

メゾスコピック系の物理¹

— 基礎から最近の話題まで —

東京大学 物性研究所 加藤 岳生²

1 イントロダクション

メゾスコピック系の物理学は、1980年代に大きな研究の潮流を引き起こしたキーワードである。メゾスコピック系の物理学の特徴を一言で述べれば、「量子力学特有の効果を、マイクロメートル程度の系の伝導特性を通してみる」ということに尽きる。系が原子スケールより大きいので、さまざまなサンプルの加工が可能であることがポイントである。通常の「できあがったサンプルを測定する」というような受動的なやりかたではなく、「見たい現象がでてくるようにサンプルを作る」というような能動的な実験ができることが一番の特徴であろう。メゾスコピック分野の研究は、1980年代は伝導特性を中心に研究が行われていたが、2000年代以降は量子情報制御の観点も加わり、現在も活発な研究が行われている。しかし、日本では伝統的に磁性や強相関電子系分野の研究が活発であり、メゾスコピック系の分野の研究者が海外に比べて少ないという印象をもつ。本テキストがメゾスコピック分野の研究に興味をもっていただくきっかけになれば幸いである。

さて、一口にメゾスコピック系の物理学といっても、実に幅広い研究が行われており、すでに優れた教科書が出版されている [1, 2, 3]。そこで本テキストでは、まとまった日本語の解説文献が少ない「ノイズ」に焦点を絞って解説する。このテーマは、メゾスコピック系の基礎的概念の理解から最先端の研究動向までを広く概観するのに適しており、メゾスコピック物理学の特徴や面白さが凝縮されているテーマでもある。

まず、第2章で主に研究されている電流ノイズ、特に非平衡ショットノイズについて説明し、なぜショットノイズを調べると面白いのかを解説する。次に第3章で散乱理論を用いたショットノイズの基礎理論を説明し、第4章で最近の研究成果を紹介する。第5章で解説を総括し、ショットノイズの面白さをまとめ直すことにする。

2 ショットノイズとはなにか

まず、図 1 (a) のようなセットアップを考える。伝導体を電圧 V の定電圧回路に接続し、そこに流れる電流を測ることにする。時刻 t での電流を $I(t)$ とおくと、一般に $I(t)$ は図 1 (b) のよう

¹この原稿は、2013年度物性夏の学校のテキストとして執筆された。

²E-mail: kato@issp.u-tokyo.ac.jp

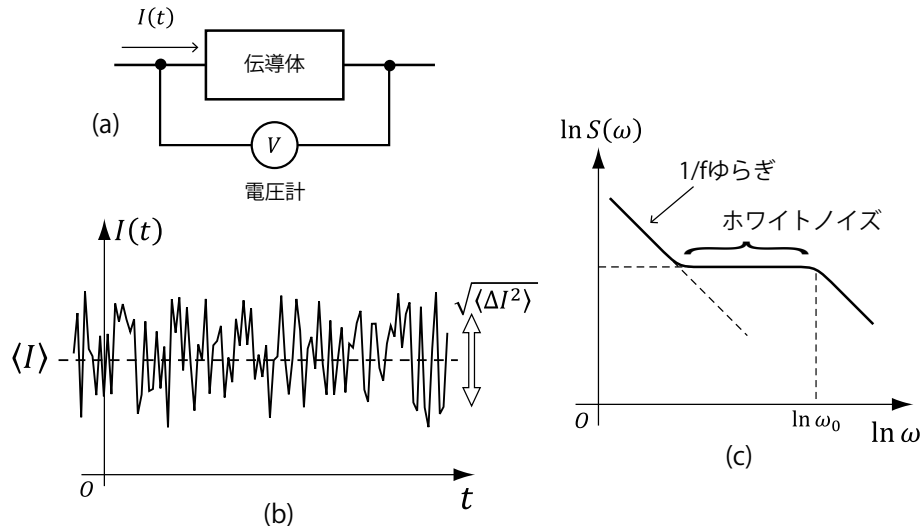


図 1: (a) 伝導特性を調べる実験のセットアップ, (b) 電流の期待値とゆらぎ, (c) パワースペクトルの振動数依存性

に測定される。圧倒的に多くの実験で測定される量は、電流の平均値 $\langle I(t) \rangle = I$ であり、これから伝導体の抵抗 $R = V/I$ が求められる。ナノスケール素子の伝導特性を議論するときは、抵抗の代わりにその逆数であるコンダクタンス $G = 1/R = I/V$ を用いるほうが便利なことが多い。後述するように、ナノスケール素子のコンダクタンスには量子力学特有の性質がはっきりと現れる。

図 1 (b) のような電流測定から、もうひとつ重要な量が得られる。それは電流ゆらぎ $\langle (\Delta I)^2 \rangle$ である。これは、おおまかにいって電流の分布関数の分散である。厳密には、電流ゆらぎは電流のパワースペクトルとして定義される。 $\Delta I(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle$ とし、測定時間 $-T/2 \leq t \leq T/2$ の間の $\Delta I(t)$ のフーリエ変換を $\Delta I(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} dt I(t) e^{i\omega t}$ とするとき、電流ノイズのパワースペクトルは

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} |\Delta I(\omega)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' \langle \Delta I(t) \Delta I(t') \rangle e^{i\omega(t-t')} \quad (1)$$

と定義される³。電流ノイズのパワースペクトルは、およそ図 1 (c) のようになっていることが多い。まず、角振動数 ω が非常に小さい領域では、 $1/f$ ノイズと呼ばれる ω^{-1} に比例した電流ノイズが支配的となる。 $1/f$ ノイズの起源はケースバイケースであるが、通常は不純物や表面・界面にトラップされた電子の遅い運動によって引き起こされると考えられている。 $1/f$ ノイズも重要な研究対象である⁴が、ここでは取り扱わない。ある程度、角振動数 ω を大きくしていくと、ほぼ振動数に依存しない電流のパワースペクトルが得られる。この部分をホワイトノイズと呼ぶ⁵。このホワイトノイズは、系の性質を反映していろいろな情報を持つ。後述する「ショットノイズ」もこの部分のノイズである。さらに振動数 ω が回路や伝導体の特徴的な振動数 ω_0 を超えると、電

³この定義に現れる因子 2 は、ノイズの定義にまつわる歴史的な経緯によってついていて、深い意味はない。そういうもんだと思ってもらえば十分である。

⁴例えば、量子コンピュータを固体素子で実現するときに、デコヒーレンス (量子状態を破壊する効果) の一番の要因が $1/f$ ノイズである。

⁵あらゆる振動数に同じ大きさのゆらぎが存在するので「ホワイト」と呼ぶ。逆に振動数 ω の大きさに依存してノイズの大きさが変化するときには、「色付きノイズ (colored noise)」とよぶ。

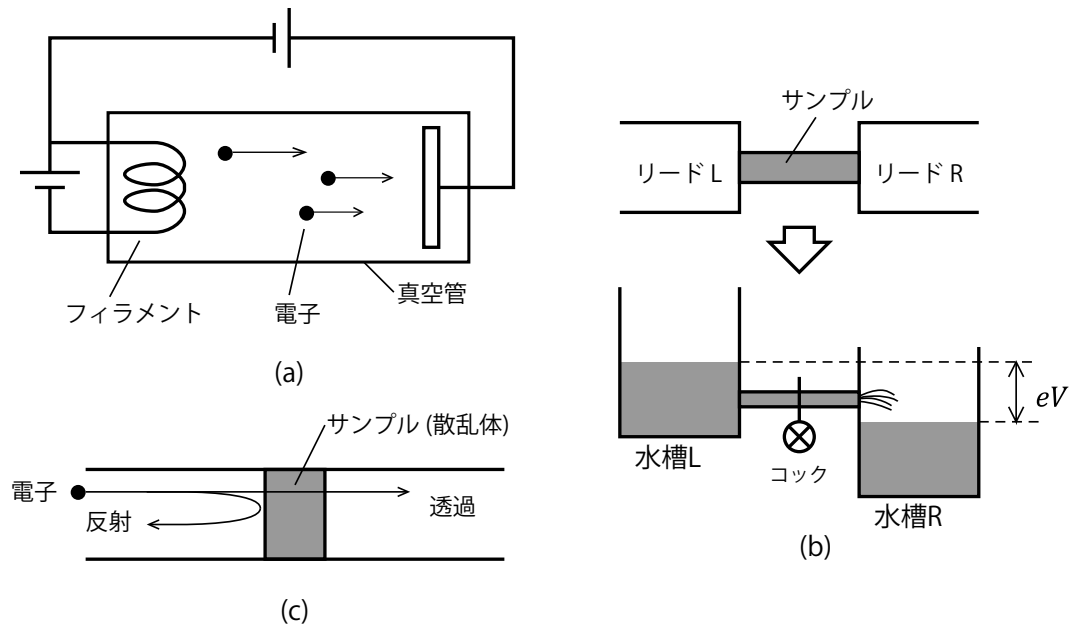


図 2: (a) 真空管, (b) 水流とのアナロジー, (c) 電子の散乱過程

流のパワースペクトルが振動数に依存するようになる⁶。

ホワイトノイズ領域の電流パワースペクトル (以下では簡単にノイズという) には、大きく分けて (i) 熱ノイズ⁷と (ii) ショットノイズの2種類のノイズが含まれる。熱ノイズは温度ゆらぎによって生じ、オンサーガーの関係式 [4] によって $S = 4k_B T G$ という関係式を満たす (あとで散乱理論によって証明する)。ここで G は伝導体のコンダクタンス、 T は温度である。熱ノイズは系の電子温度を測定するのに都合のよい量であるが、温度とコンダクタンス以上の情報を含まないという意味では新しい物理量というわけではない。多くの情報を含んでいるのは、ショットノイズのほうである。ショットノイズは温度よりも十分大きな電圧 ($|eV| \gg k_B T$) を加えた時に生じるノイズであり、系の伝導に関して有用な情報を与える⁸。具体的には、伝導キャリアの有効電荷や電子の統計性 (フェルミ統計) などの情報が含まれる。

ショットノイズについてももう少し詳しくみていくことにしよう。典型的な例は真空管 (図 2(a)) である⁹。真空管の陰極側のフィラメントに電流を流して十分に熱すると、フィラメント中の自由電子が真空中に放出される。図 2(a) のように、陰極と陽極の間に電圧をかけると、陰極から放出された電子が加速されて陽極に到着する。陽極に到着する単位時間あたりの電子数を N と書くことにしよう。 N の大きさは陰極の温度や印加電圧に依存することになるが、不思議なことにノイズの大きさは $S = 2e \langle I(t) \rangle$ と電流の期待値 $\langle I(t) \rangle$ のみによる。これは電子が陽極に到着するタイミングが確率的にゆらぐことによって生じるノイズである。言い方を変えると、ショットノイズと

⁶ ω_0 は回路の時定数などによって決まる。

⁷ 熱ノイズは、発見者にちなんで Johnson-Nyquist ノイズとも呼ばれる

⁸ 「ノイズ (雑音) に情報が含まれる」というのは一見すると矛盾した主張である。それを逆手に取って "The noise is the signal" という刺激的なタイトルの記事が Nature に掲載されたり [5]、面白い風刺絵が書かれたりしている [6]。

⁹ ほぼ同じ原理によって、半導体ダイオードでも同様のショットノイズが観測できる。

は「電子が粒子である」ことを反映したノイズである。

真空管のショットノイズの式 $S = 2e\langle I(t) \rangle$ を導いておこう。まず、ある時間間隔 $-T/2 < t < T/2$ の間に移動した電子の数を n とする。 n は確率的に揺らぐ量であるが、陰極からの電子の放出が確率的であり、電子の放出と次の放出の間に相関がなければ、確率論によって n は次のポアソン分布に従うことが知られている:

$$P(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (2)$$

この分布の平均値および分散はそれぞれ $\langle n \rangle = \lambda$, $\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \lambda$ と与えられる。電流の平均値は通過した電子の数から $\langle I(t) \rangle = e\langle n \rangle / T = e\lambda / T$ と計算される¹⁰。一方、電流の積算値が $\int_{-T/2}^{T/2} dt I(t) = en$ とかけることを利用し、 $1/f$ ゆらぎは無視できるとして $S(\omega = 0) = S(0)$ とすると、ホワイトノイズのノイズ強度は

$$S(0) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' \langle \Delta I(t) \Delta I(t') \rangle = \frac{2e^2}{T} \langle (\Delta n)^2 \rangle \quad (3)$$

と計算される。ここでポアソン分布の分散 $\langle (\Delta n)^2 \rangle = \lambda$ を代入し、電流の式 $\langle I(t) \rangle = e\lambda / T$ によって λ を消去すると、 $S = 2e\langle I(t) \rangle$ が得られる。この場合のショットノイズを、特にポアソンノイズと呼ぶ。ポアソンノイズは最もスタンダードで癖のないショットノイズであるので、ショットノイズに何らかの「癖」があるかどうかを見たい場合には、ポアソンノイズの理論値 $S_{\text{poisson}} = 2e\langle I(t) \rangle$ との比較を行うことが多い(あとで例を述べる)。

真空管のショットノイズはもっとも簡単な例であるが、一般のナノスケール素子(量子ドットや量子ポイントコンタクトなど)も状況はよく似ている。ナノスケール素子に電極をつないで伝導特性を測るときには、ナノスケール素子の抵抗が一番大きく、常にボトルネックとなっている。例えて言えば、大きな貯水槽の間を水道管でつなぎ、水を徐々に左の貯水槽から右の貯水槽へと移す現象と似ている(図2(b))。ここで水が電子に、水道管の途中に設けられたコックがナノスケール素子にあたる。もしナノスケール素子が十分小さければ、この「コック」にあたる部分が量子力学の法則に従うようになる。このとき伝導特性は量子力学の法則に支配される。さて、このような状況でショットノイズとは何かを考えてみよう。図2(c)に示すように、試料に電子が侵入したときに、ボトルネックとなっている部分(散乱体)を透過するか、もしくは反射するかのどちらかになる。透過した電子は電流に寄与するが、反射した電子は電流に寄与しない。それゆえ、入射する電子流がノイズを含まなくとも、伝導体を通る電流は確率的にゆらぐことになる¹¹。このとき「電子の散乱プロセス」がショットノイズに直接現れることになるので、伝導体のなかで電子にどんなことが起こっているかを、ショットノイズを通して探ることが可能である。

ここまでの議論では、電子を古典の物体として扱ってきた。しかし、電子はフェルミ統計に従う粒子であり、互いに区別することができない。当然ながら、電子の統計性はショットノイズに重大な影響を与える。またショットノイズは、素子の伝導を担っている素励起の有効電荷にも敏感である。これらのことを詳しく説明することが、本テキストの主目的である¹²。

¹⁰単位時間あたりの放出電子数 N は λ と $\lambda = NT$ の関係にある。

¹¹このようなノイズを partition noise と呼ぶ。これも電子が分割不可能な粒子であることを反映したノイズであることに注意。

¹²メゾスコピック系のショットノイズの総括的なレビューとして、文献 [7, 8] を薦める。さらに進んだ内容を知りたい

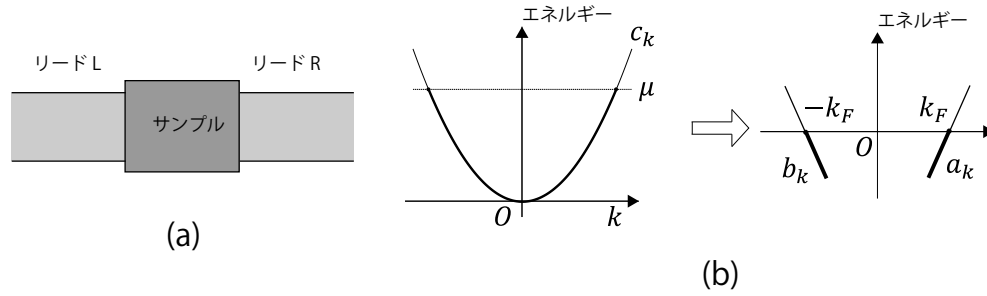


図 3: (a) セットアップ, (b) 電子の分散関係 (エネルギーと波数の関係) と線形近似

3 ノイズの基礎理論

3.1 散乱理論

メゾスコピック系の記述の基本は散乱理論 [9, 10] である。まず考える系を設定し、輸送特性を記述するための理論を説明する。このテキストでは、図 3 (a) のように一次元の金属細線 (リード線) につながれたナノスケール素子 (サンプル) を考える。ここでは簡単のため、リード線内の伝導チャンネルが 1 個しかない場合を考えることにする¹³。また、左右のリードをリード L, リード R と呼ぶことにする。まず、一つのリードに着目しよう。これは一次元電子系として記述でき、ハミルトニアンは電子の生成消滅演算子 c_k^\dagger, c_k を用いて、

$$H = \sum_k (\varepsilon_k - \mu) c_k^\dagger c_k \quad (4)$$

と記述される。ここで $\varepsilon_k = k^2/2m$ はエネルギー、 μ は化学ポテンシャルであり、 $\hbar = 1$ とした。このとき、電子のバンド分散は図 3 (b) の左側のようにになる。考えている系のエネルギースケール (リード間の電圧差など) は、化学ポテンシャル (絶対零度ではフェルミエネルギー) に比べて十分に小さいので、輸送特性はほぼフェルミ面 (正確にはフェルミ点) の近傍の電子状態のみでできる。フェルミ面の近傍では、電子のバンド分散は図 3 (b) の右側のように線形分散であるとしてもかなり良い近似になる。このとき、 $\varepsilon_k = \pm v_F(k - k_F)$ とかける ($v_F = k_F/m$ はフェルミ速度、 k_F はフェルミ波数)。また、電子は右に進むバンドと左に進むバンドに分かれるが、前者を a_k , 後者を b_k という消滅演算子で記述することにしよう。つまり、 $k \simeq k_F$ で $c_k = a_k$ とし、 $k \simeq -k_F$ で $c_k = b_k$ とする。このとき、ハミルトニアンは

$$H = \sum_k v_F(k - k_F) a_k^\dagger a_k + \sum_k (-v_F)(k - k_F) b_k^\dagger b_k \quad (5)$$

一方は、こちらを参照していただきたい。ただし、これらのレビューは豊富な内容を含むが、残念ながら最初の定式化の部分は初心者向けではない。このテキストでは、第二量子化の知識があればある程度理解できるように、式の導出を丁寧に記述した。

¹³リード線の伝導方向に対して垂直方向は、閉じ込めの効果により複数のエネルギー固有状態が存在し、複数のミニバンドを構成する。リード線を十分細くすると、垂直方向の固有状態としては最低のものだけで記述でき、単純に一次元電子系を 1 つ考えればよいことになる。実際の実験では、複数の伝導チャンネルが関与するが、その場合には一次元の伝導チャンネルを複数用意する必要がある。そのような場合を含む散乱理論を構築することは可能であり、あとで出てくる透過振幅 t や反射振幅 r などを行列に拡張すればよい。詳しくは教科書 [1] を参照のこと。

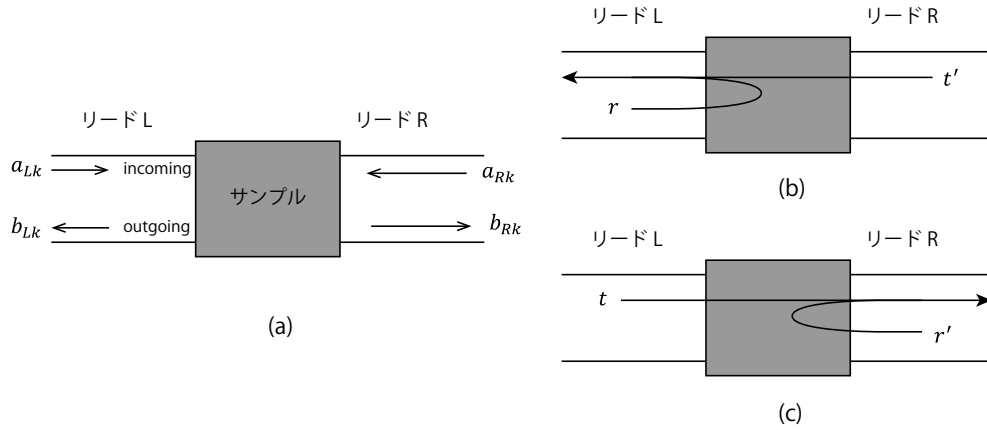


図 4: (a) 試料に入射する電子の伝導チャンネルと散乱後の伝導チャンネル, (b) 左のリードに散乱された電子の散乱要素, (c) 右のリードに散乱された電子の散乱要素

となる。次にリード L 上の位置 x での電流演算子を次のように定義する:¹⁴

$$\hat{I}(x) = \frac{e}{2im} \left(\hat{\psi}^\dagger(x) \frac{d\hat{\psi}(x)}{dx} - \frac{d\hat{\psi}^\dagger(x)}{dx} \hat{\psi}(x) \right) \quad (6)$$

ここで $\hat{\psi}(x) = \sum_k (1/\sqrt{L}) \exp(ikx) c_k$ は場の演算子であり、 L はリードの長さである¹⁵。 $\hat{I}(x)$ を $c_k^\dagger, c_{k'}$ を用いて書き直すと、

$$\hat{I}(x) = \frac{1}{L} \sum_{k,k'} \frac{(k+k')}{2m} c_k^\dagger c_{k'} e^{i(k'-k)x} \quad (7)$$

となる。ここで $k \simeq k_F$ および $k \simeq -k_F$ 近傍のみを考えることにし、さきほどの演算子 a_k, b_k で書き直すと、電流の表式は、

$$\hat{I}(x) \simeq \frac{ev_F}{L} \sum_{k,k'} (a_k^\dagger a_{k'} - b_k^\dagger b_{k'}) e^{i(k'-k)x} \quad (8)$$

となる。サンプルに接続する場所を $x=0$ とすると、リード L からサンプルに流れ込む電流は

$$\hat{I} = \hat{I}(x=0) = \frac{ev_F}{L} \sum_{k,k'} (a_k^\dagger a_{k'} - b_k^\dagger b_{k'}) \quad (9)$$

となる。これが電流の表式となる。

次に2つのリード (L,R) およびサンプルを考えよう。リードを表す変数を $\alpha (= L, R)$ とする。各リードでは電子は2つの方向に動ける (図 4 (a)) が、サンプルに向かう方向 (incoming) の電子を $a_{\alpha,k}$ 、サンプルから離れる方向 (outgoing) の電子を $b_{\alpha,k}$ とそれぞれ書くことにする¹⁶。メゾスコ

¹⁴これは運動量の場の演算子を e/m 倍しただけである。第二量子化のテキストを参照のこと。電子の電荷は $e < 0$ として定義する。

¹⁵例によって、リードは長さ L の周期境界条件で考えている。リードにはサンプルがついているので、周期境界条件はありえないのだが、最後に必ず $L \rightarrow \infty$ をとるので、境界条件の違いは最終結果に影響を与えない。はじめからリードの長さを無限大にするより、ずっと計算が楽である。

¹⁶言い換えると、各リードごとにサンプルに向かう向きに座標の正の向きを当てはめる。

ピック系ではサンプルのサイズが十分小さいので、サンプルにおける電子の反射・透過は量子力学で記述されることになる。ここでの電子の散乱は、量子力学の授業で必ず学ぶ一次元のポテンシャル散乱の問題と同じであるが、ショットノイズの計算では電子の非個別性が重要になるので、第二量子化で扱う必要がある。電子の散乱は、入射電子の消滅演算子 ($a_{L,k}, a_{R,k}$) がどのように散乱電子の消滅演算子 ($b_{L,k}, b_{R,k}$) に接続されるか、によって記述できる。これは 2×2 の行列 S を用いて、

$$\begin{pmatrix} b_{L,k} \\ b_{R,k} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_{L,k} \\ a_{R,k} \end{pmatrix} \quad (10)$$

と表される。 S の成分を具体的に

$$S = \begin{pmatrix} S^{LL}(k) & S^{LR}(k) \\ S^{RL}(k) & S^{RR}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (11)$$

と書くことにしよう。行列の成分にはそれぞれ意味がある。例えば S 行列による散乱の関係式の一行目は $b_{L,k} = r a_{L,k} + t' a_{R,k}$ となるが、これは「リード L に散乱されてでてきた電子は、リード L に入射して反射してきた電子 (反射振幅 r) とリード R に入射して透過してきた電子 (透過振幅 t') の重ねあわせである」ことを述べている (図 4 (b))。同様に散乱の関係式の二行目 $b_{R,k} = t a_{L,k} + r' a_{R,k}$ は、「リード R に散乱されてでてきた電子は、リード L に入射して透過してきた電子 (透過振幅 t) とリード R に入射して反射してきた電子 (反射振幅 r') の重ねあわせである」ことを意味する (図 4 (c))。交換関係 $[a_{\alpha,k}, a_{\alpha',k'}^\dagger] = [b_{\alpha,k}, b_{\alpha',k'}^\dagger] = \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{k,k'}$ と矛盾しないためには、行列 S はユニタリ行列 $SS^\dagger = S^\dagger S = E$ (E は単位行列) でないといけない。これを具体的に成分表示で書きだすことで、 $|t|^2 = |t'|^2 = 1 - |r|^2 = 1 - |r'|^2$ などの関係を導くことができる。このような散乱を表す行列を S 行列という¹⁷。

散乱行列によって、散乱チャンネル $b_{\alpha,k}$ を入射チャンネル $a_{\alpha,k}$ と結びつけることができた。電流の表式 (9) にらえば、リード L からサンプルに流れ込む電流演算子は、

$$\hat{I}_L = \hat{I}_L(x=0) = \frac{ev_F}{L} \sum_{k,k'} (a_{L,k}^\dagger a_{L,k'} - b_{L,k}^\dagger b_{L,k'}) \quad (12)$$

と書き表されるので、ここに散乱の関係式 (10) を代入すると、

$$\hat{I}_L = \frac{ev_F}{L} \sum_{\alpha=L,R} \sum_{\beta=L,R} \sum_{k,k'} a_{\alpha,k}^\dagger A_L^{\alpha\beta}(k,k') a_{\beta,k'} \quad (13)$$

$$A_L^{\alpha\beta}(k,k') = \delta_{L,\alpha} \delta_{L,\beta} - (S^{L\alpha}(k))^* S^{L\beta}(k') \quad (14)$$

とまとめることができる。これが散乱問題を考慮にいれたときの電流の表式であり、以下の議論の出発点となる式である。

¹⁷これは量子力学の散乱問題ででてくる S 行列と全く同じである。確認するには、いったんユニタリ性 $S^{-1} = S^\dagger$ をつかって、 $(a_{L,k}, a_{R,k})^\dagger = S^\dagger (b_{L,k}, b_{R,k})^\dagger$ と書きなおした上で、ここから出てくる関係式の両辺のエルミート共役をとる。例えば第一式は、 $a_{L,k}^\dagger = r b_{L,k}^\dagger + t b_{R,k}^\dagger$ となるが、これを真空状態に作用すれば、 $|L, k\rangle \rightarrow r|L, k\rangle + t|R, k\rangle$ となり、おなじみの式がでてくる。

3.2 ランダウアー公式

まず手始めに、サンプルのコンダクタンスを計算してみよう。入射電子に関しては熱平衡条件が成り立っているものと仮定し¹⁸、入射電子に関する統計平均 $\langle \dots \rangle$ を導入しておく。今はこの統計平均の具体的な定義を知る必要はなく、単に以下の関係式だけわかればよい。

$$\langle a_{\alpha,k}^\dagger a_{\beta,k'} \rangle = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{k,k'} f_\alpha(k) \quad (15)$$

これは各リード内で入射電子がフェルミ分布に従っていることを示したものである ($f_\alpha(k)$ はリード $\alpha(=L,R)$ におけるフェルミ分布関数)。これを使って、電流の表式 (14) の統計平均を計算すると、

$$\langle \hat{I}_L \rangle = \frac{ev_F}{L} \sum_k \sum_\alpha A_L^{\alpha\alpha}(k,k) f_\alpha(k) = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \sum_\alpha A_L^{\alpha\alpha}(\varepsilon,\varepsilon) f_\alpha(\varepsilon) \quad (16)$$

となる。最後の式では、 L が十分大きいとして、波数の和を $(1/L) \sum_k \dots \rightarrow \int dk / (2\pi) \dots$ によって積分に変え、さらに入射電子のエネルギーが $\varepsilon = v_F(k - k_F)$ とかけることを利用して、積分変数を k から ε に変えている。ここで、 $A_L^{LL}(k) = 1 - (S^{LL})^* S^{LL} = 1 - |r|^2 = |t|^2 = T$ (T は透過確率) および $A_L^{RR} = (S^{LR})^* S^{LR} = -|t'|^2 = -|t|^2 = -T$ を使うと、

$$\langle \hat{I}_L \rangle = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon T (f_L(\varepsilon) - f_R(\varepsilon)) \quad (17)$$

となる。まず簡単のため、透過確率 T が電子のエネルギーに依存しないとし、絶対零度を考えよう。リード R のフェルミエネルギーを基準とすると、リード L のフェルミエネルギーは eV とかける¹⁹。このとき、それぞれのリードのフェルミ分布関数は $f_R(\varepsilon) = \Theta(-\varepsilon)$, $f_L(\varepsilon) = \Theta(-\varepsilon + eV)$ とかける ($\Theta(x)$ はヘヴィサイドの階段関数)。よって、分布関数の差 $f_L(\varepsilon) - f_R(\varepsilon)$ は、 $0 < \varepsilon < eV$ の間でのみ 1 となり、その他の場所では 0 となる。これを使うと、式 (17) の積分が実行できて、

$$\langle \hat{I}_L \rangle = \frac{e^2}{2\pi} TV \quad (18)$$

となり、コンダクタンス $G = \langle \hat{I}_L \rangle / V = e^2 T / 2\pi$ が得られる。この結果は「系の輸送特性が電子の散乱確率 T によって決まる」ということを端的に表している。さらにこれまで省略していた \hbar を、次元が合うように復元すれば、

$$G = \frac{e^2}{2\pi\hbar} T = \frac{e^2}{h} T \quad (19)$$

となる。これがランダウアー公式である²⁰。一般の場合のコンダクタンスは、電流の表式で $f_L(\varepsilon) - f_R(\varepsilon) = f(\varepsilon - eV) - f(\varepsilon) \simeq (-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon})eV$ と eV について一次まで展開することで、

$$G = \frac{e^2}{2\pi} \int d\varepsilon T(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \quad (20)$$

となる。ここで $f(\varepsilon) = 1 / (\exp(\beta\varepsilon) + 1)$ はフェルミ分布関数である。

¹⁸当然ながら散乱後の電子は非平衡状態にあるので、この電子に対して簡単な統計平均を定義することは不可能。

¹⁹ここで $e < 0$ であることに注意しよう。リード L からサンプルに電子を流す (つまり $\langle \hat{I}_L \rangle < 0$ とする) には $V < 0$ とする必要がある。このテキストでは、図などはすべて $V < 0$ つまり $eV > 0$ を想定して書くことにする。

²⁰スピンの自由度を考慮にいれると、コンダクタンスは 2 倍になり $G = (2e^2/h)T$ となる。

3.3 ノイズの理論

次に電流ノイズを定式化しよう。まず、電流演算子の時間発展を $\hat{I}(t) = \exp(iHt)\hat{I}\exp(-iHt)$ で定義する (ハイゼンベルク表示)。電流の平均値まわりのゆらぎを表す演算子 $\Delta\hat{I}_L(t) = \hat{I}_L(t) - \langle\hat{I}_L(t)\rangle$ を考えて、その2時刻の電流相関関数

$$C(t, t') = \langle\Delta\hat{I}_L(t)\Delta\hat{I}_L(t')\rangle = \langle\hat{I}_L(t)\hat{I}_L(t')\rangle - \langle\hat{I}_L(t)\rangle\langle\hat{I}_L(t')\rangle \quad (21)$$

を定義する。ここで異なる時刻の電流演算子 $\hat{I}_L(t)$, $\hat{I}_L(t')$ が交換しないこと以外は、古典論と同様に考えることができる。前の章の電流ノイズのパワースペクトルの定義 (1) にならぬ、ノイズパワー $S(\omega)$ を、

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' C(t, t') e^{i\omega(t-t')} \quad (22)$$

によって定義する。ハミルトニアンが時間に依存していない場合には、相関関数は時間差だけに依存し、 $C(t, t') = C(t-t')$ とかける。さらに、時間差 $|t-t'|$ が十分大きくなると、相関関数 $C(t-t')$ はほぼゼロとなる (電流の間に相関がなくなる)。よって、積分変数を t から $\Delta t = t-t'$ へ変更したうえで、その積分の上限と下限を無限大にとぼすことができ、

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta t) C(\Delta t) e^{i\omega\Delta t} \quad (23)$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta t) C(\Delta t) e^{i\omega\Delta t} \quad (24)$$

と計算をすすめることができる²¹。つまり、ノイズパワーは電流の相関関数 $C(\Delta t)$ のフーリエ変換にほかならない²²。この解説では、ホワイトノイズ成分 $S(0)$ のみに注目しよう。これを電流演算子で書き直すと、

$$S(0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\langle\hat{I}_L(t)\hat{I}_L(0)\rangle - \langle\hat{I}_L(t)\rangle\langle\hat{I}_L(0)\rangle \right) \quad (25)$$

となる。電流の表式 (14) およびそれを時間発展させた式²³

$$\hat{I}_L(t) = \frac{ev_F}{L} \sum_{\alpha=L,R} \sum_{\beta=L,R} \sum_{k,k'} a_{\alpha,k}^\dagger A_L^{\alpha\beta}(k, k') a_{\beta,k'} \exp(i(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})t) \quad (26)$$

を代入すると、

$$S(0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{ev_F}{L} \right)^2 \sum_{k,k',k'',k'''} \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} A_L^{\alpha\beta}(k, k') A_L^{\alpha'\beta'}(k'', k''') \times \left[\langle a_{\alpha,k}^\dagger a_{\beta,k'} a_{\alpha',k''}^\dagger a_{\beta',k'''} \rangle - \langle a_{\alpha,k}^\dagger a_{\beta,k'} \rangle \langle a_{\alpha',k''}^\dagger a_{\beta',k'''} \rangle \right] e^{i(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})t} \quad (27)$$

²¹積分の上限・下限付近からくる境界の効果は、 T が十分大きければ無視出来る。

²²ここでの電流の相関関数の定義では、パワースペクトルは ω に対して対称にならない ($S(-\omega) \neq S(\omega)$) ばかりか、その値が $\omega \neq 0$ では複素数になる (ただし $S(\omega)^* = S(-\omega)$ が成り立つ)。これは $\omega > 0$ としたとき、 $S(\omega)$ が電子系が ω のエネルギーを吸収する過程に、 $S(-\omega)$ がエネルギーを放出する過程にそれぞれ対応するからであり、その虚数成分が散逸過程を記述するからである。どちらを観測するかは、電子系にエネルギーを与える熱浴の性質による。通常は、系は古典的な外場とエネルギーのやりとりをするので、2つの過程が平等におき、実際に観測するノイズパワーは $\tilde{S}(\omega) = (S(\omega) + S(-\omega))/2 = \text{Re}(S(\omega))$ である。これを対称化したノイズパワーという。文献 [7] ははじめからこれをノイズパワーと定義している。ただし、 $\omega = 0$ のノイズパワーは、 $S(\omega = 0) = \tilde{S}(\omega = 0)$ が成り立つので、違いを気にする必要はない。一方、回路を工夫すると、真空場とエネルギーをやりとりするような状況をつくることができ、そのような場合には放出プロセス $S(-\omega)$ のみが観測される [8]。

²³入射電子の生成消滅演算子の時間発展は $a_{\alpha,k}(t) = e^{-i\varepsilon_k t} c_{\alpha,k}$, $a_{\alpha,k}^\dagger(t) = e^{i\varepsilon_k t} c_{\alpha,k}^\dagger$ と簡単にかけることを用いる。

となる。ここで統計平均について Wick の定理を使い、統計平均に関する関係式 (15) を使うと、

$$\begin{aligned} & \langle a_{\alpha,k}^\dagger a_{\beta,k'} a_{\alpha',k''}^\dagger a_{\beta',k'''} \rangle - \langle a_{\alpha,k}^\dagger a_{\beta,k'} \rangle \langle a_{\alpha',k''}^\dagger a_{\beta',k'''} \rangle \\ &= \langle a_{\alpha,k}^\dagger a_{\beta',k'''} \rangle \langle a_{\beta,k'} a_{\alpha',k''}^\dagger \rangle = \delta_{\alpha,\beta'} \delta_{k,k'''} \delta_{\beta,\alpha'} \delta_{k',k''} f_\alpha(k) (1 - f_\beta(k)) \end{aligned} \quad (28)$$

となる²⁴。場の理論を学んだ読者なら、上の式に現れる 2 つの平均値の積が、ハートリーフック近似における交換項 (フック項) であることにすぐに気がつくであろう。さらに勘のいい読者は、交換項が粒子の統計性にまつわる重要な性質を含むことも、容易に想像できるであろう²⁵。実際に今から計算するノイズ $S(0)$ には、電子の統計性が深く関与することになる。

計算を続けよう。Wick の定理を使った後、まず波数についての和を $(1/L) \sum_k \cdots \rightarrow \int (dk/2\pi) \cdots$ によって積分に置き換え、さらに積分変数を $\varepsilon = v_F(k - k_F)$ によってエネルギーに変更すると、

$$S(0) = \frac{2e^2}{(2\pi)^2} \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{\alpha,\beta} A_L^{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon') A_L^{\beta\alpha}(\varepsilon', \varepsilon) f_\alpha(\varepsilon) (1 - f_\beta(\varepsilon)) e^{i(\varepsilon - \varepsilon')t} \quad (29)$$

となる。さらに時間に関する積分を実行すると、 $\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\varepsilon - \varepsilon')t} = 2\pi \delta(\varepsilon - \varepsilon')$ となり、最終的に

$$S_{LL}(0) = \frac{e^2}{\pi} \int d\varepsilon \sum_{\alpha,\beta} A_L^{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon) A_L^{\beta\alpha}(\varepsilon, \varepsilon) f_\alpha(\varepsilon) (1 - f_\beta(\varepsilon)) \quad (30)$$

が得られる。以下ではリード L の電位を V 、リード R の電位を 0 とし、 $V < 0 (eV > 0)$ となっている状態に話を限る。

まずはじめに、熱ノイズを取り扱おう。これは温度に比べて電圧が十分小さい時 ($eV \ll k_B T$) に電流ノイズの主要な成分となるノイズである。このとき、ノイズの大きさは電圧 V に依存しなくなるので、ノイズの式 (30) に現れるフェルミ分布関数をすべて熱平衡状態 ($eV = 0$) のものに置き換えてもよい。さらに $f(\varepsilon)(1 - f(\varepsilon)) = k_B T (-\partial f / \partial \varepsilon)$ という恒等式を利用し、S 行列の成分を代入して $\sum_{\alpha,\beta} A_L^{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon) A_L^{\beta\alpha}(\varepsilon, \varepsilon) = 2T(\varepsilon)$ が得られることを用いて、

$$S(0) = \frac{2e^2 k_B T}{\pi} \int d\varepsilon T(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \quad (31)$$

が得られる。ここで、コンダクタンスに関するランダウアー公式 (20) と見比べると、

$$S(0) = 4k_B T G \quad (32)$$

という関係式が成り立つことがわかる。この関係式はオンサーガーの関係式 [4] と呼ばれ²⁶、「熱ノイズはコンダクタンスと温度だけで決まる」という明確なメッセージが含まれている。興味深

²⁴Wick の定理は A, B, C, D をフェルミオンの演算子として、 $\langle ABCD \rangle = \langle AB \rangle \langle CD \rangle - \langle AC \rangle \langle BD \rangle + \langle AD \rangle \langle BC \rangle$ と表現される。式 (28) の導出にあたっては、 $\langle AC \rangle \langle BD \rangle = 0$ を使う (粒子数を保存しない演算子の期待値は 0 になるため)。Wick の定理は、統計平均に含まれるハミルトニアンが場の演算子の二次形式でかけるときに成り立つ定理であり、場の理論の教科書には必ず解説がある。詳細は教科書 (例えば文献 [11]) を参照のこと。また $\langle a_{\alpha,k} a_{\beta,k'}^\dagger \rangle = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{k,k'} (1 - f_\beta(k))$ は、フェルミオンの反交換関係からすぐに示せる。

²⁵例えば、電子ガス模型の高密度からの展開をすると、はじめの補正はハートリーフック近似による交換エネルギー (交換項) である。交換エネルギーは、着目した電子がある点にあるときに、パウリの排他律によって、その点付近にはかの電子が近寄りにくくなって「交換ホール」という電子の「穴」ができることが本質である。

²⁶散逸揺動定理の一例ともなっている。

い関係式ではあるが、「ノイズから新しい情報をさぐろう」という今の目的からいえば、新しい情報を含んでいないので少々つまらない量である。

新しい情報を含んでいるのは、電圧を温度に比べて十分に加えた時 ($eV \gg k_B T$) のノイズ (ショットノイズ) である。このとき電流ノイズは温度に依存しなくなるので、絶対零度でノイズを計算すれば十分である。絶対零度では、分布関数は $f_L(\varepsilon) = \Theta(-\varepsilon + eV)$, $f_R(\varepsilon) = \Theta(-\varepsilon)$ と階段関数で書き表されるが、 $eV > 0$ のときには因子 $f_\alpha(\varepsilon)(1 - f_\beta(\varepsilon))$ が 0 でない値をもつのは $(\alpha, \beta) = (L, R)$ のときだけである。さらにこのとき、 $f_L(\varepsilon)(1 - f_R(\varepsilon))$ は $0 < \varepsilon < eV$ の範囲でのみ 1 をとり、そのほかでは 0 である。よって電流ノイズは、式 (30) から、

$$S(0) = \frac{e^2}{\pi} A_L^{LR}(\varepsilon, \varepsilon) A_L^{RL}(\varepsilon, \varepsilon) \times eV \quad (33)$$

である。最後に $A_L^{LR}(\varepsilon, \varepsilon) A_L^{RL}(\varepsilon, \varepsilon)$ を S 行列の成分で書き表して整理していくと $|t|^2(1 - |t|^2) = T(1 - T)$ となるので、

$$S(0) = \frac{e^2}{\pi} T(1 - T)eV \quad (34)$$

が得られる。これがショットノイズの表式である。

ショットノイズの性質をみていくことにしよう。まず、電子の透過確率が低い極限 ($T \ll 1$) では、 $1 - T \simeq 1$ とできる。このとき、ランダウアー公式 $G = \langle I \rangle / V = (e^2 T / 2\pi)$ も合わせると、ショットノイズは

$$S(0) = \frac{e^2}{\pi} T eV = 2e \langle I \rangle \quad (35)$$

となり、古典的なショットノイズ (ポアソンノイズ) と同じになる。一方、式 (34) をみるとすぐにわかるように、透過係数が $T = 1$ のときにはショットノイズはなくなってしまふ ($S(0) = 0$)。このときは、電子はサンプルを全く散乱されずに完全透過するので、電流ノイズが発生するとすれば入射電子のもつゆらぎによるはずである。しかしフェルミ分布関数の性質から、伝導に寄与する入射電子はあるエネルギー状態に常に完全に占有されていて ($f_L(\varepsilon) = 1$)、入射電流にゆらぎが生じようがなく、ショットノイズが 0 になるのである。この意味で、透過確率が 1 に近い時のショットノイズの抑制は「電子のフェルミ統計性」によるものである。ノイズの抑制を議論する際には、ポアソンノイズ $S_{\text{poisson}} = 2e \langle I \rangle$ との比

$$F = \frac{S(0)}{S_{\text{poisson}}} = 1 - T \quad (36)$$

を考えることが多い。この比のことをファノ因子という。

以上の結果は、量子ポイントコンタクト (図 5 (a)) の実験によって確認することができる [13]。実際の量子ポイントコンタクトでは、複数の次元伝導チャンネルを考える必要があり、その場合には各チャンネルの透過確率を $T_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ として、コンダクタンスとノイズパワーは、

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_n T_n, \quad S(0) = \frac{4e^3}{h} \sum_n T_n (1 - T_n) \quad (37)$$

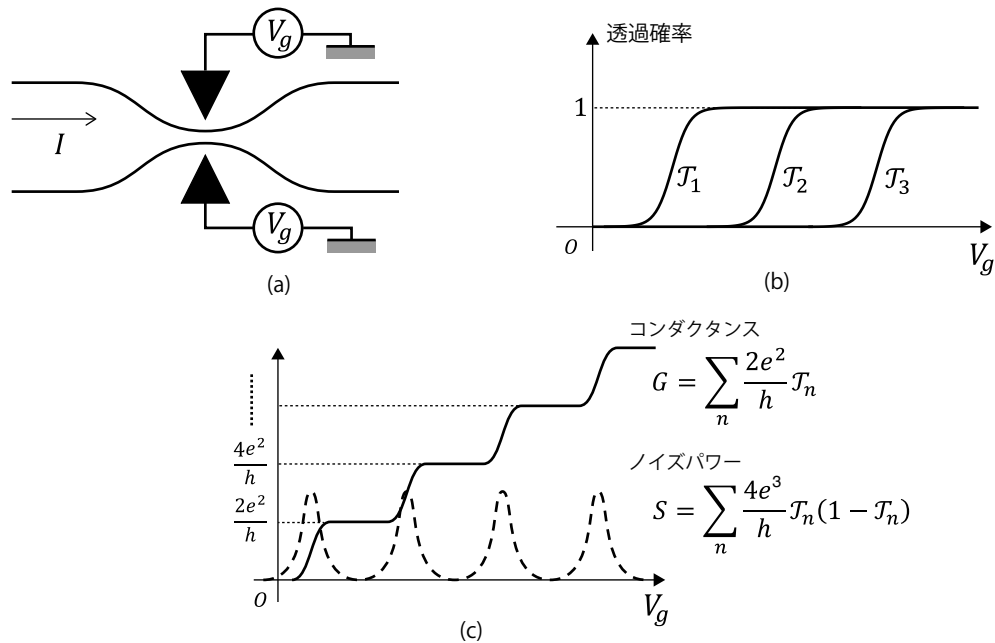


図 5: (a) 量子ポイントコンタクトのセットアップ, (b) 透過確率 T_n , (c) コンダクタンスとノイズパワー

となる²⁷(ここでプランク定数を復活させ、スピンの自由度も考慮にいった)。またファノ因子は $F = \sum_n T_n(1 - T_n) / \sum_n T_n$ となる。図 5 (a) のゲート電圧 V_g を制御すると、量子ポイントコンタクトを透過する伝導チャンネルの透過確率を制御することができる。簡単なモデル計算をすると、透過確率 T_n は図 5 (b) のような振る舞いをする。これより、コンダクタンスおよびノイズパワーは図 5 (c) のように計算される。まず、コンダクタンスは階段状となるが、これは「コンダクタンスの量子化」として知られる現象 [12] である。一方、ノイズはコンダクタンスがほぼ $2e^2/h$ の整数値になっている場所(量子化プラトーという)で 0 に抑制される。コンダクタンスが $G = (2e^2/h) \times N$ になっているところでは、 $1 \leq n \leq N$ のチャンネルは完全透過、それ以外のチャンネルは完全反射になっていて、完全透過するチャンネルだけで伝導がきまっており、入射する電子による電流ゆらぎがないためにショットノイズがゼロになる。図 5 (c) のような振る舞いは実際に実験で観測されている [13]。

3.4 分数量子ホール状態での分数電荷励起

ショットノイズのもう一つの重要な特徴は、伝導を担っているキャリアの有効電荷が測定できることである。一番有名で面白い例は、分数量子ホール状態にある系での分数電荷の観測である。この系では、輸送を担うキャリアの有効電荷が e の有理数倍になっており、それをショットノイズの測定によって確かめることができる。なぜ分数電荷のキャリアが生じるのかを、できるだけ初等的な計算の範囲で説明してみよう。

²⁷透過振幅と反射振幅を行列に拡張し、それらの固有値を考察することで導出できる。詳細は文献 [7] を参照のこと。

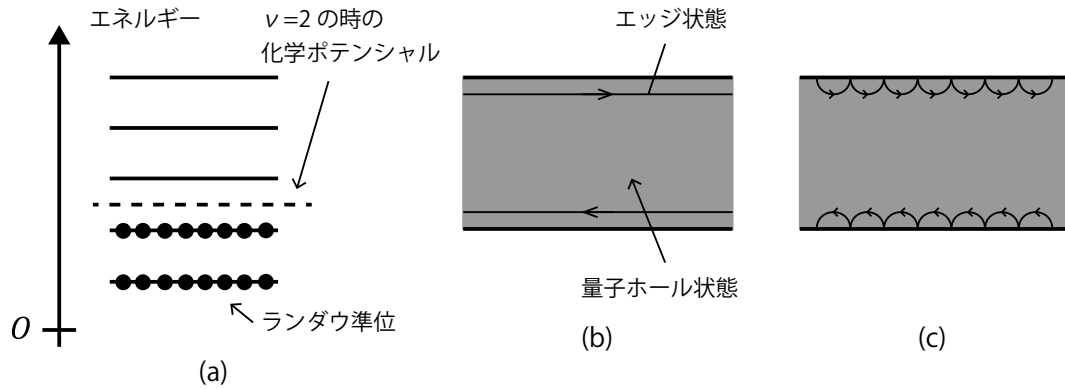


図 6: (a) ランダウ準位, (b) エッジ状態, (c) エッジ状態の古典力学による解釈

まず理想的な2次元電子系を考える²⁸。2次元面に垂直な磁場を加えたとき、シュレディンガー方程式を解くと、ランダウ準位と呼ばれる離散的なエネルギー準位が生じる(図6(a))。ここで重要なことは、莫大な数の縮退したエネルギー準位があることである。電子の密度を0から徐々に増やしていくと、ランダウ準位に電子がつまり始める。一つの準位をちょうど埋めるような電子数密度は、量子力学の計算から eB/h である²⁹。電子数密度を $\bar{n} = \nu eB/h$ とかくことにしよう(ν を充填率と呼ぶ)。 ν が整数の値をとるときには、化学ポテンシャルがちょうどランダウ準位の間にくる($\nu=2$ のときの様子を図6(a)に示す)。このとき、二次元電子系はエネルギーギャップをもつ非圧縮性液体(外からの摂動に対して電子密度が変化しないような液体状態)となる。この状態を整数量子ホール状態とよぶ。量子ホール状態では、電子の輸送に関して面白い現象が生じる³⁰。例えば、図6(b)のように、 y 方向に有限の長さをもつ2次元電子系で整数量子ホール状態を実現したとしよう。このとき、上下の境界にそって、一方向にのみ伝導する一次元電子系が実現される。これをエッジ状態とよぶ。エッジ状態ができる理由は、いろいろな言い方があるが、古典的にいってしまえば図6(c)のように、磁場のもとで電子が回転しながら壁にぶつかって運動しているのだと思えばいい。もう少しちゃんといえば、境界付近では必ず境界線に垂直方向にポテンシャルの勾配があつて一定の電場 E が生じており、電場から受ける力 eE と磁場によるローレンツ力 $e\mathbf{v}B$ が釣りあうように、境界にそって電子が速度 $v = E/B$ で動くのである³¹。

整数量子ホール効果は十分に魅力的な現象であるが、もっと劇的な現象が ν が分数のときにおこる。これが分数量子ホール状態である。 ν が分数のときには、簡単なエネルギー準位の議論ではエネルギーギャップは生じようがない(図6(a)参照)のであるが、このときには電子間の相互作用が重要な役割を果たしてエネルギーギャップが生じ、非圧縮性液体状態がはやり実現される。このときのエッジ状態はかなり特異的なものになる。その性質を記述するために、図7のような設定を考えよう。下方に閉じ込められた二次元電子系は分数量子ホール状態にあり、境界に垂直な方

²⁸理想的な二次元電子系は、GaAsなどの半導体のヘテロ構造を利用して作成できる。

²⁹ランダウ準位の計算は量子力学の教科書を参照のこと。しばらくの間プランク定数を復活させておく。

³⁰整数量子ホール効果の伝導特性も、メゾスコピック系の研究で欠かせない話題であるが、ここでは詳しく述べない。散乱理論による解析は文献[1]にあるので、興味があればぜひ一度紐解いてほしい。

³¹ほかにもトポロジカルな視点からの説明などがある。ちゃんと理解するには、電子の局在の効果なども理解する必要があるので、気になる人は量子ホール効果の教科書[14]を参照のこと。

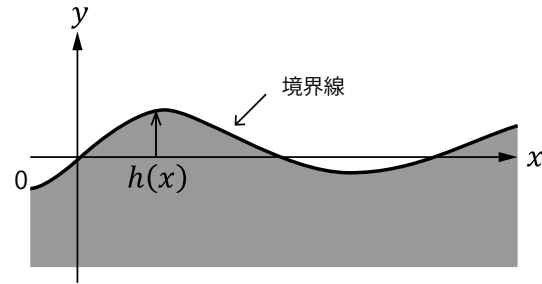


図 7: 分数量子ホール効果のエッジ状態における励起

向 (y 方向) には閉じ込めポテンシャルによる電場 E が生じているとする (例によって $e < 0$ とする)。分数量子ホール状態は非圧縮性であるので、外からの摂動にたいして密度をかえることができない。よってエッジ状態の励起は、境界の変形によって生じる。図 7 に示すように、位置 x における境界の変位を $h(x)$ としよう。位置 x での単位長さあたりの電子数密度を $\rho(x)$ とすると、この励起によって生じる静電エネルギーは

$$H = \frac{e}{2} \int_0^L dx \rho(x) v(x) = \frac{e}{2} \int_0^L dx \rho(x) h(x) E \quad (38)$$

とかける³²($v(x) = h(x)E$ は電子の感じるポテンシャル)。さらに二次元電子系の電子数密度 $\bar{n} = \nu eB/h$ を使うと、変位と電子数密度の間に $h(x)\bar{n} = \rho(x)$ という関係が成り立つので、ハミルトニアンは、

$$H = \frac{eE}{2\bar{n}} \int_0^L dx \rho(x)^2 = \frac{\pi\hbar v}{\nu} \int_0^L dx \rho(x)^2 \quad (39)$$

とかける。ここで電子のドリフト速度 $v = E/B$ を用いた。以後の計算では再び $\hbar = 1$ とすることにしよう。

ここから量子力学に移行しよう。ハミルトニアンに現れる密度場 $\rho(x)$ を場の演算子と考え、さらにそのフーリエ成分 ρ_q を定義する:

$$\rho(x) = \frac{1}{L} \sum_q \rho_q e^{iqx}, \quad \rho_q = \int_0^L dx e^{-iqx} \rho(x) \quad (40)$$

ハミルトニアンを ρ_q で書き直すと、

$$H = \frac{\pi v}{\nu L} \sum_q \rho_q \rho_{-q} = \frac{2\pi v}{\nu L} \sum_{q>0} \rho_q \rho_{-q} \quad (41)$$

となる。最後の式では、波数を $q > 0$ に限定した³³。今、古典場のハミルトニアンから出発してそれを量子化しているのだが、その際に演算子の交換関係を定義しておかないと、場の時間発展が記述できない。今の場合、境界面での変形は一定の向き (ここでは x 軸正の向きとする) に速度 v で伝搬するはずである。このとき密度場の演算子は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (42)$$

³²密度 $\rho(x)$ およびエネルギー H は平衡状態を基準にして定義しておく。また周期境界条件 $\rho(x+L) = \rho(x)$ を課しておく。

³³本当はあとでみるように ρ_q と ρ_{-q} は交換しないので、順番を入れ替えた時に定数がでてくるはずだが、エネルギーの原点をずらして定数を消去したものとする。

という時間発展方程式を満たすと期待される³⁴。この時間発展方程式が成り立つように、密度場に交換関係を導入する必要がある。交換関係の導入のポイントは、式(40)から密度場のフーリエ成分に対して関係式 $\rho_{-q} = \rho_q^\dagger$ が示せることである。これは、 ρ_q と ρ_{-q} に生成消滅演算子としての役割をもたせられそうな予感を抱かせる。実際に次のような交換関係を要請してみよう。

$$[\rho_q, \rho_{-q'}] = \frac{\nu q L}{2\pi} \delta_{q, q'} \quad (43)$$

この交換関係から、ハイゼンベルクの運動方程式を書き出していくと、

$$i\dot{\rho}_q = [\rho_q, H] = \sum_{q' > 0} \frac{2\pi v}{\nu L} [\rho_q, \rho_{q'} \rho_{-q'}] = \nu q \rho_q \quad \leftrightarrow \quad \dot{\rho}_q + i\nu q \rho_q = 0 \quad (44)$$

と計算され³⁵、さきほどの発展方程式(42)のフーリエ変換と一致する。こうして交換関係がうまく定義されたが、交換関係の式(43)から新しいボゾン場の生成消滅演算子を定義しておくことができる:

$$\rho_q = -i\sqrt{\frac{\nu q L}{2\pi}} b_q, \quad \rho_{-q} = \rho_q^\dagger = i\sqrt{\frac{\nu q L}{2\pi}} b_q^\dagger, \quad (q > 0) \quad (45)$$

このとき、式(43)より交換関係 $[b_q, b_{q'}^\dagger] = \delta_{q, q'}$ が成り立つ。またこの生成消滅演算子を使えば、ハミルトニアンは、

$$H = \sum_{q > 0} \nu q b_q^\dagger b_q \quad (46)$$

と書き直せる。このように定義されたボゾン場は、一次元電子系の密度波(=疎密波)を記述していて、一次元を伝搬するある種の「音波(フォノン)」を表現している。この新しいボゾンの演算子を用いると、密度場 $\rho(x)$ は

$$\rho(x) = \frac{1}{L} \sum_q \rho_q e^{iqx} = \frac{1}{L} \sum_{q > 0} (\rho_q e^{iqx} + \rho_{-q} e^{-iqx}) \quad (47)$$

$$= \sum_{q > 0} \sqrt{\frac{\nu q}{2\pi L}} (-ie^{iqx} b_q + ie^{-iqx} b_q^\dagger) \quad (48)$$

と表現される。これはまさしく一次元のフォノン場にほかならない。

単に密度場の時間発展を追うだけであれば、これで終わりであるが、電子の伝導を追いかけるためには、フォノン場 b_q, b_q^\dagger から、もともとの電子の生成消滅演算子を構成しなおさないといけない。そのためには、もう一つの間(位相場)を定義しておくとう便利である:

$$\phi(x) = - \sum_{q > 0} \sqrt{\frac{2\pi\nu}{qL}} (e^{iqx} b_q + e^{-iqx} b_q^\dagger) \quad (49)$$

この新しい間は $\rho(x) = \partial_x \phi(x) / 2\pi$ という関係式を満たす ($\partial_x \phi(x)$ を計算していけば確認できる)。

³⁴ $\rho = \exp(ik(x - vt))$ が解になっていることが確認できるので、 x 軸正の向きに密度場が時間発展することがわかる。

³⁵ $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ を用いた。

なぜこのような場を定義するかというと、次の交換関係が成り立つからである³⁶。

$$[\rho(x), \phi(x')/\nu] = -i\delta(x - x') \quad (50)$$

つまり、密度場 $\rho(x)$ と位相場 $\phi(x)/\nu$ は共役の関係にある。この結果から、 $\phi(x)/\nu$ はまさに「位相」の役割を果たしていることがわかるだろう。交換関係 (50) は密度場と位相場が共役関係にあることを意味しているのである。さらにこの交換関係より、

$$[\rho(x), e^{i\phi(x')/\nu}] = -\delta(x - x')e^{i\phi(x')/\nu} \quad (51)$$

を示すことができる³⁷。

ここまでくれば、後一步である。今、境界のところに存在するエッジの一次元電子場 $\psi(x)$, $\psi^\dagger(x)$ を構成したいのであるが、これはもともと密度場 $\rho(x)$ と

$$[\rho(x), \psi(x')] = -\delta(x - x')\psi(x') \quad (52)$$

なる交換関係を持つことがすぐにわかる³⁸。この式には明快な意味がある。 $[\rho(x), \psi(x')] = \rho(x)\psi(x') - \psi(x')\rho(x)$ は「先に x' にある電子を消したあとに電子密度を観測した結果と、先に電子密度を観測したあとに x' にある電子を消した結果の差」を表しており、式 (52) は「先に電子を消した場合には $x = x'$ の位置に電子の穴ができるので、 $-\delta(x - x')$ だけ密度が減る」ことを意味する。この式と、さきほどの式 (51) を見比べれば、

$$\psi(x) = e^{i\phi(x)/\nu}, \quad (53)$$

と電子の消滅演算子を定義すればよさそうであることがわかる³⁹。同様にして、電子の生成演算子を $\psi^\dagger(x) = e^{-i\phi(x)/\nu}$ とすればいいことが、交換関係 $[\rho(x), \psi^\dagger(x')] = +\delta(x - x')\psi^\dagger(x')$ からわかる⁴⁰。

さて、このようにして電子の生成消滅演算子を定義したわけだが、密度場との交換関係をうまく満たすだけでは不十分である。異なる場所 $x \neq x'$ でも反交換関係 $\{\psi(x), \psi^\dagger(x')\} = 0$ が成り立つことを確かめておかないといけない。まず、 $[A, B]$ が実数のときに成り立つ定理 $e^A e^B = e^{[A, B]} e^B e^A$ を利用すると、

$$e^{i\phi(x)/\nu} e^{-i\phi(x')/\nu} = e^{[\phi(x), \phi(x')]/\nu^2} e^{-i\phi(x')/\nu} e^{i\phi(x)/\nu} \quad (54)$$

³⁶ $[A + B, C + D] = [A, C] + [B, C] + [A, D] + [B, D]$ を使い、交換関係 $[b_q, b_{q'}^\dagger] = \delta_{q, q'}$, $[b_q, b_{q'}] = [b_q^\dagger, b_{q'}^\dagger] = 0$ を使う。最後に $\sum_{q>0} (e^{iq(x-x')} + e^{-iq(x-x')})$ という式がでてくるが、これは非常に小さい収束因子 $a(>0)$ を導入して、 $\sum_{q>0} (e^{iq(x-x')-aq} + e^{-iq(x-x')-aq}) = \frac{L}{2\pi} \int_0^\infty dq (e^{iq(x-x')-aq} + e^{-iq(x-x')-aq}) = L \frac{a/\pi}{a^2 + (x-x')^2} \rightarrow L\delta(x - x')(a \rightarrow 0)$ と処理する。

³⁷ $[A, B]$ が実数のときに成り立つ定理 $[A, e^B] = [A, B]e^B$ を使う (ベーカー・ハウドルフの定理)。

³⁸ $\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x)$ を使い、公式 $[AB, C] = A[B, C] - \{A, C\}B$ を使う。ここで $\{A, B\} = AB + BA$ はフェルミ統計の交換関係を表すときの括弧である。また、フェルミオン場に対して $\{\psi(x), \psi^\dagger(x')\} = \delta(x - x')$ の交換関係が成り立つことを使う。

³⁹ここで本当は指数関数の前に、電子のフェルミエネルギーに依存する定数がつくのであるが、あとの議論に影響を与えないので、簡単のために定数を 1 とした。

⁴⁰初心者が犯しやすい誤解として、「 $\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x) = e^{-i\phi(x)/\nu} e^{i\phi(x)/\nu} = 1$ になってしまう？」というものがある。これは同じ点に作用する演算子の積は取り扱いが非常にデリケートであって、 $e^{-i\phi(x)/\nu}$ は $e^{i\phi(x)/\nu}$ の逆行列と考えてはいけないことによる。

である。さらに密度場 $\rho(x) = \partial_x \phi(x)/2\pi$ と位相場 $\phi(x)$ の交換関係 (50) から、 $\partial_x([\phi(x), \phi(x')]) = 2i\pi\nu\delta(x-x')$ がいえるので、これを x で積分することで

$$[\phi(x), \phi(x')] = i\pi\nu\text{sgn}(x-x') \quad (55)$$

がいえる。ここで $\text{sgn}(x)$ は $x > 0$ のとき 1、 $x < 0$ のときに -1 の値をとる符号関数である⁴¹。ここでもし充填率が $\nu = 1/m$ (m は奇数) であるとすれば、 $e^{[\phi(x), \phi(x')]/\nu^2} = e^{i\pi\text{sgn}(x-x')/\nu} = e^{\pm i\pi m} = -1$ となり、確かにフェルミオンの反交換関係

$$\{\psi(x), \psi^\dagger(x')\} = e^{i\phi(x)/\nu} e^{-i\phi(x')/\nu} + e^{-i\phi(x')/\nu} e^{i\phi(x)/\nu} = 0, \quad (x \neq x') \quad (56)$$

が成り立つ⁴²。

これで話が終われば、普通の一次元伝導チャンネルの話と何も変わらなくなる。しかし、今の系が非常に特殊なのは、電子の生成消滅演算子とは別に、「準粒子」の生成消滅演算子を構成できることである。準粒子の生成消滅演算子を、

$$\Psi(x) = e^{i\phi(x)}, \quad \Psi^\dagger(x) = e^{-i\phi(x)} \quad (57)$$

と定義しておく。そうすると、全く同じ方法で、

$$\{\Psi(x), \Psi^\dagger(x')\} = 0, \quad (x \neq x') \quad (58)$$

が示せるのである。この準粒子は通常の電子の $\nu = 1/m$ 倍の電荷を持つ。これは次の交換関係から明らかである⁴³。

$$[\rho(x), \Psi(x')] = -\nu\delta(x-x')\Psi(x') \quad (59)$$

この式は、演算子 $\Psi(x')$ が位置 x' にある電子を $\nu = 1/m$ 個分だけ消去することを意味する。つまり、 $\Psi(x')$ は電荷 νe をもつ準粒子の消滅演算子となっている。これが分数電荷がでてくる理由である。

実際に実験で分数電荷を観測するためのセットアップを説明しよう。分数量子ホール状態にある試料を用意し、図 8 (a) のように電極をつけて左右のリードに電位差 V をつける。試料の幅が十分に大きく、上下のエッジ状態が十分に離れているときは、エッジ間の電荷の移動が無視できる。このときは、透過確率 T が 1 となる場合に相当するため、電流はランダウアー公式から $I_0 = (e^2/h)V$ となる⁴⁴。次に試料の中央部分にゲート電極をつけ、その部分でエッジ状態の間の距離をせばめてみよう (図 8 (b))。このときエッジの間を準粒子がトンネルするようになり、それによって後方散

⁴¹積分の際にでてくる積分定数は、 $[\phi(x), \phi(x')]$ が x と x' について反対称であることを使って決める。

⁴² $\nu = 1/m$ (m は奇数) の分数量子ホール状態をラフリン状態と呼ぶ。ラフリン状態以外の分数量子ホール状態でも、エッジ状態を複数構成することで、うまく反交換関係を満たすようにできる。

⁴³交換関係 $[\rho(x), \phi(x')] = -i\nu\delta(x-x')$ を用いる。式 (51) を導くのとほぼ同じ手順で示せる。

⁴⁴量子ホール状態は強い磁場下にあるので、ゼーマン効果によって伝導電子のスピンの向きは決まってしまう、スピン自由度からくる因子 2 はつかない。実は無限に長いエッジ状態の運ぶ電流を久保公式から計算すると、 $I_0 = (\nu e^2/h)V$ となる。しかし、実際にはエッジ状態の長さは有限で、両側についている電極の効果を無視することはできず、その効果まで取り入れると $I_0 = (e^2/h)V$ となる。

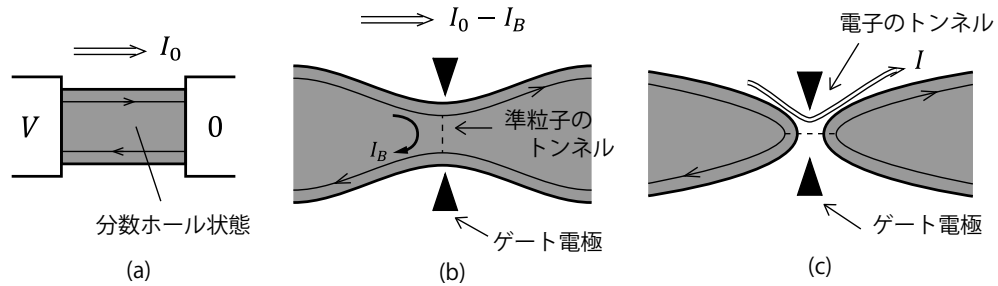


図 8: (a) 分数量子ホール効果とエッジ状態, (b) 弱い後方散乱が生じる場合, (c) 強い後方散乱が生じる場合

乱 (backscattering) 電流 I_B が生じる⁴⁵。よって、系全体としては $I_0 - I_B$ の電流が流れていることになる。さらに幅を狭めていくと、逆にほとんど電子は反射される状況ができる (図 8 (c))。このときは、エッジの間のトンネルは電子のトンネルによって支配される。これは直感的に言えば、エッジとエッジの間がもはや量子ホール状態になっていないので、準粒子として飛び移れなくなり、電子として飛び移るようになると解釈される⁴⁶。

以上の議論から、準粒子の分数電荷を測定するには、図 8 (b) の状況を考えればよいことになる。上下のエッジでの準粒子の生成消滅演算子を $\Psi_L(x)$, $\Psi_R(x)$ とする⁴⁷と、図 8 (b) の状況でエッジ間の準粒子トンネルは、トンネルハミルトニアン $H = \sqrt{\Gamma}(\Psi_R^\dagger(0)\Psi_L(0) + \Psi_L^\dagger(0)\Psi_R(0))$ で記述される。また、それによって生じる後方散乱電流の演算子は、

$$\hat{I}_B = -ive\sqrt{\Gamma}(\Psi_R^\dagger(0)\Psi_L(0) - \Psi_L^\dagger(0)\Psi_R(0)) \quad (60)$$

と計算される⁴⁸。この電流の表式をみるとわかるように、準粒子のもつ電荷は ve となっている。これがショットノイズの観測にひっかかるのである。ショットノイズの計算は長くなるので省略するが、 H_B の二次摂動によって \hat{I}_B の期待値やゆらぎを丹念に計算していけば [8]、

$$S(\omega = 0) = 2e^* \langle \hat{I}_B \rangle \coth(e^*V/2k_B T) \quad (61)$$

が得られる ($e^* = ve$)。 $eV \gg k_B T$ のときは $S(0) = 2e^* \langle \hat{I}_B \rangle$ となるので、 $S(0)$ と $\langle \hat{I}_B \rangle$ を同時に測ってその関係を調べれば、有効電荷を測定できることになる。実際に図 8 (b) のような状況で、 $\nu = 1/3$ 分数量子ホール状態の準粒子電荷が $e/3$ であることが観測されている [16]。

⁴⁵ここでの説明は直感的なものである。理論的には、繰り込み群によって得られる低エネルギーの有効ハミルトニアンにおいて、準粒子のトンネルハミルトニアンが最も有効 (relevant) であることを示すことで、電流のほとんどが準粒子のトンネルによって生じることがわかる [15]。

⁴⁶この状況では、繰り込み群の理論において最も有効 (relevant) となる過程が電子のトンネル過程であることを理論的に示せる。

⁴⁷上のエッジ状態は左のリード (リード L) から入射しているので $\Psi_L(x)$ とかいている。

⁴⁸ $Q_L = e \int dx \rho_L(x)$ と上のエッジにある電荷を定義しておき、 $\hat{I}_B = -\dot{Q}_L = i[Q_L, H]$ を計算すれば、式 (60) が導出される。

4 ショットノイズに関する最近の研究

ノイズの基礎理論で、紙面をだいぶ費やしてしまったので、少し駆け足で最近の話題について述べていこう。なお、ここで紹介する研究および参考文献は、ショットノイズに関する膨大な研究のごく一部であり、完全な網羅は不可能であることをお断りしておく。

4.1 ゆらぎの定理

ショットノイズの理論の背後には、必ず分布関数の概念がある。ここで第3.3節で導いたノイズパワーの結果

$$S(0) = \frac{e^2}{\pi} T(1-T)eV \quad (62)$$

の意味をもう一度考えてみよう。この式に因子 $T(1-T)$ が現れる理由は、二項分布を用いて簡単に説明できる。今、時間 T の間に N 個の電子が試料に入射したとしよう。1 個の電子は確率 T で透過し、確率 $1-T$ で反射することになる。このとき、透過した電子の数が n である確率は、

$$P_n = {}_N C_n T^n (1-T)^{N-n} \quad (63)$$

と計算される。これは二項分布にほかならない。二項分布の期待値と分散は、それぞれ $\langle n \rangle = NT$ 、 $\langle (\Delta n)^2 \rangle = NT(1-T)$ となることがよく知られている。式 (3) を使うと、ノイズパワーは $S(0) = (2e^2/T)\langle (\Delta n)^2 \rangle = (2e^2 N/T)T(1-T)$ と計算される。これより、ショットノイズの式 (62) にでてくる因子 $T(1-T)$ は、二項分布の性質からきていることは明白だろう。さらに電流が $\langle I \rangle = e\langle n \rangle/T = eNT/T$ と表わされることから、ファノ因子 $F = S(0)/(2e\langle I \rangle) = 1-T$ が正しく再現される。

さて、時間 T の間に試料を透過する電子数の分布関数をつかうと、非平衡状態でも成立する一般的な関係式を示すことができる。それが「ゆらぎの定理」である [17, 18, 19, 20, 21]。ここではその「感じ」をつかむために、簡便な表記を用いた議論 [21] を行なってみよう⁴⁹。まず初期にリードと試料の間の結合が切れており、リード・試料が完全な熱平衡状態にあったとする。このとき、左右のリードに含まれる電子数が (n_L, n_R) である確率は、

$$\rho_{n_L, n_R} = \frac{\exp(-(E_{n_L} - eV_L n_L)/k_B T)}{Z_L} \times \frac{\exp(-(E_{n_R} - eV_R n_R)/k_B T)}{Z_R} \quad (64)$$

である。次に時刻 $t=0$ から $t=T$ の間、リードと試料の間を結合させ、試料に電流を流したとしよう。時刻 $t=0$ でのリードの電子数が (n_L, n_R) であり、かつ時刻 $t=T$ で電子数が (n'_L, n'_R) である確率は、量子力学のダイナミクスと遷移確率の表式を用いて、

$$P_{(n_L, n_R) \rightarrow (n'_L, n'_R)} = |\langle n'_L, n'_R | e^{-iHT} | n_L, n_R \rangle|^2 \rho_{n_L, n_R} \quad (65)$$

⁴⁹ここでの議論は表記法を簡単にしており、間違いではないが正確な記法にはなっていない。正確には射影演算子や時間反転操作などを定義して記述する必要がある。ゆらぎの定理の導出に関する詳細は文献 [20] を参照のこと。

となる。ここで、もし系のハミルトニアンに時間反転対称性があるとする⁵⁰と、量子力学の計算により、

$$|\langle n'_L, n'_R | e^{-iHT} | n_L, n_R \rangle|^2 = |\langle n_L, n_R | e^{-iHT} | n'_L, n'_R \rangle|^2 \quad (66)$$

が導ける。これは「時間を遡るような遷移」の確率がもとの遷移確率と同じことを意味する。この関係を使うと、式(64)も利用して、

$$P_{(n_L, n_R) \rightarrow (n'_L, n'_R)} = P_{(n'_L, n'_R) \rightarrow (n_L, n_R)} e^{An} \quad (67)$$

を示すことができる。ここで $n = n_L - n'_L$ は通過した電子の数、 $A = eV/k_B T$ は電位差 $V = V_L - V_R$ に比例した変数である。さらに透過した電子数が n である確率

$$P_n = \sum_{n_L, n_R, n'_L, n'_R} P_{(n_L, n_R) \rightarrow (n'_L, n'_R)} \delta_{n, n_L - n'_L} \quad (68)$$

を導入すると、一般的な関係式として

$$P_n = P_{-n} e^{An} \quad (69)$$

が導ける。これがゆらぎの定理と呼ばれる関係式である。もともとこの関係式は、非平衡統計力学の分野でよく知られていた [18]。電子の通過によって生じるジュール熱は $Q = eVn$ であるので、 $An = eVn/k_B T = Q/k_B T$ は電子の通過によるエントロピー変化を意味している。よってゆらぎの定理(69)は、 $n > 0$ として考えると、「エントロピーが増大する確率 P_n とエントロピーが減少する確率 P_{-n} の比が、エントロピー生成量 An の指数関数であること」を主張するものである。

ゆらぎの定理から、さまざまな関係式を導くことができる。まずエントロピー変化の期待値 $\langle An \rangle = A \langle n \rangle$ が正であることが簡単に証明できる⁵¹。つまり、ゆらぎの定理は「エントロピー増大則」を含んでいる⁵²。またゆらぎの定理は「オンサーガーの関係式(32)」も含むが、驚くべきことにそれ以上の情報も持っている。ゆらぎの定理を使って、期待値 $\langle n \rangle$ を変形していくと、

$$\langle n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n P_n = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n P_{-n} e^{An} = -\langle n \rangle + A \langle n^2 \rangle - \frac{A^2}{2!} \langle n^3 \rangle + \dots \quad (70)$$

となる。さらに

$$\langle n^k \rangle = \langle n^k \rangle_0 + A \langle n^k \rangle_1 + \frac{A^2}{2!} \langle n^k \rangle_2 + \dots \quad (71)$$

と期待値をテイラー展開して式(70)に代入し、 A の次数が同じ項の係数比較を行うと、

$$\langle n^2 \rangle_0 = 2 \langle n \rangle_1, \quad \langle n^2 \rangle_1 = \langle n \rangle_2, \quad \dots \quad (72)$$

⁵⁰具体的には、磁場のない系のハミルトニアンは時間反転対称性をもつ。

⁵¹ $1 = \sum_n P_{-n} = \sum_n P_n e^{-An} = \langle e^{-An} \rangle$ とし、凸不等式 $\langle e^{-An} \rangle \leq e^{-\langle An \rangle}$ を使えば示せる。

⁵²期待値としてはエントロピーは増加するが、確率のゆらぎは禁止されておらず、エントロピーが減少する確率は存在してもよい。今の場合、電子がポテンシャル勾配に逆らって移動する確率 $P_{-n} (n > 0)$ がそれにあたる。ゆらぎの定理は、エントロピーが減少する確率と、同じ量のエントロピーが増大する確率の間の関係を示すものである。これが「ゆらぎの定理」と呼ばれる所以である。

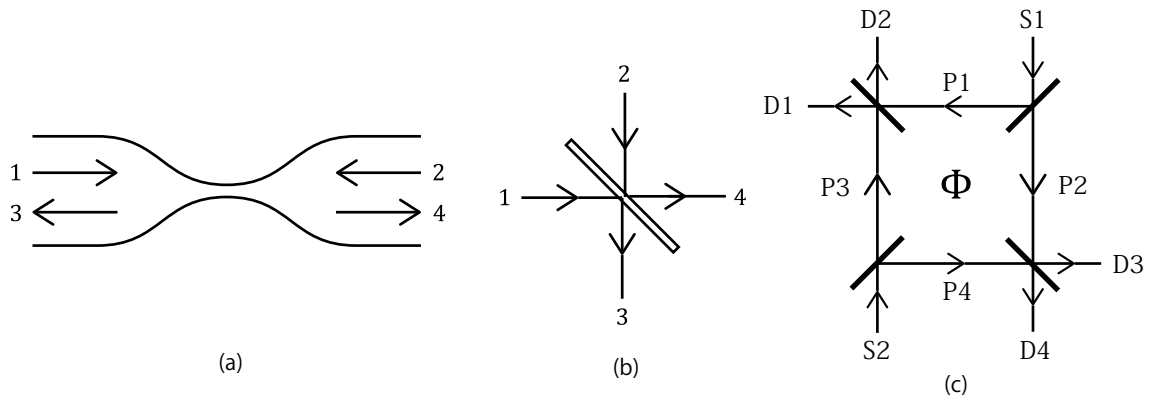


図 9: (a) 量子ポイントコンタクト, (b) ハーフミラーとのアナロジー, (c) 2 電子干渉実験のセットアップ

などの無数の関係式を得ることができる。一般に電流やショットノイズは試料に加えられる電圧 V の非線形関数となっているが、それらを

$$\langle I \rangle = G_1 V + \frac{G_2}{2!} V^2 + \frac{G_3}{3!} V^3 + \dots \quad (73)$$

$$S(0) = S_0 + S_1 V + \frac{S_2}{2!} V^2 + \dots \quad (74)$$

と書き表し、電流とノイズが $\langle I \rangle = e \langle n \rangle / T$, $S(0) = 2e^2 (\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2) / T$ で計算されることを使えば、式 (72) より、

$$S_0 = 4k_B T G_1, \quad S_1 = 2k_B T G_2, \quad \dots \quad (75)$$

などの無数の関係式が得られる。第一式は線形応答領域で成り立つオンサーガーの関係式 (32) に他ならないが、第二式以降は非線形伝導領域で初めて現れる関係式である。

以上の議論は磁場がある系にまで拡張され、実際に AB リングを含む伝導体のコンダクタンス・ノイズ測定で検証されている [21]。また熱電効果やスピントロニクス系におけるゆらぎの定理の議論も行われている [22]。非平衡統計力学の分野のコンセプトが、メゾスコピック系物理に輸入され、豊かな結果を生み出しているのだ。

4.2 二粒子干渉実験

第 3.3 節で議論したショットノイズの一般論であるが、結局のところフェルミ粒子の統計性はすべてフェルミ分布関数を通して結果に反映していた。これでは「ショットノイズは電子の統計性をみている」といっても、単に入射電子の分布関数というごく一部の情報を見ているに過ぎない。もっと積極的に電子の統計性 (フェルミ統計) を調べられないだろうか。

それに対する答えはちゃんとある。多端子を用いた二粒子干渉実験 [23] である。実験のセッティングをすべて書き出すと煩雑になるので、光学実験とのアナロジーを使って説明しよう。第 3 節で主に扱った量子ポイントコンタクト (図 9(a)) では、1 から入射した電子はある確率で 3 と 4 に散乱される。2 から入射した電子も同様にある確率で 3 と 4 に散乱される。これは図 9(b) に示す

ように光学実験におけるハーフミラーと同様の役割を果たす。光学実験のハーフミラーでは、1から入った光線は、ある透過強度もしくは反射強度で3, 4に分けられる。2から入った光線も同様である。量子ポイントコンタクトをハーフミラーにみたてることで、メゾスコピック系の実験を量子光学の実験に見立てることができるのだ(ただし統計性だけ異なることに注意)。

さて、電子系を用いて、図 9(c) のようなセッティングを作ろう⁵³。このような装置ができると、とても面白いことがおこる。まず、S1から電子が1個入射したとしよう。このとき、電子はD1,D2,D3,D4のどれか一箇所に到達するが、干渉する経路が存在しないので、1電子では干渉は起こらない。S2から電子が1個入射したときも同様である。ところが、S1, S2から同時に電子が1個ずつ入射する場合を考え、D2, D4に電子が1個ずつ到達したとすると、二粒子過程を通じた干渉がおきる。(S1,S2)→(P1,P4)→(D2,D4)と(S1,S2)→(P2,P3)→(D4,D2)の2つの経路が存在し、電子の非個性性によってその2つの過程が量子力学的に重ねあわされるからである。よって、ループを貫く磁束 Φ を変えながら、D2,D4に流れる電流の相関 $\langle I_{D2}I_{D4} \rangle$ を測ると、 Φ に関して振動する。これは決して1粒子干渉では期待されない現象であり、フェルミ統計はこの磁場による振動の位相として現れることになる。このような実験は最近になって実行され、確かに理論通りに2粒子干渉効果が観測されている[24]。

量子光学の分野では2粒子干渉実験は非常に古くから行われている重要な実験である⁵⁴。メゾスコピック系でのショットノイズの研究は、量子光学を「よき先輩」として、多くの刺激を受けながら発展してきているともいえるだろう。

4.3 単一電子生成

量子光学とのアナロジーを推し進めると、量子光学の実験で重要な「単一光子源」に対応するものができないかと思ひ至ることになる。単一光子源のメゾスコピック系における対応物は、「単一電子源」であり、最近になって実験で実現されるようになった[26]。図 10(a)と(b)に概略図を示す。整数量子ホール効果のエッジ状態のそばに量子ドットを作成する(図 10(a))。量子ドットにゲートをつけて矩形の振動電圧をいれると、ドット準位がフェルミエネルギーより上に来た時に、量子ドットからエッジ状態に電子が一個注入される(図 10(b)の左側)。逆に空になったドット準位がフェルミエネルギーより下に来た時に、エッジにホールが一個注入される(図 10(b)の右側)。これにより、エッジ状態に「望むタイミングで」電子やホールを一個だけ注入することができるようになったのである。

このような「単一電子源」ができると、図 10(c)のような衝突実験が面白い[27]。この実験では、同じタイミングで2つの単一電子源から電子を発生させ、同時に2電子を量子ポイントコンタクトに突入させる。このとき、電子がフェルミ統計に従っているために「パウリの排他律」が働き、

⁵³実際には整数量子ホール効果のエッジ状態を使うのだが、試料形状はややこしい。詳しくは文献[24]を参照のこと。

⁵⁴Hanbury Brown-Twiss 実験[25]と呼ばれる。この実験は恒星シリウスの半径を測定するために行われたのだが、この実験がまさに量子光学実験の幕開けにもなっていて、歴史的にも大変意義あるものである。なお、これは Hanbury Brown と Twiss の「2名」の研究者によるものである。

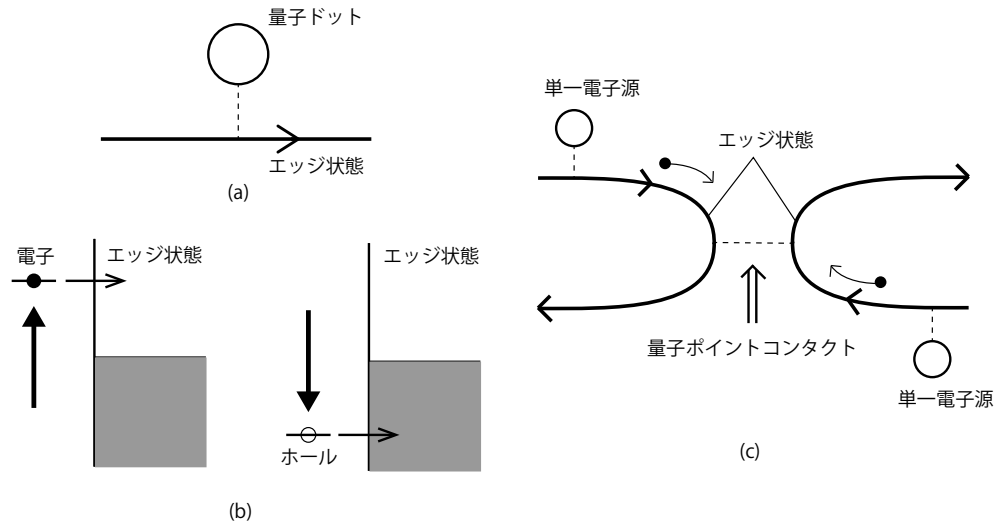


図 10: (a) 単一電子生成源のセットアップ, (b) 単一電子生成の原理, (c) 2 電子衝突実験

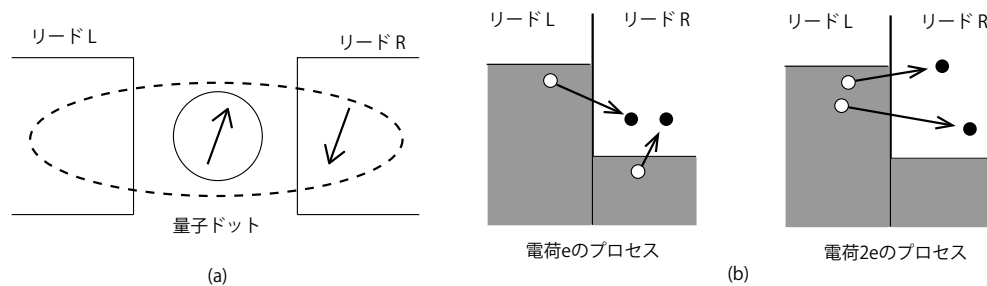


図 11: (a) 近藤効果, (b) 後方散乱電流とショットノイズに寄与する2つの伝導プロセス

必ず入射した二電子は異なる方向に散乱される⁵⁵。このような実験は、電子の統計性を直接見る実験であり、基礎物理として興味深いだけでなく、量子情報処理の観点からも重要な実験となっている⁵⁶。図 10(b) のような実験は現在まさに進行中であり、この解説記事が出版される頃には論文として現れていることだろう。

4.4 近藤量子ドットのショットノイズ

量子光学との類似性について解説したが、逆に「量子光学系とメゾスコピック系の違いは何か」と問うこともできる。統計性が異なることも重要な違いであるが、やはり一番の違いは「メゾスコピック系では電子の間に強い相関をもたせることが可能である」ということである。ここまでくると、理論家としての腕を試すのに十分な難しい問題がいろいろと出てくるようになる。

量子ドットにおける近藤効果は、メゾスコピック系で生じる電子相関効果のうち、もっとも基本的で重要なものである。近藤効果とは、一言でいって量子ドット内にある電子のスピンの、リー

⁵⁵つまり、同じエッジに2個の電子が遷移することはない。このようなタイプの実験を、量子光学で最初に実験を行った研究者の名前にちなんで、Hong-Ou-Mandel 実験という [28]。

⁵⁶ただし、電子の到着時刻を精度よく測ることは難しいので、ショットノイズの測定で間接的に測定することになる [29]。ショットノイズは電子のもつ量子情報を解析する重要なツールにもなっているのである。

ド線のなかの伝導電子のスピンと強く結びつき、スピン一重項を形成する現象である (図 11(a))。このような状態にある近藤量子ドットを介して電流を流した時、ショットノイズで観測される電荷はどのようになるだろうか? この問題は、電子間相互作用を適切に取り扱わないと間違った答えを得てしまうことが知られている。近藤状態にある量子ドットは、電圧の線形応答の範囲では完全伝導に対応したコンダクタンス $G = 2e^2/h$ を持ち、 $I_0 = (2e^2/h)V$ の電流が流れる。線形応答を超えると、 V^3 に比例したわずかな後方散乱電流 I_B が流れるようになり、電流は $I_0 - I_B$ に減少する。ショットノイズ $S(0)$ を計算し、ファノ因子 $F = S(0)/2e\langle I_B \rangle$ を正しく評価すると、SU(2) 対称性がある場合に $F = 5/3$ という結論が得られる [30]。これはキャリアの有効電荷が $e^* = (5/3)e$ で与えられることを意味する⁵⁷。この結論は、伝導を担うキャリアが分数電荷を持つことを意味するのではなく、図 11(b) に示すような電荷 e の透過プロセスと電荷 $2e$ の透過プロセスが混じるためであることがわかっている⁵⁸。この理論的な予測は、最近の実験で検証されつつある [34]。

ショットノイズで近藤効果を調べる最大の意義は、電子相関の強い系の中で起きている「励起」をもっと具体的に調べることができることである。つまり「基底状態」「熱平衡状態」などの従来の研究対象を超えて、系の動的な性質に関する情報をショットノイズ実験を通して得ることができるのである。

5 まとめ

この解説では、メゾスコピック系の物理学の話題として「ショットノイズ」に焦点を絞り、解説を行った。散乱理論をベースとした基礎理論を概観したのち、最近のショットノイズに関わる研究を紹介した。ショットノイズを調べる意義には、いくつかの言い方がある。まずショットノイズは、電流の期待値の情報から得られない、重要な情報を秘めていることが第一である。有効電荷の測定はその最も典型的な例である。またショットノイズは、系を非平衡状態に駆動して初めて現れる現象であるため、「非平衡統計力学」の視点からも興味ある対象である。ゆらぎの定理にまつわる研究は、その一例である。

著者としてはもちろん以上のことにも興味を惹かれるが、ショットノイズの研究を行うときの一番の動機はやはり「ショットノイズが電子相関の問題に新たな光を当てるのではないか」という期待によっている。近藤状態にある量子ドットのショットノイズではまさにそのようなことが起こっていて、近藤状態のなかにある励起の素過程を調べることができる。電子相関のある系に内在するダイナミクスにより深い理解は、残された最後のフロンティアとも呼ぶべき普遍的な問題を含んでいると私は考えている。

基本的な理論で紙面の大部分が埋まってしまい、最後は駆け足になってしまったが、この解説記事がメゾスコピック分野に興味を持つきっかけになっていただければ幸いである。

⁵⁷ この理論研究に触発されて、近藤状態にある量子ドットの電流ノイズの研究が推し進められ [31]、高い対称性 (SU(N) 対称性) を持つ近藤効果などへの拡張も行われた [32]。しかし、未だに未解決の問題が残されている。

⁵⁸ 詳しい解説は文献 [33] を参照のこと。

謝辞

図の作成を手伝っていただいた阪野墨さんと鈴木貴文さんに心より感謝いたします。

参考文献

- [1] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press, 1995, Cambridge); 一番オススの教科書。
- [2] T. Heinzel, *Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures*, 3rd. edition (Wiley-VCH, 2010, Weinheim); 最近の研究までカバーした系統的な教科書。
- [3] 勝本信吾「メゾスコピック系」(朝倉書店, 2003); コンパクトにまとめられた日本語の教科書。
- [4] L. Onsager, *Phys. Rev.* **37**, 405 (1931).
- [5] R. Landauer, *Nature* **392**, 658 (1998).
- [6] C. Beenakker and C. Schönberger, *Phys. Today* **56**, 37 (2003).
- [7] Y. M. Blanter and M. Büttiker, *Phys. Rep.* **336**, 1 (2000); arXiv:cond-mat/9910158.
- [8] T. Martin, *Noise in mesoscopic physics*, les Houches Session LXXXI, H. Bouchiat et. al. eds. (Elsevier, 2005); arXiv:cond-mat/0501208.
- [9] M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2901 (1990); *Phys. Rev. B* **46**, 12485 (1992).
- [10] T. Martin and R. Landauer, *Phys. Rev. B* **45**, 1742 (1992).
- [11] 高田康民「多体問題」(朝倉書店, 1999); 日本語の教科書としては最も手頃で手に入りやすい本である。ただし内容は高度。
- [12] B. J. van Wees et al., *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 (1988).
- [13] M. I. Reznikov et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3340 (1995); A. Kumar et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2778 (1996); S. Nakamura et al., *Phys. Rev. B* **79**, 201308 (2009).
- [14] 吉岡大二郎「量子ホール効果」(岩波書店, 1998); 量子ホール効果のよい教科書はあまり存在しない。本書は少し高度であるがよくまとまった解説がある。惜しむらくは絶版である。
- [15] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 724 (1994); *Phys. Rev. B* **46**, 15233 (1992).
- [16] L. Saminadayar et al., *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2526 (1997); R. de-Picciotto et al., *Nature* **389**, 162 (1997); A. Chang, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 1449 (2003).

- [17] 小林研介「メゾスコピック系における電流雑音とゆらぎの定理」*固体物理* **46**, 519 (2011); オンラインジャーナルの関係式とゆらぎの定理の詳しい解説がある。
- [18] D. J. Evans et al., *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2401 (1993).
- [19] K. Saito and A. Dhar, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 180601 (2007); K. Saito and Y. Utsumi, *Phys. Rev. B* **78**, 115429 (2008); Y. Utsumi and K. Saito, *Phys. Rev. B* **79**, 235311 (2009).
- [20] M. Esposito et al., *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1665 (2009).
- [21] S. Nakamura et al., *Phys. Rev. Lett.* **104**, 080602 (2010); S. Nakamura et al., *Phys. Rev. B* **83**, 155431 (2011).
- [22] E. Iyoda, et al., *J. Phys. Soc. Jpn.* **79**, 045003 (2010); R. Lopez et al., *Phys. Rev. Lett.* **108**, 246603 (2012).
- [23] B. Yurke and D. Stoler, *Phys. Rev. A* **46**, 2229 (1992); P. Samuelsson et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 026805 (2004).
- [24] I. Neder et al., *Nature* **448**, 333 (2007).
- [25] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Nature* **177**, 27 (1956).
- [26] G. Fève et al., *Science* **316**, 1169 (2007).
- [27] S. Ol'khovskaya et al., *Phys. Rev. Lett.* **101**, 166802 (2008).
- [28] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
- [29] Ch Grenier et al., *New J. Phys.* **13**, 093007 (2011); F. Parmentier et al., *Phys. Rev. B* **85**, 165438 (2012); T. Jonckheere et al., *Phys. Rev. B* **86**, 125425 (2012).
- [30] E. Sela et al., *Phys. Rev. Lett.* **97**, 086601 (2006).
- [31] A. O. Gogolin and A. Komnik, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 016602 (2006); *Phys. Rev. B* **73**, 195301 (2006); T. L. Schmidt et al., *Phys. Rev. B* **76**, 241307 (2007);
- [32] P. Vitushinsky, et al., *Phys. Rev. Lett.* **100**, 036603 (2008); C. Mora et al., *Phys. Rev. Lett.* **100**, 036604 (2008); R. Sakano et al., *Phys. Rev. B* **83**, 075440 (2011); R. Sakano et al., *Phys. Rev. Lett.* **108**, 266401 (2012).
- [33] 阪野壘, 小栗章, 小林研介「量子ドットの近藤効果による非平衡電流の完全計数統計」*固体物理* **47**, 475 (2012).
- [34] O. Zarchin et al., *Phys. Rev. B* **77**, 241303 (2008); T. Delattre et al., *Nat. Phys.* **5** (2009) 208; Y. Yamauchi et al., *Phys. Rev. Lett.* **106**, 176601 (2011).