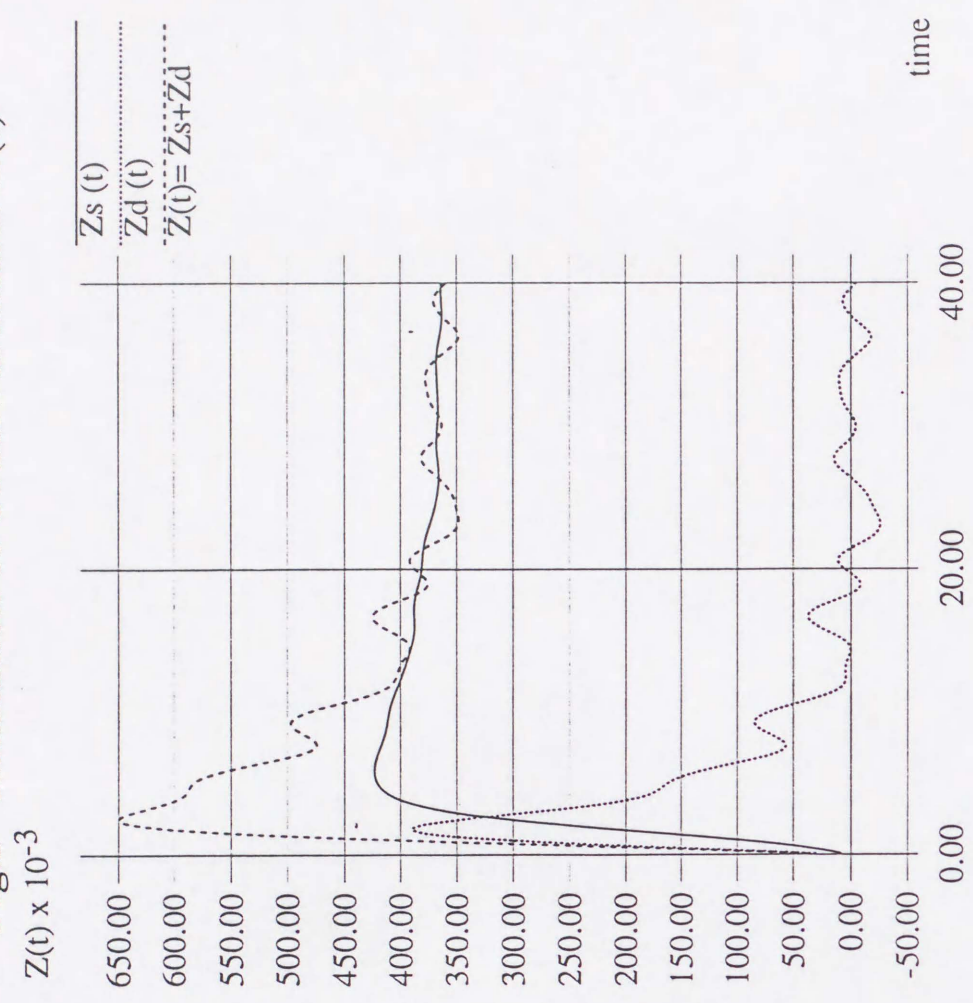
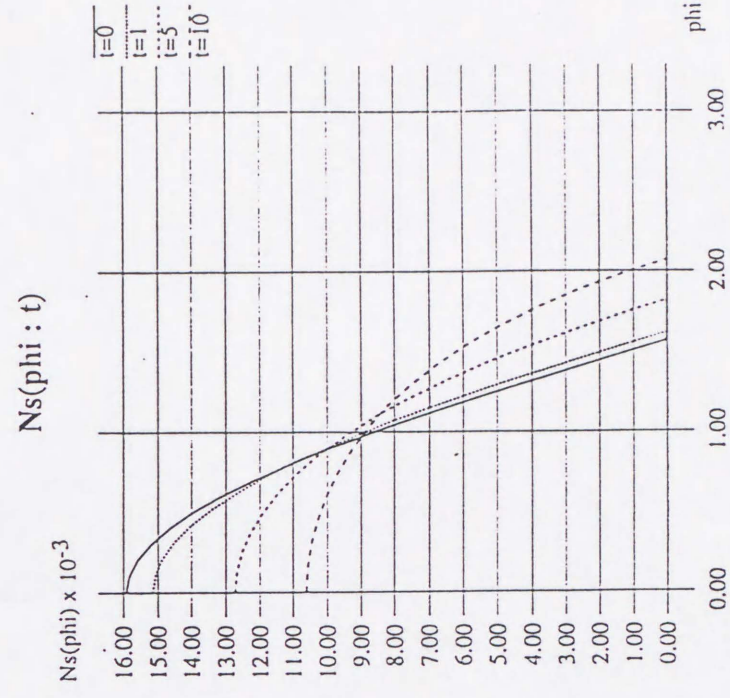
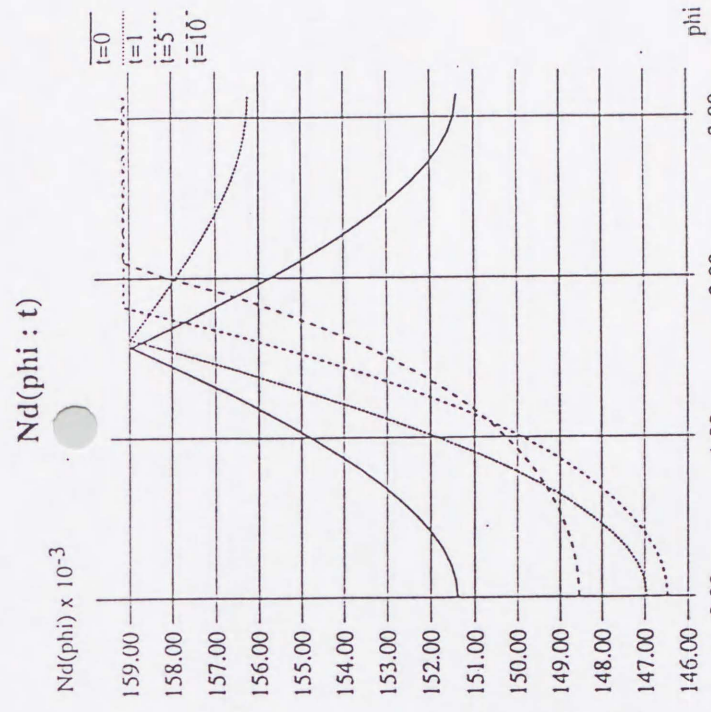
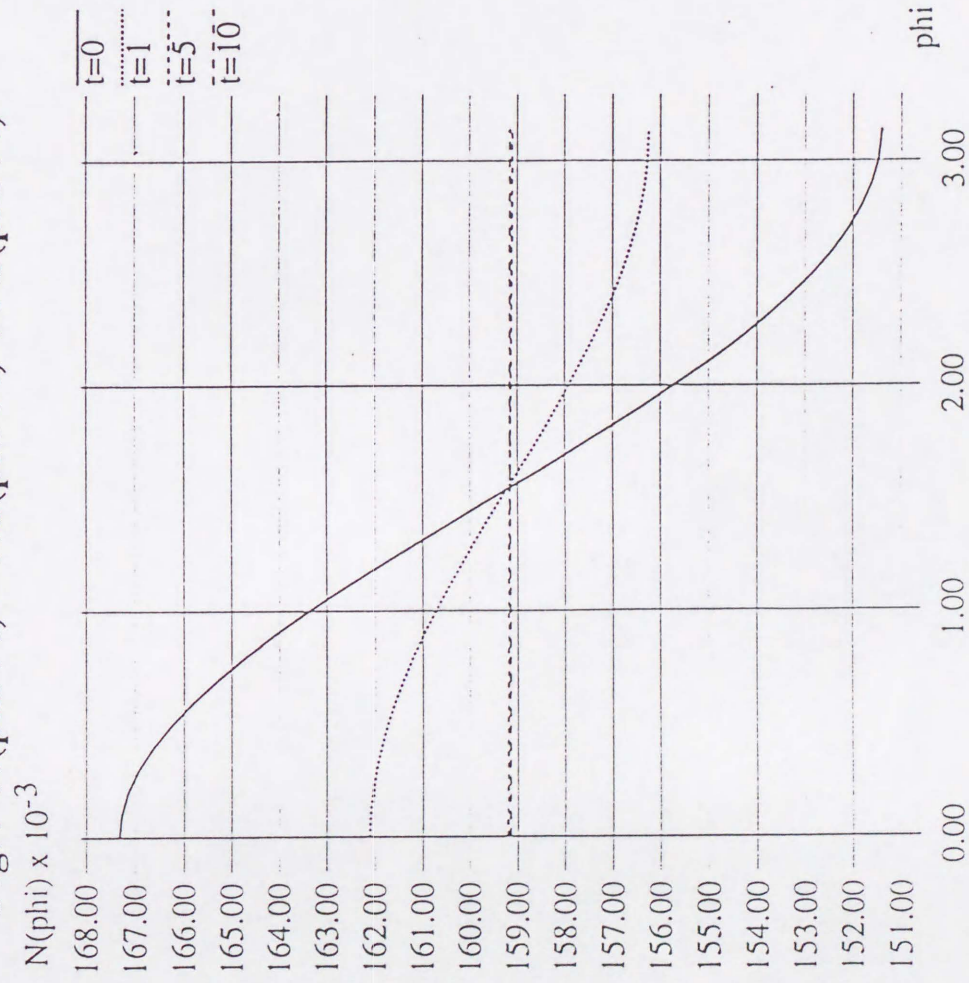


Fig.4 $N(\text{phi} : t) = N_d(\text{phi} : t) + N_s(\text{phi} : t)$



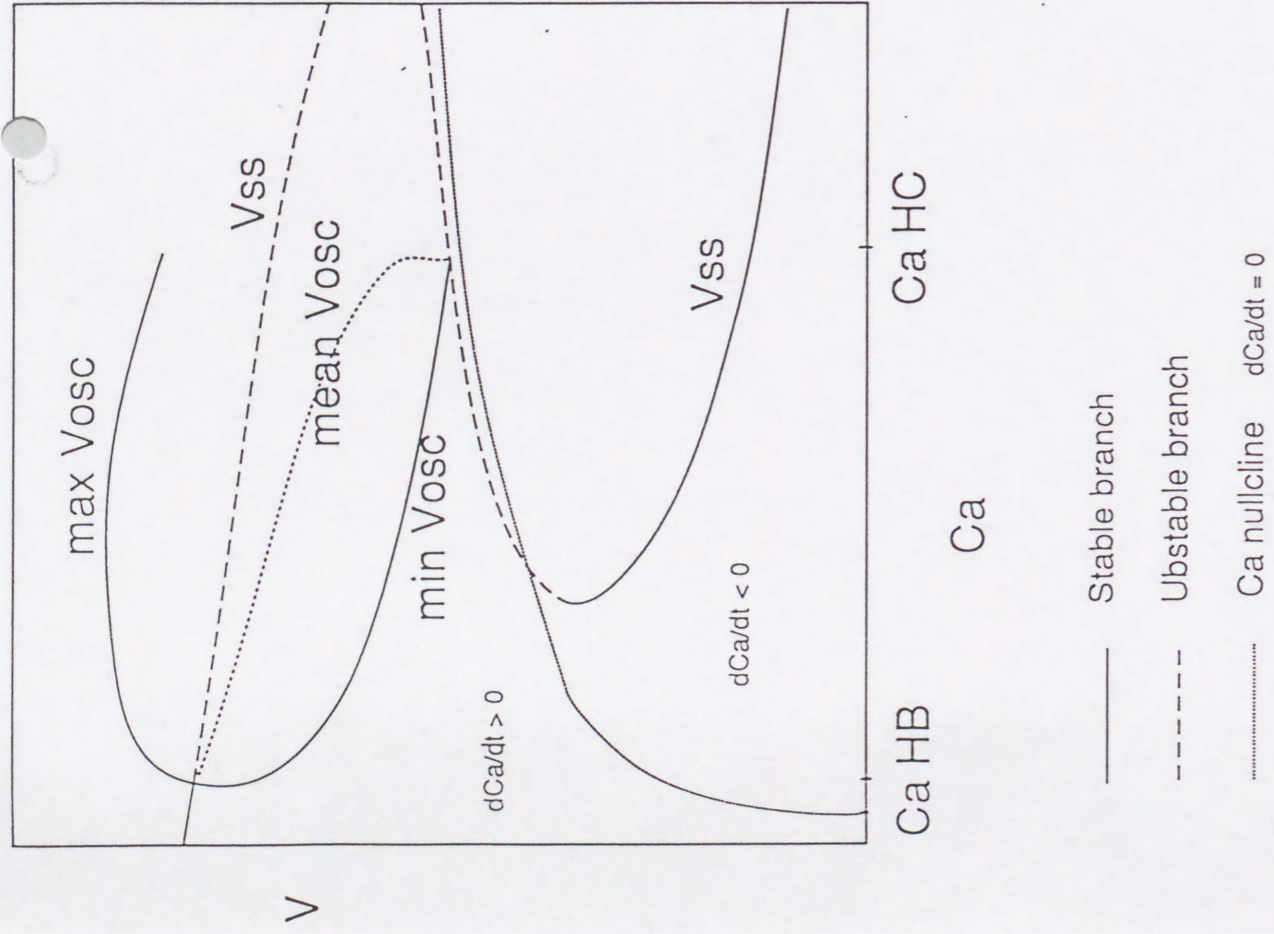


Fig.5(a)

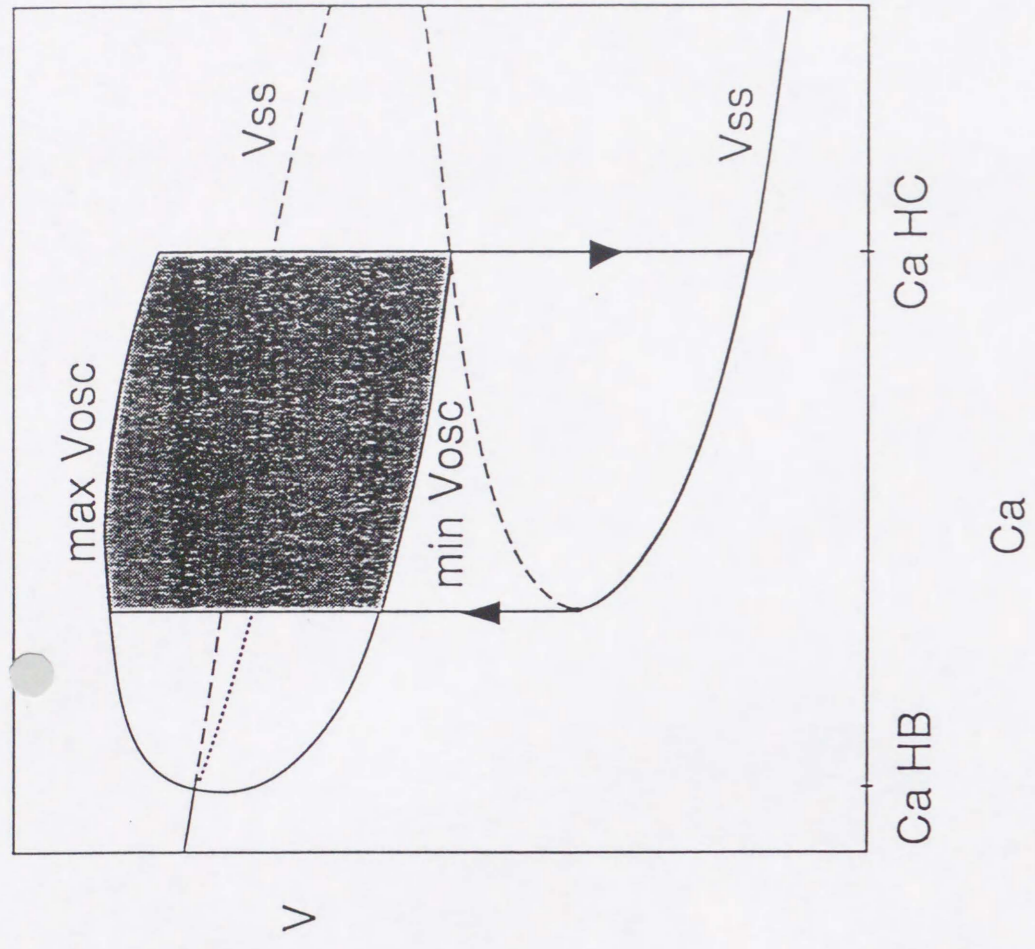


Fig.5(b)

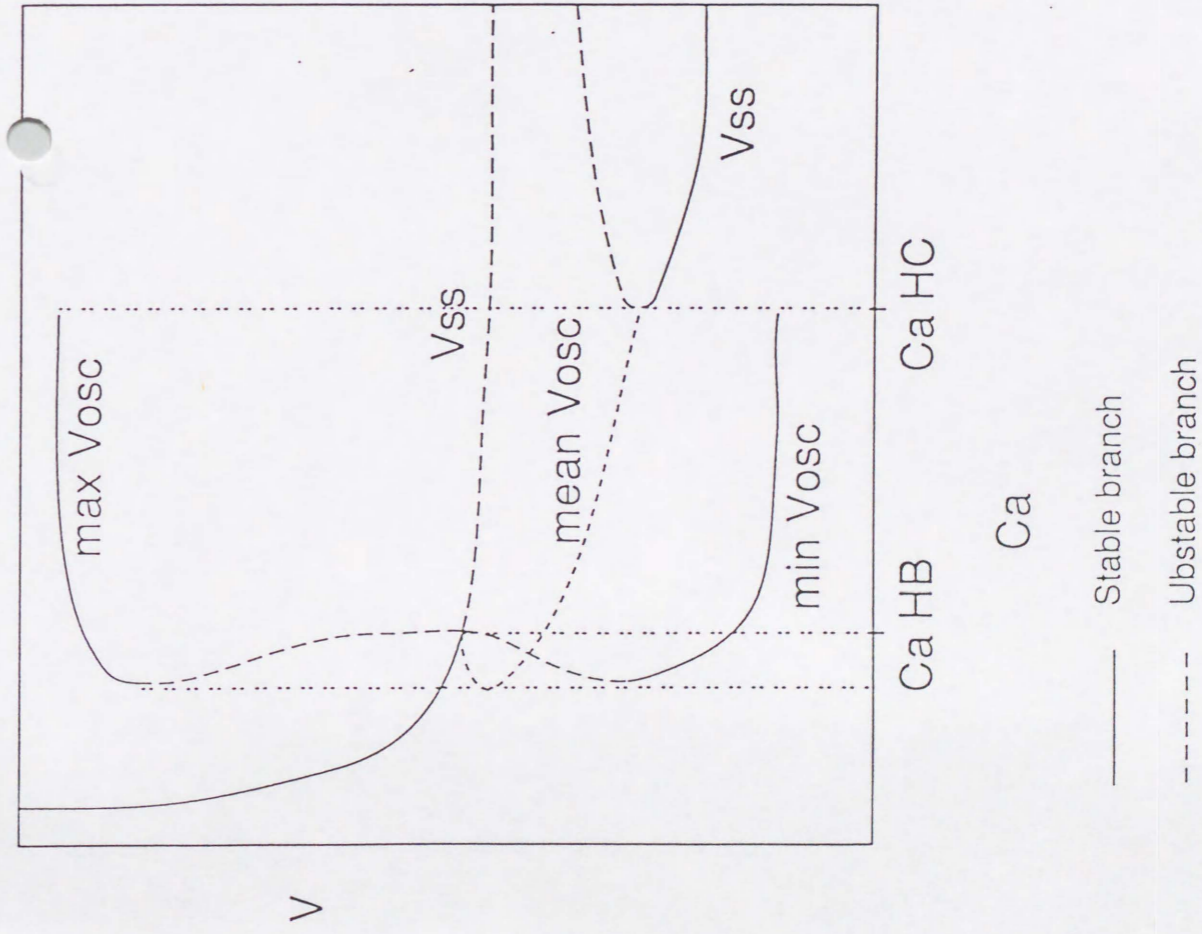


Fig.6

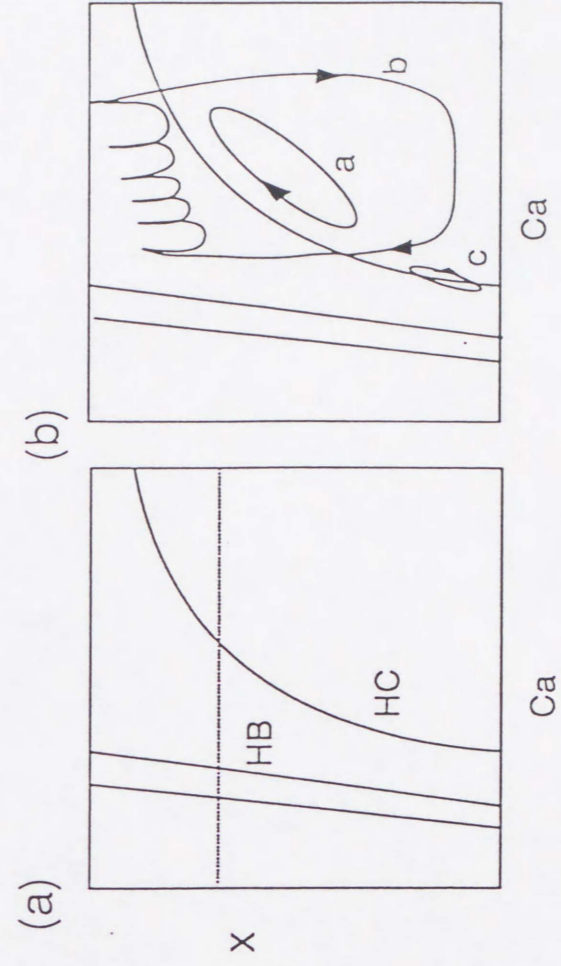
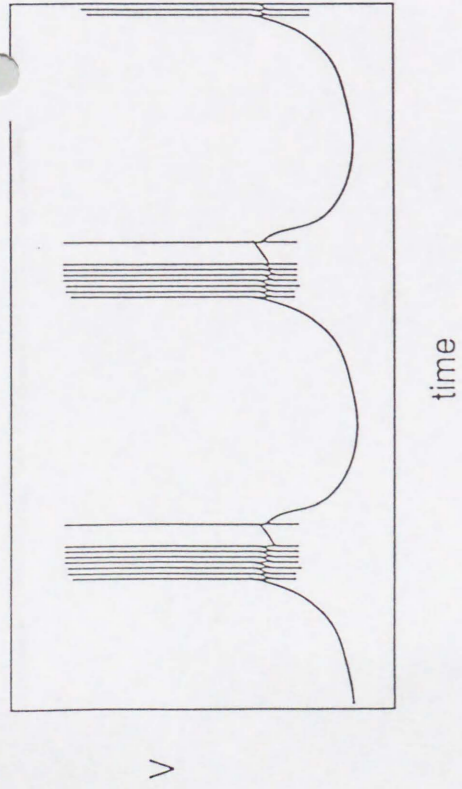


Fig.7

タイプ1のバースト



タイプ2のバースト

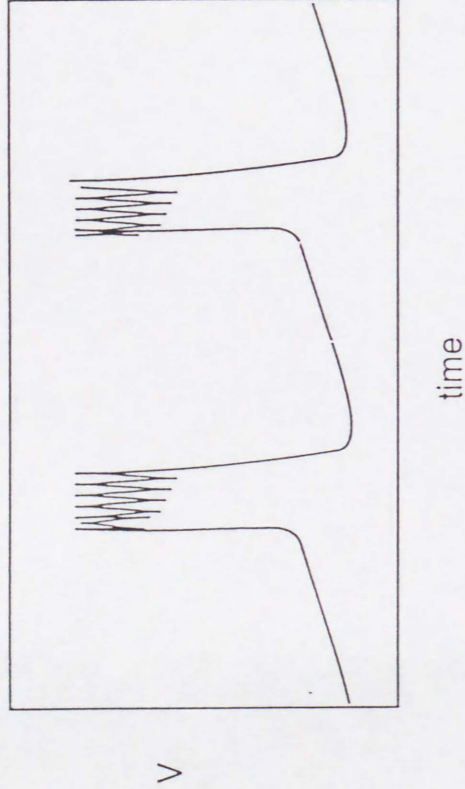


Fig.8

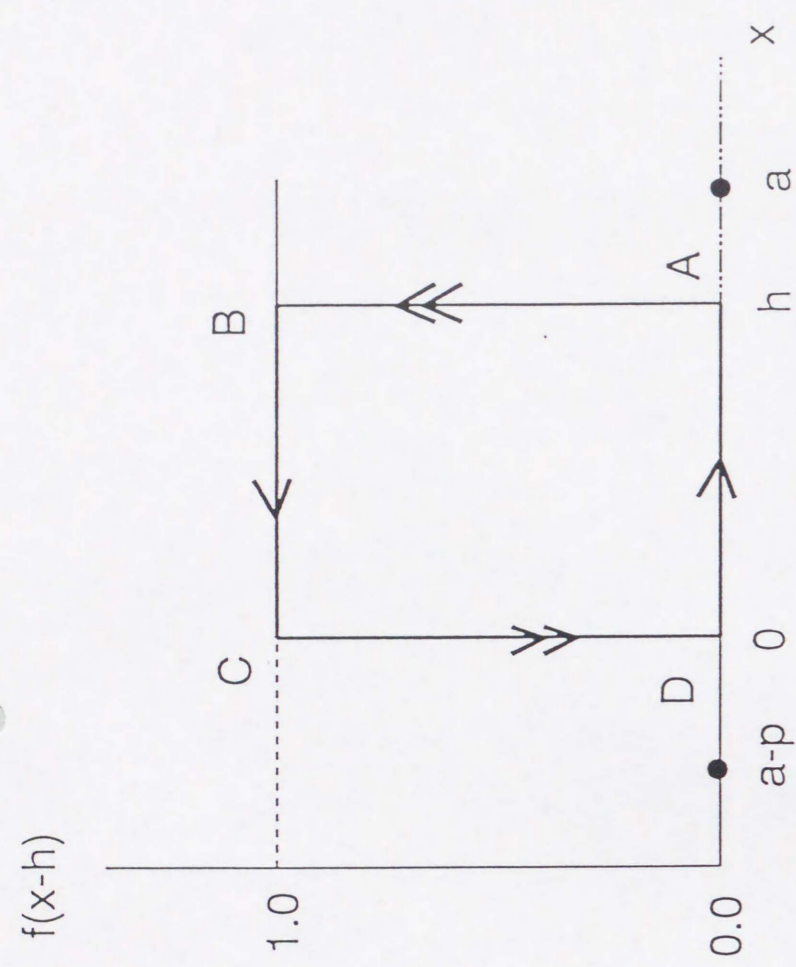
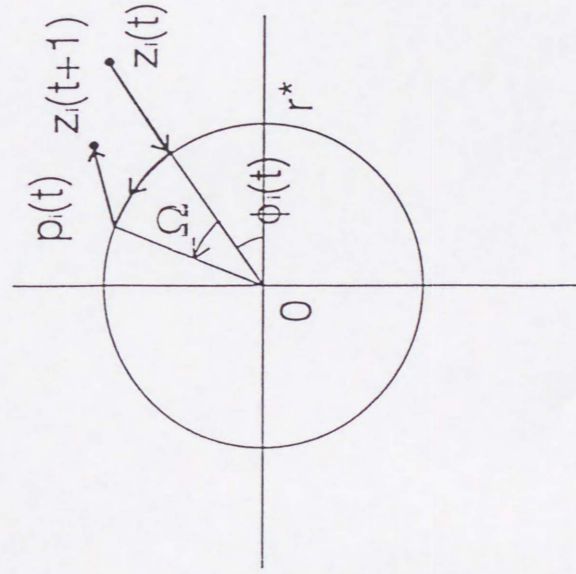


Fig.9



複素平面上での $z_i(t)$ の時間更新

Fig.10

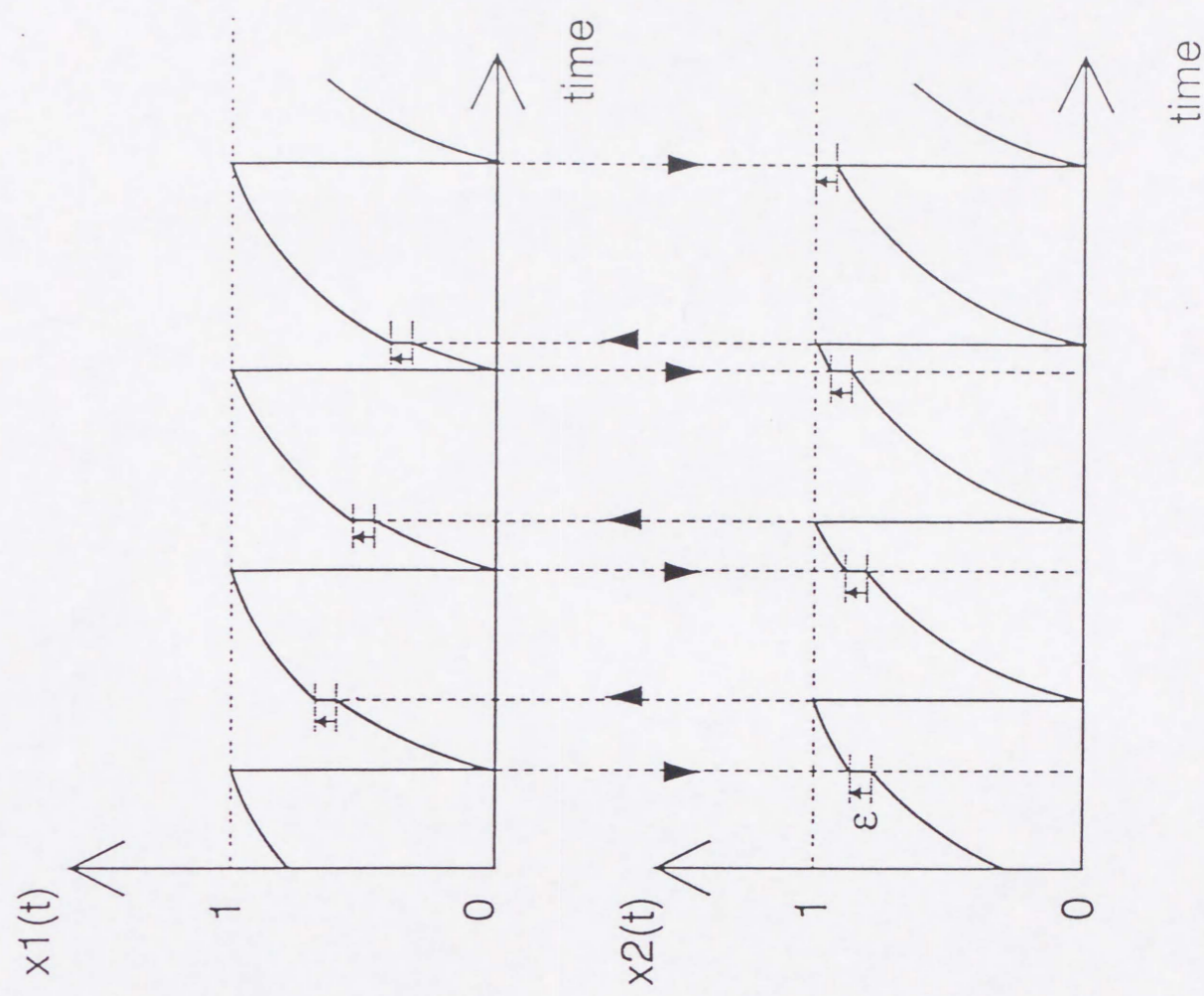


Fig.11

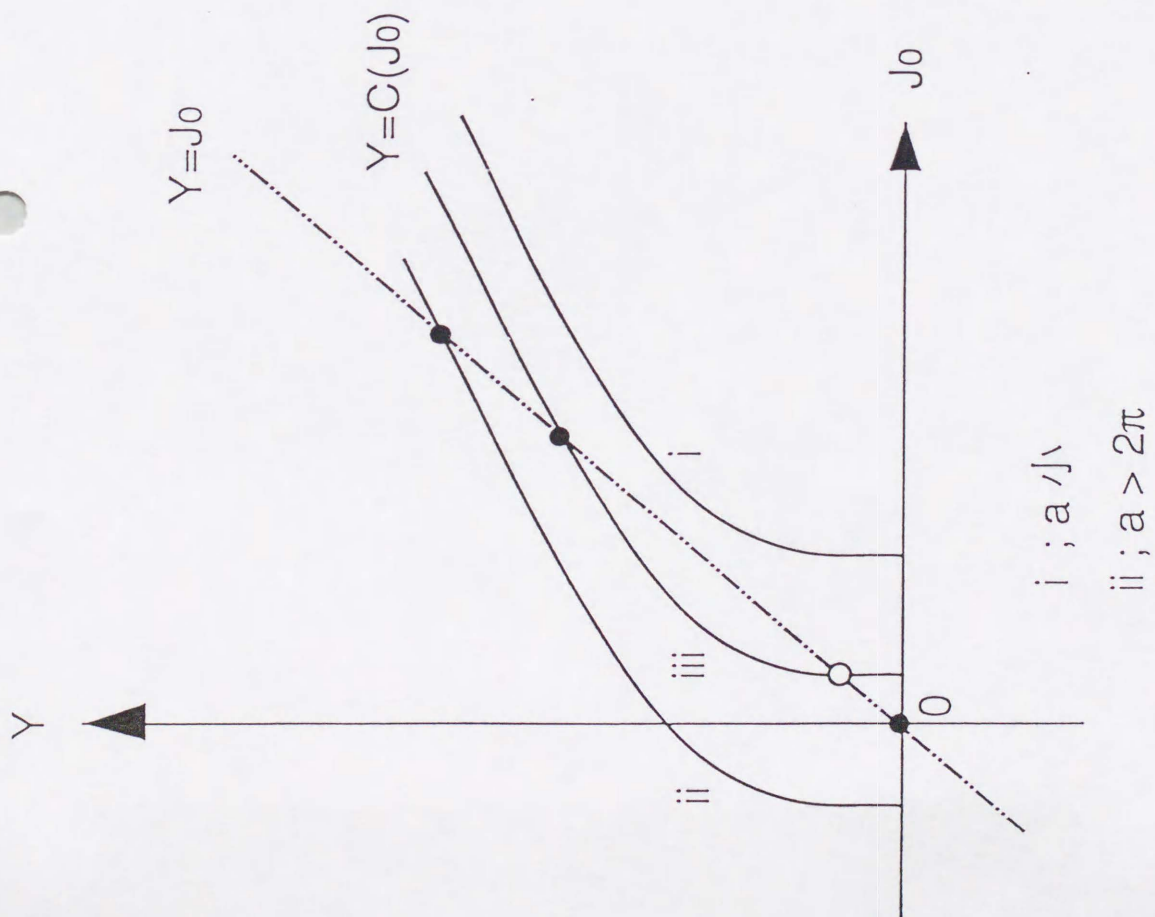


Fig.12

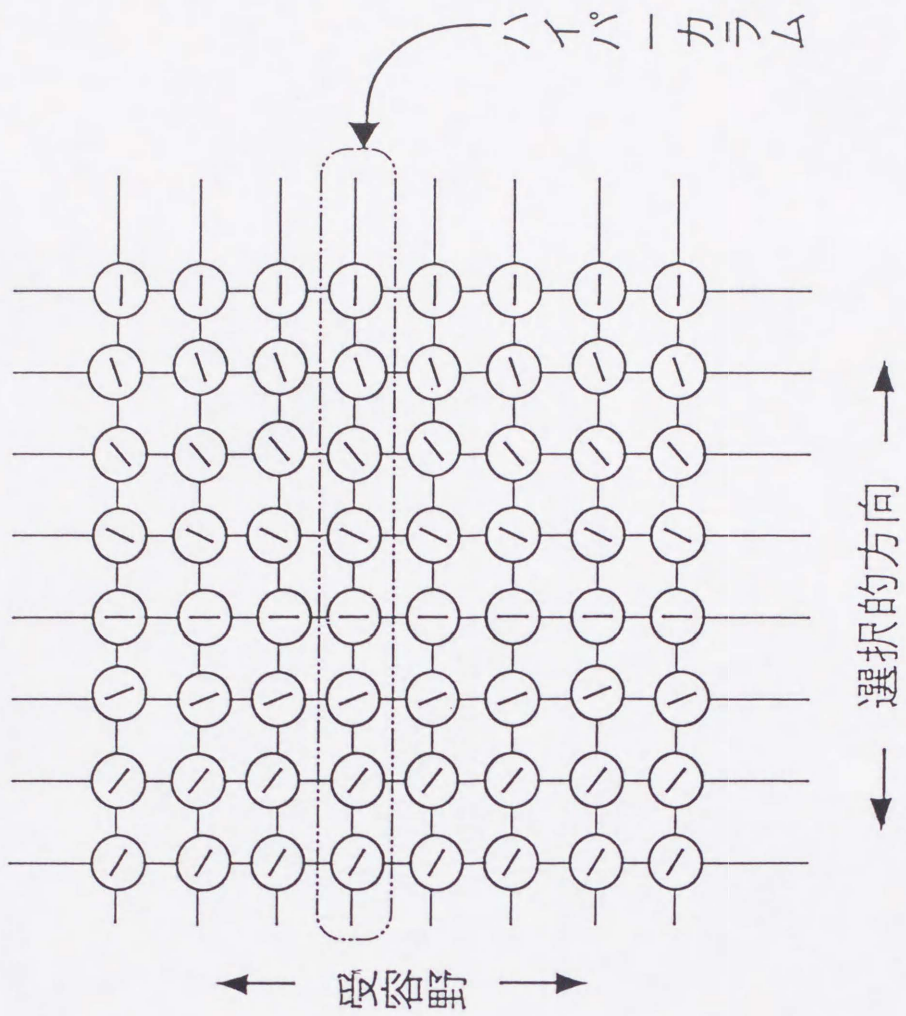


Fig.13