

氏名	もりや 創
学位(専攻分野)	博士(理学)
学位記番号	理博第2013号
学位授与の日付	平成11年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Variational Principle and the Dynamical Entropy of Space Translation (ダイナミカルエントロピーを用いた熱力学的変分原理)
	(主査)
論文調査委員	助教授 小嶋 泉 教授 高橋陽一郎 教授 三輪哲二

論文内容の要旨

申請者は、格子スピン系の熱平衡に関する量子統計力学の分野で、エントロピー密度を中心テーマとして、作用素環および関数解析的手法を用いた数理物理学的研究を行ってきた。その具体的な内容は以下の通りである。

1) 量子動力学のエントロピーを用いた熱力学的変分原理

(主論文: H. Moriya, Variational Principle and the Dynamical Entropy of Space Translation, to appear in Rev. Math. Phys.)

力学系理論で重要な役割を演ずる Kolmogorov-Sinai 動力学のエントロピーを量子論的非可換力学系へ拡張するため Connes, Narnhofer, Thirring が量子動力学のエントロピーの一つの定式 (C-N-T エントロピー) を導入した際、量子統計力学で熱平衡状態を特徴づける Gibbs 変分原理について、そこに現れる熱力学のエントロピー密度 (通常、von Neumann エントロピー密度と呼ばれる) を C-N-T エントロピーで置き換えることができるかどうか、問題となった。この主論文は、多次元格子上で定義された量子スピン系を熱力学的極限 (= 無限体積極限) において考察し、系の相互作用ポテンシャル (= ハミルトニアン) に対する非常に一般的な条件の下で、Gibbs 変分原理における熱力学のエントロピー密度を格子上の並進変換に伴う C-N-T エントロピーで置き換えた等式が成立することを厳密に証明することによって、この予想問題に肯定的解決を与えた。

この結果から個々の統計力学の状態に対して直ちに、熱力学のエントロピー密度と C-N-T エントロピーとの同等性が帰結するわけではないが、後者が状態空間の汎弱位相に関して上半連続となることが示されれば、等号も成立する。

類似の結果は C-N-T エントロピーの提唱者の一人である Narnhofer も既に論じているが、そこでは、ハミルトニアンに強い制約条件が課せられた上、C-N-T エントロピーの具体的構成に現れる abelian model の選択に関わる錯綜した議論と数多くの論理飛躍が見られ、証明として完結していない。それに対し当論文では、非常に一般的なハミルトニアンのクラスを設定し、C-N-T エントロピーが満たすべき少数の基本的性質 (状態に対するアフィン性、自己同型写像のべきに関するスケールリング、共役類に関する不変性、von Neumann エントロピー密度の与える上界) のみを用いて、局所 Gibbs 状態から巧妙な方法で並進不変状態を構成することにより、目指す変分等式を証明している点が注目される。量子動力学のエントロピーには、Connes 等が与えた定義以外にもいくつかの異なる version が知られているが、申請者の与えた証明は、上の基本的性質が満たされる限りその構成の詳細によることなく、常に有効である。

2) 1次元系での局所 Gibbs 状態でのエントロピー密度の熱力学的極限

(参考論文 1: H. Moriya, Entropy Density for One-Dimensional Quantum Lattice Systems, Rev. Math. Phys. 9, 361-369 (1997))

この論文では、1次元格子上的量子スピン系の表面エネルギーが一様有界であるならば、その熱力学的極限において大域的な熱平衡状態を表わす KMS 状態が持つ熱力学のエントロピー密度は、有限体積領域での Boltzmann weight を用いて構成

された「局所Gibbs状態」でのvon Neumannエントロピー密度の熱力学的極限と一致することを、一般的に証明している。ここでは、KMS条件から従う「富田・竹崎理論」の手法をフルに用いて、局所Gibbs状態を表面エネルギーで摂動することによってより広い格子領域に拡張し、この理論から帰結する時間発展の解析接続と表面項にPeierls-Bogoliubov不等式及びGolden-Thompson不等式を運用することによって、熱力学的極限をうまく統制している。

### 3) エントロピー密度の熱力学的極限に対する一般的帰結

(参考論文2 : H. Moriya and A. van Enter, On Thermodynamic Limits of Entropy Densities, Lett. Math. Phys. 45, 323-330 (1998))

ここでは、熱平衡の安定性概念の基礎にある数学的構造としての凸性に注目することによって、上記論文での結論が、格子の次元および表面エネルギーに対する制約を外した一般的な状況の下で、熱力学的圧力関数の(逆)温度に対する可微分性だけから導かれることを証明している。これは、量子統計力学における作用素環の手法に関する有名な教科書であるO. Bratteli and D. W. Robinson : "Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics" (vol. 2) の中の一結果を一般化するもので、興味深い結果である。

## 論文審査の結果の要旨

平衡系の量子統計力学に対する数理解物理学的アプローチでは、熱平衡において成立する空間的均質構造のゆえに、熱力学的極限での大域的平衡と空間的局所構造との関連を論ずる視点は、これまで、局所安定性条件に基づく熱平衡の特徴づけを除いて、必ずしも主要な話題とはならなかった。これに対し申請者の研究では、提出論文すべてに共通して見られるように、その主たる関心を、局所的空間領域での熱平衡状態およびそれに対応するエントロピー密度と、それを無限領域にまで広げる極限操作によって到達する平衡値との間の関係におき、それによって熱力学的極限における状況を明快に制御することに成功した。

主論文では、熱平衡状態を特徴づけるGibbs変分原理における熱力学的エントロピーの役割を量子動力的エントロピーに置き換えることが可能か否か?という1987年のConnes, Narnhofer, Thirringによる提起以来、懸案の問題を取り上げ、系のハミルトニアンの非常に広いクラスに対して、量子動力的エントロピーの構成法の詳細に依ることなく、その基本的性質だけを用いた証明によって、それに肯定的解答を与えている。

この結果は上限に対する等式を与えるだけで、個々の状態について熱力学的エントロピー密度とC-N-Tエントロピーとの一般的関係を論ずることはできないが、これまでのところ、等号成立に対する反例は知られていない。申請者は、参考論文で得た結果を援用し、それを一歩深めることで、かなり一般的な条件下に等号の成立を結論づける結果も現在準備中である。

独自の着眼点に基づくこのような申請者の研究の方向性は、C-N-Tエントロピーの提唱者の一人であるNarnhoferによる同じ問題の考察が、ハミルトニアンに課せられた強い制約条件と、C-N-Tエントロピー構成のためのabelian modelにこだわった見通しの悪い、不完全な議論に終始したことと著しい対照をなすものである。もちろん、格子スピン模型に要求される「モデル」としての具体性はきわめて重要な要件であるが、少数の基本的性質だけからどのような一般的帰結が導かれるかを解明する「構造論的」視角も、考察するaspectsに応じて欠かすことができないことを例証する好例といえよう。

主論文と同様、2編の参考論文も、格子スピン系の量子統計力学におけるエントロピー密度を数学的に考察し、これまでに知られていた結果に対して、より一般的な条件の下で簡明な証明を与えることを主たる特徴とする内容である。

1次元系での局所Gibbs状態におけるエントロピー密度とその熱力学的極限に関する論文(参考論文1)の場合には、格子の次元を1とし、表面エネルギーにも一様有界性を仮定するなど、証明の具体化のためかなり技術的な単純化の条件を導入しているが、「富田・竹崎理論」の手法や、Peierls-Bogoliubov不等式及びGolden-Thompson不等式等の運用には、変分原理に基づく熱平衡状態の一般的定式化に対する申請者の深い理解と、その作用素環的な技法の習熟が見られる。

もう一つの参考論文は、上記参考論文1の結果に注目し、それを高く評価したオランダの数理解物理学者van Enter教授との共同研究に基づくものである。このような国際的な共同研究が可能となった背景には、早い時期から独自の研究視点を養い、必要に応じて研究交流の輪を積極的に広げる努力を常に心がけてきた申請者の研究姿勢が大きく作用している。内容的にみても、上の研究における格子次元1の制約は取り払われ、任意次元での状況で、また、表面エネルギーに対する制約も

外し、さらに、「局所Gibbs状態」が熱力学的極限で特定の全域的状态に収束することも必要としない一般的状況の下に、熱平衡の安定性概念の基礎にある凸性と圧力関数の可微分性だけを用いて、エントロピー密度の等式を端的に導いている。ここにも高度な数学的手法の持つ深い本質を取り出して、物理的観点からより明快な形に捉え直そうとする申請者の研究姿勢が如実に見られると言える。

以上のように、本申請論文は、理学博士の学位論文として価値あるものと認められる内容を備えている。なお、平成11年1月18日に、主論文に報告された研究業績を中心としこれに関連した研究分野について試問をおこなった結果、合格と認めた。