数学における概念拡張の仕組み
——デデキントの研究計画に沿って——

八杉滿利子*

1. はじめに

数学ではたえず新しい「概念形成」(概念拡張)が行われる。「概念形成」と引用符で括ったのは、実際には概念のみならず対象領域、関数あるいは操作・演算なども含めて考えているからである。新しい概念形成といっても任意に新しくというわけではなく、なんらかの意味で「必然的に」方向が決まっている。同時に当然ながら新概念がそれまでの知識から自動的・機械的に導かれるわけではない。

ではどのような条件のもとで新概念が数学として自然であり、結果として必然的と認められるのだろうか。このような問いに関する考察の方向は様々であり得る。数学の分野により、また時代にもより異なる種類の考察が可能だろう。本稿では概念拡張のひとつの仕組みを論じているデデキントの Dedekind (1930-32b) における数学論とそれに関連するデデキントの後年の研究およびそれらについての近年の考察の概観を、現代における応用を視野に入れながら行う。Dedekind (1930-32b) を基にする理由は、著者の関心事が数学における発展的概念形成の一般的な枠組み構成であり、それには Dedekind (1930-32b) がひとつの有効なモデルだからであるとともに、Dedekind (1930-32b) では概念拡張の重要な具体例を中心に考察が行われているからである。

デデキントは Dedekind (1930-32b) (Dedekind (1996) も参照)において数学における概念拡張の仕組みを提示している。その内容はデデキントの研究計画であり、デデキントの後年の諸研究成果(たとえば Dedekind (1930-32a), Dedekind (1930-32c))につながるものである。同時にまた Dedekind (1930-32b) は彼の数理哲学を示すものでもある。デデキントの数学論および数学の効果が現代までも続いているという事実が、この研究計画に意義を与えている。本稿ではデデキントの数学観を受け入れる立場から、Dedekind (1930-32b) の内容を、数学における概念拡張の仕組みという視点で概観する。Dedekind (1930-32b) そのものは、短い上にデデキントの哲学が明確に適確に述べられているので、直接読むのが一番だ。

Dedekind (1930-32b) においてデデキントはまず自然数上の加法と乗法を基礎にして、新しい演算、すなわち逆演算を可能にする対象領域の逐次導入の方法を述べているが、既存の対象領域内での関数概念の拡張・転換についても考察している。現代では後者の状況のほうがより切実な場合が多い。

Dedekind (1930-32b) においてデデキントは哲学を論じているわけではなく、科学の発展に関する洞察に基づく数学の発展の仕組みのひとつの見方を示しているだけだ。デデキントの概念拡張に関する肯定的なスタンスは、数学の成長期にその発展自体によって引き起こされたものと推測される。そして我々はそれを読み解くことにより、その背後にあるデデキントの数学に関する哲学的様相を汲み取るのである。

デデキントの Dedekind (1930-32b) に関係する後続の仕事および関連するデデキント研究については 6 節および 7 節で述べる。

本稿の基調は次の二点から成る。第一点は、Dedekind (1930-32b) において「演算拡張」が同時に「概念拡張」ともみなされるものであり、またその拡張は三種類に分類され得ることを示すことである。第二点は現代の数学の発展への応用の視点から「拡張」の本質を整理し、その一般的枠組み設定のための準備を視野に入れること、である。

2. 概観

ここで本稿の主旨の理解のために、Dedekind (1930-32b) を概観しておく。

英訳 Dedekind (1996) では原文 Dedekind (1930-32b) のパラグラフ番号を付しているので、本節以降その方式を採用する。以下で $\langle i \rangle$ は Dedekind (1930-32b) における第 i パラグラフを表す。ただし Dedekind (1930-32b) の直接的引用をするものではなく、そのパラグラフの内容の、著者のことばによる説明である。

著者の分析によれば、Dedekind (1930-32b) で展開されるデデキントの数学観においては、数学の発展の仕方が三段階に分類される。第一は上述のように新しい演算とそれに伴う新領域の創造である。ここでの認識論的問題は新しい演算と数の創造に関わる。この創造は「数学の発展における必然性」によって承認されている（Dedekind (1930-32b) のパラグラフ ⟨7⟩- ⟨9⟩）。ここまでで無理数・虚数が必要となる。第二（⟨10⟩-⟨11⟩）はすでに仮定されている実数領域の一部で定義されている演算の性質およびその定義域の拡張が問題にされる。第三（⟨12⟩）はさらに高度の数学概念に移り、演算の定義域の拡張に際してもとの演算の定義が放棄される。すなわちより広い定義域をもち、限定された領域ではもとの演算と（値が）一致する別な演算が採用される。この場合には単なる定義域の拡張ではなく、概念の転換が起っている、という見方ができる。

いずれの場合にも、演算の適用領域の拡張は演算の概念拡張だといえる。また、その拡張は限定された領域における演算の基本性質の充足性を要求する。すなわち、当該演算を規定するとみなされる性質が、拡張された領域でも成り立つことが要請されるのである。

三つの段階のすべてが数学の発展に関わっている。現在その認識論的意義がその都度問われることは少ないが、必要なときには我々はデデキントの Dedekind (1930-32b) に立ち戻ることができる。その意味で、この内容を現代的な見地から概観しておくことは有用だ。

Dedekind (1930-32b) で提示される概念拡張に関する数学論は、野本 (2010) の「保存拡大的条件」という表現に習えば、「デデキントの保存的拡張原理」と呼ぶことができるだろう。「保存的」と形容する理由は、その拡張が旧理論で成り立つ普遍妥当な性質が拡張後も妥当であるという制約のもとでのみ認められるからだ。

後で見るように、Dedekind (1930-32b) における概念形成の最初の例は新しい対象領域の定義あるいは構成の必要性を含む。その構成方法は今日よく知られており、数学的には問題を呈さない。また、デデキントも新領域についての存在論的意味を問うことはしていない。

まず正整数とその上の後者関数という演算を基に、同じ領域で（つまり領域は不変で）加法と乗法を、逐次「ある手続きの反復のプロセスを一つの操作としてまとめる」ことによって定義する。加法の逆演算としての減法をとりあげるとき、対象領域の拡張が必要になる。ではなぜ減法が必要なのか、そもそもなぜそういうものを考えつくのか。減法は実生活でも科学でも使いこまれてきた演算であるとともに、数学者の立場からは「方程式を解く」という数学の基本的な活動を可能にするためだ。デデキントは「間接的逆演算」という表現を使っている。

たとえば等式 $a + x = c$ が成り立つ x を求める操作を、a と c を引数とする演算とみなすとき、この演算は加法の逆演算、減法、であり、式 $a + x = c$ が減法を間接的に包含していると考えられる。つまり減法は加法と上記等式によって間接的に規定される演算なのだ。

以下、3 節 ~5 節で Dedekind (1930-32b) の内容を吟味・解説する。6 節および 7 節で序文でも触れたその後の研究をいくつか紹介する。最後（8 節）に Dedekind (1930-32b) で貫かれている原理の枠組みについて整理し、この稿を終える。

3.　科学の発展における一般法則

デデキントは ⟨3⟩ ~ ⟨5⟩ で科学を発展的・動的な体系と捉えて、⟨6⟩ で数学についても同様の見方を提示しており、それが Dedekind (1930-32b) の骨子になっている。

とくに ⟨3⟩ にはデデキントの科学観が明確に表れている。すなわち、科学はその目標である真理（Wahrheit）にいたる知識獲得の過程を表現するものであるが、科学はまた人の営みなので、人の任意性と知力の不完全さにしたがう。ゆえにその過程は多

様で、異なる表現が可能だ。逆に見れば、完全な知性には科学は不要だ。どのような概念がより有効かそうでないか、は科学のさらなる発展が決めることだ。

学問とは、不完全ながら知性をもつ、あるいは知性をもつが不完全な人間の営みに他ならないことを考えれば、この観点への共感は容易であろう。ただし、数学では一度証明された定理はその正当性が確立されるが、観察や資料を基にする分野では新事実の発見による解釈の書き換えなどの可能性がある、という相異がある。

⟨4⟩ では法学の例が扱われ、⟨5⟩ で科学の創造性が（既得事実のみでなく）「内的必然性」に支えられていると主張される。この内的必然性はデデキントのその後の数学の展開でつねに考慮される（Ferreirós (1999) に詳しい）。科学あるいは数学そのものの内的必然性への信頼がデデキントの数理哲学の基本なのだと考えられる。

⟨3⟩ と ⟨5⟩ を総合すると、デデキントの考える「科学の発展の一般法則」は次のように表現できる。（体系化された知識としての）科学（の各分野）においては、過去の成果に加え、その内的必然性によって、次の方向が逐次決まってゆく。換言すれば、科学者は多様な可能性のなかから（当該科学分野の）内的必然性に導かれて適切な方向を選び取ってゆくのである。

⟨6⟩ が科学の発展の一般法則の数学版だ。すなわち、数学も「上記の一般法則」の例外ではないと言う。数学の特徴は何らかの対象、たとえば演算、についての定義からはじまることだが、定義は最初はまず限定された形で必然的に現れる。関連する理論の展開にともなって定義領域の拡張が必要となるが、それは先行する定義からの（内的）必然性にしたがうものであり、その必然性とは、最初の定義が指示する概念を規定するような法則が拡張後も成立する、という要請である。この点については次節でより具体的に説明する。

デデキントの主張する科学の発展は、発明と発見のデリケートな混合物と言える。すなわち、科学は人間の自由な思考活動の産物という意味で発明であると同時に、内的必然性によって方向が定まるという意味で発見でもある。

4.　領域の創造を伴う演算の拡張

パラグラフ ⟨7⟩ は数学概念の逐次発展に関するデデキントの哲学が明確に表れている重要な箇所だ。すなわちこの部分がデデキントの（保存的）拡張の第一段階である。そこでは間接的な逆演算の導入とそれに伴う領域の拡張が丁寧に論じられている。

デデキントの表現によれば、正整数上の後者関数（継続的前進）が算術のもっとも初等的操作（Operation）であり、数学のすべてはそれに基づいている。この初等的操作の反復をひとつの行為としてまとめることによって、人は加法の概念に行き着く。

同様の考え方で加法から乗法、さらにべき乗等の演算概念が発生する。

以上のことは、「演算の概念」を「計算可能」と読み替えるならば、原始再帰関数の逐次定義に相当する。その本質は「一つの操作の反復のまとめ上げ」、すなわち既に計算可能と認められている関数への原始再帰原理の適用である。

これだけならば正整数領域で十分で、領域の拡張は不要だ。他方これでは明らかに算術の発展には不十分だ。算術はその発展のために減法や除法などの（間接的な）逆演算が無条件に実行可能なことを要求する。この要求によって新しい数のクラスの創造が必然となる。

創造の結果数学が整合的に実行可能でなければならない。そのためにはもとの演算（加法など）を、もとの領域（たとえば正整数領域）を含む拡張された領域全体（たとえば整数領域）に適用可能なように定義し直す必要がある。さらにその結果が旧領域上ではもとの演算概念と一致すること、および「前述の一般的原理」（⟨6⟩）を遵守することが要求される。すなわち、旧領域でもとの演算を特徴づける法則が新領域全体に拡張された演算に関しても成り立つこと（普遍妥当性）が要求される。正整数領域における加法と乗法を特徴付ける交換律や分配律などがその例だ。

これらの法則について何か一般的な規定が可能なのか、という問いが発せられるかもしれないが、その問いはほとんど無意味だ。科学あるいは数学の発展は一種の必然性にしたがう、というデデキントの主張は、その必然性が最初から厳密な方向性を規定することまでは意味しない。数学の発展の各段階は人間の営みなのだ。発展の仕方が決定されているのならば、数学の研究など不要だろう。⟨3⟩ の表現を借りるならば、「数学のさらなる発展」によって次第に方向が決まって行くものなのだ。数学のある理論の実行においてまず局所的な必然性が気づかれ、ある程度の発展の後にそこで満たされるべき普遍的な性質あるいは法則について合意されるが、ときには後に軌道修正が必要なこともあり得る。

この後に乗法とべき乗（指数関数）の導入に関する説明がある（⟨8⟩,⟨9⟩）。乗法に対する逆演算すなわち除法の導入は数領域の有理数への拡張を要求する。有理数領域での指数関数は、指数が有理数の場合に無理数を、底が負数のときに複素数を要求し、数の新領域へと導く。デデキントはこの最後のステップは「大ごと」だと言い、後年実数の構成に関わることになる（Dedekind (1930-32a)）。

さて、なぜ加法に対する減法のように、逆演算の導入が「必然」なのか。それは前述のように数学の豊かな発展のために数学自体が要求する、「方程式を解く」などの活動のために必要なのである。

以上により、第一段階は数学の概念拡張に関する重要な諸事項を含んでいる。それ

らをここで整理し、一般的な表現で述べておこう。

1. 基礎領域における基礎演算の反復とそのまとめ上げによる新演算の構成
2. 1で得られた演算の本質を規定し、普遍妥当と目される条件（等式その他の関係式で表現される法則）の設定
3. 1と2を基に数学活動（方程式を解く、など）に必要な新しい演算（逆演算など）とそれに伴う、もとの領域を含む新領域の導入
4. 3で得られた新領域における、もとの演算に関する2の法則の成立（法則の充足性）の確認

上記で4は新旧の数学理論の整合性を意味している。

5. 既存領域内での演算拡張

⟨9⟩ の要求によって実数領域が創造されたものとしよう。⟨10⟩-⟨11⟩ では三角関数を例に、実数領域内での定義域の拡張が取り上げられる。これが拡張の第二段階だ。

角の関数である sin と cos の定義は最初は幾何学的に直角三角形の辺の比によって定義される。その場合定義域は鋭角に限定される。ここでの普遍的法則は、たとえば加法定理 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ などだ。この等式を右辺から見るとき x, y それぞれが鋭角であれば意味をなすが、$x+y$ が鋭角でないとき左辺は定義されないことになる。つまり $x, y, x+y$ がすべて鋭角のときのみ等式が意味をもつ。この不自然さを解消し、さらに任意の実数値が角度として意味をもつことにも対応すべく、加法定理を保存しながら任意の実数について sin と cos が定義されるようになった。

この場合、実数領域は既存のものと仮定されているので、sin と cos の関数概念の拡張のみが問題になる。幾何学的・直観的な意味をもつ三角関数は限定された領域で定義された。その本質である加法定理等を保存しながら定義域を拡張できたということは、関数概念の拡張であり、加法定理のより広い領域での充足性が成り立つということになる。拡張された後でも sin 等の引数値は角度と考えられ、もとの領域では最初の三角関数の概念が保存されている。

第一、第二段階は制限された領域にのみ関係する概念がより一般的な領域上の概念に拡張されるという数学発展のひとつの特性を示すものだ。これらの場合には関係する概念はもとの領域においては拡張前の概念そのままであることが保証される。

これに対して次の第三段階では「概念転換」というべき状況が生じる。

⟨12⟩ では、定義域の拡張に際してもとの定義あるいは関数が放棄され、したがってもとの領域においても概念変更が起こるケースを（定）積分と Γ 関数の例で説明して

いる。前者では原始関数による積分値から面積としての積分値への移行、後者では正実数でのみ定義された Γ 関数の実数全体への拡張を Π 関数として定義し直すこと、が概念転換になる。周知のように、面積としての積分概念がルベッグ積分、さらに広範囲の積分論に発展することになった。これらの場合でも、基本性質（積分の線形性、自然数上での Γ 関数の挙動に関する法則等）の普遍妥当性は成り立つ。

なお、積分の場合には定義域は数ではなくて関数族であることを注意しておこう。当初の定義域は原始関数をもつ関数族であり、概念転換の後により広い関数族へと拡張される。

6. 演算と領域の拡張に関するその後

以上のように、Dedekind (1930-32b) は数学発展（の一側面）に関するデデキントの観点を述べたものであり、その意義はその後に展開された Dedekind (1930-32b) に直接つながるデデキントの仕事およびデデキント研究によって強化されると考えられる。

まずデデキントは Dedekind (1930-32b) のプロポーザルにしたがう形で実数（無理数）の構成を実行してみせる（Dedekind (1930-32a)）。さらに当初は所与のものとされている自然数（正整数）の基礎付けを集合論的構成によって試みている（Dedekind (1930-32c)）。これら数学上の成果の哲学的な意味づけは 7 節で紹介する野本 (2010) 等で詳しく検討されている。

Sieg & Schlimm (2005) は本稿 4 節に相当する、新しい関数の導入とそれに伴う数の新領域の創造に視点をおき、それにまつわる「微妙な循環性」（subtle circularity）を指摘している。

正整数から整数全体、整数の対としての有理数の構成、その上での加減乗除の定義などはデデキントの出版論文としては現れていない。Sieg & Schlimm (2005) は未公開の資料の中に現在の数学者になじみのあるこれらの考え方の記録を発見し、Dedekind (1930-32b) における「微妙な循環」の回避がデデキントにすでにあったことを示している。すなわち、デデキントはまず後者関数を自然数領域の生成者として他の演算と区別し、加法や乗法の逆演算を微妙な循環なしに保証するために整数領域と有理数領域を公理的に特徴づける。この公理的分析（analysis）は綜合（synthesis）によって補完される、という。「総合による補完」とは、それら公理のモデルを形成する領域の明示的定義を与えることである。

Sieg & Schlimm (2005) は自然数（正整数）と後者関数による整数、整数の対としての有理数、有理数の部分集合の対としての実数という三種の構成によるデデキントの数領域の逐次拡張の発想を明らかにした。続けて各ステップでその領域における加法

等の演算は、もとの領域上の同種の演算を基に定義されることに注意を喚起している。たとえば有理数に対応する整数の対の加法は、整数上の加法から誘導される、ということだ。

「微妙な循環性」についての Sieg & Schlimm (2005) の説明は次のようなことである。Dedekind (1930-32b) によれば、新しい数は限定された演算の「無限定な逆演算」によって生成され、限定された演算はその生成された領域に拡張される。限定された演算として正整数上で定義されている加法を考えれば、その逆演算として求められる減法は正整数上のみでは完全に定義されない。つまり定義域を限定しない無限定な逆演算を認めなければならないことになる。無限定な演算である減法によって整数が生成され、その後にもとの限定的演算である加法が整数全体に拡張される、という状況なのだ。通常演算は所与の領域上で定義される。しかし上の状況では、整数領域の生成のためにまず定義域が指定されていない（逆）演算が必要なのである。ここに「微妙な循環」が生じる。

Sieg & Schlimm (2005) は、デデキントの数学観において、数学的経験で得られるデータについての哲学的先入観を交えない徹底した分析が本質的であった、という。それはデデキントがすでに Dedekind (1930-32b) で要求したように、そのような分析が、扱っている主題の性質を反映し、主題の展開に有効な概念を導くものだからである。

Sieg & Schlimm (2005) でひとつ興味深いことは Scholz が 1982 年の論文で引用している Herbart の次のことばを冒頭に掲げていることだ：数学は哲学的に扱われることによって哲学の一部分になる。Dedekind (1930-32b) は本稿および Sieg & Schlimm (2005) の上記の観察どおり数学あるいは科学的経験の分析を基にした数学論であるが、哲学的に扱うことが可能な内容であり、そうすることによってデデキントの数学論の根底に流れる数理哲学観としての Dedekind (1930-32b) の意義が生じる、という意味なのだろう。

Dedekind (1930-32a) における実数の構成について一言添えよう。そこでは二個の有理数の集合の組を実数に対応する対象としており、そのような組の構成を「切断（Schnitt）」と呼ぶ。いわゆる Dedekind cut だ。4 節で触れた「大ごと」な仕事とはこのことである。

領域と演算の拡張のこの方法は現在（有理数のコーシー列による実数の構成とともに）数学の標準項目になっている。Dedekind cut という呼称以外はその起源への注目もなくなっている。その事実がデデキントの数学論の妥当性を物語っているといえるだろう。

7.　数学思想史におけるデデキントの位置

6 節で Dedekind (1930-32b) に関わるデデキントの数学的展開とそれに関する哲学的考察を紹介した。本節では数学思想史における Dedekind (1930-32b) を中心としたデデキントの位置づけについての見解を紹介する。

Ferreirós (1999) は集合概念の発生期から集合論の創設を経て公理的集合論に至る数学思想史の著書であり、そのなかでデデキントの数学観についても詳細に論じている。とくにデデキントの数学観がリーマン（Riemann）の影響を受け、リーマンはヘルバルト（Herbart）を哲学上のメンターとしていたこと、リーマンとデデキントは数学研究において集合の言語を導入した初期の人たちであること、などが書かれている。Dedekind (1930-32c) につながる書き物でデデキントが写像（Abbildung）の概念の重要性を説いている箇所を引用して、デデキントはすでに彼の論理主義的（logicistic）観点を示唆している、という。そして Dedekind (1930-32b) に関しては、デデキントの基礎付け的観点（foundational views）の最初の記録であり、自然数からはじめて算術の段階的・発生的な展開のプログラムを提示した、と説明している。

野本 (2010) は「第一期論理主義」の中に位置づけられるものとしてデデキントの一連の数学的成果を解説・検討し、Dedekind (1930-32c) に論理主義と看做し得る見解が述べられている、という。Dedekind (1930-32b) の、本稿 4 節に相当する箇所についても詳しく検討している。そして Dedekind (1930-32b) は、デデキントの最初の「基礎論的見解」であり、デデキントの古典数体系の理解の特異性およびデデキントの思考の特色である「厳密さの問題」への関心と数学の「歴史的発展」という理解の視点が現れているという点で興味深い、という。

さらに、Dedekind (1930-32b) は後の基礎論的な仕事 Dedekind (1930-32a) や Dedekind (1930-32c) を予示するものであるが、Dedekind (1930-32b) では（本稿でも詳説したように）演算と新しい数の領域の継続的定義という立場をとり、数の系（System）という概念は出ていないのに対して、Dedekind (1930-32a) からは新しい数そのものの定義を強調しており、系から新しい数を定義（創造）するという立場をとるようになる、と指摘する。この点は 6 節で紹介した Sieg & Schlimm (2005) でも取り上げられており、野本 (2010) でもそれを参照している。

またデデキントの観点は、人は数学において概念や対象を創造しているのであってそこに構成主義的制限は適用されない、というものであり、これが彼の「基本的確信」であり「特異な数学の哲学」であると指摘する。Ferreirós (1999) を引用しつつデデキントの立場を「非構成主義的知性主義（non-constructivist intellectualism）」と呼ぶこ

とを示唆している。

デデキントが無理数を新しい数として導入した更なる理由は、数の同質性（homogeneity）の保存という目標であり、数に関するわれわれの直観的観念のあるものを保存しようとしたのである、という一文は本稿にとって貴重なリマークだ。この同質性という観点こそ本稿が、数に限らず様々な数学的対象に関する概念の保存の仕組みを求めて、Dedekind (1930-32b) の紹介を試みている所以である。8 節でそのことに触れる。

Reck (2003) は Dedekind (1930-32c) に焦点を当て、未公開の資料にもあたって、デデキントが「方法論的構造主義者」でありまた「論理的構造主義者」であると解釈できると主張する。そしてまず十分な歴史的情報を得た上で Dedekind (1930-32c) におけるデデキントの基本姿勢を注意深く観察し、その哲学的ニュアンスを含む解釈を与えることを目指している。その際その論理的、意味論的、形而上学的側面に焦点をあてる、と述べている。

ここで Reck (2003) のいう構造主義とは、（数学における）個々の諸対象ではなくそれらを抽象化して残った「構造の研究」が数学である、という観点のことだ。

Sieg & Schlimm (2005) と Reck (2003) によれば、デデキントは有理数や実数について自由な創造（free creation）という表現を使う。Reck (2003) はこの「創造という概念」を文字通りに、かつ深刻に受け止めるべきだ、と主張する。たとえばデデキントはある書簡の中で、数学の実践において実数は（有理数の）カットとは別の新しい対象であり、カットを直接扱うことはしない、と書いているということだ。

ところで Ferreirós (1999) によれば、デデキントは古典数学を再考してそれを体系づける試みをしたが、厳密な構造的視点で数学を見たかどうかは疑問である。デデキントにとっては数の体系のほうが抽象的構造よりも本質的であったのだろう。しかし、抽象的・概念的観点（リーマンの影響といわれる）によって導かれた数学の方法論こそ、二十世紀の構造的数学の文脈において非常に豊かな結果をもたらしたのだ。

8.　おわりに

以上デデキントの初期の数学論とその後の流れについて概観したが、それらに関連して Dedekind (1930-32b) の英訳である Dedekind (1996) の編集者のノートが参考になる。たとえばデデキントが偉大な主流の数学者であったこと、とくに代数的数論の創始者であり、そのほとんど全道具立てを導入したこと、それらは二十世紀の数学を支配したことなど数学者にとって周知の事実を確認するとともに、デデキントが数学の基礎における仕事で哲学者に知られていることを最初に説明している。

また数学の基礎に関するデデキントの後年の仕事の萌芽が Dedekind (1930-32b) に

見いだされること、すなわちそこにおいてデデキントは数学における数の新しいクラスの起源の一様な、アドホックでない記述を展開することに関心をもち、その分析をDedekind (1930-32a) と Dedekind (1930-32c) で深化させたこと、も述べている。さらに、Dedekind (1930-32b) でデデキントが検討している生成原理、すなわち数の新しいクラスは旧クラスのある演算のもとでの閉包をとることによって生成されるという原理、と数の諸クラスを根元的であるとみなす観点とが彼を代数的数論における新しい構造の発見に導くことになったことにも言及している。

これらのコメントからも Dedekind (1930-32b) の意義の大きさが分かる。

最後に、Dedekind (1930-32b) で貫かれている原理の一般的枠組みについて 4 節の補足の形で解説して、この稿を終える。

まず、第一段階の場合は、すでに 4 節で述べたとおりである。すなわち、自然数（あるいは正整数）領域から出発して、逆演算の必然性から逐次新領域の構成が要求される。この点で以下の考察とは議論の仕方が異なることに注意しておこう。

新領域も含めて考察の全体領域が設定されたものとしよう。自然数、自然数上の関数、実数、実関数、開集合等数学の現場で必要とされる任意の要素集合でよい。

全体領域の部分領域（基本領域と呼んでおこう）上で定義される演算あるいは関係等の基本概念が考察の対象とされる。基本概念を特徴付けるような関係式あるいは命題は基本領域で普遍妥当であるはずだ。これら基本領域、基本概念および普遍妥当な命題の組に対して、数学のさらなる発展のための要請は種々ある。その要請は、自由な発想の展開を可能にすることおよび広く数学活動によって方向性が承認されるような展開であること、の二点から成る。たとえば、数の加法について方程式を解くという活動のためには自然数領域の拡張が必要であり、整数領域が生成される。直角三角形の辺の比としての三角関数から任意の実数を引数にとれる関数へと拡張することも数学の発展には欠かせない。

拡張された概念についても当初の普遍妥当な性質が成り立つことは、その拡張が保存的であり必然的であることを示すものと考えられる。拡張された定義域の要素は、当該の普遍妥当な性質に関して基本領域の要素と同じ意味をもつ（同質である）と認めてよいだろう。したがってデデキントの例でいえば、加法と乗法に関しては整数も実数も正整数と同様の性質を持つ「数」と認識されるのであり、また $\frac{\pi}{2}$ 未満の実数もそれ以上あるいは負の実数も sin と cos に関しては同じように「角度」と認識されるのである。さらに、積分概念の拡張の試みは、5 節でも触れたように、種々な測度に関する積分論へと発展した。その結果可積分と認められる関数族（積分の定義域）は大幅に拡張されたのである。

文献

Dedekind, J. (1930-32a). ‘Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872,’ in *Dedekind 3*: Braunsweig, 315–334.

——— (1930-32b). ‘Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik: Habilitationsvorlesung 1854,’ in *Dedekind 3*: Braunsweig, 428–438.

——— (1930-32c). ‘Was sind und was sollen die Zahlen? 1888,’ in *Dedekind 3*: Braunsweig, 335–391.

——— (1996). ‘On the introduction of new functions in mathematics,’ in *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics II*: Clarendon Press, 754–762.

Ferreirós, J. (1999). *Labyrinth of Thought-A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser.

野本和幸 (2010). 「R. デデキントの数論：（１）「無理数論」–論理主義の一出発点–」,『創価大学人文論集』, 第 22 巻, 1–35 頁.

Reck, E. H. (2003). ‘Dedekind’s structuralism: an interpretation and partial defense,’ *Synthese*, *137*, 369–419.

Sieg, W. & Schlimm, D. (2005). ‘Dedekind’s analysis of number: Systems and Axioms,’ *Synthese*, *147*, 121–170.

〔京都大学文学研究科研修員・数理哲学〕