

# 物性における量子化渦と素粒子・宇宙における宇宙紐

慶應義塾大学日吉物理学教室・自然科学研究教育センター

新田宗土

E-mail: nitta (at) phys-h.keio.ac.jp

**アブストラクト** 様々な物性系は場の量子論を用いて記述される。他方、素粒子における基本言語も場の量子論である。このため、両者で共通した現象がたくさん存在する。物性系における量子化渦やソリトンは、そのような現象の一つであり、素粒子論や宇宙論では渦紐、宇宙紐と呼ばれている。物性系と素粒子・宇宙では類似の様々な渦が知られている。特に、解の静的な性質や渦間の力を調べると、両者では違いはない。超流動やBECにおける渦は、素粒子・宇宙では大域渦、大域宇宙紐とよばれている。超伝導における渦は、素粒子・宇宙では局所渦とよばれている。ここではまずこれらの共通点について述べる。しかしながら、両者で大きな違いも存在している。記述に用いる場の理論が、物性系では相対論的でない場合が普通であるが、素粒子・宇宙では相対論的である場合が普通である。このため、渦のダイナミクスを調べると大きく違っている。次に、磁性体や量子ホール効果で重要な2次元スカーミオンについて述べる。最後に、多ギャップ超伝導や多成分BECについて議論する。

## 1 はじめに

物性物理に現れる様々な量子系において、量子化渦が現れる。水や空気などの古典流体において、渦とは流れの循環として特徴づけられ、乱流を特徴づけるなど重要な役割を担っているが、渦の循環は連続的であり、あいまいである。これに対して、量子流体、すなわち超流動体における渦は循環がプランク定数と(Heなどの)原子の質量を用いて $h/m$ と量子化される「量子化渦」であり1本2本と数えられる基本的な自由度である。実際、渦を用いて量子乱流を特徴づけることが精力的になされている。超流動体を回転させると、複数の渦が回転軸に平行に生成され渦格子を生成する。Heにおける量子化渦は、これまでは循環を測定することで存在が確かめられていたが、最近、直接可視化されるようになった。また、冷却原子のボース・アインシュタイン凝縮(BEC)においては、量子化渦を観測することでその超流動性が確認された。一方、超伝導体に磁場をかけると磁場の方向に磁束が量子化された渦が生成され、第二種超伝導体においては渦格子が生成される。超伝導体においても、渦は渦相を決める重要な自由度である。

さて、本講義ではこのような物性物理における渦について、場の理論を用いた理解を行いたい。また、それらの渦の素粒子論や宇宙論の類似物として、宇宙紐というものがある。実際、超流動渦、超伝導渦は、それぞれ大域渦、局所渦と呼ばれる宇宙紐である。これら物性の渦と宇宙紐は静的な性質においては、ほぼ同じものと言ってよい。しかし、一旦ダイナミクスに目を向けると、異なる部分もあり、それらは物性における渦は非相対論的、素粒子・宇宙における渦は相対論的であることに起因する。それでも、両者では渦の再結合の仕組みなどダイナミクスにおいてもいくつかの共通部分もある。

また講義の後半では、超流動や超伝導の多成分系における渦について解説する。この場合、一般に渦の循環や磁束が整数に量子化されない。超流動における循環は、スピノールBECでは有理数に、多成分BECでは非整数に量子化される。同様に、超伝導における磁束の場合は、 $p$

波超伝導では半整数に、多バンド超伝導では非整数に量子化される。また、中性子星の内部の非常に高密度な状況下においてはクォークのカラー超伝導が実現されるが、これも多成分系である。そこで現れる非アーベリアン渦は循環が  $1/3$  に量子化されている。

最後に、時間が許せば、超伝導の渦やフェルミ冷却原子におけるフェルミオン励起についても議論する。渦のコアに、フェルミオンの準粒子が捕らわれ、ある条件のもとではゼロエネルギー・マヨラナ・フェルミオンが現れる。このために、渦自体が、非アーベル統計に従う非アーベリアン・エニオンになる。これについては、量子計算への応用から最近とても注目されている。

代表的な教科書を挙げておく。物性論ではいろいろあるが例えば Volovik[1]、素粒子論では Manton と Sutcliffe[2] と Rajaraman[3]、宇宙論では Vilenkin と Shellard[4] が標準的である。全体を通して、参考文献はなるべくレビューや解説を優先させた。

## 2 ヘリウム4 超流動・スカラー-BECにおける量子渦と相対論的場の理論における大域渦

### 2.1 ヘリウム4 超流動・スカラー-BEC

$\Psi(x, t)$  を凝縮体の波動関数とすると、そのダイナミクスは、平均場近似のもとで、次の Gross-Pitaevskii(GP) 方程式で記述される。

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi + V_{\text{trap}} \Psi - \mu \Psi + g \Psi |\Psi|^2. \quad (2.1)$$

ここで、 $\hbar$  はプランク定数、 $M$  は原子の質量、 $\mu$  は化学ポテンシャルで、 $g$  は粒子間相互作用で、 $s$  波散乱長  $a_s$  を用いて、 $g = 4\pi\hbar^2 a_s / M$  と書ける。また、 $V_{\text{trap}}(x)$  は、冷却原子気体の場合に通常必要な原子をトラップするためのポテンシャルで、典型的には

$$V_{\text{trap}}(x) = \frac{1}{2} M^2 \omega^2 r^2 \quad (2.2)$$

のような調和ポテンシャルを考える。ヘリウム超流動で、 $V$  としては、容器の端で無限大のポテンシャルがあると思えばよい。

この GP 方程式は、エネルギー汎関数を、

$$E[\Psi, \Psi^*] = \int d^3x \left[ \frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \Psi|^2 + V_{\text{trap}} |\Psi|^2 - \mu |\Psi|^2 + \frac{g}{2} |\Psi|^4 \right] \quad (2.3)$$

のように定義すると、次のように書ける。

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\delta E[\Psi, \Psi^*]}{\delta \Psi^*} = \frac{\partial E}{\partial \Psi^*} - \nabla \cdot \left[ \frac{\partial E}{\partial (\nabla \Psi^*)} \right]. \quad (2.4)$$

変分を取る前に、あらかじめ、部分積分しておけば最後の項はいらないので便利である。

後に相対論的な場の理論と比べるために、作用汎関数で書き直しておく。作用は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S[\Psi, \Psi^*] &= \int d^3x dt \mathcal{L} \\ &= \int d^3x dt \left[ \left( +i\hbar\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \text{c.c.} \right) - \frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\Psi|^2 - V_{\text{trap}} |\Psi|^2 + \mu |\Psi|^2 - \frac{g}{2} |\Psi|^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで、被積分関数  $\mathcal{L}$  はラグランジアン密度である。時間に依存した GP 方程式は、

$$0 = \frac{\delta S}{\delta\Psi^*} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^*} - \partial^\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi^*)} \right) \quad (2.6)$$

から得られる。ここで、添え字  $\mu (= 0, 1, 2, 3)$  は時間と空間の両方を走る。

さて、GP エネルギー汎関数、GP 作用やラグランジアンなど、すべて次の  $U(1)$  対称性を持っている。

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha}\Psi. \quad (2.7)$$

ここで、 $\alpha$  は空間の場所や時間によらない定数である。この対称性は、通常、物性論ではゲージ対称性と呼ばれる。(しかし、素粒子論ではこのような大域的な対称性のことはゲージ対称性と呼ばないので注意しよう。)

$V_{\text{trap}} = 0$  の場合を考えよう。基底状態は、空間に依存しない条件  $\nabla\Psi = 0$  のもとで、

$$0 = \frac{\delta E}{\delta\Psi^*} = -\mu\Psi + g|\Psi|^2\Psi \quad (2.8)$$

から、次のように得られる。

$$\langle\Psi\rangle = ve^{i\alpha}, \quad v \equiv \sqrt{\frac{\mu}{g}} \quad (2.9)$$

$\Psi(x, t) = \Psi_0(x)e^{-i(\mu/\hbar)t}$  と置くと、時間微分の部分と化学ポテンシャルの項が打ち消しあって、 $\Psi_0(x)$  は時間に依存しない GP 方程式から化学ポテンシャルを消した方程式に従う。

## 2.2 相対論的スカラー場の理論

ここでは、相対論的な場合を考えるが、物性系においては液晶を考えていると思ってよい。相対論的不変性をもつ、自由なスカラー場の方程式は、

$$0 = \square\Psi = \left( \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \nabla^2 \right) \Psi \quad (2.10)$$

と書ける。ここで、 $c = 3.0 \times 10^8$  [m/s] は光速である。質量  $m$  を持ったスカラー場の方程式は、

$$0 = \left( \square + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \Psi \quad (2.11)$$

である。 $\Psi = e^{i\omega t - ikx}$  と置くと、次の分散関係が導かれる：

$$\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}. \quad (2.12)$$

$k = 0$  で質量ギャップ  $mc^2/\hbar$  を持った、2次の分散関係である。質量がゼロ ( $m = 0$ ) の時、 $\omega = ck$  という線形な分散となる。「場の量子化」を行うと、 $E = \hbar\omega$ ,  $p = \hbar k$  (対応原理) を持った粒子とみなせて、次の Einstein の関係式が導かれる。

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + (mc^2)^2} \simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots. \quad (2.13)$$

最右辺は、運動量  $p$  で展開しており、第一項は静止質量、第二項は運動エネルギーである。以下、 $\hbar = c = 1$  という自然単位系をしばしば用いる。

GP 方程式 (2.1) と同様の相互作用を持つようなスカラー場の方程式は、

$$0 = \square\Psi - \mu\Psi + g\Psi|\Psi|^2. \quad (2.14)$$

GP 方程式 (2.1) からすると、時間微分の部分を1階微分から2階微分に変えただけである。この相対論的場の方程式を与える作用汎関数は、

$$S[\Psi, \Psi^*] = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[ +\frac{1}{2}|\partial_\mu\Psi|^2 - V \right] = \int d^4x \left[ +\frac{1}{2}|\partial_\mu\Psi|^2 + \mu|\Psi|^2 - \frac{g}{2}|\Psi|^4 \right]. \quad (2.15)$$

となる。 $|\partial_\mu\Psi|^2 = |\partial_t\Psi|^2 - |\nabla\Psi|^2$ 。ここで、 $V$  はポテンシャル項

$$V = -\mu|\Psi|^2 + \frac{g}{2}|\Psi|^4 \quad (2.16)$$

である。 $\mu \leq 0$  の理論は  $\varphi^4$  理論と呼ばれており、 $-\mu = m^2$  と書けば、 $m$  はスカラー場の質量であり、

$$V = m^2|\Psi|^2 + \frac{g}{2}|\Psi|^4, \quad m^2 > 0 \quad (2.17)$$

のようなポテンシャル項をもっている。基底状態 (素粒子論では真空という) は  $\langle\Psi\rangle = 0$  となり、 $U(1)$  対称性は破れない。これに比べて、 $\mu > 0$  の理論は Goldstone 模型と呼ばれている。質量  $m$  が純虚数となった場合に、基底状態が偽で、タキオンが生じて不安定であると解釈する。真の基底状態は、条件、

$$0 = \frac{\delta V}{\delta\Psi^*} = -\mu\Psi + g|\Psi|^2\Psi \quad (2.18)$$

から、式 (2.9) が得られる。このとき、 $U(1)$  対称性は自発的に破れている。

場の理論において、場を量子化した粒子に質量がある (ない) という事は、物性系では、励起がギャップフル (レス) であることに対応している。基底状態のまわりの励起を考えよう。スカラー場を

$$\Psi(x) = v + \delta\Psi = v + \varphi(x) + i\chi(x) \quad (2.19)$$

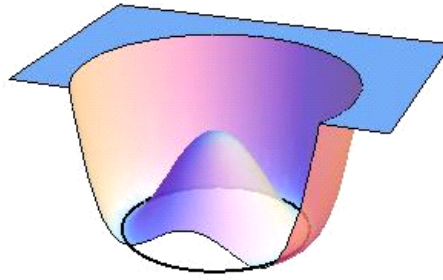


図 1: Goldstone 模型のポテンシャル。ワインボトルの底，メキシカンハットに例えられる。

と基底状態とその周りの微小変化と置いて，ポテンシャルに代入し  $\delta\Psi$  の 2 次まで展開すると，

$$V = \frac{g}{2}(|v + \varphi + i\chi|^2 - v^2)^2 = 2gv^2\varphi^2 + O(\varphi^3, \chi^3, \dots) \quad (2.20)$$

となる。(物性では Bogoliubov 解析という。) これから， $\delta\Psi$  の虚部  $\chi$  は，ゼロ質量粒子（物性ではギャップレス・モード）であることがわかる。これは， $U(1)$  対称性が自発的に破れたために現れる南部 Goldstone モードである。一方， $\delta\Psi$  の実部  $\varphi$  は質量，

$$m_\varphi = \sqrt{2}gv = \sqrt{2\mu} \quad (2.21)$$

を持った粒子であることがわかる。これは，いわゆる Higgs 粒子である。相対論的な場の理論では， $U(1)$  南部 Goldstone モードと Higgs 粒子は独立な場である。しかし，対応する超流動体は，相対論的不変性がないために，これらのモードは一般には混じり合っ，独立ではなくなる。これが，いわゆるフォノンである。(フォノン =  $U(1)$  南部 Goldstone モードと思えるのは，モーメントが小さい時のみである。)

質量  $m_\varphi$  の粒子に対応する，Compton 波長は，

$$\xi = m_\varphi^{-1} = 1/\sqrt{2\mu} \quad (2.22)$$

となり，回復長 (healing length) と呼ばれる特徴的な長さを表している。

ここで時間反転対称性についてまとめておこう。時間反転対称性は，非相対論的な系 (GP 方程式) と相対論的な系では，それぞれ

$$\text{非相対論: } t \rightarrow -t, \quad \Psi \rightarrow \Psi^* \quad (2.23)$$

$$\text{相対論: } t \rightarrow -t, \quad \Psi \rightarrow \Psi \quad (2.24)$$

である。相対論では，純粹に時間座標を反転させるだけということは後で重要になる。

## 2.3 循環の量子化

超流動速度は，

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{2Mi} \frac{\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*}{\Psi^* \Psi} = \frac{\hbar}{M} \nabla \alpha \quad (2.25)$$

と与えられる。ここで,

$$\Psi(x) = |\Psi|(x)e^{i\alpha(x)} \quad (2.26)$$

と置いた。<sup>1</sup> 超流動速度の循環密度は,

$$\omega_s = \nabla \times \mathbf{v}_s \quad (2.27)$$

与えられる。波動関数が十分遠方で,

$$\Psi \sim ve^{ik\theta}, \quad \alpha = k\theta, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (2.28)$$

であるとしよう。波動関数の一価性から,  $k$  は整数でなければならない。循環密度を空間積分して循環を定義すると, 次のように計算できる。

$$\kappa \equiv \int d^2x \omega_s = \int d^2x \nabla \times \mathbf{v}_s = \oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\hbar}{M} 2\pi k = \frac{h}{M} k. \quad (2.29)$$

これが, 超流体では循環が量子化されるという, 有名な Feynman-Onsager の循環の量子化である。循環の最小単位は, ヘリウムの場合は,

$$\kappa_0 \equiv \frac{h}{M} = 0.997 \times 10^{-7} [\text{m}^2/\text{s}] \sim 0.1 [\text{mm}^2/\text{s}] \quad (2.30)$$

となる。式(2.28)は, あくまで波動関数の遠方の振る舞いであって, 必ずしも  $\Psi = f(r)e^{ik\theta}$  としたわけではない。むしろ, 一般には, 循環  $\kappa_0$  を最小単位とする渦が,  $k$  個あると解釈できる。整数  $k$  を渦度 (vorticity) と呼ぶ。<sup>2</sup>  $\Psi = f(r)e^{ik\theta}$  の場合は,  $k$  個の渦が重なっていることを現しているが, 後で議論するように不安定である。

通常の古典流体では, 渦度は量子化されずに連続的な値をとる。渦は, 連続的であり, 途中で途切れることもあれば, 数えることも出来ない。これに比べると, 超流体では, 渦度がプランク定数に比例した最小単位に量子化されており, 数えることができるし, 途中で途切れるようなことは決して起こらない。まさに, 超流体が量子流体と呼ぶべきものであることがわかる。これに関して, 昔から古典流体における乱流を記述するのに, 渦が基本的な自由度であると考えられてきた。これに対して, 量子流体が乱流状態になると, まさに量子渦が基本的な自由度となると考えられ, 量子乱流と呼ばれており, 近年盛んに研究されている [5]。

## 2.4 超流動量子渦と相対論的大域紐

$k$  個の渦が重なった場合を考える。波動関数をアンザッツとして,

$$\Psi(r, \theta) = f(r)e^{ik\theta} \quad (2.31)$$

<sup>1</sup>Noether(ネーター)の定理によると, 対称性があると保存量が存在する。そのカレント (ネーターカレント)  $(j^0, \mathbf{j}) = (\Psi^*\Psi, \frac{\hbar}{2Mi}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*))$  を用いると, 超流動速度は  $\mathbf{v}_s = \mathbf{j}/j^0$  とかける。

<sup>2</sup>もう少し数学的なことも述べておこう。実際に計算に必要なだったのは, 式(2.28)というよりも,  $\partial\alpha/\partial\theta = k$  である。 $\mathbf{R}^2$  空間の無限遠の円  $S^1$  ( $\theta$  でパラメトライズされる) から波動関数の位相  $\alpha$  (これも  $S^1$ ) への写像を考えよう。式(2.29)の計算からわかるように, この写像が  $k$  回巻き付いていることがわかる。この意味で  $k$  を巻き付き数 (もっと一般に写像度) という。このことをもって, 1次ホモトピー群  $k \in \pi_1[U(1)] = \mathbf{Z}$  が整数であることを意味している。

と置いて、GP 方程式 (2.1) に代入し、静的  $\partial_t \Psi = 0$  であると仮定することで、次の方程式を得る。(  $M = \hbar = 1$  と置く。 )

$$0 = \Delta f + \frac{\lambda}{2} f(v^2 - f^2) = (f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{k^2}{r^2} f) + \frac{\lambda}{2} f(v^2 - f^2). \quad (2.32)$$

ここで、 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  を用いた。この方程式は残念ながら解析的に解くことは出来ない  
ので、数的に解くしかない (図 2)。ただし、遠方、及び、近傍の振る舞いは漸近的に解析的に  
解くことができる。遠方の振る舞いは、

$$f \sim v - \frac{k^2}{m_\phi^2 r^2} = v - \frac{k^2 \xi^2}{r^2} \quad (2.33)$$

となっている。ここで、 $m_\phi$  は式 (2.21) で与えられる Higgs ボソンの質量、 $\xi$  は回復長である。渦  
のコアのサイズは、回復長程度であることがわかる。

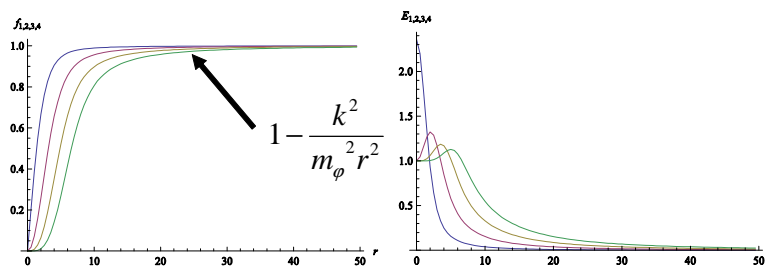


図 2: 超流動渦, または大域的渦のプロファイル関数  $f(r)$  とエネルギー密度 ( $k = 1, 2, 3, 4$ )。

2次元の場合の渦のエネルギー、3次元の場合の単位長さあたりの渦糸のエネルギー (テン  
ション) を  $T$  とすると、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} T &= \int d^2x \left[ -\Psi^* \Delta \Psi + \frac{\lambda}{4} (|\Psi|^2 - v^2)^2 \right] \\ &= \int dr r d\theta \left[ -f f'' - \frac{1}{r} f f' + \frac{k^2}{r^2} f^2 + \frac{\lambda}{4} (f^2 - v^2)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

ここで、漸近形が  $f \sim v - O(r^{-2})$  であることを用いると、第 3 項が最も効いてきて、<sup>3</sup>

$$T = 2\pi v^2 k^2 \int_\xi^\Lambda dr \frac{1}{r} + \varepsilon = 2\pi v^2 k^2 \log \frac{\Lambda}{\xi} + \varepsilon \quad (2.35)$$

と計算できることがわかる。ここで、積分範囲を、渦のコアのサイズ  $\xi$  から系のサイズ  $\Lambda$  までと  
した。残りの小さな項  $\varepsilon$  は、第 3 項のコアからの寄与と、他の項の寄与である。渦のコアのサイ  
ズが、系のサイズに比べてそれほど小さくない時は、 $\varepsilon$  の項も無視できないので気を付けなけれ  
ばいけないが、大概の場合は無視できる状況である。

式 (2.35) は、渦度  $k$  の 2 乗に比例していることに注意しよう。このことから、渦間に反発力  
が働いていることがわかる。なぜならば、例えば渦度が 2 ( $k = 2$ ) の場合を考えよう。これは、

<sup>3</sup>超流体では、同じ計算を  $T = \int d^2x v_s^2$  で導く。

$k^2 = 4$  に比例したエネルギーを持っている。仮に、これが2つの渦に分裂して、無限に離れたとすると、 $k = 1$  の渦が2つなので、 $1 + 1 = 2$  に比例したエネルギーとなるので、元の半分となる。

式(2.35)は、系のサイズ  $\Lambda$  が大きいと大きくなる。宇宙のように無限な系では、発散してしまう。このため、宇宙論や素粒子論では、大域渦は宇宙紐としては、あまり現実的なものではないと考える人も多い。ただ、宇宙紐とはいえ、真直ぐ伸びているというよりも、輪っかになっている場合が普通なので、その場合は有限のエネルギーなので問題ない。

## 2.5 渦間相互作用

2つの渦の間の相互作用を実際に計算すると、2つの渦が距離  $R$  だけ離れて置かれていたとしよう。この場合のアンザッツ (アブリコソフ・アンザッツ) として、

$$\Psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\Psi_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \quad (2.36)$$

を考えて、相互作用エネルギーを定義して計算すると、

$$E_{\text{int}} = E[\Psi_{\text{tot}}] - E[\Psi_1] - E[\Psi_2] = 4\pi v^2 \log R. \quad (2.37)$$

渦間相互作用は、

$$F = \mp \frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial R} = \pm \frac{4\pi v^2}{R} \quad (2.38)$$

となる。<sup>4</sup> ここで、複合は、渦同士の場合と、渦・反渦の場合に対応している。

相対論的場の理論では、この渦の間の相互作用は、南部 Goldstone ボソンの交換によって生じていると解釈する。南部 Goldstone ボソンは質量がゼロなために、相互作用は長距離力となる。次の節で議論する、超伝導の渦と比べてみるとよい。

2次元の場合は、このように距離に反比例した力は、Coulomb 力 (や万有引力) と同じ振る舞いである。実際に、 $U(1)$  南部 Goldstone モードに双対変換 (Hubbard-Stranovich 変換) を施して  $U(1)$  ゲージ場に変換すると、渦は Coulomb 相互作用をしている荷電粒子と解釈できる。渦の多体系を Coulomb ガスに写像して議論すると便利することが多く、物性論ではよく用いられている。ちなみに、相対論的な場の量子論では、このような基本場と渦 (ソリトン) を互いに交換する変換をミラー対称性と呼んでいる。超対称性がある場合の場の量子論では、このような対称性が厳密になる場合があり、現在も活発に研究されている。

## 2.6 渦に局在したギャップレス・モード

3次元の場合に、渦に局所的な変形を与えると、その変形は、渦糸に沿って伝播する。超流動体では、このように1つの渦に1つずつギャップレス・モードが存在しており、Kelvin の名前を取ってケルビン波、あるいは量子化した粒子と見て、ケルボンと呼ばれている。一方、相対論

<sup>4</sup>もう少しまじめに計算すると、 $-\frac{\pi R}{R^2 + \Lambda^2}$  という補正がつくが十分大きな  $\Lambda$  では消えるので通常は無視する。



的な場の理論においては、特にそのような名前は与えられていないが、渦糸を伝播するギャップレス・モードが2つ存在している。

この違いは、一体どこから来るのであろうか？実は、そのキーとなるのが南部 Goldstone モードである。渦が存在すると、空間の並進対称性が局所的に「自発的に」破れる。通常の内対称性ではなく、空間対称性なので気を付けなければならないが、実は内対称性の場合と同様に、この空間の並進対称性の破れにともなって、南部 Goldstone モードが現れる。ただし、通常南部 Goldstone モードの場合とは異なって、渦に局在したモードとなり、渦糸に沿って伝播するようなモードである。これがケルボンである。一般に、2次の分散を持った南部 Goldstone モードは、破れた対称性の半分だけ独立な自由度があることが知られており、タイプ II の南部 Goldstone モードと呼ばれている [7]。ケルボンは2次の分散を持ったいわゆるタイプ II の南部 Goldstone モードと解釈できる。

他方、相対論的な場の理論では、対称性が自発的に破れると、一般的に破れた対称性の数だけ1次の分散を持ったギャップレス・モード、いわゆるタイプ I の南部 Goldstone モードが現れることが知られている。渦による並進の破れのギャップレス・モードもタイプ I の南部 Goldstone モードとなっており、並進対称性の破れの2方向に対応して、2つの独立な自由度が現れる。液晶における線欠陥でも、同様である。<sup>5</sup>

このことを具体的にみるには、有効理論を構築すればよい [8]。渦が  $z$  軸方向に真直ぐに伸びた状態を考える。渦の中心の位置を  $(X, Y)$  とすると、渦糸の変形を考えるということは、 $(X, Y)$  と座標  $(t, z)$  の関数にすればよい。そして、渦の解で位置を  $(X(t, z), Y(t, z))$  と場に格上げしたものを、元のラグランジアンに代入し、 $xy$  方向を積分してやれば、渦の世界面  $(t, z)$  の上の有効理論が得られる。

$$\mathcal{L}_{\text{eff.}}[X(t, z), Y(t, z)] = \int dx dy \mathcal{L}[\Psi(X(t, z), Y(t, z))]. \quad (2.39)$$

結果だけ述べると、非相対論 (GP) と相対論の場合でそれぞれ次のようになる。

$$\text{非相対論: } \mathcal{L}_{\text{eff.}} = -T + \frac{1}{2}(Y\dot{X} - X\dot{Y}) - \frac{T}{2}[(X')^2 + (Y')^2], \quad (2.40)$$

$$\text{相対論: } \mathcal{L}_{\text{eff.}} = -T - \frac{T}{2}[-(\dot{X})^2 - (\dot{Y})^2 + (X')^2 + (Y')^2]. \quad (2.41)$$

ここで、ドットとプライムはそれぞれ  $t, z$  微分、 $T$  は式 (2.35) の渦のテンションである。これより得られる運動方程式は、次のようになる。

$$\text{非相対論: } \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{eff.}}}{\delta X} = -\dot{Y} + TX'' = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{eff.}}}{\delta Y} = -\dot{X} + TY'' = 0, \quad (2.42)$$

$$\text{相対論: } \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{eff.}}}{\delta X} = -T\ddot{X} + X'' = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{eff.}}}{\delta Y} = -T\ddot{Y} + Y'' = 0. \quad (2.43)$$

<sup>5</sup>ここで、空間対称性の自発的破れに対して一つ注意しないといけないことを述べておこう。それは、渦糸が存在すると、回転対称性も自発的に破れるということだ。例えば、渦糸が  $z$  軸に沿って伸びていけば、 $x$  軸回転と  $y$  軸回転が破れる。これらに対応する南部 Goldstone モードもあるのではないだろうか？実は、空間回転に対応する南部 Goldstone モードは、並進の南部 Goldstone モードと独立ではないことがわかっている。しかし、非相対論的な場合の一般論は、今のところ存在していないのが現状である。

次のような、ケルビン波の解が得られる。

$$\text{非相対論: } X + iY = A \exp i(kz - \omega t), \quad X - iY = \exp i(kz + \omega t), \quad (2.44)$$

$$\text{相対論: } X, Y = \cos(\pm \omega t + kz). \quad (2.45)$$

よって、分散関係は、それぞれ2次と1次となる。

$$\text{非相対論: } \omega = Tk^2 \quad (\text{タイプ II}), \quad (2.46)$$

$$\text{相対論: } \omega = k \quad (\text{タイプ I}). \quad (2.47)$$

非相対論の2つの解を図3のように、らせんの向きと進行方向に対応関係がある。一方、相対論の場合は独立な2つの線形分散の波が存在する。

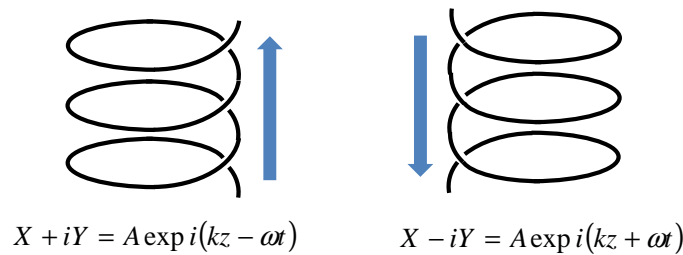


図 3: ケルビン波。

## 2.7 渦のダイナミクス

前節でみたように、渦の間には距離に反比例した斥力が働いている。ここまでは、物性系の非相対論的な系でも、相対論的な系でも事情は全く同じである。ところが、ダイナミクスを議論するとなるとたちまちと異なってくる。これは、方程式への時間微分の入り方が前者では1階微分、後者では2階微分であることに起因する。超流体では、方程式に時間が1階しか含まれないことに起因し、渦の配置が与えれると、それぞれの渦の速度はその配置から自動的に決まっている。相対論的な系では、時間微分が2階微分であるために、各渦の配置を決めても、まだそれぞれの渦に速度を与える自由度が残っている。

ここでも、前節の有効理論の考え方が便利である。式(2.40), (2.41)で得られた有効理論を2つの渦の場合に足し合わせて、相互作用エネルギーを加えればよい。簡単のために2次元の場合で考える。渦の位置を  $(X_i, Y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) とすれば、

$$\text{非相対論: } \mathcal{L}_{\text{eff.}} = \sum_i \left[ -T + \frac{1}{2}(Y_i \dot{X}_i - X_i \dot{Y}_i) - \frac{T}{2}[(X_i')^2 + (Y_i')^2] \right] - E_{\text{int}}[X_i, Y_i], \quad (2.48)$$

$$\text{相対論: } \mathcal{L}_{\text{eff.}} = \sum_i \left[ -T - \frac{T}{2}[-(\dot{X}_i)^2 - (\dot{Y}_i)^2 + (X_i')^2 + (Y_i')^2] \right] - E_{\text{int}}[X_i, Y_i]. \quad (2.49)$$

$E_{\text{int}}[X_i, Y_i]$  は2つの渦であれば、式(2.37)を用いればよい。運動方程式は、

$$\text{非相対論: } \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{eff.}}}{\delta X_i} = -\dot{Y}_i - \frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial X_i} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{eff.}}}{\delta Y} = -\dot{X} - \frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial Y_i} = 0, \quad (2.50)$$

$$\text{相対論: } \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{eff.}}}{\delta X} = -T\ddot{X} - \frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial X_i} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{eff.}}}{\delta Y} = -T\ddot{Y} - \frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial Y_i} = 0. \quad (2.51)$$

ここで、典型的な状況をまとめておこう。

- まず、2次元の場合を考えよう。超流体では、式(2.50)によると、渦は力の方向に垂直に速度を持つことがわかる。よって、2つの渦の間に斥力があると、図4(a)のように2つの渦の中間点を中心に回転を始める。 $X_1 + iY_1 = -X_2 - iY_2 = R e^{it/R^2}$ . 距離は、斥力の大きさで決まる。

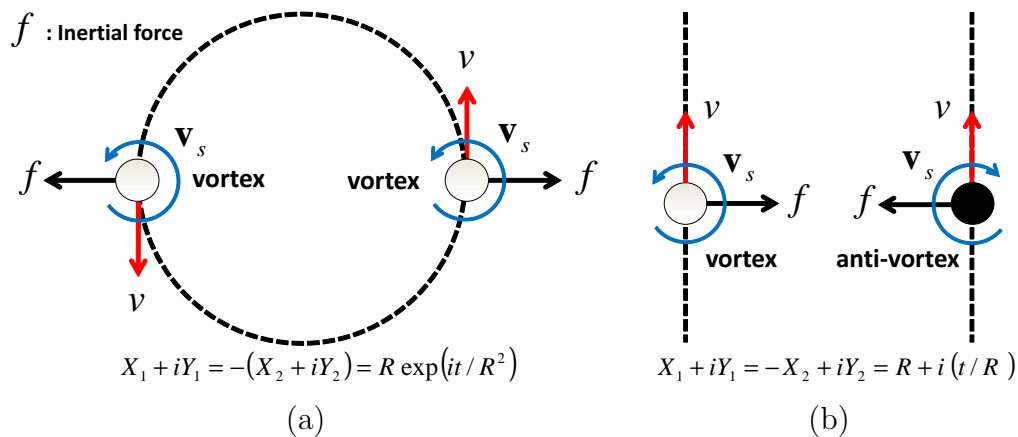


図 4: (a) 2つの渦は反発によって回転する。(b) 渦と反渦は引力によって並進運動をする。

また、渦と反渦の間には引力が働くが、この場合は、図4(b)のように並行に動き出す。 $X_1 + iY_1 = -X_2 + iY_2 = R + it/R$ . 距離は、やはり引力の大きさで決まる。この性質は、実は古典流体でも全く同じである。渦間の力を慣性力と呼ぶ。

相対論的な場の理論では、式(2.51)によると、渦は Newton 力学に従う質量  $T$  の質点として振る舞う。すなわち、 $F = ma$  が成り立つ。そのため、渦間に斥力があると互いに反発して遠ざかる。渦と反渦は引力によって、互いに近づいていく。物性系とは異なり、相対論的場の理論の方が、直観にあった振る舞いをするというところは興味深い。

- 次に3次元の場合を考えよう。まず、並行におかれた2本の渦と(反)渦であれば事情は全く同じである。渦の輪を考えてみよう。渦輪は反対の2点が、丁度渦と反渦の関係にある。よって、超流体の場合は、図5のように、渦輪は輪に垂直な方向に直進をする。これは古典流体でも同じであり、テレビのでんじろうの実験、たばこの煙の輪っかや、イルカが遊びで作る渦輪でも見られる。

他方、相対論的な系では、渦輪はたちまちに反対点の引力によってつぶれて消滅する。渦のテンションによって縮まると解釈してもよい。よって、渦輪が安定に存在することは難しい。輪ゴムをぐっと広げている状態だと思えばよい。

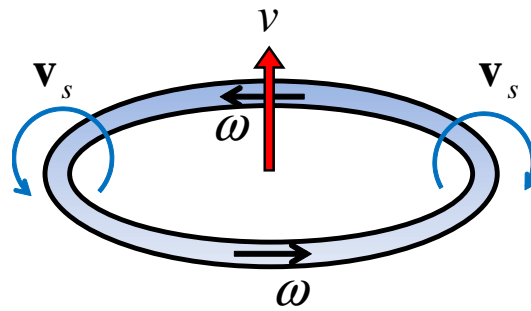


図 5: 渦輪。超流体では  $v$  の方向に直進して安定。

3. 1 に関連して、超流体は回転させると渦が格子状に現れ、渦格子ごと回転をする。(回転系でみると、静止している。) 回転系でのエネルギーは、相互作用項以外に着目して、

$$E_0 = \frac{1}{2} |\nabla \Psi|^2 - \Omega L_z |\Psi|^2 + V_{\text{trap}} |\Psi|^2 = \frac{1}{2} |\nabla - i\mathbf{r} \times \Omega| \Psi|^2 - \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 |\Psi|^2 + V_{\text{trap}} |\Psi|^2 \quad (2.52)$$

となる。ここで  $L_z = i(y\partial_x - x\partial_y)$  である。 $V_{\text{trap}}$  が式 (2.2) であれば、

$$-\frac{1}{2} r^2 \Omega^2 |\Psi|^2 + V_{\text{trap}} |\Psi|^2 = -\frac{1}{2} r^2 (\Omega^2 - \omega^2) |\Psi|^2 \quad (2.53)$$

となる。 $\Omega > \omega$  だと回転が速すぎて凝縮体を閉じ込められないので、 $\Omega < \omega$  としておく。微分が共変微分  $\nabla - i\mathbf{r} \times \Omega$  の形になっていることに注意しよう。後で議論する超伝導との類推から、磁場がかかったように見える。このため、渦が入ってきて渦格子を生成する。

相対論的な系では、反発力で離れるだけなので、渦格子は生成されない。

4. 3次元では、2本の渦をねじれの位置に配置すると興味深い現象が起こる。超流体の渦でも、相対論的な渦でも、衝突を起こして、再結合を起こす。この再結合のダイナミクスは、3次元の渦のダイナミクスで最も重要なものであり、量子乱流でも本質的な役割を果たす [5]。最近、He 超流動において、Lathrop のグループによって、可視化に成功している [6]。宇宙論においても、宇宙紐の存在確率の問題として、この再結合が重要な過程である [4]。

### 3 超伝導における量子渦と相対論的場の理論における局所渦

#### 3.1 超伝導の Landau-Ginzburg 理論と相対論的アーベリアン Higgs 模型

前節で議論したように、非相対論的な理論と相対論的な場の理論は、時間微分のところが異なるだけである。よって、ここでは同時に議論する。

本来超伝導は、Bogoliubov-de Gennes 方程式のようにフェルミオンで記述するものであるが、転移点付近では Landau-Ginzburg の有効理論を用いることが出来、渦のコアの構造を見ない限

りはこれで十分である。ゲージ場を  $\mathbf{A}(x, t)$  とスカラーポテンシャルを  $\phi(x, t)$  とすると、磁場と電場は、それぞれ、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = \nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad (3.1)$$

とかける。時間に依存しない Landau-Ginzburg 理論のエネルギー汎関数は、

$$E[\Psi, \Psi^*] = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{\hbar^2}{4m_e} \left| \left( \nabla + i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\Psi|^2 - v^2)^2 \right] \quad (3.2)$$

とかける。簡単のために、誘電率と透磁率は 1 とした。  $2M$  の代わりに  $4m_e$  ( $m_e$  は電子の質量) となっているのは、Cooper ペアが電子 2 つから出来ているためである。波動関数のグラディエント項の微分に現れる組み合わせ、  $\nabla + i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}$  は共変微分である。ここで、  $2e$  であるのは、Cooper ペアが電子 2 つから出来ているためである。次の  $U(1)$  ゲージ対称性を持っている。

$$\Psi(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi(\mathbf{x}) \exp(i\alpha(\mathbf{x})), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \frac{\hbar c}{2e} \nabla \alpha(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

ゲージ対称性は、空間の場所に依存する任意の関数  $\alpha(\mathbf{x})$  を変換パラメーターとする、局所的な対称性である。

超伝導では、時間に依存した Landau-Ginzburg 理論は、GP 方程式と同様に、

$$c\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\delta E[\Psi, \Psi^*]}{\delta \Psi^*}. \quad (3.4)$$

とかかれる。しかし、ここで係数は実数であるために、超流動の場合とはダイナミクスは大きく異なる。超伝導の場合は、散逸をともなって緩和する過程が主である。(GL 理論は準粒子を積分して得たために、ギャップ  $\Delta$  が準粒子 2 つに崩壊する過程が散逸として現れる。) 時間微分の係数が実数であるために、作用汎関数で書くことができない。(無理やり書こうとすると作用が実数にならない。)

素粒子論や宇宙論では、この理論に相対論的になるように時間微分を 2 階微分で加えた理論は、アーベリアン Higgs 模型と呼ばれている。以下しばらく、  $\hbar = c = 1$  とし、  $2e \rightarrow e$  と書きなおす。

この理論の質量スペクトラムを見てみよう。このために、スカラー場を次のように基底状態のまわりに展開し、

$$\Psi = e^{-i\alpha}(v + \varphi) \quad (3.5)$$

と置く。ゲージ変換 (3.3) を用いて、

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha} \Psi = v + \varphi, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{e} \nabla \alpha \quad (3.6)$$

と出来る。このゲージ固定は、相対論的場の理論では、ユニタリーゲージと呼ばれていて、質量スペクトラムをみるのに便利である。すると、スカラー場のグラディエント項は  $(\nabla + ie\mathbf{A})\Psi = e^{i\alpha}(\nabla\alpha - iev\mathbf{A} - iev\mathbf{A})$  を用いて、

$$|(\nabla + ie\mathbf{A})\Psi|^2 = |\nabla\varphi|^2 + e^2 v^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \dots \quad (3.7)$$

と展開できる。ここで、 $\dots$  は相互作用を表す高次項である。ゲージ場が質量項  $m_v^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = e^2 v^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$  を持ったことがわかる。これを、Anderson-Higgs 機構（素粒子論では単に Higgs 機構）と呼ぶ。波動関数の位相に対応する  $U(1)$  モードはもはやスペクトルから消えたことに注意しよう。素粒子論では、ゲージ場の縦波成分に吸収されたという。

他方、 $\varphi$  はゲージ場には吸収されずに残った質量  $m_s = \sqrt{\lambda}v$  を持った粒子 Higgs 粒子である。

まとめると、質量を持った粒子は、ゲージ場と Higgs 場で、質量はそれぞれ、

$$m_v = \sqrt{2}ev, \quad m_s = \sqrt{\lambda}v \quad (3.8)$$

となる。それぞれの粒子に対応する、Compton 波長は、侵入長 (penetration depth), 相関長 (coherence length) と呼ばれていて、

$$\xi_v = m_v^{-1} = 1/\sqrt{2}ev, \quad \xi_s = m_s^{-1} = 1/\sqrt{\lambda}v \quad (3.9)$$

と書かれる。

これらの特徴的な長さの大小関係で、超伝導がタイプ I 超伝導かタイプ II 超伝導に分類される。長さの比の 2 乗を、

$$\beta \equiv \frac{\xi_v^2}{\xi_s^2} = \frac{m_s^2}{m_v^2} = \frac{\lambda}{2e^2} \quad (3.10)$$

と定義してやると、

$$\text{type I: } \beta < 1, \quad \xi_s > \xi_v, \quad m_s < m_v \quad (3.11)$$

$$\text{type II: } \beta > 1, \quad \xi_s < \xi_v, \quad m_s > m_v \quad (3.12)$$

と分類される。後で説明するように、渦間の相互作用がそれぞれ引力・斥力ということに対応している。

### 3.2 磁束の量子化

この節では、 $\hbar, c$  を復活させて、 $e$  は元に戻す。渦の十分遠方では、エネルギー密度を最小（実際にはゼロ）にするために、次の条件が満たされている。

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0, \quad \left( \nabla + i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Psi = 0, \quad |\Psi|^2 = v^2. \quad (3.13)$$

まず第 3 式より、

$$\Psi(x) = v \exp(i\alpha(x)) \quad (3.14)$$

とかける。次に、これを用いると、第 2 式は

$$\mathbf{A} = -i \frac{\hbar c}{2e} \frac{\nabla \Psi(x)}{\Psi(x)} = -i \frac{\hbar c}{2e} \exp(-i\alpha(x)) \nabla \exp(i\alpha(x)) \quad (3.15)$$

とかける。相対論的場の理論では、この形をピュア・ゲージと呼ぶ。このとき、第1式は自動的に満たされている。このことは、ゲージ変換の式(3.3)を思い出せば、この形が  $\mathbf{A} = 0$  からのゲージ変換とみなせることからわかる。極座標では、

$$A_\theta = \frac{\hbar c}{2e} \frac{1}{r} \frac{d\alpha(\theta)}{d\theta}, \quad A_r = 0 \quad (3.16)$$

とかける。

この準備のもとで、磁束  $\Phi$  を計算してみよう。すると、

$$\Phi = \int d^2x B_3 = \oint_{S_\infty^1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_0^{2\pi} d\theta r A_\theta = \frac{\hbar c}{2e} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d\alpha(\theta)}{d\theta} = \frac{\hbar c}{2e} 2\pi k = \Phi_0 k \quad (3.17)$$

というように、整数  $k$  で量子化されることがわかる。ここで、磁束量子を

$$\Phi_0 \equiv \frac{\hbar c}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} [\text{weber}] \quad (3.18)$$

と置いた。このような、量子化された渦フラックスを、Abrikosov 渦と呼ぶ [9]。<sup>6</sup> ただし、素粒子論ではその後に、相対論的場の理論で紐の模型として再発見された [10] ために、Abrikosov-Nielsen-Olesen(ANO) 渦と呼んでいる。

### 3.3 超伝導量子渦と相対論的局所紐

ここでは、 $\hbar = c = 1, m_e = 1/4$  と置いて、 $2e$  を  $e$  と書き直すことにする。 $\Psi$  と  $\mathbf{A}$  の運動方程式は、

$$-D_i D^i \Psi - \frac{\lambda}{2} (|\Psi|^2 - v^2) \Psi = 0, \quad (3.19)$$

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} + j_\mu = 0, \quad j_\mu \equiv ie(\Psi^* D_\mu \Psi - D_\mu \Psi^* \Psi) \quad (3.20)$$

となる。ここで、渦の解が軸対称であると仮定して、次のようなアンザッツを置く。

$$\Psi(r, \theta) = f(r) e^{ik\theta}, \quad A_r = 0, \quad A_\theta = \frac{ka(r)}{er} \quad (3.21)$$

これを運動方程式に代入すると、

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{k^2}{r^2} (1-a)^2 f + \frac{\lambda}{2} (v^2 - f^2) = 0, \quad a'' - \frac{1}{r} a' + 2e^2 f^2 (1-a) = 0 \quad (3.22)$$

が得られる。境界条件は、

$$(f, a) \rightarrow (v, 1) \text{ as } r \rightarrow \infty, \quad (f, a) \rightarrow (0, 0) \text{ as } r \rightarrow 0, \quad (3.23)$$

である。この方程式は残念ながら解析的に解くことはできないが、数値的には解くことができる (図6)。しかし、漸近的には解析的に解くことができる。

<sup>6</sup> 数学的補足をおこう。超流動の場合と同様に、巻き付き数で特徴付けられる1次ホモトピー群(2)で分類されることには変わりはない。式(3.17)は、場の強さ  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  を定義すると、微分形式  $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  を用いて  $\Phi = \int F = \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  とかけて、いわゆる1次Chern類というものになっている。これは、式(2)のホモトピーの言葉をコホモロジーの言葉に書き直したことに対応する。

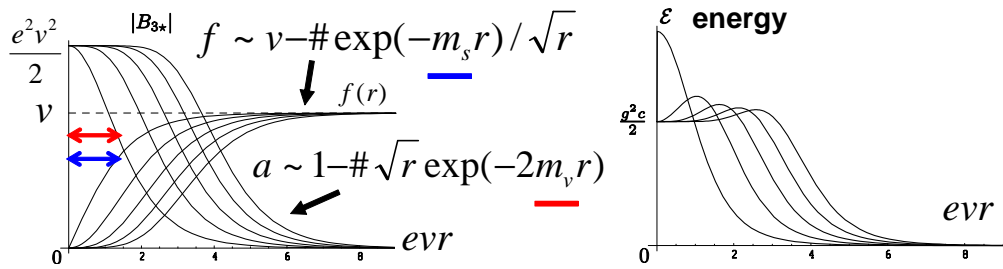


図 6: 超伝導渦のプロファイル関数  $f(r)$ ,  $a(r)$  とエネルギー密度 ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ )。

$$f = v - \delta f, \quad a = 1 - \delta a \quad (3.24)$$

と置いて、式 (3.22) に代入し低次まで展開すると、

$$\delta f'' + \frac{1}{r} \delta f' + \frac{k^2}{r^2} (\delta a)^2 - \lambda v^2 \delta f = 0, \quad \delta a'' - \frac{1}{r} \delta a' - 2e^2 \delta a = 0 \quad (3.25)$$

という方程式が得られる。ここで、第 1 式の導出では、 $(\delta f)^2 \ll \delta f$  としたが、 $(\delta a)^2 \ll \delta f$  とは限らないとして、 $(\delta a)^2$  の項をわざと残しておいた。第 2 式の導出では、 $(\delta a)^2, (\delta a)(\delta f) \ll \delta a$  とした。

通常の場合  $\beta < 4$  の場合は、漸近形は

$$\delta a \sim r K_1(m_v r) \sim \sqrt{r} e^{-m_v r}, \quad \delta f \sim K_0(m_s r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-m_s r} \quad (3.26)$$

と求まる。ただし、比例係数は求まらず、数値的に決定するより他ない。このことから、スカラー場、ゲージ場は、式 (3.9) で定義した、相関長、侵入長程度の幅で広がっていることがわかる。特に、タイプ I 超伝導では、スカラー場がより広がっており、タイプ II 超伝導では、ゲージ場がより広がっているという重要な結果が得られる。

強いタイプ II 超伝導 ( $\beta > 4$ ) の場合はあまり知られてないので、コメントしておこう。式 (3.25) の第 1 式の第 2 項を無視せずに注意深く計算すると、

$$\delta a \sim r K_1(m_v r) \sim \sqrt{r} e^{-m_v r}, \quad \delta f \sim K_0(2m_v r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-2m_v r} \quad (3.27)$$

が得られる。このことは、スカラー場はどれだけ狭くなるろうとしても、ゲージ場の広がり半分以下にはなれないことを意味している。ある意味、ゲージ場の広がりによって外から引っ張られていることがわかる。

最後に、遠方ほど重要ではないが、原点近傍の振る舞いとしては、 $f \sim r^k$  となることを示すことができる。

### 3.4 渦間相互作用：タイプ I 超伝導，タイプ II 超伝導

渦間の相互作用は、タイプ I 超伝導では引力、タイプ II 超伝導では斥力である。これは、磁場中における超伝導の安定性を決定しており、タイプ II 超伝導では、渦糸格子が出来て、超伝



導体は安定である。<sup>7</sup>

場の量子論では、粒子の交換によって相互作用が生じると考える。超流動体の場合は、交換する粒子がフォノンだったので、ゼロ質量粒子なために、相互作用は遠距離力であった。これに対して、超伝導の場合は、交換する粒子が質量をもったゲージ場と Higgs 場であるために、近距離の  $e^{-mR}$  という形のいわゆる湯川型相互作用となる。ここで、Higgs 場は引力を、ゲージ場は斥力を媒介することを示すことができる。<sup>8</sup> 実際には、相互作用が引力になるのか斥力になるのかは、ゲージ場と Higgs 場のどちらが軽くてより遠方まで到達するかで決まる。このことから、タイプ I 超伝導では、Higgs 場の方が軽いために、渦間相互作用は引力、タイプ II 超伝導では、ゲージ場の方が軽いために、渦間相互作用は斥力であることがわかる。

### 3.5 臨界結合 (BPS 極限)

超伝導の I 型と II 型の丁度境界の場合 ( $\lambda = 2e^2$ ) は、臨界結合定数というが、素粒子論においては、Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield(BPS) 極限と呼ばれており、盛んに研究されている。1つの理由は、超対称な理論を考えると自然に現れるからである [17]。また、以下に示すように、方程式が非常に簡単化される。

静的な全エネルギーは ( $e\mathbf{A}$  を  $\mathbf{A}$  と再定義すると)、

$$E = \int d^2x \left[ \frac{1}{2e^2} B_z^2 + |(\nabla - i\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{e^2}{2} (|\Psi|^2 - c)^2 \right] \quad (3.28)$$

とかける。ここで、関係式、

$$|D_x\Psi + iD_y\Psi|^2 = |D_x\Psi|^2 + |D_y\Psi|^2 + \partial_x(i\phi^*D_y\Psi) + \partial_y(-i\phi^*D_x\Psi) + B_z|\Psi|^2 \quad (3.29)$$

と  $[D_x, D_y] = -iF_{xy} = -iB_z$  に注意すると、エネルギーの表式 (3.28) は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} E &= \int d^2x \left[ |(\partial_x - iA_x)\Psi + i(\partial_y - iA_y)\Psi|^2 + \frac{1}{2e^2} \{B_z - e^2(|\Psi|^2 - c)\}^2 \right] - c \int d^2x B_z \\ &\geq -c \int d^2x B_z = 2\pi c k, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

ここで、最右辺はエネルギーの最小値を与えており、この不等式を Bogomol'nyi 不等式、最小値を Bogomol'nyi バウンドと呼ぶ。渦の数  $k$  を固定すると、最小エネルギーになるためには、1行目の2乗の項がすべてゼロでなければならない。よって、渦の BPS 方程式

$$(\mathcal{D}_x + i\mathcal{D}_y)\Psi = 0, \quad B_z - e^2(|\Psi|^2 - c) = 0 \quad (3.31)$$

<sup>7</sup>渦格子の綺麗な写真やその歴史は、以下のHPを見ることが出来る。

<http://www.mn.uio.no/fysikk/english/research/groups/amks/superconductivity/vortex/>

<sup>8</sup>このことから、実は超流動の渦間相互作用にも、本当は Higgs 粒子の交換による、近距離の引力が存在しているはずである。これは、南部 Goldstone モードの交換による長距離斥力にかき消されてしまって見えないのではあるが、このことはあまり知られていない。

を得る。この方程式は、1階微分方程式なために、本来の2階微分方程式に比べるとはるかに扱いやすい方程式になっている。しかしながら、解析的に解くことはやはり出来ない。ところが、数学的には解の存在と唯一性が証明されている。式(3.30)において、エネルギーが渦の数に比例することから、渦間に相互作用が働かないことがわかる。実際の超伝導体では、ニオブなどがこの状況に近い。

## 4 非線形 $O(3)$ シグマ模型における2次元スカーミオン

ここでは、2次元のスカーミオンについて議論する。渦との関係は、節5.1で明らかになる。ここでは、静的な解だけを議論するので、時間の項は考えない。 $O(3)$  非線形シグマ模型を考える。

$$E = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (4.1)$$

これは、物性では通常 Heisenberg 模型と呼ばれている。 $O(3)$  対称性を用いると、基底状態は次のように取れる。

$$\langle \mathbf{n} \rangle = (0, 0, 1). \quad (4.2)$$

これより、 $O(3)$  対称性は、

$$G = O(3) \rightarrow H = O(2) \quad (4.3)$$

と自発的に破れていることがわかる。よって、オーダーパラメーター空間は、

$$\text{OPS} = G/H = O(3)/O(2) \simeq S^2 \quad (4.4)$$

のように2次元球面であることがわかる。

このオーダーパラメーター空間 (ターゲット空間) は、2次のホモトピー群が非自明である。

$$\pi_2(\text{OPS}) = \pi_2(S^2) = \mathbf{Z}. \quad (4.5)$$

Belavin と Polyakov によって、このトポロジカル電荷をもった位相励起が発見された [12]。場の理論においては、今日、ランプと呼ばれているが、物性系ではただ単にスカーミオンと呼ばれていることが多い。ここでは、2次元スカーミオンと呼ぶことにしよう。

また、時間1次元空間1次元の系で、この配位を考えることもできて、その場合は2次元インスタントンとかシグマ模型インスタントンと呼ばれている。(弦理論のコンテキストでは、世界面インスタントンと呼ばれているものである。)

解を構成するために、次のようなステレオグラフィック座標

$$u \equiv \frac{n_1 + in_2}{1 + n_3} = \frac{1 - n_3}{n_1 - in_2} \quad (4.6)$$

を用いるのが便利である。ここで、 $u$  は複素場である。 $u = 0$  と  $u = \infty$  が、それぞれ球面の北極  $N$  と南極  $S$  に対応する。この  $u$  を用いると、エネルギーは次のように書き換えられる。

$$E = \frac{\nabla u^* \cdot \nabla u}{(1 + |u|^2)^2} \quad (4.7)$$

これは、 $CP^1$  模型と呼ばれているものである。(特に、 $CP^1$  の Fubini-Study 計量を用いた表式である。) 逆に、 $\mathbf{n}$  は、 $u$  を用いて次のようにかける。

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \Phi^\dagger \vec{\sigma} \Phi = \frac{1}{1+|u|^2} (1, u^*) \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \right) \left( \begin{array}{c} 1 \\ u \end{array} \right) \\ &= \left( \frac{u+u^*}{1+|u|^2}, \frac{-iu+iu^*}{1+|u|^2}, \frac{1-|u|^2}{1+|u|^2} \right).\end{aligned}\quad (4.8)$$

球面を完全に覆うには、別の座標が必要で  $v \equiv 1/u$  を用いると、エネルギーは  $E = \frac{\nabla v^* \cdot \nabla v}{(1+|v|^2)^2}$  のように同じ形でかける。ここで、 $v = \infty$  と  $v = 0$  が、それぞれ球面の北極 N と南極 S に対応する。

さて、前節と同じように、Bogomol'nyi のトリックを用いて、BPS バウンドを求めよう。

$$\begin{aligned}E &= \int d^2x \frac{\partial_x u^* \partial_x u + \partial_y u^* \partial_y u}{(1+|u|^2)^2} \\ &= \int d^2x \left[ \frac{|\partial_x u \mp i \partial_y u|^2}{(1+|u|^2)^2} \pm \frac{i(\partial_x u^* \partial_y u - \partial_y u^* \partial_x u)}{(1+|u|^2)^2} \right] \\ &\geq \left| \int d^2x \frac{i(\partial_x u^* \partial_y u - \partial_y u^* \partial_x u)}{(1+|u|^2)^2} \right| \equiv |T_{\text{skyrmion}}|.\end{aligned}\quad (4.9)$$

トポロジカル電荷を以下のように定義した。

$$T_{\text{skyrmion}} = \int d^2x \frac{i(\partial_x u^* \partial_y u - \partial_y u^* \partial_x u)}{(1+|u|^2)^2} = \oint dx^i \frac{-i(u^* \partial_i u - \partial_i u^* \cdot u)}{2(1+|u|^2)}.\quad (4.10)$$

ここで、2行目は無限遠の境界での積分に書き換えた。このことから、境界条件で決まるトポロジカル電荷であることがわかる。<sup>9</sup> また、もともとの  $\mathbf{n}$  の場を用いると、トポロジカル電荷は次のように書ける。

$$T_{\text{skyrmion}} = \int d^2x \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot (\partial_x \mathbf{n} \times \partial_y \mathbf{n} - \partial_y \mathbf{n} \times \partial_x \mathbf{n}) = \int_{S^2} dx^i \wedge dx^j \mathbf{n} \cdot (\partial_i \mathbf{n} \times \partial_j \mathbf{n})\quad (4.11)$$

エネルギーの下限  $E = |T_{\text{skyrmion}}|$  (BPS バウンド) は、BPS 方程式

$$\partial_x u \mp i \partial_y u = 0\quad (4.12)$$

が満たされるときにのみ成立する。実空間の座標から、 $z \equiv x + iy$  のように複素座標を定義すると、この BPS 方程式は

$$\partial_z u = 0 \quad \text{anti-BPS,} \quad \text{または} \quad \bar{\partial}_z u = 0 \quad \text{BPS}\quad (4.13)$$

と書き換えることが出来る。よって、 $u$  はそれぞれ、

$$u = u(\bar{z}) \quad \text{anti-BPS,} \quad \text{または} \quad u = u(z) \quad \text{BPS}\quad (4.14)$$

<sup>9</sup> このトポロジカル電荷は、微分形式を用いれば、次のように書くことができる。 $T_{\text{skyrmion}} = \int dx^i \wedge dx^j \frac{i \partial_i u^* \partial_j u}{(1+|u|^2)^2} = \int_{S^2} \frac{i du^* \wedge du}{(1+|u|^2)^2} = \int_{S^2} \omega$  ここで、 $\omega$  はケーラー形式という 2 形式である。 $\omega = \frac{i du^* \wedge du}{(1+|u|^2)^2}$ 。ケーラー形式の存在は、 $CP^1$  がケーラー多様体であることを意味している。この表式は、トポロジカル電荷が、ケーラー形式の引き戻しで書けることを意味している。

のように反正則または正則関数であることがわかる。

ここでは、BPS 解のみ考えよう。1 スカーミオン解は、次のように与えられる。

$$u(z) = \kappa + \frac{\lambda}{z - z_1} \quad (4.15)$$

ここで、 $z_1$  はスカーミオンの位置を表す複素定数、 $\lambda$  は絶対値がスカーミオンのサイズ、位相がスカーミオンの持っている  $U(1)$  位相を表す定数であり、これらはスカーミオンの集団座標（モジュライパラメーター）である。一方、 $\kappa$  は境界条件であり、スカーミオンのモジュライではない。より一般に、 $k$  スカーミオン解は次のように書ける。

$$u(z) = \kappa + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{z - z_i} \quad (4.16)$$

$z_i$  は  $i$  番目のスカーミオンの位置、 $\lambda_i$  はスカーミオンのサイズと  $U(1)$  位相である。この解のトポロジカル電荷は、

$$T_{\text{skyrmion}} = 2\pi k, \quad k \in \pi_2(S^2) \simeq \mathbf{Z} \quad (4.17)$$

となっている。このことから、 $k$  個のスカーミオンは、好き勝手な位置においても、全エネルギーは同じであることがわかる。これは、スカーミオン間に相互作用が存在しないことを意味している。

素粒子論では、Skyme 項に類似の 4 階微分項とポテンシャル項を同時に導入することで、スカーミオンのサイズを固定することが出来て、ベビー・スカーミオンと呼ばれている [2]。物性論においては、磁性体では Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用が、量子ホール系では非局所的な Coulomb 相互作用が、Skyrme 項の代わりの役割を果たしている [18]。最近は、磁性体でスカーミオン格子が発見され話題になった [19]。これらの場合はいずれも、スカーミオン間に相互作用が存在している。

## 5 多ギャップ超伝導と多成分 BEC

### 5.1 $SU(2)$ 不変 2 成分超伝導とセミローカル渦、スカーミオン

ここでは、ギャップ関数 (Higgs 場) が 2 つあって、 $SU(2)$  対称性がある特別な場合を考える。素粒子論では、アーベリアン・2 成分ヒッグス模型と呼ばれている。 $\Psi^T = (\Psi_1, \Psi_2)^T$  を 2 つのギャップ関数とし、エネルギー半関数は次のようになっている ( $m = \hbar = 1$  とする) ,

$$E = \int d^2x \left[ \frac{1}{2e^2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + |(\nabla - i\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{\lambda}{4} (\Psi^\dagger \Psi - v^2)^2 \right] \quad (5.1)$$

また、通常の場合に比べて、 $e\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  と置き換えた。この理論のもつ対称性は、 $U(1)$  ゲージ対称性に加えて、大域対称性  $SU(2)_F$  がある :

$$\Psi^T = (\Psi_1, \Psi_2)^T \rightarrow \Psi'^T = e^{i\alpha(x)} \Psi g, \quad e^{i\alpha(x)} \in U(1)_L, \quad g \in SU(2)_F \quad (5.2)$$

である。ギャップ関数の基底状態は、 $SU(2)_F$  を用いれば、

$$\langle \Psi \rangle^T = (v, 0) \quad (5.3)$$

ととることができ、対称性は、

$$U(1)_L \times SU(2)_F \rightarrow U(1)_{L+F} \quad (5.4)$$

まで自発的に破れる。

Achucarro と Vachaspati によってこの理論における渦が考えられ、局所対称性と大域対称性の両方が自発的に破れるために、セミローカル渦と呼ばれている [11]。このセミローカル渦は、トポロジカルでない。すなわち、秩序変数空間は、

$$\text{OPS} : \frac{U(1)_L \times SU(2)_F}{U(1)_{L+F}} \simeq S^3, \quad \pi_1(S^3) = 0. \quad (5.5)$$

のように、1次のホモトピー群が自明である。また、セミローカル渦は、サイズの自由度がある。さらに、 $e, \lambda \rightarrow \infty$  の極限では、模型は  $CP^1$  模型になるが、セミローカル渦は2次元スカーミオンになる (後述)。超伝導のタイプにより、セミローカル渦の安定性が分類されている。

1. I 型 ( $\beta = \lambda/2e^2 < 1$ )。このときは、セミローカル渦はサイズがどんどん小さくなり、ANO 局所渦になる。
2. II 型 ( $\beta = \lambda/2e^2 > 1$ ) このときは、セミローカル渦はサイズがどんどん大きくなり、最終的にはほどけてなくなってしまう。
3. BPS 極限  $\beta = \lambda/2e^2 = 1$ 。このときは、トポロジカルになる。BPS 渦の方程式は、

$$(\mathcal{D}_x + i\mathcal{D}_y)\Psi = 0, \quad B_z - e^2(\Psi^\dagger\Psi - v^2) = 0 \quad (5.6)$$

となる。渦のサイズはモジュライとなり任意の大きさを取れる。サイズ・モジュライがゼロの極限は、ANO 局所渦になる。

このセミローカル渦の強結合極限が、2次元スカーミオンであることを示そう。ここでは、簡単のために、 $v = 1$  と置く。まず、 $\lambda \rightarrow \infty$  の強結合極限をとる。すると、

$$\Psi^\dagger\Psi = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = 1 : S^3 = \text{OPS} \quad (5.7)$$

という拘束条件がつく。次に、ゲージ結合も強結合の極限  $e \rightarrow \infty$  をとる。これによって、ゲージ場の運動項グラディエント項  $\frac{1}{2e^2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \rightarrow 0$  は落ちてしまい、ゲージ場はラグランジュ・マルチプライヤーになる。よって、ゲージ場の運動方程式より、

$$A_\mu = \frac{i(\Psi^\dagger\partial_\mu\Psi - \partial_\mu\Psi^\dagger\cdot\Psi)}{\Psi^\dagger\Psi} = \frac{-i(u^*\partial_\mu u - \partial_\mu u^*\cdot u)}{2(1 + |u|^2)} \quad (5.8)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{i(\partial_\mu u^*\partial_\nu u - \partial_\nu u^*\partial_\mu u)}{(1 + |u|^2)^2} \quad (5.9)$$

が得られる。ここで、 $\Psi$  と  $u$  の関係は、

$$\Psi^T = \frac{1}{\sqrt{1+|u|^2}}(1, u) \quad (5.10)$$

である。<sup>10</sup>これを用いると、渦のトポロジカル電荷は、2次元スカーミオンのトポロジカル電荷に一致することがわかる。<sup>11</sup>

$$T_{\text{vortex}} = \int d^2x F_{12} = T_{\text{skyrmion}}. \quad (5.11)$$

前節の、クリティカル・カップリングの場合は、元から  $\lambda = 2e^2$  なので、この関係を保ったまま  $\lambda = 2e^2 \rightarrow \infty$  としてもよい。よって、2次元スカーミオンが BPS であったことはこのことから理解できる。数学的には、この操作は Kähler 商と呼ばれている。

## 5.2 多ギャップ超伝導

前節では、 $SU(2)$  対称性のある2成分超伝導を考えた。多バンド（多ギャップ）超伝導において、より一般的に考えられている（時間に依存しない）Landau-Ginzburg 理論のエネルギー汎関数は、次のような形である。<sup>12</sup>

$$E[\Psi_i, \Psi_i^*] = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \sum_i \frac{\hbar^2}{4m} \left| \left( \nabla + i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Psi_i \right|^2 + \sum_i \frac{\lambda_i}{4} (|\Psi_i|^2 - v^2)^2 \right] - \sum_{ij} \gamma_{ij} (\Psi_i^* \Psi_j + \Psi_j^* \Psi_i) \quad (5.12)$$

最後の項は、(内部) Josephson 項で、ギャップ関数間のトンネリングを現しており、超伝導では避けられない。系としては、 $\text{MgB}_2$  が2バンドの候補であるし、鉄ヒ素系の超伝導も多バンドであると考えられている。また、Josephson 接合を用いて、人工的に作ることも出来る。

この系は、量子渦が整数に量子化されない、非整数量子渦という奇妙なものが存在する。以下は、表記の簡単のために、2ギャップ超伝導に限るが、一般の  $n$  ギャップにすることは容易である。ここで一旦、 $\Psi_{1,2}$  の質量を  $m_{1,2}$  と一般にしておく。 $\Psi_{1,2}$  のグラディエント・エネルギーは、

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{4m_1} \left| \left( \nabla + i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Psi_1 \right|^2 + \frac{\hbar^2}{4m_2} \left| \left( \nabla + i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Psi_2 \right|^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{4m_1} \left| \left( \nabla + i \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \Psi_1 \right|^2 + \frac{\hbar^2}{4m_2} \left| \left( \nabla + i \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \Psi_2 \right|^2 \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{\Phi_0^2} \left[ \mathbf{A} - \frac{i(\Psi_1^* \nabla \Psi_1 - \Psi_1 \nabla \Psi_1^*)}{4\pi m_1 (|\Psi_1|^2/m_1 + |\Phi_2|^2/m_2)} \Phi_0 - \frac{i(\Psi_2^* \nabla \Psi_2 - \Psi_2 \nabla \Psi_2^*)}{4\pi m_2 (|\Psi_1|^2/m_1 + |\Psi_2|^2/m_2)} \Phi_0 \right]^2 + (5.13) \end{aligned}$$

<sup>10</sup>数学的には、 $S^3/U(1)_L \simeq S^2$  という Hopf 写像になっている。

<sup>11</sup>数学的には、次のようなホモトピー間の関係を現している。 $\pi_2(S^2) = \pi_2[SU(2)/U(1)] \simeq \pi_1[U(1)] \simeq \mathbf{Z}$ 。

<sup>12</sup> $|\Psi_1|^2 |\Psi_2|^2$  のような項は通常考えられていないが、考えない理由は特にないと思われる。前節の  $SU(2)$  対称な2成分模型では、ポテンシャル項は  $V \sim \lambda(|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 - v^2)^2 = \lambda|\Phi_1|^4 + \lambda|\Phi_2|^4 + 2\lambda|\Psi_1|^2 |\Psi_2|^2 - 2\lambda v^2 |\Phi_1|^2 - 2\lambda v^2 |\Phi_2|^2$  であるので、式(5.12)において、 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $v_1 = v_2 = v$ ,  $\gamma_{ij} = 0$  とし、 $2\lambda|\Psi_1|^2 |\Psi_2|^2$  を足した形である。

と書き直せる。よって、グラディエント・エネルギーを最小にするゲージ場は、 $[\dots]^2$  を最小にする条件から、

$$\mathbf{A} = \frac{i(\Psi_1^* \nabla \Psi_1 - \Psi_1 \nabla \Psi_1^*)}{4\pi m_1 (|\Phi_1|^2/m_1 + |\Psi_2|^2/m_2)} \Phi_0 + \frac{i(\Psi_2^* \nabla \Psi_2 - \Psi_2 \nabla \Psi_2^*)}{4\pi m_2 (|\Psi_1|^2/m_1 + |\Psi_2|^2/m_2)} \Phi_0 \quad (5.14)$$

と求まる。

ここで、1成分目だけに巻いて、2成分目に巻かない状況を考える。

$$(\Psi_1, \Psi_2) \sim (v_1 e^{i\alpha_1}, v_2) \quad (5.15)$$

すると、式(5.14)より、ゲージ場の遠方の振る舞いは、

$$\mathbf{A} \sim \frac{v_1^2/m_1}{v_1^2/m_1 + v_2^2/m_2} \frac{\nabla \alpha_1}{2\pi} \Phi_0, \quad (5.16)$$

$$A_r \sim 0, \quad A_\theta \sim \frac{v_1^2/m_1}{v_1^2/m_1 + v_2^2/m_2} \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \Phi_0. \quad (5.17)$$

よって、磁場を積分すると、磁束は、

$$\Phi_1 = \int d^2x B_3 = \oint_{S_\infty^1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_0^{2\pi} d\theta r A_\theta = \frac{v_1^2/m_1}{v_1^2/m_1 + v_2^2/m_2} \Phi_0 \quad (5.18)$$

となり、非整数に量子化されている。他方、2成分目だけに巻き付く渦

$$(\Psi_1, \Psi_2) \sim (v_1, v_2 e^{i\alpha_2}) \quad (5.19)$$

の場合は、磁束は、

$$\Phi_2 = \frac{v_2^2/m_2}{v_1^2/m_1 + v_2^2/m_2} \Phi_0 \quad (5.20)$$

と非整数に量子化されている。2つ合わせると、

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_0 \quad (5.21)$$

整数に量子化されている。 $\Phi_1$  や  $\Phi_2$  は、整数量子渦を分割したものと思えることができ、フラクショナル渦と呼ばれている [13]。大域渦と同じで、エネルギーのふるまいは(2.35)と同じである。

2ギャップ超伝導に話を戻すと、 $m_1$  も  $m_2$  も電子の質量なので、 $m_1 = m_2 = m$  と置けば、

$$\Phi_1 = \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} \Phi_0, \quad \Phi_2 = \frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} \Phi_0 \quad (5.22)$$

のような量子化になる。<sup>13</sup> 整数渦を2つに分裂させた場合、Josephson項のために、図7のように、渦の間にサインゴールドン・ドメイン壁が現れる。このために、渦間にはドメイン壁のテンションのために一定の力が働くために、2つの渦は閉じ込められ（コンファインされ）ており通常は引き離されることがない。温度をあげると閉じ込めから解放されると期待される [13]。このこと

<sup>13</sup> $p$ 波超伝導の場合は、さらに  $v_1 = v_2$  なので、 $\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{1}{2} \Phi_0$  となり、半整数量子渦である。

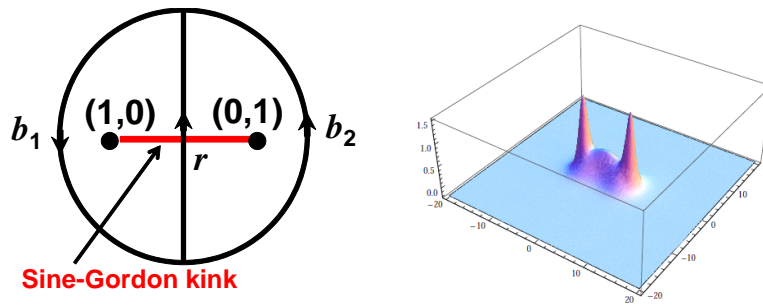


図 7: 渦分子。

は、次元は異なるが、素粒子論における量子色力学のコンファインメントと似ている。また、実際に  $2 + 1$  次元のコンパクト量子電磁力学のコンファインメントの証明に使われた。超対称ゲージ理論のミラー対称性とも密接に関係している。

渦分子とは別に、整数渦の間の力を調べると、遠距離では引力、近距離では斥力である場合がある。これは、ゲージ場の侵入長が、2つのコヒーレンス長の間にある場合で、タイプ 1.5 超伝導と呼ばれている [14]。MgB<sub>2</sub> がその候補とされている。

### 5.3 多成分 BEC

多成分 BEC の GP 方程式のエネルギー汎関数は、

$$E[\Psi, \Psi^*] = \int d^3x \left[ \sum_i \left\{ \frac{\hbar^2}{2M_i} |\nabla \Psi_i|^2 + V_{\text{trap}} |\Psi_i|^2 - \mu_i |\Psi_i|^2 + \frac{g_{ii}}{2} |\Psi_i|^4 \right\} + \sum_{i < j} g_{ij} |\Psi_i|^2 |\Psi_j|^2 \right] \quad (5.23)$$

で与えられる [15]。多成分 BEC には 2 種類あり、同種原子の異なるハイパーファイン構造を用いる場合（この場合は  $M_i = M_j$ ）と、異種原子の混合を用いることも出来る。また、前者の場合は、超伝導における Josephson 項に対応する項として、Rabi 振動項

$$E_{\text{Rabi}} = \sum_{i < j} \gamma_{ij} (\Psi_i^* \Psi_j + \Psi_i \Psi_j^*) \quad (5.24)$$

を導入することもできる（後者では駄目）。GP 方程式は、1 成分の場合と同様に、

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \Psi_i^*} \quad (5.25)$$

で与えられる。

ここから、2 成分の場合に話を限ろう。Rabi 項がなくて、 $\mu_1 = \mu_2$  である場合を考える。

$$c_1 = \frac{1}{2}(g_{11} - g_{22}), \quad c_2 = \frac{1}{4}(g_{11} + g_{22} - 2g_{12}), \quad (5.26)$$

と置くと、 $c_2$  の符号によって次のように基底状態が分類される。

$$\begin{array}{lll} c_2 < 0 & \text{反強磁性的, miscible} & (|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle) = (v_1, v_2), \\ c_2 = 0 & c_1 = 0 \text{ なら } U(2) \text{ 対称} & (|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle) = (v, 0), \\ c_2 > 0 & \text{強磁性的, 相分離, immiscible} & (|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle) = (v'_1, 0) \text{ または } (0, v'_2). \end{array} \quad (5.27)$$



ここで、基底状態の振幅を、

$$v_1 \equiv \sqrt{\frac{\mu_1 g_{22} - \mu_2 g_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}, \quad v_2 \equiv \sqrt{\frac{\mu_2 g_{11} - \mu_1 g_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}, \quad (5.28)$$

$$v'_1 \equiv \sqrt{\frac{\mu_1}{g_{11}}}, \quad v'_2 \equiv \sqrt{\frac{\mu_2}{g_{22}}} \quad (5.29)$$

と置いた。

1) 反強磁性相 ( $c_2 < 0$ ) は、2ギャップ超伝導と似ている。特に、Rabi項 (5.24) を入れると、違いはゲージ場に結合しているかどうかくらいである。循環の量子化は、

$$\kappa_1 = \frac{v_1^2/m_1}{v_1^2/m_1 + v_2^2/m_2} \kappa_0, \quad \kappa_2 = \frac{v_2^2/m_2}{v_1^2/m_1 + v_2^2/m_2} \kappa_0 \quad (5.30)$$

となる。

同種渦の間の相互作用は、スカラーBECと同様で式 (2.38) で与えられる。粒子間相互作用が  $g_{12}|\Psi_1|^2|\Psi_2|^2$  しかないことから、異なる渦の間の相互作用は、もう少し弱くて、

$$F \sim g_{12}(\log R/\xi - 1/2)/R^3 \quad (5.31)$$

となる [16]。  $g_{12}$  が引力 (斥力) なら渦間も引力 (斥力) であることがわかる。

Rabi項を入れた場合には、渦分子に有限サイズで安定に存在することができる [15]。この場合の渦間の斥力は、超伝導の場合よりも強い遠距離力なために、サインゴルドン・ドメイン壁のテンションと釣り合うことができるからである。

2) 強磁性相では、相分離が起こる。すなわち、 $\Psi_1$  と  $\Psi_2$  の成分に斥力が働き、それぞれ混じり合わない。よって、ドメイン壁が現れる。ここで現れるドメイン壁は、超対称ゲージ理論に現れるものに非常によく似ている [17]。

$\Psi_1(\Psi_2)$  の領域において、渦をつくると、渦のコアに  $\Psi_2(\Psi_1)$  の成分が入り込んだ、コアなし渦になっている [15]。これは、宇宙論における Witten の超伝導宇宙紐 (superconducting cosmic string) [4] の、超流動版になっているので、超流動宇宙紐 (superflowing cosmic string) と呼んでもよい。

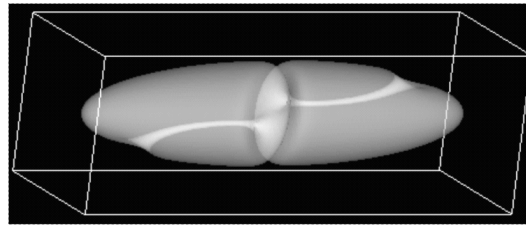
渦がドメイン壁に終わるような解が存在しており、Dブレーン・ソリトンと呼ばれている。図 8 参照。これは、素粒子論における Dブレーンの類似物である [20]。

Rabi項を入れると、超伝導の Josephson 接合の類似物になる。

## 6 おわりに

以上、かなりざっくりと解説したが、物性論と素粒子論・宇宙論はどれも場の理論という共通言語で記述されるために、共通の理解が可能な場合が多い。特に、ここでは渦について焦点をあてて、共通点・相違点を述べてきた。紙面の都合上スピノールBECについてと、フェルミオンのゼロモードについては、述べる余裕がなかった。またの機会に譲りたい。

物性論の領域で日頃から共同研究して頂いた方々からは多くのことを学びました。全員ここにあげる余裕がありませんが、ここに感謝いたします。



$$\Psi_1 \quad \Psi_2$$

図 8: D ブレーン・ソリトン。

## 参考文献

- [1] G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford (2003). [彼の HP で入手可能]
- [2] N. S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 493
- [3] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, Volume 15: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory, North-Holland Personal Library (1987).
- [4] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, (Cambridge Monographs on Mathematical Physics), Cambridge University Press (July 31, 2000).
- [5] 坪田 誠, 西森 拓, “量子渦のダイナミクス/砂丘と風紋の動力学 (非線形科学シリーズ),” 培風館 (2008/07).
- [6] B. シュワルツシルト (新田宗土訳) 量子乱流中で再結合する渦糸の動画撮影, パリティ 2011年5月号 vol.26.No.05, pp. 40~43.
- [7] 渡辺悠樹・村山斉, “南部・ゴールドストーンボソンの統一的理解”, 日本物理学会誌 68 巻 4号 (2013) 交流欄.
- [8] M. Kobayashi and M. Nitta, arXiv:1307.6632 [hep-th].
- [9] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **32**, 1442 (1957)].
- [10] H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973).
- [11] A. Achucarro and T. Vachaspati, Phys. Rept. **327**, 347 (2000) [hep-ph/9904229].
- [12] A. M. Polyakov and A. A. Belavin, JETP Lett. **22**, 245 (1975) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **22**, 503 (1975)].
- [13] 田中康資, “多層型高温超伝導体における分数量子渦,” 応用物理 79(1), 43-47, 2010-01-10.

- [14] 西尾太一郎, “第 1.5 種超伝導 (最近の研究から),” 日本物理學會誌 66(3), 201-204, 2011-03-05.
- [15] K. Kasamatsu, M. Tsubota and M. Ueda, *Int. J. Mod. Phys. B* **19**, 1835 (2005).
- [16] M. Eto, K. Kasamatsu, M. Nitta, H. Takeuchi and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **83**, 063603 (2011) [arXiv:1103.6144 [cond-mat.quant-gas]].
- [17] 五十棲 洋一, 大橋 圭介, 坂井 典佑, 新田 宗土, ゲージ理論におけるドメインウォールとヒッグス相中のソリトン (最近の研究から) 日本物理學會誌 60(4), 281-284, 2005-04-05, M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, *J. Phys. A* **39**, R315 (2006) [hep-th/0602170].
- [18] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson, and E. H. Rezayi, *Phys. Rev. B* **47**, 16419-16426 (1993); Z. F. Ezawa, “Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics,” 2nd ed., World Scientific Pub Co Inc (2008).
- [19] X. Z. Yu, Y. Onose, N. Kanazawa, J. H. Park, J. H. Han, Y. Matsui, N. Nagaosa, and Y. Tokura, *Nature* **465**, 901-904 (2010).
- [20] K. Kasamatsu, H. Takeuchi and M. Nitta, *J. Phys.: Condens. Matter* **25**, 404213 (2013) [arXiv:1303.4469 [cond-mat.quant-gas]].