

( 続紙 1 )

京都大学	博士 ( 理 学 )	氏名	中田 雅之
論文題目	On homological stability for orthogonal and special orthogonal groups		

( 論文内容の要旨 )

$\mathbb{K}$  を標数が2でない無限ピタゴラス体とする。例えば、実数体はそのような体である。 $O(n)$ 、 $SO(n)$  をそれぞれ  $\mathbb{K}$  上の直交群、特殊直交群とする。これらの群には離散位相が入っていると考える。このとき、自然な包含写像  $i_n : O(n) \rightarrow O(n+1)$ 、 $j_n : SO(n) \rightarrow SO(n+1)$  が  $k$  次元ホモロジー ( ホモロジーは群ホモロジー、つまり、分類空間のホモロジーと理解する。 ) に誘導する写像がある自然数  $n$  以上で同型となるとき、これらの群の  $k$  次元ホモロジーは安定化するという。当然、このようなホモロジー安定化はそれ自体重要である。Hilbert の第3問題として知られるはさみ合同問題の M. Dehn による解決により、このような群のホモロジーは、はさみ合同問題と深く関係することが知られており、その安定化はこの観点からも重要である。また、近年、このはさみ合同問題はモチビクコホモロジーにより統制されると考えられており、この点においても上記のホモロジー安定化は大きな役割を果たすと期待されている。

このホモロジー安定化に関しては  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  のときに C.H. Sah が ( 群  $O(n)$ 、 $(SO(n))$  は通常の Lie 群としてではなく、離散群として考えられている。 ) 標数が2でない無限ピタゴラス体  $\mathbb{K}$  に対する  $O(n)$  の整係数ホモロジーと  $SO(n)$  の  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  係数ホモロジーに関しては J.-L. Catherineau がそれぞれ結果を得ている。本論文ではこのホモロジー安定化に関して、 $O(n)$  の場合は行列式に付随する局所係数のホモロジー、 $SO(n)$  の場合は整係数ホモロジーに対して考察している。このホモロジー安定化の問題は、その重要性から多くの数学者が研究してきたものであるが、長年未解決のままであったが、本論文により問題が解決された。 $O(n)$  に関する結果の証明は以下のようなになる。まず、Catherineau の導入した  $\mathbb{Z}O(n)$  加群としての  $\mathbb{Z}$  の自由分解を元に、より小さな  $\mathbb{Z}O(n)$  加群としての  $\mathbb{Z}$  の自由分解を構成し、それを  $O(n)$  の行列式でねじることにより、行列式でねじられた  $\mathbb{Z}$  の  $\mathbb{Z}O(n)$  加群としての自由分解を得る。この構成が非常に巧妙であり、独創的な点である。この分解を用いて、 $O(n)$  のホモロジーに収束する標準的なスペクトル系列を考え、その退化を示すことにより、ホモロジー安定化が証明される。このスペクトル系列の退化は上記の自由分解の低次元部分の直接計算と群ホモロジーの基本定理である Eckmann-Shapiro の定理を用いて非常に初等的に示すことができる。 $SO(n)$  に関する結果は、 $O(n)$  に関する結果とホモロジーの係数に関する Bockstein 完全列を組み合わせることにより証明される。

以上が本論文の主要結果である。

( 論文審査の結果の要旨 )

$\mathbb{K}$  を標数が 2 でない無限ピタゴラス体とする。例えば、実数体はそのような体である。 $O(n)$ 、 $SO(n)$  をそれぞれ  $\mathbb{K}$  上の直交群、特殊直交群とする。これらの群には離散位相が入っていると考える。このとき、自然な包含写像  $i_n : O(n) \rightarrow O(n+1)$ 、 $j_n : SO(n) \rightarrow SO(n+1)$  が  $k$  次元ホモロジーに誘導する写像がある自然数  $n$  以上で同型となるときの、これらの群のホモロジーは安定化するという。直交群と特殊直交群のホモロジー安定化は、それ自体非常に重要な性質である。さらに、Hilbert の第 3 問題として知られるはさみ合同問と直交群と特殊直交群のホモロジーは深く関係しており、このような応用に関しても、ホモロジー安定化は重要であると考えられる。

直交群と特殊直交群のホモロジー安定化に関しては  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  のときに C.H. Sah が、標数が 2 でない無限ピタゴラス体  $\mathbb{K}$  に対する  $O(n)$  の整係数ホモロジーと  $SO(n)$  の  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  係数ホモロジーに関しては J.-L. Catherineau がそれぞれ結果を得ている。本論文ではこのホモロジー安定化に関して、 $O(n)$  の場合は行列式に付随する局所係数のホモロジー、 $SO(n)$  の場合は整係数ホモロジーに対して考察している。このホモロジー安定化の問題は、その重要性から多くの数学者が研究してきたものであるが、長年未解決のままであったが、本論文により問題が解決された。

よって、本論文は博士 ( 理学 ) の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成 25 年 1 月 11 日に試問を行った結果、合格と認めた。