数理解析研究所講究録
第 1739 巻 2011 年 251-263

特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか（III）—2

—２０世紀後半の主題（３）：後半からの新しいもの—

（新々概念と応用の系列）

代表例：　カタストロフィー理論　超局所解析的特異性　時空の特異点理論

芝浦工業大学　阿部剛久（Takehisa Abe）

Shibaura Institute of Technology

標記のテーマに関する本シリーズもようやく現状近くの展望に至って、上記の代表例に見られるように、人々の記憶に比較的まだ新しさと話題性を含むものがあろうと思われる。これらの詳細な議論は参考文献が身近に豊富であろうから、それらの文献に譲って、ここでは、代表例としてもつ意義とその重要性に重点を置いて説明を試み、最後に残された課題等に触れる。

主題の代表例について　本シリーズの前回までの議論［1］のうち、今回の主題に関しては、特に（iii）と（v）において既に部分的に触れられ、それらの説明が予告された。ここでまとめてそれぞれが含む内容をやや詳細に述べて、本論への案内とする。

まず「**カタストロフィー（またはカタストローフ）理論**」は、R. Thom によって１９６９年［２］、および７２年［３］に初めて定式化された。その基礎に当る理論は、Thom による可微分写像の安定性に関する１９６２年［４］、６９年の研究［５］、および J. N. Mather による１９６８年—７１年の一連の論文［６］によって究明されるとともに、開折の概念と可微分写像の特異点の一般的分類の確立、これらの結果に基づいて初等カタストロフィーの基本的分類を得た。これらの現象面のイメージは時間に依存しない構造の静的モデルを与えるものとして、１９７０年以後に、E. C. Zeeman、その他の人々によって自然科学、社会科学の諸分野等における不連続現象の構造的説明に活発に応用された。ここでは、応用一般については概観するに留める。

つぎに「**超局所解析的特異性**」であるが、簡明な呼称とは異なり、そこに含まれる解析学としての精緻さと数学的構成の壮大さ、応用面への豊かな多様性は近代的数学の一大金字塔にたとえられよう。１９４５年の L. Schwartz の超関数の理論の出現を機に、前世紀の後半に入っていくつかの超関数の定式化が提起されたが、中でも１９５８年から展開が始まる佐藤の超関数論はそのアイディアと定式化において他に類を見ないこの方面の基礎理論としての普遍性と、応用面への様々な広がりを可能にしてきた方法としての一般性を兼ね備えたもので、今さら云うにおよばないだろうが、今後の数学史上においても微積分に比肩される極めて高い評価が与えられよう。これらを貫く代数的精神の創造は、広く代数解析学としてその優れた規範をなすと云える。この偉大な数学の確立と発展に本質的に貢献されてきた佐藤幹夫、小松彦三郎、森本光生の各氏をはじめ、柏原正樹、河合隆裕、・・・の各氏と続く多くの日本人数学者および故 A. Martineau、R. Harvey, P. Schapira、・・・等の国外数学者の各氏に対して、本シリーズの筆者は限りない称賛とともに敬意を表する次第である。さて、超局所解析とよばれる言葉のより専門的な概念、または厳密な定義は一般に難解であるから当初からそのような説明は避けて、代わりに上記のような超関数論を中心とした基礎とこれを方法とした応用を合わせて一体としたものを、ここでは超局所解析とよぶことにする。厳密な定義に比較すれば、問題の議論の拠って立つ場も定かでない漠然とした意味でしかなさそうな広義に解釈しておくとしよう。真の意味は後に明らかにされる。ここでの議論は、超局所解析の枠内での特異性現象の顕著な二、三のテーマに限る。そこには双曲型偏微分方程式の初期値問題の解の特異性の

伝播に関するもの、波面（集合）の超局所解析的特異性の概念、他は応用系列のテーマである量子場の問題の一つ、ファインマン積分の解析性をめぐる特異点の影響的特性等の話題である。これらのテーマの一部には、解析学的議論に加えて幾何学的観点からの考察は避け難く、たとえば、位相幾何学的特異点論としての Picard - Lefschetz 理論（[1] (v)）である。これらのテーマにおける特異性の議論は複合的であり、またそのことが超局所解析の応用的多様性につながる一要素（この話は紙数の都合で省略）とも云えよう。

最後に「時空の特異点理論」の特異性問題を話題にする。I. Newton 以来の重力理論は、A. Einstein による１９０５年の特殊相対性理論（時空間の統一的融合）、その拡張としての１９１５年の一般相対性理論（時空多様体の構造とその上の物理学的現象）として革命的に一新され、その特別な場合として含まれることになった。一般相対性理論を基礎におく宇宙の大域的構造の研究は、２０世紀後半に入って本格化し、今日までの重要な課題となっている。中でも時空多様体上の特異性概念の問題としてこの標的に最もふさわしい対象は、１９６５年から７０年代前半にかけて S. Hawking と R. Penrose によって最初に得られた結果は、双曲型偏微分方程式の初期値問題から必然的に帰結される特異点定理である。これは時空の大域的構造に関するかつて言及されたことのなかった、２０世紀後半の画期的成果と言うべきであろう。恒星の重力崩壊を一生の最終段階とするブラックホールは、この種の定理の主張する特異点であり、物質的現象として時空構造的に議論される新しい幾何学的特異点と云えよう。

代表例の展開　冒頭の要約でも触れたように、概して学理面の叙述は許される限り簡潔にして、主題に要する基本的な概念、それらが構成する主題のもつ意義と成果、応用関係、特異性問題としての将来的展望等、可能な範囲内で厳密性を多少犠牲にしても定性的解説を試みてみたい。なお、従来までに設けた内容へのさらに進んだ技術的「補足」および歴史的「主題の歩み」は、今回は上記の事情から特に提示しない。

1. カタストロフィー理論

標題の呼称をめぐって：標題は、Thom［３］（の英語版）によれば書名同様に、「構造安定性と形態形成（の理論）」、または「形態形成の数学」とも云われる。やや漠然とした印象がないでもないが、彼の説明によれば、含むところ豊かな一般的呼称であることが理解できよう：

> あらゆる対象や物理学的形状は、内部変数の空間上の力学系のアトラクターとして表し得る。このような対象は、対応するアトラクターが構造的に安定であるときだけ、安定である。あらゆる形状の創作や破壊、あるいは形態形成が、初期形状を表すアトラクターの消滅によって、また最終形状を表すアトラクターの捕捉によるそれらの置き換えによって述べられることが可能である。この過程をカタストロフィーとよび、外部変数の空間上で記述される—R. Thom［３］(の英語版), p. 320.

極めて一般的で抽象的な表現ではあるが、対象や形状などの実体的な言葉から現象的に想像可能なカテゴリーの広大さが察知されよう。カタストロフィーを形状の初期状態から終末状態にいたる途上の連続的変化から現象の質的変化（不連続的）をもたらす一連の過程を指すとする見方は、現象の不連続的特異性を豊富に知ることのできる最も基本的モデルを提供するとともに、近年やや沈滞化したかに見える応用面へのより活発な適用が望まれよう（たとえば、［１０］、［１１］）。

話を最初にもどせば、標題を、「可微分写像の特異点論」（［６］、［７］）とよんで、特に基礎理論を重視または強調することも妥当であろうが、現象的イメージを伴う価値は理論の現状に留まらず、カオスの理論にも似て将来的に多岐にわたって有用視される。標題に関する三つの呼称の関係とそれぞれの意義を考えれば、「カタストロフィー理論」（［８］、［９］）が規模の上でも三者の中間に位置し、現状で無理のない適切な、あるいは標準的なよび名と考えられる（参考までに邦語名：‘破局の理論’（故・秋月康夫氏命名））。

本理論は、特異性概念の問題に歴史的にも古くから現象的に最適な直観的モデルを提供していたにもかかわらず、その正当性を得るのに前世紀後半まで時間を要した事情の一部にも最終的に触れておく。

（１）**理論の基礎的要素と構成**：二つの場合にわけよう。

i） 初等的な場合.　カタストロフィーの理論的基礎の第一目標は、不連続現象またはアクシデントを伴ったシステムの形態の正確な分類を得ること、すなわちカタストロフィーの基本的モデルの決定であり、対応するシステムの形態形成に固有のポテンシャル関数を示すことである。

さて、先の引用文中のアトラクターの構造安定性とは、力学系の外部からの小さな摂動に対して対応するシステムの形態（振舞い）が位相的に同値であることを意味する。このようなシステムの位相的同値類を一般的な意味で安定なモデルとよぶが、その形態がポテンシャル関数で表現できるモデルを「静的モデル」とよんで、形態形成の基本的モデルとして、Thom によって最初に確立されたものが初等カタストロフィーである。他に力学系によるモデルとしての代謝モデルがあって、これにも触れよう。

初等カタストロフィーの成立に至るまでの証明過程は多くの予備概念を必要とし、中でも上記の静的モデルの扱いやすい表し方としての開折の理論、初等カタストロフィーのもつ可微分関数の特異点のジェットの概念による表現、その他（Thom の横断性定理や Malgrange の予備定理）が重要であるが、これらは文献［６］－［９］を参照されるとよい。正則点（特異点）についてのみ触れておく：m 次元多様体から n 次元多様体への可微分写像のなすヤコビ行列（１階偏微分係数を成分とする m 行 n 列の行列）の階数=（<）min（m,n）である前者の多様体の点を正則点（特異点）という。正則点の分類は簡単であるが、特異点の分類は一般に複雑である。

初等カタストロフィーとよばれるものは、カタストロフィーの起る近傍で以下のようなポテンシャル関数をもつ７つのシステムのいずれか一つと同値である７つの標準的システム全体を指す。この分類は、静的モデルの満たすべき条件から、構造安定な現象に対応した静的モデルの分類を行なうことによって得られたものである。このときの分類に現れた静的モデルの重要な要素として、コントロール空間 C ：r 次元実ユークリッド空間の領域で、内部の点の座標（コントロール変数）を順に $\alpha,\beta,\cdots,\gamma$（$r$ 番目の座標）。およびポテンシャル関数 F ：n 次元可微分多様体 $\times C \rightarrow R$ は無限回可微分関数、がある。F は状態（変数）とコントロール（変数）の関数として、その極小値の個数が変化するような C の点で状態 x や y がカタストロフィーを起こす。また現象の起る時空間次元は４以下とみるのが自然であり、コントロール空間も高々要因数を４とすることが考察の複雑さを避ける意味で望ましいとされる。

上記の見地から Thom の「初等カタストロフィーの分類定理」を表にまとめておく（ここで、モデルの呼称を‘名称’、r をコントロールの個数（≦４）、F を標準的ポテンシャル関数（普遍開折）とする：（たとえば、［８］、［９］参照）

名　　称	r	F
折り目(fold)	1	$x^3/3+\alpha x$
くさび(cusp)	2	$x^4/4+\alpha x^2/2+\beta x$
ツバメの尾(swallowtail)	3	$x^5/5+\alpha x^3/3+\beta x^2/2+\gamma x$
双曲型へそ (hyperbolic cumbilic)	3	$x^3+y^3+\alpha xy-\beta x-\gamma y$
楕円型へそ (elliptic umbilic)	3	$x^3-xy^2+\alpha(x^2+y^2)-\beta x-\gamma y$
放物型へそ(parabolic umbilic)	4	$x^2y+y^4+\alpha x^2+\beta y^2-\gamma x-\delta y$
チョウ(butterfly)	4	$x^6/6+\alpha x^4/4+\beta x^3/3+\gamma x^2/2+\delta x$

最も単純な「折り目」の場合のカタストロフィーの発生に関する構造を見る：静的モデル（写像）F は $F=x^3/3+\alpha x:R$（x の示す内部状態空間）$\times R$（α の示すコントロール空間）$\rightarrow R$ の分岐集合（極小値の個数が変化するような点 α でカタストロフィーが発生、このような点 α の集合）V ：

$\partial F/\partial x = 0, \partial^2 F/\partial x^2 = 0$ から、V={0}($\subset \boldsymbol{R}$)。また、$S = \{(x,\alpha); \partial F/\partial x = 0\}$ 上での F の制限写像（カタストロフィー写像）$F(S): S \to \boldsymbol{R}$ は、S からコントロール空間への射影（放物線 $x^2 = -a$ のカタストロフィーを生じる半直線 $\alpha < 0$ の側への射影）となる。これら写像や空間は現象にとって最も基本的な形態形成のための情報を与えてくれる。

ii）一般的な場合. コントロール個数≥５のときは、定性的に主要な形態の定式化の考察を除いて、初等的な場合のような分類は一般的に不可能である（たとえば、［３］のch.６参照)。

（2）新しい応用世界の展開と今後：初期の応用とその後の展開を概観、将来的課題を展望する。

ｉ）数学の新しい応用の提示と展開. Thom の書［２］が出版された１９７２年から７７年にかけての E. C. Zeeman のカタストロフィー理論、特にその物理科学、生物・生理科学および心理学、社会科学への応用に関する仕事［１０］は、初等カタストロフィーの分類結果を基礎にその当時点での可能な限りの究明に尽くした功績は決して小さくはないであろう。また、文献［１１］は、特に［１０］ではほとんど扱われなかった応用力学や物理学的諸問題への新たな応用を試みているだけでなく、７０年代を中心に V. I. Arnold たちによって築かれた Lagrange（部分）多様体の理論（たとえば、［１２］)：波面の特異点論、Feynman グラフ、火線または火面の特異点の分類問題等へも問題意識が波及している。特に、波面と Feynman グラフについてはつぎ主題（超局所解析）で議論する。他方、人文科学方面への応用では、上記に挙げた社会科学の他に、特に経済学への応用は、たとえば経済変動のダイナミックモデルの構成と分析（［１３］(i))、価格均衡や組織経済に注がれた（［１３］(iv))。現状は、これらの延長線上の問題研究が継続されつつも、かつての勢いに欠けるかのようである。これらの傾向は、先に述べた力学系とそのカオス現象の解明研究への移行に無縁ではないであろう。

ii）今後に求める課題. ここで Thom の抱いた問題の原点にもどって、今後の応用的課題を筆者の‘主観に基づいて’見てみよう。まず第一に挙げられる問題は、生物進化に関して、特にその形態変化の機構が明らかでない発生学的諸現象の、合理的説明のためのカタストロフィー理論の適用の可能性である。その前提となるものは、局所的な決定論であり、それにしたがって現象の進化論的展開が起るから、要所ごとに構造安定性の概念をもち込んで、幾何学的に総合化することによって目的を達成し得ると彼は考える。しかしながら、これらの実験的検証は現実的に不可能で思弁的な考察の域を出ていないと云えよう。実験的検証の手続きに代る有効な手段を見出すことは遠い将来の問題かもしれない。つぎに大きな問題は、言語学における構文の構造を、文節ごとに局所的に安定な形態として捉えることによって、文法と並列的に、または少なくとも質的にそれに代り得るものとしての幾何学的解釈上の手段を提供し得るものとなり得よう。言語上の問題として、他にカタストロフィー理論の適用が期待されるものに意味論があり、その他に生理学上の問題もありそうだが、それらは筆者の理解の外にある。

（3）補足：本主題の２０世紀後半へつながるそれ以前の２、３の歴史的注意事項を述べるにとどめる。

予知されたカタストロフィー理論 Lamarck 以来の「生物進化論」、地震や噴火による「地殻変動や断層」の発生等は、Thom の意味で形態形成の顕著な現象として古くから知られていたし、物理学上の「相転移」(物理変数（圧力、温度等）の変化による物質の異なる相への移行現象。第一種（三相（固体、液体、気体）間の転移等）と第二種（磁性体物質の転移点（キュリー温度）での異種強度の磁性体への転移等）も同様にみられていた。(第二種の場合の熱力学は理論物理学者 Landau の業績にちなんでランダウの理論ともよばれる。）また、先に触れた幾何光学現象としての「火線や火面」、「衝撃波」も同種の現象とみなされていた。他方で滑らかな写像の特異点に関する基礎的理論は、２０世紀前半の中頃からの Morse と Whitney 等による研究に始まったが、その時点での研究が後のカタストロフィー理論にやがて至るであろうとは予測し難いであったろう。後半に入って、Thom の広大な応用的観点を含むこの理論の発展的構想と Mather によるこの特異点論の現代性との融合下で新数学として実現をみるに至って、本主題は単なる前半の延長線上の発展ではなく、２０世紀後半からの本質的に新しい思想圏に属した数学と評価できよう。かくして、過去の特異現象の直観的認識はカタストロフィー理論によって正当化されるとともに、その理

論的価値は将来的に何らかの相補的方法と相まって、さらに数学内外への応用的有効性を期待したい。

理論の応用批判　１９７０年代の後半に入って、Zeeman の応用の仕事に対する厳しい批判がいくつか提起され、S. Smale（１９７７）と J. Guckenheimer（１９７８）のもの等は深い思索から発せられたものであろう。参考のため、特に後者（の訳：野口氏による）（[13]（iii）、＆（ii））を挙げておく。

これで終えるが、要を得て十分に言葉を尽くしたとは思っていない。最後に、本理論とその応用に関する研究、およびこれらの紹介・解説に今日まで尽力された野口　広先生に深く敬意を表したい。

2. 超局所解析的特異性

新しい解析学が生む特異性問題の展望：最初と最後の主題は、特異点の違いこそあれ、どちらもそれらの理論を指すことくらいはそれぞれに対して専門家でなくてもほとんど察知されることであろう。両者と比べて、本主題は今日もなお関連分野の研究者を除けば、一般の数学者や研究者に周知の事柄とは云い難いかと思う。それは、超局所解析（micro-local analysis）とよばれる言葉に加えて、その概念の立場から究明を試みる既知または未知の特異性（の概念）という二重の意味がもたらす単純でない思いから生じる場合もあるかもしれないし、通常一般に日常性に深い関わりのなさからくることもあるであろう。しかし、いずれであるにせよ、超局所解析という新しい名の（代数）解析学が創造した特異性の概念を理解しておくことは、現象の背後にある本質的要素を知る上で極めて重要なことであろう。

線形偏微分方程式の理論の進歩に伴って、種々の問題の解に対応する一般化された関数としての超関数の概念が２０世紀の前半中期の頃から芽生えて以来、著名な数学者たちの努力の成果の上に、L. Schwartz による連続線形汎関数としての超関数の理論が、１９４５年に微分の考えを中心にはじめて統一的に形成され確立されることになった（[１４]）。以後、近代的な超関数論の構成が種々のアイディアのもとで試みられてきたが、中でも佐藤の超関数論［１５］は最も傑出したものとみなされる。超局所解析とは、佐藤の超関数を最も基本的なものとして、超関数の構成上の代数的手法（相対コホモロジーの理論）を用いて、“余接束（cotangent bunndle）上で”解析的問題を局所的に考察することを意味する。いわば、問題とする対象の（超）微細な解析的構造を代数的に研究するものと云えよう。

このような解析学において考えられる特異性の概念とは、それ以前の解析学や応用において現われた特異性関連問題の再検証的対象のみならず、これらの一般化をはじめ、新しい問題として局所的な考え方を本質的に必要とする特異点や特異性現象に基づく概念一般を指す。これらは、まず佐藤の超関数の構造に基づいたそれ自身の特異性をはじめ、超関数の波面（とその集合）の超局所解析において見られる特異性、さらに応用としての線形双曲型方程式の初期値問題の解の特異性の伝播や理論物理学におけるファインマン積分の解析性に関わる特異性概念が比較的よく知られていよう。中でも、特に波面やファインマン積分はカタストロフィーの理論において、Thom により早くから指摘された問題でもある（[２]）。上に述べた順に少しばかり詳しくこれらを見るとしよう。特に断らない限り、超関数は佐藤のそれを意味する。以下でほぼ全般的に共通する基本的な内容を含む文献として、柏原 - 河合 - 木村［１６］がある。

（１）超関数の構造的特異性　Schwartz の超関数論が一般化された関数を連続な線形汎関数として、部分積分を介して自在に演算を可能にしてくれる一方で、佐藤の超関数論は、正則な関数の境界値として定義され、それぞれの構成手法に大きな違いがあることは特徴的である。だが、後でも触れるように、前者は後者の特別な場合とみなされることも事実（**Schwartz 超関数の埋め込み**）で、佐藤の超関数のより一般性を示すものである（ここの話題に関しては、たとえば［１５］、［１７］、［１８］参照）：

１変数の場合、複素平面 **C** 内の実軸 **R** の一部（区間）**I** を含む複素領域を D、正則関数のなす D 上の層を O、実解析関数のなす **R** 上の層を $O\,|\mathbf{R}= A$ として、正則関数 $f \in O \mid D-\mathbf{I}$ の表す **I** 上の超関数 (f) を、つぎの式で定義する：

$$(f) = f(x+i0) - f(x-i0) \text{：正則関数の上半平面の境界値と下半平面の境界値の差} \qquad (1)$$

また、**I** 上の超関数の層を $B(\mathbf{I})(=B)$、$A^{\pm}$ はそれぞれ正則関数の上半平面、下半平面からの境界値のなす

(Aの部分)層となるから、これらのBへの埋め込みの準同型写像によって、実解析関数$f \in A$は超関数とみなされる。さらに、準同形写像$\alpha : A^+ \oplus A^- \to B$について、$\alpha$は上への写像、左辺の部分層はそれぞれ$A$の直和因子で、$A^+ \bigcap A^- = A$ から、つぎの完全系列を得る：

$$0 \to A \to A^+ \oplus A^- \xrightarrow{\alpha} B \to 0 \qquad (2)$$

式（1）で定義された超関数の表し方は、上の（2）によってAを法として一意的であることがわかる。また（2）から層準同型写像αは同型、すなわち

$$(A^+/A) \oplus (A^-/A) \cong B\ /A. \qquad (3)$$

式（3）の左辺は、右辺の超関数の特異性を二つの層の直和に分解したことになり、超関数の特異性の構造を知る上で手掛かりを与えていると解釈できる。さらに詳しい特異性の分解をみるための上の結果に代る層の完全系列が存在する。概略を述べておく：$\mathbf{R}$の区間$\mathbf{I}$のコピーの、上、下半平面に属するものをそれぞれ$\mathbf{I}^+$、$\mathbf{I}^-$として、それぞれに層A^+、A^-を対応させ、二つのコピーの和$\mathbf{I}^+ \bigcup \mathbf{I}^-$には層$\widetilde{A}$を定める。このとき、式（3）の右辺は、$B/A = \pi_*(\widetilde{A}/\pi^{-1}A)$であることが示されるから、層$C = \widetilde{A}/\pi^{-1}A$（ただし、$\pi$：区間$\mathbf{I}$の上記二つのコピーの和から区間$\mathbf{I}$への射影）を定義すれば、$B/A = \pi_* C$。各々から、

$$0 \to \pi^{-1}A \to \widetilde{A} \to C \to 0 \qquad (4) \qquad\qquad 0 \to A \to B \to \pi_* C \to 0 \qquad (5)$$

これら二つの完全系列に現れる層Cによって、超関数の特異性のもっと詳細な分析が期待できよう。

超関数の多変数の場合への一般化は、$n(\geq 2)$次元実解析的多様体Mを基本的な空間とするこの上の超関数として構成されるが、その特異性をより詳細に知るためには、それに付随するMより大きい接球束（tangent sphere bundle）や余接球束（cotangent sphere bundle）といった位相幾何学的空間上で（4）や（5）に現れたものと同様の層Cの切断を調べることに帰着する。その結果がたとえば、余接球束上で特に完全系列（5）の形式が成り立つことが知られる。ところでこれら一般化への有効な方法は相対（または局所）コホモロジーとよばれる理論であり、佐藤の他に、A. Grothendieckによって彼とは独立に得られた（たとえば、[19]。局所コホモロジーのよび名はGrothendieckによる）。多変数超関数の相対コホモロジーによる定式化の簡潔な記述は、たとえば文献［17］にあり、また相対コホモロジーの一般論も、たとえば［15］、［16］、［18］、［19］の他に、超関数の古典場への応用を含むA. Penroseのtwistor 理論［20］、［21］等にも丁寧な解説と応用への有用な情報がみられる、とだけ指摘しておく。

この辺で先に触れた「Schwartz超関数の埋め込み」、またはSchwartz超関数は佐藤の超関数であることに再度触れておく。解析的な説明は決してやさしいことではないから、代数的位相的な説明によって概念的に理解しておくことにしよう。可微分多様体M上のSchwartz超関数の層を$SD(M)$（c-柔軟層(soft sheaf)とよばれる)、同様にM上の佐藤超関数を$B(M)$(脆弱層(flabby sheaf)とよばれる)として、M上の可微分密度関数の層$V(M)$で台がコンパクトな関数の全体$\Gamma(M, V(M))$（M上の切断）に対して、M上の積分写像$\int_M \cdot : \Gamma(M, V(M)) \to \mathbf{C}$ に基づいた一対の積分写像：$\Gamma(M, C(M)) \times \Gamma(M, V(M)) \to \mathbf{C}$を $(f, g) \mapsto \int_M fg$ によって定めること（$C(M)$: 複素数値可微分関数のM上の層）によって、$C(M)$から$SD(M)$への射（morphism）を得て、これが単射であること、またMが実解析的多様体であれ

ば、単射：$\Gamma(M, \mathcal{U}(M)) \to \Gamma(M, \mathcal{V}(M))$ （$\mathcal{U}(M)$: M上の実解析密度関数の層）は射：$SD(M) \to B(M)$）を誘導して、これも単射となる。すなわち、Schwartz の超関数は、佐藤の超関数である。上記に現れた脆弱層は一般に各局面で重要な役割を演じるが、ここでは定義なく用語のみを紹介した。

最後に、Schwartz の意味の超関数に対して、構造上の特異性を考慮して佐藤の意味の超関数として表された１変数の場合の基本例を２，３挙げておく（他例を含むこれらの詳細、多変数の場合等については、たとえば［１６］、［２２］参照）：

１°. 連続関数：$x_+^\lambda = x^\lambda (x \ge 0), = 0(x<0)$ は、$x_+^\lambda = -\{e^{-\pi i\lambda}(x+i0)^\lambda - e^{\pi i \lambda}(x-i0)\}/2i\sin\pi\lambda$.

２°. Heaviside の関数：$Y(x) = x_+^\lambda \mid_{\lambda=0} = 1(x \ge 0), = 0(x<0)$ $Y(x) = \{\log(-x+i0) - \log(-x-i0)\}/2\pi i$.

３°. Dirac の δ 関数：$\delta(x) = \infty(x=0), = 0\ (\mathbb{R}-\{0\})$ は、$\delta(x) = \{1/(x-i0) - 1/(x+i0)\}/2\pi i$.

（２）**波面集合の特異性**　解析力学の中で、特に Hamilton の方程式や Hamilton－Jacobi の**方程式**をテーマとする古典的なハミルトン力学の諸概念は、特殊な変分原理（Fermat から Hamilton に至る）によって導入された幾何光学におけるいくつかの単純な基本概念によって起った。その幾何光学の中でも最も普遍的で基本的な概念の一つである、波面とその集合については異方性不均質媒体における Fermat の極値的原理がその先駆をなし、これを接空間に一般化した考察によって波面とそれらの包絡面（または線）としての波面集合の概念が形成され、Huygens の原理に帰結した（V. I. Arnold［２３］、pp. 248－252）。波面集合は、たとえば古典的な光学における火面（または線(caustics)）やシリンダー内の気体に生じた衝撃波（［１］,（v）pp. 114－117）,また本節の（４）の話題でもある Feynman 積分に現れるダイアグラムに関する Landau 曲面などの特異点に基づいた現象として実現の可能なものである。また、これらの現象は特異点現象ゆえに個々に対応するカタストロフィーの名称（主にツバメの尾）や特異点の特徴づけなど初等的に明らかにされている（たとえば、［３］）。

これらの現象や特異点をより抽象的な視点で捉えるとき、Lagrange 多様体の言葉に出会う。これは、現象に対応する相空間の Lagrange 部分多様体（その次元が配位空間のそれに等しく、その上に相空間上のシンプレクティック構造を定める２次形式が恒等的に零となる多様体）とそれらの配位空間の上への射影を問題とする幾何学を意味する。特に、Lagrange 特異点は、Lagrange 多様体の配位空間の上への射影の特異点である。話は前後するが、曲面から平面への滑らかな写像の特異点論に始まる議論のカタストロフィー理論への応用、その他上記の分野等における幾何学的理論への適用は顕著である（［２３］、［２４］）。

ここでの目標は、波面集合の超局所解析である。特に超関数の特別な場合としての Schwartz のそれに対する波面集合に触れておくべきであろう。n 次元実ユークリッド空間の開集合 X で定義された Schwartz の超関数 u に対して、点 $x \in X$ のある近傍が存在して、そこで u が無限回可微分のとき、u は x で滑らかであるといい、u が滑らかでない点の全体を u の特異台(singular support)とよんで、これを $\mathrm{SS}(u)$ で示す。特異台は X の閉部分集合；u を佐藤の超関数とすれば、余接球束上の層 C でより詳細な議論ができて、特異台は閉錐体をなす。このとき、u の特異台 $\mathrm{SS}(u)$ を u の特異(性)スペクトルという。

つぎに $x \in X$ の近傍 U、x における余接ベクトル $\eta \neq 0$ のコンパクトな近傍 V をとって、U 上の任意の滑らかな関数でコンパクトな台をもつ φ と任意の正整数 m に対して、$\langle u, \varphi \exp(-i\tau x \cdot \eta) \rangle = O(\tau^{-m})$（$\tau \to \infty$）（$O$：ランダウ記号）が $\eta \in V$ について一様に成り立つような点 $(x, \eta) \in T^*X$（X の余接束）$\setminus \{0\} \equiv W$ の全体をとり、その W 内での補集合を u の波面集合といい、$WF(u)$ で示す。射影：T^*X

$\to X$ によれば、$WF(u)$ と $SS(u)$ の関係は、$\pi WF(u) = SS(u)$ で与えられる。すなわち u の特異台は、u が滑らかでない点の集合であり、それは Lagrange 特異点であることを表している。線形偏微分方程式の解、その他に関してこれらの超関数の波面集合や特異台、種々の関係式が数多く知られている（たとえば、［２２］）。上記の波面集合を定めたやり方とほぼ類似の定義式が一様に成り立つ点の全体（W の錐的閉集合）を $WF_A(u)$ として、u の解析的波面集合といい、その射影を解析的特異台 $SS_A(u)$ という：$\pi WF_A(u) = SS_A(u)$ $(*)_1$。一方、超関数 u の特異性は余接球束上の層によって詳しく述べられるから、その完全系列（５）における全射：$B \to \pi_* C$ を sp として、$u \in B$ に対して、$sp(u)$ を u のスペクトル、その台 $supp.sp(u) = S.S.u$ を u の特異（性）スペクトルという。u が Schwartz の超関数のとき、u の特異性スペクトルは解析的波面集合に同じ：$S.S.u = WF_A(u)$ $(*)_2$。

上の２式$(*)$から、$\pi S.S.(u) = SS_A(u)$、i.e. 特異（性）スペクトルの射影は解析的特異台である。

（３）**初期値問題の解の特異性の伝播**　上記（１）、（２）は、超関数自身の特異性に関わる主要な概念ないし問題（の一部）として、基本的である。以下では、超関数が関わる応用上の問題として、偏微分方程式論および理論物理学における、それぞれの特異性の顕著な例を考える。

まず本標記の問題については、Hamilton－Jacobi の方程式の初期値問題の解の特異性（非線形例）とともに、１９６２年の R. Courant－D. Hilbert（［２５］）以来の双曲型偏微分方程式の初期値問題の解の特異性（線形例）について、各初期値の偏微分可能性とこれらの特性面上での不連続性の仮定下での解へおよぼす影響、その他に触れた（［１］、(iii)）。一方、滑らかな係数の偏微分方程式の解の漸近展開による一般論から、双曲型方程式の基本解の構成とその特異性構造の研究、初期曲面の特性、非特性的に対応する初期値問題の解の特異性（分岐、特異点の種別特性に基づくもの等）、特に非特性的な場合の一般化かつ精密化された浜田の結果［２６］は、複素領域上の係数が正則関数の線形偏微分作用素の初期値問題の解を構成し、その特異性構造を明らかにしている。これらはほとんどが古典的手法によるが、文献［１６］は浜田の場合の偏微分作用素を正規双曲型として、局所的に初期値問題の基本解を構成、その特異性構造を超局所解析の視点から議論し一般化した。他にも重要な結果がいくつかあるが、標記の問題として、波面集合の観点からその伝播の一般的説明がなされたうちの一結果を挙げておく（［２７］、［２８］参照）。

線形偏微分作用素の拡張としての（古典的）擬微分作用素 P、その（主）表象をはじめとする定義、諸性質等は多くの本にあるから説明は省いて、以下に現れる P の主表象の陪特性帯に関する事柄に触れておく。これは、Hamilton の正準方程式の解曲線であり、Hamilton のベクトル場の積分曲線である。陪特性帯上で主表象が定数０のとき、特にこの陪特性帯を零陪特性帯という。つぎの定理が成り立つ：

P の主表象は、m次の実数値主表象 $p(x,\xi)$ で、零陪特性帯上で主表象の ξ に関する１次微分 $\neq 0$ とする（このような P を実主要型という）。このとき、Pu の波面集合の外部（$WF(u) - WF(Pu)$）では、u の正則性はどんな零陪特性帯に沿っても一定不変である。もし Pu の正則性が少なくとも開錐体内部のコンパクト部分集合 B において少なくとも s 級、かつ u の正則性が B の点で s ＋m－１級であれば、u の正則性は B 上至るところで少なくとも s ＋m－１級である。（$WF(Pu)$ の外部と非零陪特性帯上では、u の正則性は滑らかである。）この定理は、特異点をもった解の構成をはじめ、擬微分方程式 $Pu = f$ の解

の存在の研究に重要な役割を演じる最も基本的な結果と考えられる。また狭義双曲型作用素、その他の場合に対しても零陪特性帯と波面集合の視点から解の特異性の伝播の問題が明らかにされている。(ついでながら、狭義双曲型の初期値問題では、広義の Huygens の原理：作用素の係数が滑らかであれば、初期値の不連続性は陪特性曲線に沿って伝播する、という P. D. Lax の古典的結果（１９５７）による。)

（４）**Feynman 積分の特異性**　この問題に関しても［１］（iii）で触れたが、ここで概要ながらもう少し詳しく述べておきたい（［１６］、［２２］、［２９］－［３１］など)。理論物理学者 R. P. Feynman（米）は、論文：Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics(１９４９)によって、J. S. Schwinger、朝永振一郎とともに１９６５年のノーベル賞を受賞した。この論文は、本標題（４）に関わる量子場問題の解決のための画期的な計算手法を提起して、その原点に位置する仕事の一つとなった。(三者の方法の同値性は、後に F. J. Dyson によって証明され、一般的な形式に統一された。)

Feynman 積分は、４次元時空間内の Feynman 図形（または、―ダイアグラム、―グラフ）：'素粒子の仮想的多重散乱のモデル化' に対応して一般的に被積分関数が超関数で定義された重積分である。場の量子論では、S 行列やグリーン関数の計算の困難を避けるために摂動展開（特に、Feynman-Dyson 法）は有用な手段であり、そこに Feynmam 積分が用いられる。被積分関数は分母、分子とも特定の形で与えられた項の積形式で表されていて、Feynman 図形は各項を組織的に誤まりなく、具体的に記述するために用いられる。まず Feynman 積分の定義に必要な Feynman 図形を述べて、つぎに対応する積分を記述する。図形は、４次元時空間内の点（頂点）：$P_j(j=1,\cdots,n')$、線分（内線）：$L_l(l=1,\cdots,N)$、半直線（外線）：$L'_r(r=1,\cdots,n)$ から成り、これらは一定の規則の下で頂点を通して全体が連結される。特に、各内線 L_l には非負定数 $m_l^2(\geq 0,$ ここでは >0 とする）が、各外線には４次元実ベクトル $p_r=(p_{r,s})(s=0,\cdots,3)$ が割り当てられるが、Feynman-Dyson 法による S 行列の計算式中の Lagrangean 密度からこれらの量を対応させる。この対応規則を Feynman 規則とよぶ。p_r は運度量、m_l は素粒子の質量に当る。また、すべての内、外線は向きづけられているとして、それをライン上の中央の位置に左から右へ矢印を付して示す。　最後に頂点と内線の結合係数［$j:l$］についての約束：P_j が L_l の始点⇒［$j:l$］$=-1$,　終点⇒［$j:l$］$=+1$, その他（頂点と内線の端点が一致しない場合）［$j:l$］$=0$。このようにして構成された Feynman 図形を $F\text{−}D$ とする。このとき、$F\text{−}D$ に対応する Feynman 積分 $I_{F-D}(p)$ は超局所解析的に次のように定められる：

$$I_{F-D}(p_1,\ldots,p_n)=\int\frac{\prod_{j=1}^{n'}\delta^4\left(\sum_{r=1}^{n}[j:r]p_r+\sum_{l=1}^{N}[j:l]k_l\right)}{\prod_{l=1}^{N}(k_l^2-m_l^2+\sqrt{-1}0)}\prod_{l=1}^{N}d^4k_l.(k_l^2=k_{l,0}^2-\sum_{\lambda=1}^{3}k_{l,\lambda}^2)\qquad(*)$$

この積分は形式的で一般に発散し、数学的にその意味が明らかでないことから、その意味づけをめぐって分母の（・）の各項　→ N個の複素パラメータによる冪化を通して、積分（＊）の拡張に伴う議論（収束性、解析接続の可能性など）が行なわれる（［１６］、［２２］、特に［３１］が詳しい)。

積分（＊）に関する議論は、数学的にはもちろんのこと、広く物理学の重要な問題ともからんでいて複雑ではあるが、豊かな話題を提供している。ここではこの積分の特異性問題に限って、超局所解析の視点からこれらを明らかにすることであるが、既に紙数の余裕もないので二件の主要な概念の要約にとどめる。

1）Landau - 中西方程式と積分（＊）の特異点集合（Landau - 中西多様体）：積分（＊）の特異性スペクトルの位置の決定の問題は、この積分がある条件を一般に満足しないので、その条件が成立するように積分（＊）の定義に用いた文字等を含む方程式系（Landau - 中西方程式）の定める特定量（４次元運動量ベクトル）の全体としての多様体（Landau - 中西多様体）とその部分多様体の位置関係、およびこれらと超局所関数としての積分（＊）との関係など（［１６］、［２２］、［３１］参照）。

2）積分（＊）の特異点近傍での分岐（Cutkosky の不連続性公式）と積分路のホモロジー：古典的な類似例として、Hamilton - Jacobi の偏微分方程式の初期値問題の解の特異性（特に解の分岐性と不連続性の強調）について、以前にわずかながらも触れたが（［１］(c)）、標記の後半の件については、前半の件と同程度に、線形双曲型作用素の初期値問題の解の特異性の影響を考慮した積分路の議論に触れた（［１］(d)）。これらの問題究明の一貫した手法とその特異性に関連した解析的諸問題への応用の一例として、標記に関する成果は評価される（［２９］、［３０］など）。近年では超局所的立場からの統一的再編成の起こりが生じつつあるかのようだが、筆者は確かなことは知らない。

3. 時空の特異点理論

特異点の物理学的基礎：時空の構造を議論するとき、その基礎には常に特殊と一般の相対（性理）論がある。前者は、互いに等速運動中の慣性系に対して相対性原理と光速度不変の原理を用いて、時間と空間の新しい相対的な物理学法則を確立し、Minkowski（の）時空の導入（１９０８）によってこの新理論の成立する幾何学的基盤を明確にした。また物理法則の変換に対する不変性の要求から Lorentz 変換（Lorentz 群の元）とその有用性を得るとともに、従来の物理学の諸理論の相対論化に成功した。

さて後者の場合は、さらに特殊相対論を含む物理法則に関する拡張的成果として、等価原理（重力と慣性力の同一視）に基づき、物理法則の相対性原理が一般座標変換に対しても成立するように創られた理論で、これによって相当数の重力との関連現象の説明と理解がなされてきた。一般相対論の有効性の方法的基礎にはこの理論の微分幾何学的定式化がある。内容的には Newton 力学の一般化としての重力（場）理論として、前者における物体の運動の時空間（４次元 Euclid 空間）に代って、曲率を備えた４次元 Riemann 多様体とする。このとき、Newton 力学の重力ポテンシャルを求める Poisson 方程式の一般化としての計量テンソルに関する Einstein の重力場方程式はつぎの式で与えられる：

$$R_{ab} - (R/2)g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \qquad (\#),$$

R_{ab}：Ricci テンソル、$R(= g^{ab}R_{ab})$：曲率スカラー、g_{ab}：計量テンソルの成分、Λ：宇宙定数、

T_{ab}：エネルギー-運動量テンソル；方程式（#）は、高度の非線形方程式であり、その解は大域的時空間としての宇宙の特徴づけをはじめ、（少なくとも）その構造や形状（に関する情報）を与えてくれる。それは、２階の双曲型偏微分微分方程式の初期値問題に関するいくつかの結果を多様体全体に適用し、方程式（#）のある線形化に伴う初期値問題の解の存在と一意性を証明、最終的に時空間的分割解の接続による全空間への拡大によって解を得る。計量テンソル表示の解の多くは、その成分を用いた式 ds^2（古くは無限小弧長）の形式で表示、多くの解が知られている。これら厳密解の例（略：たとえば、下記文献［３３］、［３２］が詳しい）。（この節の参考文献：［３２］－［３５］、他：以下の本文中に記載。）

（１）時空の特異点と特異点定理　大域的時空（宇宙）の開闢（ビッグバン）時、また恒星の終末（ブラックホール）時においては、物質密度や空間の曲率等が無限大となる空間の点は、上述の宇宙解からみるとき、Schwarzchild 解では、半径が $r = 0$ である点で、この特別な点を特異点とする。同様に、Friedmann 時空では $r = 0$ がビッグバンにおける点であって、この点が特異点である。このような特異点の出現は空間の幾何学的特殊性（球対称性など）から説明されたが、今日では、特異点の存在は必然的であることが特異点定理によって明らかとなった。

この定理を述べる前に、上記の特異点を含む特異点の一般的定義を得ておく（［３３］、［３５］）。

特異点の定義：時空多様体（４次元連結の滑らかなHausdorff多様体で、物理的諸量の記述を可能にする符号数（１，３）の計量付）が、時間的（timelike）または零（null）測地的に非完備であるならば、すなわちそのアフィン・パラメータの任意の値まで延長できない非完備測地線の存在によって特異点の発生を知ることができて、この多様体は特異点をもつ。（時間的かつ零測地的に完備であることは、多様体にとって特異点がないための最低限の条件であることからの帰結。）この定義は、特異点が実体的意味でどんなものであるかを直接的に定めてはいないが、ビッグバンやブラックホール（後述）、その他の特異点（存在しない？）の時空構造的な存在を許容する一般的条件によって、特異点の実体的定義に代わる時空構造的存在そのものを特異点と定めたものと考えられよう。時空の特異点を今後このような意味に解釈する。
特異点定理：条件　１）エネルギー条件　２）大域的構造条件　３）領域に閉じ込めるに十分強い重力の存在条件　が成り立つ⟹時空多様体は特異点をもつ。ここで、各条件１）は物質密度と圧力が非負、２）は閉じた時間的曲線の非存在、３）宇宙には光を曲げるに十分な物質が存在する、などのごくありふれた条件でしかないことがわかる。この定理は、S. Hawking－R. Penroseによって見出された（１９７０［３６］、また１９６５［３７］）。また、Penroseたちが主張する宇宙検閲仮説（cosmic censorship）：自然は‘裸の（naked）特異点’を嫌う、は未来に予測される特異点は外部の観測者からは目に見えないブラックホールのような場所（事象の地平の内部）でしか生じない、という意味であり、‘裸の特異点’とは、観測者のいる場所（自然界：地平の外部）で生じる表立った、（これまでとは異なる時空構造的な）特異点を指していう。今日まで裸の特異点は観測されていない（［３８］、［３９］、［３５］）。
（２）ブラックホール　恒星の一生の最終段階として、重力崩壊によって生じた一種の天体である。R. Oppenheimerたちによって、その存在が理論的に示されていた（［４０］）が、現在の呼び名は１９６０年代中頃からPenroseやHawkingらによる研究が活発化するにつれ、その形態のイメージからHawkingが最初に名づけたと思われる（１９７２［４１］）。天体としてのブラックホールは核燃焼を終えた恒星の終末形態であり、最終的には定常時空に落ち着くと考えられているが、それに至るまでの物理学的過程は強大な重力作用による影響だけでなく、星の内部や外部の天体物理学的要因にも支配されて複雑である。このような見方を優先視すれば、ブラックホールは重力崩壊した天体で、物理学的意味の‘実体化された’特異点とみなされよう。一方、一般相対論の観点からは、先の（１）で強調したように、事象の地平の内部でしか起り得ない時空構造としての特異点である。この場合は特異点がブラックホールである特殊な時空構造を指す。また、上記の定常時空化したブラックホールの構造は、Kerr解の計量（Schwarzschildのそれを特別な場合とする）に限られることが知られている（［３３］）。

上記のものはブラックホールの古典論である。一般相対論と量子力学の融合、あるいは重力場の量子化、また量子場としての四つの場の超大統一理論とよばれる方向への努力は、物理学の基礎理論の最終目標の一つとして、正準形式をはじめ、今日では常識化した（超）弦理論等による種々の試みがなされているが、いずれも越え難い物理学的困難のために成功を得ないでいる。この量子化の問題が解決すれば、ブラックホールの量子論的見解が明らかとなり、種々予想される問題の真の解決も夢ではないであろうと思われる。これらの問題やコメントについて、文献［３５］はこの方面をも代表する知見を提示しているであろう。

結論に代えて：今後の課題・他、謝辞　本テーマに関した研究報告をひとまずこの辺で少なくとも一時的に休止したい。１９７７年から始まったこの研究［４２］は、S. Bochner［４３］の入門的研究に次ぐものであった。（研究の動機や当初の目標等に関しては、［１］（i），（ii）に記述がある。）休止の事情は、大方の目標をかなり達成し得たことと、筆者の近年の健康状態の不良による。したがって今後再びこの方面の研究の続行の可否については今はわからないとだけ云うしかない。

さて、本講演（京大数理研研究集会「数学史の研究」における筆者の講演（２０１０年８月２５日））の結論として述べられたことを含めて、今後に残る延長的な課題がある（［１］（iii）参照）：
１）今回までの主要な記述に関わった特異点、またはこれらを数学的要因とする現象の特異性の傾向や特徴の主題ごとの分類（例：今回のそれぞれの主題に対する講演時に示されたもの）を、［１］の（v）以前

にもどって検証的に分類すること、およびこの逆：分類に見られる傾向をもつ類似的主題の検索と検証。逆の意義は、特異性概念のカテゴリーの拡大と新事象の発見につながる可能性。この際、重要なことは、特異性と新しい主題の間に矛盾のない適正な数学的定式化を得ることである。

２）特異性問題の新しい、または未知の主題：既存分野と数理科学一般の分野から、および特異性概念の一般化とその関連問題（たとえば、［１］(iii) の（３）参照)。これらの課題については、(IV) －１、(IV) －２、(V) の順で少なくとも議論の具体的な方向性を与える予定であったとだけ触れておきたい。

筆者にとって本シリーズの研究で最終的に意図したことは、数学の固有のテーマに関する「現代史」の展開と、社会と文化の中での数学（史）の役割を中心とする「評論」の仕事がもっとなされてもいいのではないかという信念から発した、これらの試みの第一歩であったということを明らかにしておきたい。しかし、この思いはここで十分に成功したとは思っていない。卓越した才能、高い学識と見識からなる偉大な力量が要求されるであろう。できるだけ多くの研究者たちがこの分野の開拓にも貢献することによって、広い意味で数学の進歩への役割の一端を担ってほしい。

最後になったが、７０年代半ばから今日まで文献類を調達戴いた京大数理研、チュービンゲン大数学研究所、芝浦工大をはじめ都内の複数の大学図書館・図書室、および個人的にお世話になった方々へ厚くお礼申し上げる。また数理研研究集会「数学史の研究」における歴代の代表の方々、小川、小松、小林、高瀬の各氏には常日頃種々ご尽力とご厚情を賜っていることに深い謝意を捧げる次第である。

参　考　文　献

[1] 阿部剛久, 特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか, 数理解析研究所講究録,「数学史の研究」,京都大学数理解析研究所, (i) (I) 一初期の概念とその背景一, No. **1317**, pp. 39－49 (2003)；(ii) (II) 一特異性問題に関する近代数学の発展・形成：1880－1940s一, No. **1392**, pp. 149－162 (2004) (共著者 G. Nickel)；(iii) (III) 一1 一20 世紀後半から現代に至る主題の展望, および未知の課題をめぐって一, No. **1546**, pp. 88－103 (2007)；(iv) (III) 一2 一２０世紀後半の主題（１）：前半から引き継ぐもの（初期概念の系列）一, 代表例：多次元留数理論, 特異点の解消と二つの応用, 多変数解析関数の解析接続, No. **1625**, pp. 95－107 (2009)；(v) (III) 一2 一２０世紀後半の主題（２）：前半から引き継ぐもの（新概念と応用の系列）一, 代表例：Riemann-Hilbert の問題, Picard-Lefschetz 理論とその応用, 運動流体の特異現象, No. **1677**, pp. 103－119 (2010).

[2] R. Thom, Topological Models in Biology, Topology, **8**, pp. 313－335 (1969).

[3] R. Thom, *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*, Benjamin (1972)；英訳版, Benjamin (1975).

[4] R. Thom, La Stabilité Topologique des Applications Polynomiales, Enseign. Math., **8**, pp. 24－33 (1962).

[5] R. Thom, Ensembles et Morphismes Stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc., **75**, pp. 240－284 (1969).

[6] J. N. Mather, Stability of Differentiable Mappings, Ann. Math., (i) I, **87**, pp. 89－10 4 (1968) (ii) II, **89**, pp. 254－291(1969)；Publ. Math. Inst. H.E.S. (iii) III, **35**, pp. 301－336 (1970) (iv) IV, Lect. Notes in Math., No. 192, pp. 207 － 253, Springer (1971).

[7] Th. Bröcker, *Differential Germs and Catastrophes*, London Math. Soc., Lect. Notes Series **17**, Cambridge (1975).

[8] 野口　広, カタストロフィー, サイエンス - ライブラリー　理工系の数学＝**13**, サイエンス社 (1977).

[9] 野口　広 - 福田拓生, 初等カタストロフィー, 共立全書　**208**, 共立出版 (1978).

[10] E. C. Zeeman, *Catastrophe Theory, Selected Papers 1972－1977*, Addison－Wesley (1977).

[11] T. Poston - I. Stewart, *Catastrophe Theory and it's Applications*, Pitman (1978).

[12] Y. Choquet-Bruha-C. DeWitt-Morette, *Analysis, Manifolds and Physics*, Revised ed., North-Holland (1982).

[13] 雑誌・数理科学、サイエンス社 (i) 梶田　公, 経済変動とカタストロフ, 9 月号, pp. 28－32 (1975) .(ii) 野口　広 (編・著・訳), 連載　カタストロフィー夜話　IV, 一裸の王様一, 4 月号, pp. 66－71 (1978) (iii) J. グッケンハイマー

著, 野口広　訳, カタストロフィー論議, 6月号, pp. 40−45 (1978). (iv) 澤田　賢, ワルラス価格均衡理論, 10月号, pp.. 43−47 (1979)

[14] L. Schwartz, *Theory des Distributions*, Paris (1945, 50) ; 日本語版（岩村　聯（訳）, 超関数の理論）岩波（1953）.

[15] M. Sato, (i) Theory of Hyperfunctions I, II, J. Fac. Sci. Univ.Tokyo **8**, pp. 139−i93, pp.387−436 (1959−1960). (ii) On Hyperfunctions and the Seaf C, −Lects., Dep. Math. Univ. Nagoya−, Proceedings of Math. Sciences **126** (in Japanese), May, 24−May, 28, 1971 (1971).

[16] 柏原正樹・河合隆裕・木村達雄, 代数解析学の基礎, 紀伊国屋数学叢書 **18**, 紀伊国屋（1980）.

[17] H. Komatsu, Microlocal Analysis in Gevrey Classes and in Complex Domains, in Microlocal Analysi and Applications (J. M. Bony　et al., eds.), Lect. Notes in Math. No. **1495**, pp. 161−236, Springer (1989).

[18] M. Kashiwara - P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, A Ser. Comprehensive Studies in Math. **292**, Springer (1990).

[19] A. Grothendieck, *Local Cohomology*, Lect. Notes in Math. No. **41**, Springer (1967).

[20] R. S. Ward - R. O. Wells Jr., *Twistor Geometry and Field Theory*, Monographs on Math. Phys., Cambridge (1990).

[21] R.O. Wells Jr., Hyperfunction Solutions of the Zero - Rest - Mass Field Equations, Comm. Math. Phys. **78**, pp. 567−600 (1981).

[22] V. W. Guillemin-M. Kashiwara-T. Kawai, *Seminar on Micro-local Analysis*, Ann. Math. Studies No. **93**, Princeton Univ. (1979).

[23] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Text in Math. **60**, Springer (1978).

[24] R. Abraham-J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2^{nd} ed. (Revised & Enlarged), Benjamin (1978).

[25] R. Courant-D. Hilbert, *Mrthods of Mathematical Physics*, Vol. II, Interscience (1962).

[26] Y. Hamada, The Singularities of the Solutions of the Cauchy Problem, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **5**, pp. 21−40 (1969)

[27] J. J. Duistermaat-Hörmander, .Fourier Integral Operators. II, Acta Math. **128**, pp. 183−269 (1972).

[28] L. Gårding, *Singularities in Linear Wave Propagation*, Lect. Notes in Math. No. **1241**, Springer(1987).

[29] R. C. Hwa - V. L. Teplitz, *Homology and Feynman Integralls*, Benjamin,(1966).

[30] F. Pham, *Introduction à L'Étude Topologique de Singularités de Landau*, Gauthier – Villars (1967).

[31] 中西　襄, 場の量子論, 新物理学シリーズ　**19**, 培風館（1975）.

[32] W. Thirring, *Classical Field Theory* (English ed.), A Course in Math. Phys. **2**, Springer (1978).

[33] S. W. Hawking – G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space−Time*, Camb. Monographs on Math. Phys. **1** Cam. Univ.(1973)..

[34] C. D. J. Dotson, *Categories, Bundles and Spacetime* Topology, Shiva Math. Ser. **1** Shiva (1980).

[35] S. W. Hawking - R. Penrose, *The Nature of Space and Time*, The I. Newton Inst. Ser. Lect., Princeton Univ. (1995).

[36] S. W. Hawking – R. Penrose, The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology, Proc. Roy. Soc. London **A31**, pp. 529−548. (1970

[37] S. W. Hawking, Occurrence of Singulaarities in Open Universes, Phys. Rev. Lett. **15**, pp. 689−690 (1965).

[38] R. Penrose, Naked Singularities, Ann. N. Y. Acad. Sci. **224**, pp. 125−134 (1923).

[39] R. Penrose, Singularities of Space−Time, in *Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity*, ed. N. R. Liebowitz, et al., Univ. Chicago (1978).

[40] J. R. Oppenheimer, - H. Snyder, On Continued Gravitational Contraction, Phys. Rev., **56**, pp. 455−459 (1939).

[41] S. W. Hawking, Black Holes in General Relativity, Comm. Math. Phys. **25**, pp. 152−166 (1972).

[42] 阿部剛久, 「特異の問題」とその数学形成をめぐって, (i) I ― 発生期の概念とその胎生基盤 ―, 芝浦工業大学工学部紀要, 第 **11** 巻、pp. 59−71 (1977). (ii) I − (2) ― 初期概念の成立過程とその史的意義 ―, 芝浦工業大学研究報告（理工系編）, Vol. **22**, No. 1, pp. 36−49 (1979).

[43] S. Bochner, Singularities and Discontinuities, Proc. of the Conference on Complex Analysis (1972), Vol. II, No. 2, pp. 21−40, Rice Univ. Studies **59** (1973).