

## Brouwer's fixed point theorem の初等的証明

高橋非線形解析研究所 竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)

Takahashi Institute for Nonlinear Analysis

現代工学の発展に伴って 1970 年代に入ると、数学を形式化しコンピュータの圧倒的な処理能力を借りて認められた公理と推論規則から一切の省略を許さず、数学を更に信頼できる形に組みなおそうという動きが現れました。Mizar プロジェクトは、Mizar という言語・プルーフチェッカーを使って数学を 1 つの大きなプログラム・データベースとする試みです。Mizar の証明を組み立てるためには簡潔で論理的に明快なフローチャートが必要です。著者は、2005 年に Mizar を学習するためのテーマとしてブラウワーの不動点定理の初等的な証明が得られないかと考え、2010 年に慶応大学の月曜セミナーのためにこの内容を整理しました。本稿はこれに基づいた九州工業大学鈴木智成先生との共同研究 [5] の原型にあたるものです。本来は 5 節の内容だけで充分なのですが、学部 2,3 年生に理解できる証明とすることをもう 1 つの目的とするため、理解しやすい様に 4 節までをおきました。

現在、著者がいくらかでも数学について議論することができるのは、東京工業大学 高橋渉先生と信州大学 中村八束先生に若い時にご教示いただいたことによっています。また、慶応大学の丸山徹先生と小宮英敏先生にセミナーの講演を勧めていただかなければ、この論稿は著者の頭の中で完結し文章にすることはなかったと思います。4 人の先生に深く感謝いたします。

### 1 Introduction

19 世紀、ポアンカレの研究の中に現れた問題は、1910 年にアダマールによって一般的な証明が得られました。1912 年にブラウワーは、この問題に示唆的な別証明を与えました。ブラウワー以降、次の定理は Brouwer's fixed point theorem と呼ばれています。

**Theorem (Hadamard-Brouwer).** *Let  $C$  be a compact convex subset of an  $n$ -dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ . Let  $g$  be a continuous mapping from  $C$  into itself. Then, there exists a point  $c \in C$  such that  $g(c) = c$ .*

この定理は、ユークリッド空間を特徴づける重要な定理であり、数学の様々な分野に広く利用され、多くの拡張定理が得られています。この定理は、ナッシュによって Hex ゲームの必勝戦略に応用され、市場経済の一般均衡解の存在を示すための主要な道具ともなっています。ミルナーによる解析的な方法など、この定理には多様な証明が存在しますが、スペルナーの補題による組み合わせ的な手法を用いたものが初等的とされています。定理の不動点の存在は、 $g$  の定義域  $C$  を位相同型な図形に換えても変化しないため、証明の際に  $C$  の選び方には自由度があります。ブラウワーとスペルナーという 2 人の天才的数学者の権威と影響によって、通常は  $C$  として  $n$  次元 3 角形 (単体) を選びこれを 3 角形 (単体) 分割しますが、 $n$  次元立方体  $[0, 1]^n$  を選んでも構いません。単体分割という言葉を使用するためには、単体とは何か単体分割とは何かということが当然問題となります。組み合わせ的な手法の中で「 $n$  次元単体を重心分割する」というような表現があたりまえに出てきますが、単体分割の様な位相幾何の概念は通常考えられているよりも遥かに複雑です。単体分割を安

心して使用するのに必要な事項について、証明を厳密に書こうとすれば非常に長く読みにくいものになると思います。また、これを簡潔に書こうとすれば、数学的直感を補強する説明のようなものになってしまいます。ブラウワーの不動点定理は誰でも意味が分かる重要な定理でありながら、著者の認識では証明の持つ意味が分かりやすい初等的な証明は知られていないと思います。ここでは、位相幾何やグラフ理論の知識を必要としない、完全に初等的な方法を議論します。私たちは、次の3つのアイデアによって、Brouwer's fixed point theorem を下記の形で証明します。

- ・ スペルナーのアイデアは  $n$  次元立方体  $[0, 1]^n$  の格子にも適用できること。
- ・  $[0, 1]^n$  の格子には後述する自然なラベリングが存在すること。
- ・  $[0, 1]^n$  の格子で考える時には単体分割の様な複雑な概念は必要がないこと。

**Theorem.** *Let  $n$  be a positive integer. Let  $g$  be a continuous mapping from  $[0, 1]^n$  into itself. Then, there exists a point  $c \in [0, 1]^n$  such that  $g(c) = c$ .*

## 2 予備知識

本稿では、ユークリッド空間  $R^n$  について基礎的な知識を必要とします。つまり、線形代数と解析から1次独立と基底に関する知識及び次の基本的な知識を必要とします。 $n, m$  を正の整数とします。

定義 2.1 (ノルムと距離)

$[0, 1]^n$  の2点  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  と  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  について

$x$  のノルム (絶対値) と  $x, y$  の距離は次の様に定義されている。

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}, \quad d(x, y) = \|x - y\| = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$$

定義 2.2 (点列の収束)

$[0, 1]^n$  の点列  $\{x_n\}$  と点  $c$  が  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - c\| = 0$  を満たす時  $\{x_n\}$  は点  $c$  に収束するという。

このとき、 $c \in [0, 1]^n$  となる。

定義 2.3 (連続写像)

$[0, 1]^n$  から  $R^m$  への写像  $f$  と  $a \in [0, 1]^n$  が  $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a)\| = 0$  を満たす時  $f$  は  $a$  で連続という。

ただし、 $x \in [0, 1]^n$  とする。任意の  $a \in [0, 1]^n$  について連続ならば  $f$  は  $[0, 1]^n$  で連続であるという。

定理 2.4 (ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理)

$[0, 1]^n$  の点列は、収束部分点列を持つ。

定理 2.5 (2つの点列の収束)

$[0, 1]^n$  の2つの点列  $\{x_n\}$  と  $\{y_n\}$  が  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$  を満たすとする。

このとき、 $\{x_n\}$  が  $c$  に収束すれば、 $\{y_n\}$  も  $c$  に収束する。

定理 2.6 (射影・座標関数と  $f$  の合成)

$f$  を  $[0, 1]^n$  から  $R^m$  への連続写像とする。 $x \in [0, 1]^n$ 、 $f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  について

$i$  ごとに  $f_i(x) = y_i$  として  $[0, 1]^n$  から  $R$  への  $n$  個の写像を定義する。 $f_i$  は連続である。

定理 2.7 (1次元中間値の定理の応用)

$[0, 1]^n$  から  $R$  への連続関数  $f$  が、 $x, y \in [0, 1]^n$  について  $f(x)f(y) \leq 0$  を満たせば、 $f(c) = 0$  を満たす  $c \in [0, 1]^n$  が線分  $(1-t)x + ty$  の中に少なくとも1つ存在する。ただし、 $t \in [0, 1]$  とする。

### 3 Sperner's lemma について

本稿ではスペルナーのアイデアだけが必要なので、2次元までのスペルナーラベリングとスペルナーの補題について説明します。しばらくの間は3角形についての直感を使用します。

**1次元スペルナーの補題:** 線分を小線分に分割します。左端の点にラベル0を、右端の点にラベル1をつけます。その他の点はラベル0,1を自由につけます。このラベリングを1次元スペルナーラベリングといいます。このとき、両端にラベル0とラベル1を持つ小線分が奇数個存在します。

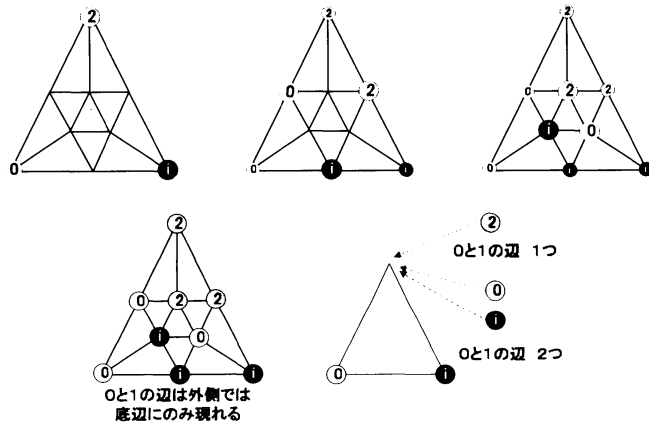


証明の概要:

- ラベル0を1つだけ持つ小線分はラベル0とラベル1を持つ小線分です。
- ラベル0を持つ点の総数を  $t$  とし、ラベル0を持つ小線分に注目します。
- ラベル0を1つだけ持つ小線分の数:  $h$ , ラベル0を2つ持つ小線分の数:  $b$  として小線分の持つラベル0の点の総数 (のべ数)  $S_1 = h + 2b$  を考えます。
- 左端の点だけが1本の小線分にだけ含まれています。(  $S_1$  の中で1回数えられている)。
- 他の  $t-1$  個のラベル0の点は2本の小線分に含まれています。(  $S_1$  の中で2回数えられている)。
- このとき  $S_1 = h + 2b = 1 + 2(t-1)$ , したがって  $h = 2(t-b) - 1$ .

このようにして、 $h$  は奇数となります (これは1つは存在するという意味を含んでいます)。

**2次元スペルナーの補題:** 3角形が小3角形に分割されています。3つの頂点にラベル0,1,2を図の様に付けます。大きな3角形の辺上の点に両端のラベルのどちらかと同じラベルをつけます。その他 (内部) の点はラベル0,1,2を自由につけます。このラベリングを2次元スペルナーラベリングといいます。このとき、3つの頂点にラベル0,1,2を全て持つ小3角形が奇数個存在します。



この証明に入る前に、2次元のスペルナーの補題とその証明について重要な事項を整理します。ラベル0と1を両端に持つ小線分を  $l$  と書きます。

- (P1)  $l$  は底辺だけにでき、他の辺にはできない。
- (P2) 底辺の  $l$  は奇数個になる。(底辺は1次元スペルナーラベリングになっている)。
- (P3)  $l$  を1つだけ持つ小3角形と2つ持つ小3角形が考えられる(3つ以上は持てない)。
- (P4) 底辺の  $l$  は1つの小3角形に使用され、内部の  $l$  は2つの小3角形に使用される。

この(P1)-(P4)は私たちの数学的直感では明らかなことですが、実は証明しなければいけないことです。これを証明しようとすれば、3角形とは何か、辺とは何か、3角形に分割するとは何かという問題につきあたります。3角形や辺という概念は一般の人にとって数学的にきちんとしたものではありません。位相幾何では3角形に相当する2次元単体や単体分割という概念を準備しています。しかし、3角形(単体)を3角形(単体)に分割するとすれば、小さな3角形は大きな3角形を覆っているのか?小さな3角形同士の重なり方はどのようになっているのか?大きな3角形の辺上にある小さな3角形の頂点はこの辺を分割しているのか?など証明すべき煩瑣なことがたくさん出てきます。3角形(単体)分割には難しい点がたくさんあることを心に留めていただいて、3角形分割と(P1)-(P4)をいったん認めて2次元の議論を進めます。

証明の概要:

- $l$ を1つだけ持つ小3角形はラベル0,1,2をすべて持つ小3角形です。
- 1次元スペルナーの補題によって $l$ は奇数個 $e$ だけ底辺にできます。他の辺にはありません。
- $l$ の総数を $t$ とし、 $l$ を持つ小3角形に注目します。
- $l$ を1つだけ持つ小3角形の数: $h$ ,  $l$ を2つ持つ小3角形の数: $b$  として小3角形の持つ $l$ の総数(のべ数)  $S_2 = h + 2b$  を考えます。
- $e$ 個の $l$ だけが1つの小3角形だけに含まれています。
- 他の $t - e$ 個の $l$ は2つの小3角形に含まれています。
- このとき  $S_2 = h + 2b = e + 2(t - e)$ , したがって  $h = 2(t - b) - e$ .  
 $e$ は奇数ですから、 $h$ も奇数となります。

(P1)-(P4)の性質とこの証明をみるといくつか興味深い点があります。

- この証明には、最初の図形が3角形であることなど使用されていません。  
 $l$ に関して(P1)-(P4)の条件を満たせばどんな図形でも、もちろん正方形でもかまいません。
- (P4)の(底辺の $l$ )の持つ性質は、 $l$ が分割される3角形の表面にあれば持っている性質です。
- (P1)と(P2)の性質2つ合わせて、分割される3角形の表面には $l$ が奇数個だという形で使用されています。 $l$ が底辺に閉じ込められている必要はありません。

つまり、スペルナーの補題の新解釈として次の定理が成立することになります。

定理 3.1 (T-lemma) 3角形を辺で連結した図形 $\Sigma$ を考える(ある図形が小3角形に分割されている)。頂点は $\{0,1,2\}$ の3つでラベリングされている。表面にある $\{0,1\}$ の2つのラベルを持つ辺が奇数個とする(このラベリングをT-ラベリングと呼びます)。このとき、3つのラベルを全て持つ小3角形が奇数個存在する(2次元で表現しました。1次元の場合はスペルナーの補題と同じです)。

更に、 $n$ 次元のブラウワーの不動点定理を考える時、次の事実は非常に重要です。

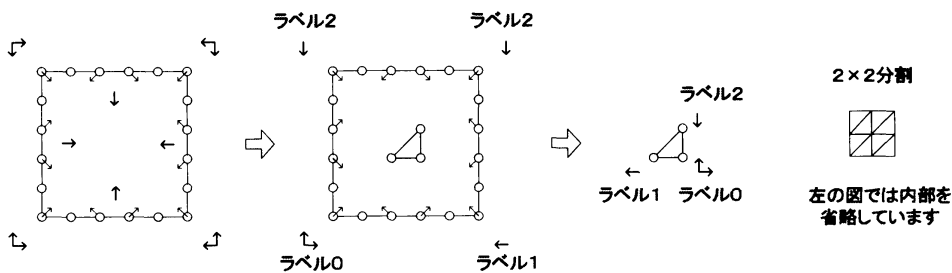
- この証明は最初の3角形が小3角形で敷き詰められていることなど使用していません。

つまり、3角形分割などという複雑な概念は不要で、 $l$ に関連して(P1)-(P4)に相当する性質をもつ対象(3角形と辺に相当する)が定義されていれば、T-lemmaに相当するlemmaが導かれます。

### 4 Brouwer's fixed-point theorem の初等的証明 (2次元)

3 三角形分割と T-lemma をいったん認めた上で、2次元 Brouwer's fixed-point theorem を証明します。慣れた 3 三角形と 3 三角形についての直感を利用して一度議論し、5 節であいまいな点を除いて再度ゼロから議論しようと思います。証明を論理的に追えることと、何をしているのかを理解することは異なりますので proof line を確認します。

- $g$  を  $[0, 1]^2$  から  $[0, 1]^2$  への連続写像とし、 $x \in [0, 1]^2$  について  $f$  を  $f(x) = g(x) - x$  で定義します。
- $x \in [0, 1]^2$  について、 $f_1(x)$  を  $f(x)$  の第 1 成分、 $f_2(x)$  を第 2 成分として  $f_1, f_2$  を定義します。
- $f$  は  $[0, 1]^2$  から  $R^2$  への連続写像、 $f_1, f_2$  は  $[0, 1]^2$  から  $R$  への連続写像となります。  
第 1 成分は  $x$  成分、第 2 成分は  $y$  成分と考えて差し支えありません。
- $[0, 1]^2$  を  $n^2$  等分割して格子  $L_2$  を作り、格子の左下と右上の点を結び小 3 三角形に分割します。



- $x$  が  $g$  で移った点が  $g(x)$  ですから、 $f(x) = g(x) - x$  は  $x$  の移動を表すベクトル (矢印) です。
- $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  はこの移動のベクトルを  $x$  方向と  $y$  方向に分けた成分ベクトル (矢印) になります。
- 辺上の点は左図のような成分 (矢印) を持ちます。  
たとえば上辺の点  $p$  は下向きの成分を持ちます ( $f_2(p) \leq 0$ )。
- 4 つの頂点は左図のような 2 方向の成分 (矢印) を持ちます。
- ラベルを 3 つにしたいので、4 つの頂点の持つ成分の特徴を真ん中の図の様に決めます。  
このときラベル 0 とラベル 1, 2 は反対方向の成分を持つことに注意してください。  
また、3 次元以上に容易に拡張できそうだという点に気づいていただけたらと思います。  
各辺の点は両側の頂点のどちらかと同じ成分を持つことも明らかだと思います。

図の矢印は長さ 0 の場合を含みます。格子の点に 3 つのラベルをつけて分類するのですが、たとえばこの点が不動点の場合 (動かない場合) はラベルは 0, 1, 2 のどれもが可能です。各点にきちんと 1 つずつラベルをつける手順、優先順位が必要になります。格子  $L_2$  の点に順にラベルをつけていく次の 2+1 回の手順を 2次元 B-ラベリングと呼びます。格子  $L_2$  の点  $p$  の第  $i$  座標を  $(p)_i$  と書きます。

- (2)  $(p)_2 > 0$  と  $f_2(p) \leq 0$  を満たす点にラベル 2 をつけます。
- (1)  $(p)_1 > 0$  と  $f_1(p) \leq 0$  を満たす点にラベル 1 をつけます。
- (0) 残った点  $p$  にラベル 0 をつけます ( $f_1(p) \geq 0, f_2(p) \geq 0$  となっています)。

B-ラベリングの定義から次のことがすぐに分ります。

- このラベリングによって内部の点を含めてすべての格子の点にラベルがつけます。  
上辺 ( $(p)_2 = 1$ ) の点は  $f_2(p) \leq 0$  を、右辺 ( $(p)_1 = 1$ ) の点は  $f_1(p) \leq 0$  を満たします。  
したがって、上辺と右辺にはラベル 1 と 2 だけがあります。ラベル 0 はありません。

左辺 ( $(p)_1 = 0$ ) にはラベル 1 はありません。また、底辺 ( $(p)_2 = 0$ ) にラベル 2 はありません。したがって、底辺に注目すると、底辺には手順 (1) と (0) のラベリングだけが行われます。

- つまり、ラベル 0 と 1 を共に含むのは底辺だけで、底辺のラベリングは 1 次元 B-ラベリングです。
- 1 次元 B-ラベリングは明らかにスペルナーラベリング (T-ラベリング) です。
- したがって、底辺のラベル 0 と 1 を持つ線分は奇数個です。
- 他の辺に 0 と 1 を持つ線分がないので、この格子のラベリングは 2 次元 T-ラベリングです。
- 2 次元 T-lemma によって、右図のような 3 つのラベルを全て持つ小 3 角形が存在します。
- ラベル 0 と 1 は 1 つの成分が反対方向です。ラベル 0 と 2 も他の成分が反対方向です。
- 1 次元中間値の定理より  $f_1(a_n) = 0, f_2(b_n) = 0$  となる 2 点がこの小 3 角形に閉じ込められます。
- 小 3 角形が小さくなっていけばこの 2 つの零点が  $f$  の零点に近づくことが予想されます。

ここまで述べたことが proof line です。2 節の予備知識は証明中無断で使用します。

定理 (2 次元 Brouwer's fixed-point theorem)

有界閉集合  $[0, 1]^2$  から  $R^2$  への連続写像  $g$  が  $g([0, 1]^2) \subset [0, 1]^2$  を満たせば、 $g(c) = c$  を満たす  $c$  が  $[0, 1]^2$  の中に少なくとも 1 つ存在する。

証明:  $f(x) = g(x) - x$  とし、 $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  を  $f(x)$  の第 1 座標と第 2 座標とします。

(1)  $[0, 1]^2$  を  $n \times n$  等分割します。頂点は  $p(i, j) = (i/n, j/n)$  ( $i, j = 0, \dots, n$ ) です。

- $i, j = 0, \dots, n-1$  として次の頂点を持つ小 3 角形を作ります (格子を小 3 角形に分割)。  
 $\{p(i, j), p(i+1, j), p(i+1, j+1)\}$  と  $\{p(i, j), p(i, j+1), p(i+1, j+1)\}$ .
- $j > 0$  と  $f_2(p(i, j)) \leq 0$  を満たす  $p(i, j)$  にラベル 2 をつけます。
- $i > 0$  と  $f_1(p(i, j)) \leq 0$  を満たす  $p(i, j)$  にラベル 1 をつけます。
- 残った  $p(i, j)$  にラベル 0 をつけます。(B-ラベリング)
- このとき、 $j = 0$  の面はラベル 0 と 1 の 1 次元 T-ラベリングです。
- $j = 0$  の面の 0 と 1 を両端に持つ小線分は奇数です。(1 次元 T-lemma)
- ラベルのつけ方から他の面にラベル 0 と 1 が同時に存在することはありません。
- したがって、このラベリングは 2 次元 T-ラベリングです。
- ラベル 0, 1, 2 を頂点に持つ小 3 角形が存在します。(2 次元 T-lemma)

(2) この小 3 角形について、ラベル 0, 1, 2 を持つ頂点を  $p_0, p_1, p_2$  とします。

$f_2(p_2) \leq 0, f_2(p_0) \geq 0, f_1(p_1) \leq 0, f_1(p_0) \geq 0$  となっています。1 次元中間値の定理より

- $f_1(a_n) = 0$  となる点  $a_n$  が線分  $(1-t)p_0 + tp_1$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 上に存在します。
- $f_2(b_n) = 0$  となる点  $b_n$  が線分  $(1-t)p_0 + tp_2$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 上に存在します。
- $\|a_n - b_n\| \leq \|p_1 - p_0\| + \|p_2 - p_0\| \leq 2\sqrt{2}/n$  となります。

(3)  $n$  ごとに存在する  $a_n$  と  $b_n$  で作った 2 つの点列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  について

- $\{a_n\}$  は収束部分列  $\{a_{n_k}\}$  を持ちます。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - b_n\| = 0$  より  $\{b_{n_k}\}$  も同じ点に収束します。
- この収束点を  $c \in [0, 1]^2$  とすると、 $f_1(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_1(a_{n_k}) = 0, f_2(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_2(b_{n_k}) = 0$ 。
- これは、 $f(c) = g(c) - c = 0$  を意味しますので定理を得ます。

## 5 Brouwer's fixed-point theorem の初等的証明

2次元に限れば Brouwer's fixed point theorem の初等的な証明はいくつも考えることができます。3次元以上の空間に容易に拡張できる手法かということが問題です。この定理の証明に単体分割を使用することには多くの問題点が存在します。初等的証明と称するものは、この単体分割に関する部分の証明を省略することが多く、直感に訴えているか暗黙の内に位相幾何の知識を仮定していることとなります。2次元の3角形分割でもこの問題は無視できません。本稿で扱った格子を単体分割する手法は、 $n$ 次元についても、線形代数の知識だけで必要なことをチェックできますが大変な作業です。しかし、Spernerの補題の証明の本質は非常に簡単でした。この事実は、証明に必要な構造がそんなに複雑で面倒なはずはないことを示唆します。直感的に分かりやすく思える3角形(単体)という概念を使用することによって、余分な先入観から単体分割などという面倒なものを考えてしまったと思われる。本稿の議論に必要なことは、つきつめると3節で議論した(P1)-(P4)に相当する性質を持つ対象だけです。私たちは単体や単体分割(3角形・3角形分割)の形象・概念を離れます。3角形(単体)よりも簡単な、定理の証明に本質的に必要な性質だけを持った、やや抽象的な概念を定義します。このことによって、本稿の手法は容易に3次元以上に拡張できます。

### 概念の整理

$n, m, k$  を正の整数とし、 $n, m$  を固定します。 $l$  を非負の整数とします。 $N_k = \{1, 2, \dots, l\}$ ,  $M_l = \{0, 1, 2, \dots, l\}$  とします。 $R^n$  を  $n$ 次元ユークリッド空間とし、 $\|\cdot\|$  をユークリッドノルムとします。 $R_n$  の点  $(a, 0, \dots, 0)$  を簡単に  $a$  と表記します。 $[0, 1]^n = \{x \in R^n : (x)_i \in [0, 1], i \in N_n\}$  とします。ただし、 $(x)_i$  は  $x$  の第  $i$ 座標です。有限集合  $A$  について、 $\#(A)$  を  $A$  の要素の個数とします。

- $e_1 = (1/m, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1/m, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, \dots, 0, 1/m)$  とします。  
 $k \in N_n$  について  $O_k = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  とします。 $O_n$  は  $R^n$  の長さ  $1/m$  の直交基底です。
- $L_0 = \{0\}$  とします。 $k \in N_n$  について  $L_k = \{\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i : \alpha_i \in M_m\}$  とします。  
 $L_n$  は  $[0, 1]^n$  を  $m^n$  等分割した点の集合 ( $n$ 次元立方格子) です。
- $k \in N_n, i \in N_k$  について、次の2種類の集合を  $L_k$  の面と呼びます。 $L_{(k,k,0)}$  を  $L_k$  の底面と呼びます。  
 (1)  $L_{(k,i,0)} = \{x \in L_k : (x)_i = 0\}$ , (2)  $L_{(k,i,1)} = \{x \in L_k : (x)_i = 1\}$ .

定義からの簡単な結果を補題とします。

補題 5.1.  $k \in N_n$  とすると次の事項が成立します。

- (1)  $i \in N_k$  について、 $me_i$  は  $me_i \in L_{(k,i,1)} \subset L_k$  を満たす単位ベクトルです。
- (2)  $L_{k-1} = L_{(k,k,0)}$ .
- (3)  $k-1 \geq 1$  とすれば  $i \in N_{k-1}$  について次の事項が成立します。

$$(A) L_{(k-1,i,0)} = L_{(k,i,0)} \cap L_{k-1}, \quad (B) L_{(k-1,i,1)} = L_{(k,i,1)} \cap L_{k-1}.$$

### $n$ 次元のB-ラベリング

$X$  を  $R^n$  の部分集合とします。本稿では  $X$  から  $M_n$  への写像  $l_n$  を  $X$  のラベリングと呼びます。 $x \in X$  について、 $l_n(x)$  を  $x$  のラベルと呼びます。 $A$  を  $X$  の部分集合とすると、 $l_n(A) = \{l_n(x) : x \in A\}$  と定義します。 $k \in M_n$  について、 $A$  が条件  $\#(A) = k+1$  と  $l_n(A) = M_k$  を満たすとき  $k_c$  と呼ぶことにします。つまり、 $k_c$  の  $(k+1)$  個の点はちょうど  $(k+1)$  個のラベル  $0, 1, \dots, k$  を持ちます。 $\#(M_k) = k+1$

を確認しておきます。この”c”は”completely labeled”という意味です。次の基本的な補題が成立することを確認します。

**補題 5.2.**  $X$  を  $R^n$  の部分集合とし、 $l_n$  を  $X$  のラベリングとします。任意の  $k \in N_n$  について、 $X$  の部分集合  $A$  が  $\#(A) = k+1$  と  $l_n(A) \subset M_k$  を満たせば、次の事項が成立します。

- (1)  $A$  は高々2つの  $(k-1)_c$  を持ちます。
- (2)  $A$  がちょうど1つの  $(k-1)_c$  を含むことと  $A$  が  $k_c$  であることは同値です。

**証明.**  $A$  が  $(k-1)_c$  を1つ含むとし、これを  $B$  とします。 $\#(A) = k+1$ ,  $\#(B) = k$  及び  $B$  がちょうど  $k$  個のラベル  $0, 1, \dots, k-1$  を持つことは明らかです。 $A$  が  $a \notin B$  である点  $a$  を持つことも明白です。 $l_n(a) \in M_{k-1}$  であるケースを考えます。 $l_n(x) = l_n(a)$  を満たす点  $x \in B$  が存在します。私たちは  $B$  の点  $x$  を  $a$  に取り換えることによって、もう1つの  $(k-1)_c$  である  $B'$  を得ます。 $B'$  が  $A$  に含まれることと  $B \neq B'$  は明らかです。 $B$  と  $B'$  だけが  $A$  に含まれる  $(k-1)_c$  であることも明白です。 $l_n(a) = k$  のケースを考えます。このとき、 $B$  だけが  $A$  に含まれる  $(k-1)_c$  であることは明白です。このケースでは  $A$  は  $k_c$  になります。私たちは (1) を得ました。ここまでの議論によって、 $A$  がちょうど1つの  $(k-1)_c$  を含めば  $l_n(a) = k$  となります。これは  $A$  が  $k_c$  であることを意味します。1つの  $k_c$  が  $(k-1)_c$  を1つだけ含むことも明らかです。私たちは (2) を得ました。□

$g$  を  $g([0, 1]^n) \subset [0, 1]^n$  を満たす  $[0, 1]^n$  から  $R^n$  への連続写像とします。 $f(x) = g(x) - x$  とし、 $f_i(x)$  を  $f(x)$  の第  $i$  座標として  $f_i$  を定義します。 $f$  は  $[0, 1]^n$  から  $R^n$  への連続写像、 $f_i$  は  $[0, 1]^n$  から  $R$  への連続写像です。以下の議論ではこの条件を仮定します。 $g$  が  $[0, 1]^n$  から  $[0, 1]^n$  への写像であることから次の事実が分かります。任意の  $i \in N_n$  について、

$$(5.1) \quad f_i(x) \leq 0 \text{ for } x \in L_{(n,i,1)}, \quad f_i(x) \geq 0 \text{ for } x \in L_{(n,i,0)}.$$

任意の  $k \in N_n$  について  $L_k$  から  $M_k$  の上への関数  $l_k$  を次の  $k+1$  回の手順で定義します。

- ( $k$ )  $(p)_k > 0$  と  $f_k(p) \leq 0$  を満たす点  $p \in L_k$  について  $l_k(p) = k$  とします。
- ( $k-1$ )  $(p)_{k-1} > 0$  と  $f_{k-1}(p) \leq 0$  を満たす点  $p \in L_k$  について  $l_k(p) = k-1$  とします。
- ...
- (1)  $(p)_1 > 0$  と  $f_1(p) \leq 0$  を満たす点  $p \in L_k$  について  $l_k(p) = 1$  とします。
- (0) 残った点  $p \in L_k$  について  $l_k(p) = 0$  とします。

$l_n$  を  $n$  次元 B-ラベリングと呼びます。

**Remark 5.3.**  $k \in N_n$  とします。 $l_k$  の定義ステップ ( $k$ ) によって、 $L_k$  の底面  $L_{k-1} = L_{(k,k,0)}$  はラベル  $k$  を持ちません。したがって、 $L_{k-1}$  の点は  $k$  ステップの手順 ( $k-1$ ), ..., (0) でラベルが付けられます。補題 5.1 (2)(3) によって、 $l_k$  と  $l_{k-1}$  は  $L_{k-1}$  の上で一致します。私たちは、 $x \in L_{k-1}$  について  $l_n(x) = \dots = l_{k-1}(x)$  を得ます。必要があれば、任意の  $k \in M_n$  について  $l_n$  を  $L_k$  上の写像と考えることができます。つまり、私たちは  $l_n$  を  $L_k$  の上で  $l_k$  と同一視することができます。任意の  $k \in N_n$  について、 $l_k$  の定義、補題 5.1 と (5.1) から、次の条件が成立することは明らかです。

$$\begin{aligned} (a) \quad l_k(0) = l_n(0) = 0, & & (b) \quad l_k(me_i) = l_n(me_i) = i, \\ (c) \quad l_k(x) = l_n(x) \neq i \text{ for } x \in L_{(k,i,0)}, & & (d) \quad l_k(x) = l_n(x) \geq i \text{ for } x \in L_{(k,i,1)}. \end{aligned}$$

$L_n$  は  $n$  次元 B ラベリング  $l_n$  によってラベルが付けられているとします。Remark 5.3 によって次の補題 5.4 は明らかです。補題 5.4 は、3 節 (P1) に相当する性質です。



補題 5.4. 任意の  $k \in N_n$  について次の条件が成立します。

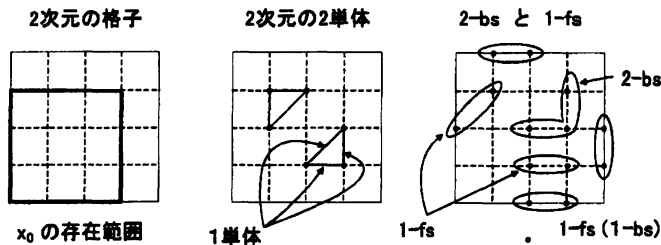
- (1)  $L_k$  はちょうど  $(k+1)$  個のラベル  $0, 1, \dots, k$  を持ちます。つまり、 $l_n(L_k) = M_k$  です。
- (2)  $L_{k-1}$  だけが  $k$  個のラベル  $0, 1, \dots, k-1$  を持つ  $L_k$  の面です。

新しい概念

$k \in N_n$  とします。  $x_0 \in L_k$  を、すべての  $i \in N_k$  について  $(x_0)_i \neq 1$  を満たす点とします。このとき、次の条件を満たす  $L_k$  の  $(k+1)$  個の点  $x_0, x_1, \dots, x_k$  が存在します。

- (5.2)
- (1)  $x_i - x_{i-1} \in O_k$  for  $i \in N_k$ ,
  - (2)  $x_i - x_{i-1} \neq x_j - x_{j-1}$  for  $i, j \in N_k, i \neq j$ .

この  $k+1$  個の点の集合  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  を  $k$ -s と呼ぶことにします。  $k$ -s から 1 点を取り去った集合を  $(k-1)$ -fs と呼びます。  $(k-1)$ -fs の要素の個数は  $k$  です。  $k$ -s と  $(k-1)$ -fs の点は、常に成分の和が増加するように並べる約束とします。  $\{0\}$  を 0-s と呼びます。 "s" と "fs" は "string" と "face string" の意味です。



2次元 ( $m=4$ ) のイメージを図にしました。  $k$ -s と  $(k-1)$ -fs を点列とする考え方もありますが、本稿では集合と考えます。 2次元の 2-s は画像処理などでデジタル線分と呼ばれる概念の一部です。  $k$ -s と  $(k-1)$ -fs は、3節で扱った3角形と辺に相当する特殊な単体の概念から必要な性質だけを抽出したのですが、このようにすると、初等的な知識だけできちんと定義できる数学的対象になります。

$k$ -s  $A$  が  $k_c$  であるとき  $k_c$ -s と呼びます。つまり、  $k_c$ -s の  $(k+1)$  個の点はちょうど  $(k+1)$  個のラベル  $0, 1, \dots, k$  を持ちます。  $(k-1)$ -fs  $B$  が  $(k-1)_c$  であるとき  $(k-1)_c$ -fs と呼びます。つまり、  $(k-1)_c$ -fs の  $k$  個の点はちょうど  $k$  個のラベル  $0, 1, \dots, k-1$  を持ちます。 次の記号を導入します。

- $CS_k$ :  $k_c$ -s の集合,  $CS_0$ : 0-s  $\{0\}$  だけを要素に持つ集合,
- $CFS_{k-1}$ :  $(k-1)_c$ -fs の集合,
- $S1_k$ :  $(k-1)_c$ -fs をちょうど 1 つ含む  $k$ -s の集合,
- $S2_k$ :  $(k-1)_c$ -fs をちょうど 2 つ含む  $k$ -s の集合.

新しい概念の導入によって次の2つの補題の証明は自明なことの集積になってしまいます。 補題 5.6 は3節 (P3)(P4) に相当する性質です。 補題 5.4 によって 0-s  $\{0\}$  は  $0_c$  を注意しておきます。

補題 5.5. 次の事項が成立します。

- (1)  $x, y$  をある 1 つの  $n$ -s の点とすれば、  $\|x - y\| \leq n/m$  となります。
- (2) 任意の  $i \in N_n$  について、  $x, y \in L_n$  が  $l_n(x) = 0$  と  $l_n(y) = i$  を満たせば、  $f_i(x)f_i(y) \leq 0$  となります。

証明.  $n$ -s の定義 (5.2) より、次の計算によって条件 (1) が成立します。

$$\|x - y\| \leq \sum_{i=1}^n \|e_i\| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} = \frac{n}{m}.$$

条件 (2) は、  $l_n$  の定義の直接の結果です。 □

補題 5.6.  $k \in N_n$  とすると次の事項が成立します。

- (1)  $CS_{k-1}$  の要素だけが、ちょうど1つの  $k$ -s に含まれる  $(k-1)_c$ -fs です。
- (2)  $CS_{k-1}$  の要素を除く、 $CFS_{k-1}$  の要素はちょうど2つの  $k$ -s に含まれる  $(k-1)_c$ -fs です。
- (3)  $k$ -s は、高々2つの  $(k-1)_c$ -fs を含みます。
- (4)  $A$  を  $k$ -s とすると、 $A \in S1_k$  と  $A \in CS_k$  は同値です。

証明.  $k=1$  のとき(1)(2)を示します。 $A$  を 1-s、 $B$  を 0-fs とすると、1-s と 0-fs の定義から、 $i \in M_{m-1}$  と  $j \in M_m$  が存在して  $A = \{i/m, (i+1)/m\}$ ,  $B = \{j/m\}$  となります。 $CS_0$  の要素は  $\{0\}$  だけです。 $\{0\}$  は  $0_c$ -fs です。 $l_n(1) = 1$  ですから、 $\{0\}$  だけがちょうど1つの 1-s に含まれる  $0_c$ -fs であることは明らかです。これ以外の  $0_c$ -fs はちょうど2つの 1-s に含まれます。

$n > 1$ ,  $k-1 \geq 1$  を仮定します。補題 5.4 より、 $L_{k-1}$  だけが  $k$  個のラベル  $0, 1, \dots, k-1$  を持つ  $L_k$  の面です。 $L_{k-1}$  だけが  $(k-1)_c$ -fs を持つことが可能な  $L_k$  の面です。 $B = \{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}$  を  $L_k$  の  $(k-1)_c$ -fs とします。 $(k-1)$ -fs の定義より、すべての  $s \in N_{k-1}$  について  $y_s - y_{s-1} \neq e_{i_0}$  であるような  $i_0 \in N_k$  が存在します。したがって次の2つのケースを考えることとなります。

- (A)  $y_{s_0} = y_{s_0-1} + e_{i_0} + e_j$  を満たす  $s_0 \in N_{k-1}$  と  $j \in N_k$  ( $i_0 \neq j$ ) が存在する。
- (B) すべての  $s \in N_{k-1}$  について  $y_s - y_{s-1} \in O_k$  が成立する。

(A) のケースは、次の2つだけが  $B$  を含む  $k$ -s であることは明らかです。

$$\{y_0, \dots, y_{s_0-1}, y_{s_0-1} + e_{i_0}, y_{s_0}, \dots, y_{k-1}\}, \{y_0, \dots, y_{s_0-1}, y_{s_0-1} + e_j, y_{s_0}, \dots, y_{k-1}\}$$

(B) のケースを考えます。 $B$  は  $L_{k-1}$  以外の  $L_k$  の面に含まれません。 $B$  が  $L_{k-1}$  にも含まれないとすれば、 $0 < (y_0)_{i_0} = \dots = (y_{k-1})_{i_0} < 1$  となります。この場合

$$\{y_0 - e_{i_0}, y_0, \dots, y_{k-1}\}, \{y_0, \dots, y_{k-1}, y_{k-1} + e_{i_0}\}$$

の2つだけが  $B$  を含む  $k$ -s です。 $B$  が  $L_{k-1}$  に含まれるとします。このとき、 $(y_0)_k = \dots = (y_{k-1})_k = 0$  と  $e_{i_0} = e_k$  は明らかです。このケースは、 $B$  は  $(k-1)_c$ -s となり  $CS_{k-1}$  の要素です。 $y_0 - e_k$  が  $L_k$  の点でないことは明らかですから、 $\{y_0, \dots, y_{k-1}, y_{k-1} + e_k\}$  だけが  $B$  を含む  $k$ -s です。 $(k-1)_c$ -s は  $(k-1)_c$ -fs ですから  $CS_{k-1} \subset CFS_{k-1}$  を得ます。したがって(1)と(2)を得ます。

$k \in N_n$  とし、 $A$  を  $k$ -s とします。 $\#(A) = k+1$  は明らかです。補題 5.4 によって  $l_n(A) \subset M_k$  です。 $A$  が  $k_c$  ならば  $A$  が  $k_c$ -s も明らかです。ある  $k$ -s の部分集合  $B$  について、 $B$  が  $(k-1)_c$ -fs であることと  $B$  が  $(k-1)_c$  であることは同値です。したがって、補題 5.2 によって(3)と(4)を得ます。□

補題 5.7 (ST-lemma).  $g$  を  $[0, 1]^n$  から  $[0, 1]^n$  への連続写像とします。 $m$  を正の整数、 $L_n$  を  $[0, 1]^n$  の  $n$  次元立方格子、 $l_n$  を  $L_n$  の  $n$  次元  $B$ -labeling とします。このとき  $\#(CS_n)$  は奇数です。

証明. (1)  $\{0\}$  だけが  $CS_0$  の要素ですから  $\#(CS_0)$  は奇数です。

(2)  $k \in N_n$  とします。 $\#(CS_{k-1})$  が奇数であることを仮定して  $\#(CS_k)$  が奇数であることを示します。 $\#(CS_{k-1}) = a$  とおきます。 $k$ -s に含まれる  $(k-1)_c$ -fs の数を、すべての  $k$ -s について足し合わせます。補題 5.6(3) によって、 $S_k = \#(S1_k) + 2\#(S2_k)$  を考えることとなります。補題 5.6(1)(2) によって、 $CS_{k-1}$  の要素は  $S_k$  の中で1度だけ数えられ、 $CS_{k-1}$  の要素を除いた  $CFS_{k-1}$  の要素は  $S_k$  の中で2度数えられています。したがって

$$S_k = \#(S1_k) + 2\#(S2_k) = a + 2(\#(CFS_{k-1}) - a),$$

$$\#(S1_k) = a + 2(\#(CFS_{k-1}) - a) - 2\#(S2_k) = 2(\#(CFS_{k-1}) - \#(S2_k)) - a.$$

が成立します。よって  $\#(S1_k)$  は奇数です。補題 5.6 (4) によって、 $\#(S1_k) = \#(CS_k)$  ですから  $\#(CS_k)$  も奇数になります。(1),(2) と数学的帰納法によって結論を得ます。□

この補題は  $[0, 1]^n$  の  $n$  次元立方格子についての Sperner's lemma と呼ぶべきものです。3 節の性質 (P2) と深く関係した議論になっています。

**Brouwer's fixed point theorem.**  $g$  を  $[0, 1]^n$  から  $[0, 1]^n$  への連続写像とすれば、 $g(c) = c$  を満たす点  $c \in [0, 1]^n$  が存在します。

**証明.**  $f$  を  $f(x) = g(x) - x$  で定義された  $[0, 1]^n$  から  $R^n$  への連続写像とします。 $i \in N_n$  ごとに、 $f_i$  を  $f_i(x) = (f(x))_i$  で定義された  $[0, 1]^n$  から  $R$  への連続写像とします。

(1)  $m$  を正の整数とし、 $L_n$  を  $[0, 1]^n$  の  $n$  次元立方格子、 $l_n$  を  $L_n$  の  $n$  次元 B-ラベリングとします。このとき補題 5.7 によって  $\#(CS_n)$  は奇数です。よって  $n_c$ -s が存在します。したがって、 $i \in M_n$  ごとに  $l_n(p_i) = i$  である  $(n+1)$  個の点  $p_0, p_1, \dots, p_n$  が存在して、補題 5.5 (1)(2) によって、 $i \in N_n$  ごとに

$$\|p_0 - p_i\| \leq n/m \quad \text{and} \quad f_i(p_0)f_i(p_i) \leq 0$$

となります。 $i \in N_n$  ごとに、 $f_i$  は連続ですから、次の条件を満たす  $a_{m,i} \in [0, 1]^n$  が存在します。

$$f_i(a_{m,i}) = 0 \quad \text{and} \quad a_{m,i} = (1-t_i)p_0 + t_i p_i \quad \text{for some } t_i \in [0, 1].$$

(2)  $m$  ごとに  $n$  個の点  $a_{m,1}, \dots, a_{m,n}$  が存在しますから、私たちは、 $i \in N_n$  ごとに、 $[0, 1]^n$  の点列  $\{a_{m,i}\}$  を得ます。ボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理によって、 $\{a_{m,1}\}$  は  $c \in [0, 1]^n$  に収束する部分列  $\{a_{m_k,1}\}$  を持ちます。任意の  $m, i$  について次の式が成立します。

$$\|a_{m,i} - a_{m,1}\| \leq \|a_{m,i} - p_0\| + \|a_{m,1} - p_0\| \leq \|p_i - p_0\| + \|p_1 - p_0\| \leq 2n/m$$

したがって、 $i \in N_n$  ごとに  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|a_{m,i} - a_{m,1}\| = 0$  を得ます。これは、 $i \in N_n$  ごとに、 $\{a_{m,i}\}$  の部分列  $\{a_{m_k,i}\}$  も  $c$  に収束することを意味します。 $f_i(a_{m_k,i}) = 0$  と  $f_i$  が連続ですから

$$f_i(c) = \lim_{m_k \rightarrow \infty} f_i(a_{m_k,i}) = 0$$

となり、結局すべての  $i \in N_n$  について  $f_i(c) = 0$  となることが結論できます。これは  $f(c) = g(c) - c = 0$  を意味しますので定理を得ます。□

付記： 本稿の手法で、 $n$ -次元でも 3 節の T-lemma に相当する lemma を得ることができます。この lemma を検討すると、有界閉集合  $C$  上の連続関数  $f$  が零点を持つかという問題は、 $C$  の境界の  $f$  による運動で記述される中間値原理とでも呼ぶべき多様な十分条件を持つことが分かります。ブラウワーの不動点定理の条件もこの十分条件の 1 つです。この方向で幾つかのトーラスの不動点定理を得ることも出来ます。ただし、どのような図形が位相同型になるのかという問題があり、ブラウワーの不動点定理のような美しい定理が得られるかは不明です。

## References

- [1] P. Bohl, "Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nahe einer Gleichgewichtslage", J. Reine Angew. Math. 127 (1904), 179–276.
- [2] L. E. J. Brouwer, "Über Abbildung der Mannigfaltigkeiten", Math. Ann. 71 (1912), 97–115.
- [3] J. Hadamard, "Sur quelques applications de l'indice de Kronecker, Introduction to: J. Tannery, La Théorie des Fonctions d'une Variable", Paris, (1910).
- [4] Sperner, E., "Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge", Math. Z. 27 (1928), 544–548.
- [5] T. Suzuki and Y. Takeuchi, "An elementary proof of the Brouwer fixed point theorem", 仮題 投稿予定.