氏　　　　名　朱　　景　　輝（ジュ　ジン　フィ）
学位(専攻分野)　博　士　（理　学）
学 位 記 番 号　理　博　第 2122 号
学位授与の日付　平 成 11 年 9 月 24 日
学位授与の要件　学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻　理 学 研 究 科 数 学・数 理 解 析 専 攻
学位論文題目　Numerical Study of Stagnation–point Flows of Incompressible Fluid
（非圧縮流体の淀み点流問題の数値的な研究）

論文調査委員　（主　査）教　授　岡本　久　　教　授　髙橋陽一郎　　教　授　河合隆裕

論　文　内　容　の　要　旨

本論文で目指すものは Navier-Stokes 方程式から派生する爆発問題の数値的解析である。Navier-Stokes 方程式は非圧縮粘性流体の基礎方程式であるが，その適切性が 60 年以上にわたる研究にもかかわらず不明な状態である。そこで様々なモデルを通じて適切性に関する情報を集め，類推によって現象を理解しようとする努力が続けられている。本論文では，淀み点流れのモデルを用いて，適切性の問題，特に解の爆発現象を考察し，以下に述べるような有益な知見を得た。

Navier-Stokes 方程式を 2 枚の無限に伸びた平行な板で挟まれた領域で考え，Hiemenz による相似形を仮定すると，

$$f_{txx}+ff_{xxx}-f_xf_{xx}=\nu f_{xxxx} \qquad (1)$$

という偏微分方程式が導かれる。ここで $f=f(t,x)$ は時間 t と空間 1 変数の x 函数である。

変数 x は区間 $-1<x<1$ を動き，境界条件は

$$f(t,\pm1)=f_x(t,\pm1)=0$$

を課す。この方程式の解が有限時間で爆発するかどうか，という問題に関し，いくつかの論文がすでにあるが，数学的な証明が存在しないのみならず，数値実験についても結果が分かれていた。主論文ではこの方程式の数値実験を実行し，「解は爆発しない」という結果を導いた。様々な初期値を用いてこれまで以上に詳細に実験しているので，数学的な証明が存在しないにもかかわらず説得力のある結論となっている。

数値的な手法としては差分法を採用し，初期値に応じて様々な分割サイズを使用した。特に重要なのは，「解が急激に大きくなり始めたら時間きざみを解の大きさに応じで自動的に調整するアルゴリズム」を採用したことである。これによって急激な増大を爆発と見間違う危険性がなくなるのである。論文の数値実験によれば解は短い時間の間に非常にするどい境界層を引き起こすことがわかる。従って，空間きざみについても時間きざみについても細心の注意が必要であることは明らかである。爆発するという結論を導いた論文ではこういった注意が十分でなく，境界層付近の解像度が不十分なために解の挙動が不規則になり，爆発したと見誤ったものと推測される。

論文では次に，上記方程式の二つの非線形項のうち移流項 ff_{xxx} を省略した方程式を人工的に考察する。移流項は伸長項 f_xf_{xx} と比べれば爆発への関与が少ないと思われるので，これを省略しても爆発現象には関係無いものと推測できる。そこで移流項を省略し，結果がどうなるか，という問題を考えるのである。すなわち，

$$f_{txx}-f_xf_{xx}=\nu f_{xxxx}$$

という方程式の解がどうなるか見てみよう，というわけである。上のような推測に基づけば，この方程式の解も（1）と同じく爆発は起きないと考えるのが自然である。しかし，主論文ではこれの初期値がある程度大きければ爆発する，という事実を数値実験で確認した（この事実は参考論文 1 において数学的に証明することに成功している)。従って，「非線形移流項は解の爆発を抑える」という事実が確認できたのである。

主論文では伸長項を人工的に 5 倍にして

$$f_{txx}+ff_{xxx}-5f_xf_{xx}=\nu f_{xxxx}$$

なる方程式を考え，この方程式でも解の爆発が起きることを数値実験で示しだ。従って，解が時間について大域的に存在するためには移流項と伸長項の微妙なバランスが必要であることが示された。

最後に，２次元流れではなく３次元流れを考察し，（１）を拡張した連立方程式を導いた。

$$\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial t}+(\phi_2-\phi_1)\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial x}+\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)\omega^{(1)}=\frac{\partial^2\omega^{(1)}}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial t}+(\phi_2-\phi_1)\frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial x}+\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)\omega^{(2)}=\frac{\partial^2\omega^{(2)}}{\partial x^2},$$

$$-\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}=\omega^{(1)},\qquad -\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}=\omega^{(2)}.$$

この連立方程式には二つの未知函数があり，そのどちらについても初期値が大きい時には解が爆発することを確認した。

上記連立方程式にはいくつかの非線形項があるが，このうちふたつだけがもともとの渦方程式の伸長項から現れ，残りは移流項から導かれる。従って，その伸長項に由来する項のみが解の爆発に重要であり，他は重要ではない，と考えるのは自然である。そこで，その二つを取り除いた方程式を考えて解の数値シミュレーションを行なった。その結果，上記の爆発解の 10 倍程度大きな初期値でも爆発が起きないことが確認できた。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Navier-Stokes 方程式の数学的理論は多くの数学者が競い合う偏微分方程式の分野であり，今後もますます多くの研究がなされてゆくであろう。中でも３次元領域の解の正則性の問題は極めて重要であるとの認識でコンセンサスが得られている。しかし，同時にこの問題の難しさはそれが 60 年以上にわたって未解決であることからも察することができる。非常に困難であるがゆえに特殊な場合とかモデルを通じて知見を得て，それをもとに様々な類推を行うという作業が続いている。

朱君の論文では淀み点流れの方程式をこうした爆発問題のモデルとして採用することに新しい視点が見られる。淀み点流れの方程式は流体力学ではよく知られたものであるが，これの３次元渦方程式の類似に着目したのは朱君が最初のようである。淀み点流れの方程式は空間変数が１個であるので解析がし易く，優れたモデルであるといういうことができる。

主論文の結果は数値実験の結果がほとんどであるが，さまざまなメッシュサイズで数値実験を行なっていることと，時間きざみが適応的に組まれているという理由により，数値的不安定性による疑似爆発現象は追放されているものと考えてよい。

論文で導かれた結果は大きく分けて次の３点である。

(A) 方程式（１）の解は初期値の大きさの如何にかかわらず爆発しない。

(B) 方程式（１）の移流項は解の爆発を抑える働きがある。

(C) 方程式（１）の３次元版（連立方程式）の解は爆発する場合がある。

(D) 連立方程式では渦伸長項に由来する非線形項が爆発を引き起こしている。

以下にこれらの意義を述べる。

(A) の結果はこれまで意見の分かれていたものであり，数学的に厳密な意味では現在でも未解決の問題であると思われる。朱君の論文でも厳密な証明は出来なかったものの，これまでに知られているどの結果よりも精密にかつ境界層の影響を注意深く考察して計算した結果，爆発しないというのはもはや疑い得ない情勢であると結論できる。この意味で論争に決着をつけたものであるという点で高く評価できる。

(B) の結果は新しい視点から爆発問題を考察するものであり，今後の活発な議論の出発点となり得る重要なものである。Navier-Stokes 方程式を渦度を用いて記述すると２種類の非線形項が現れることは良く知られているが，それらがどのような働きをするのかについてはきちんとした定量的な説明があるわけではない。直感的な説明ではなく，実際に起きる現象を使って非線形項の働きを示すことができたことは大変喜ばしい。

(C), (D) の結果は２次元と３次元の違いを際だたせる意味で重要である。２次元の場合には存在しない渦伸長項が解の爆発を引き起こしているという事実が（たとえモデルとは言え）確かめられたことは特筆に値する。また，２次元の場合と

違い，移流項だけでは解の爆発が防げないという事実もこれまで知られていなかった新しい事実であると思われ，今後の研究でも引用されることが予想される。

以上を総合すれば，簡単なモデルで微妙な爆発現象の原因を特定するという作業をセンス良くこなしていると言うことができる。その簡単なモデルを，（都合良く生み出したものでなく）Navier-Stokes 方程式という基礎方程式に関連した形で見つけたことも評価できる。欠点といえばもともとの Navier-Stokes 方程式の解のエネルギーが無限大である場合に導かれている，ということであるが，これは無限遠方ではモデルを単純に信用してはいけない，ということであって，空間領域の有界な範囲ではよいモデルであることが期待できる。従って物理学的有用性についても大いに期待できる。

以上のように，本申請論文は，申請者の非線形問題に対するすぐれたセンスと数値解析のすぐれた能力を証明するものであり，理学博士の学位論文として価値あるものと認めることができる。なお，申請論文に報告されている研究業績を中心に関連分野について試問した結果，合格と認めた。