

| | | | |
|---|------------------|----|--------|
| 京都大学 | 博士（ 文 学 ） | 氏名 | 八杉 満利子 |
| 論文題目 | 数学における概念拡張の二つの様式 | | |
| <p data-bbox="183 358 438 392">（論文内容の要旨）</p> <p data-bbox="167 398 1428 784">本論文の主題は数学の発展の一側面にかんする哲学的考察である。数学の各理論の発展に際しては様々な拡張が行われるが、その一つが数学内部の概念の拡張である。この拡張には対象領域の拡張、演算あるいは関係などの定義域の拡張、新しい演算の導入などが含まれる。また、概念拡張に際してはなんらかの必要性に応じて拡張の方向が決まってゆく。当然のことであるが、新概念がそれまでの知識から自動的・機械的に導かれるわけではない。概念拡張の一つの形として接続的な発展、すなわち、内容がより豊富になりながら、前段階と何等かの意味で同質な場合がある。しかし、ある概念拡張が同質的、あるいは妥当で自然なものと考えられるのは、どのような条件の下であるのか。本論文は概念拡張のモデルの代表的なものを考察し、そこからこの問いに具体的な数学観に基づいて答えることを目標としている。</p> <p data-bbox="167 790 1428 1064">本論文はそのような数学観として19世紀と20世紀における主要な様式をそれぞれ考察する。その一つは1854年のデデキントの「大学教授資格取得講演」（以下『資格論文』と略記）における「数学における新しい関数の導入について」で表明されているものであり、もう一つは1950年にアメリカ数学連合誌に掲載されたブルバキの論説「数学の建築術」（以下『建築術』と略記）で表明されているものである。本論は全体が五つの章からなるが、第一章は「序論」として、以上のような本論の主題を記述している部分である。</p> <p data-bbox="167 1070 1428 1288">第二章「問題の起源」は、この主題が、数学者としての筆者の専門的な研究活動から生じた疑問への一つの答えとしての意味を持つ事情が説明される。筆者の専門は計算可能解析学であるが、その研究活動における疑問とは、連続体上の計算可能性問題を不連続な関数にかんしても適応する場合、いかなる方法が妥当であるかという問題である。筆者はこの問題を数学における概念拡張の一例と理解し、概念拡張の一般理論を考案しようと考えたのである。</p> <p data-bbox="167 1294 1428 1534">第三章「デデキントの数学観による概念拡張の仕組み」は、19世紀の主要な理論モデルとして、デデキントの『資格論文』を分析する。『資格論文』は妥当な概念発展に関して、科学一般の発展の法則というべき考察から始め、数学の発展もその法則に則ることを述べ、具体的な事例についてその観点の根拠を説明している。本論文では、『資格論文』で提示される数学の様々な場面における具体例を五場面に分類し、それぞれにおける概念拡張の特性を詳細に記述し分析する。</p> <p data-bbox="167 1541 1428 1758">具体的には、『資格論文』で検討されている概念拡張の例は五場面に分類できる。たとえば第二場面は間接的逆演算の導入で、その演算は、それが満たすべき要件によって暗黙的に導入される。さらに、領域の拡張が要求される場合がある（正整数上の加法に対する減法と整数の導入等）。また第四場面は既存の演算の、全体領域内での定義域の拡張であり、もとの定義域では演算の意味が不変な場合である（鋭角の三角関数から実数全体への定義域の拡張等）。</p> <p data-bbox="167 1765 1428 2072">各場面における拡張は同質性を満たす。これらの例より分かることは、拡張の必要性は、既存の理論とその上での活動から生じるという意味で「内的」なのである。デデキントが後に「拡張に際しての異質な概念の排除」と記しているが、それは「内的」必要性から可能なのであり、拡張の動機を内的必要性に限定すれば、異質な概念は入り込まない。保存性とは新理論が初期理論と断然せずにつながって首尾一貫していることである。その意味で、ヒルベルトがデデキントの数学観を発生論的（genetisch）、すなわち数学の発展を妥当な概念拡張と捉えていることは、事態の正確な理解であると評価できる。</p> | | | |

第四章の「ブルバキ構造主義における概念拡張の仕組み」は、概念拡張の方法を『建築術』に沿って考察する。『建築術』は、異なる諸数学理論間に存在する共通項の系統的研究という内的進化が、我々を公理的方法へと導いた、と言う。ブルバキの数学論の核心は「構造」概念である。構造とは個別の数学理論から個別性を捨象して得られる、多くの理論に共通な性質の公理的規定と言える。公理を増やすにしたがって下部構造が定義される。

そして、構造主義における概念拡張の同質性は次のように述べることができる。初期理論が、ある構造に属し、その上の演算あるいは関係（性質）に関して理論の拡張という内的必要性が生じたとする。それに応じて定義される新理論が初期理論の所属する構造に公理を付加した下部構造に所属するとき、この拡張は同質的、と見なしてよい。内的必要性は当然成り立っており、理論の法則は構造の法則として形式的に継承されるとともに、初期理論の要素も演算も新理論の中に同じ形で埋め込まれる。したがって形式保存も実質保存も成り立っている。

公理的に見れば、伝統的な分野の仕切りが無意味になる。新しい編成原理は構造の階層であり、それは単純なものから複雑なものへ、一般的なものから個別のものへと進む。

しかし『建築術』は、このような記述は数学の実際の状態の大まかな近似に過ぎず、図式的で理想化されているとともに凍結されている、と警告することを忘れてはいない。同質性の確認の際にも柔軟性を保つように気をつけなければならない。

第五章「歴史的背景」は、デデキントからブルバキに至る数学思想の変化の歴史的考察である。デデキントの発生論的数学観とブルバキの構造主義的数学観は一見かなり異なる様式であるが、連続体上の計算可能性研究を支える原理としては、この両者が必要だったのであり、双方ともに概念拡張の同質性の付与が可能である。ただし、数学観は突然変化するわけではない。デデキントからブルバキまでの変化を概観することによって、二者それぞれの数学観の特徴をより明らかにし、本論の主題である概念拡張の同質性にもさらなる意味を与えると考えられる。

まずデデキントは、算術はそれ自体から発展すべきこと、異質な概念を算術に持ち込む理由はないこと、有理数だけを使って無理数の完全な定義を与える努力をしなければならないことを主張した。次にヒルベルトは、「無矛盾性イコール存在」という数学哲学を宣言した。ヒルベルトの数学論の中心は論理であった。さらに、概念の骨組みは、その知識部門のいくつかの特別な命題を基礎にして、それらのみから論理的に十分組み立てることができる、とも言う。これら特別な命題がデデキントにおける法則に対応する、と見ることもできる。ヒルベルトは幾何学にも算術にも公理を設定している。デデキントも群等の公理を導入している。しかしブルバキが指摘するように、彼等の公理は個別の体系に対して設定された一意的なものであり、普遍的な構造の公理ではなかった。

他方、構造主義的数学観については、ヒルベルト、ファン・デル・ヴェルデン、ブルバキの系譜で、構造主義の萌芽から部分的構造主義、そして完成へと変遷した。デデキントとブルバキの数学の概念拡張に関する理解様式は、数学の発展の捉え方、という哲学的観点から見れば、基本的な相違がある。しかしどちらにも数学概念の発展の同質性という特徴を付与可能なことは既に議論してきた通りである。その事情は計算可能性という概念を付加しても変わらない。

以上のように、本論文は、数学における概念拡張の認識の二つの様式、すなわちデデキントの発生論的数学観とブルバキの構造主義的数学観を検討し、妥当な概念拡張の原理を求めた。そして、概念拡張の原理として、拡張の「同質性」という思想を提案した。同質性とは、概念拡張が内的必要性によって生じることと、形式保存性と実質保存性という二つの保存性を満たすことである。概念拡張の妥当性とは、拡張前と拡張後の理論が自然な接点をもつことと考えられ、同質性はその保証をする。このよ

うな研究の起源は、計算可能解析学の研究に由来するものであるが、計算可能性概念を不連続関数にも拡張する研究方法はいくつかある。そして、それらがアドホックでなく自然な拡張であることが、本論文が突き止めた同質性原理によって、説明されたのである。

(論文審査の結果の要旨)

本論文は、「数学の哲学」に属する一問題として、「数学における妥当な概念拡張の論理とはいかなるものか」を主題としている。数学における概念の拡張には、対象領域の拡張、演算あるいは関係などの定義域の拡張、新しい演算の導入などが含まれる。数学研究においては一般にさまざまな必要性に応じて拡張の方向が決まっていくが、概念拡張の一つの形として、接続的な発展、すなわち内容がより豊富になりながら、前段階と何等かの意味で同質な場合がある。しかしながら、ある概念拡張が同質的、あるいは妥当で自然なものと考えられるのはいかなる条件の下であるのか。これが本論文の扱う主題である。

本論文は数学を専門とする筆者が、その研究の一環として、哲学的考察に携わってきた研究の成果であり、この概念拡張問題の探究の起源は、筆者の専門である連続体上の計算可能性問題を不連続体にまで接続する際の、研究方法の妥当性にある。連続体上の計算可能性問題を扱う三つの方法として、「極限再帰関数」によるもの、「実効的一様位相」によるもの、および「計算可能性構造をもつ関数空間論」によるものがある。これらの方法の採用がアドホックでないことを示すためには、それらにおける計算可能性概念が、連続関数の場合から不連続関数の場合に自然に接続することの説明が必要となる。

筆者は本論文で、この「自然な接続」の条件を検討するために、19世紀と20世紀の代表的な概念拡張にかんする方法論を検討した。その一つは1854年のデデキントの「大学教授資格取得講演」における「数学における新しい関数の導入について」で表明されているものであり、もう一つは1950年にアメリカ数学連合誌に掲載されたブルバキの論説「数学の建築術」で表明されているものである。本論は全体が五つの章からなり、第1章は「序章」、第2章は「問題の起源」と題され、これらの二章において以上のような問題意識が説明されている。第3章はデデキントの数学観を論じ、第4章はブルバキの数学観を分析する。そして最後の第5章は「歴史的背景」と題されて、19世紀から20世紀にかけての数学観の変遷を概観しその方向を解釈する。

筆者はこれらの分析作業を通じて、自然な概念拡張のために要請される条件が次の三つに集約されることを突き止めた。すなわち、概念拡張の原理として、まず拡張の「同質性」という思想が提案されたうえで、この同質性の内実は、概念拡張が「内的必要性」によって生じることと、「形式保存性」と「実質保存性」という二つの保存性を満たすこと、の三点からなると解釈されたのである。これらの三点からなる方法論のうち、前二者はデデキントの「発生論的」数学観に適合し、第三の方法論はブルバキの「構造主義的」数学観に適合する。そして、これら二つの立場は一見したところたしかに異質な二つの数学観であるように見えるが、概念拡張の妥当性要件として提案されているものが、「内的必要性」と「保存性」からなる拡張の「同質性」という意味では、どちらの発想も共通していることが分かる。したがって、思想としての代表的な数学観は、19世紀の発生論的立場から20世紀の構造主義へとある種の転換を見たとしても、その底流において、同質性を基礎とする概念拡張という志向性を保っている点において、連続的な発展と見なすことができるのである。

本論文は以上のような結論を導くために、デデキント自身の初期理論のみならず、彼の数学上の研究におけるその数学観の実質化の過程や、その背後にあるリーマンらに由来する抽象的・概念的観点などにも着目し、歴史的な背景を整理している。さらに、ブルバキについては、その構造主義の思想が、古典的バナッハ空間への適用を通じて、不連続関数を含む連続体上の計算可能性理論の関数空間による手法に結実した様子などを、詳しく述べている。

このように、本論文は具体的な数学の事例とそれに対する数学者のメタ的な方法論の議論を素材にして、数学的探究における概念拡張の論理を明らかにする、という目標を十分に達成している。筆者は本論文の補論として、専門の計算可能性をめぐる関数空間論の概略を付記しているが、これは以上のような概念拡張をめぐる反省にもとづく理論的成果の内実を、厳密な数学の手法の下で示した部分である。このように、数学理論についての哲学的な分析や解明と、数学内部での理論的進展とが、互いに補完的な関係に立ちうることを鮮やかに示した点が、本論文においてもっとも高く評価できる点である。

もちろん、以上の研究によって本論文の主題にかかわるすべての側面に答えが与えられたというわけではない。この研究の延長上に望まれる事柄としては、数学の発展にかんする歴史的分析のさらなる深化ということがある。本論第5章では、デデキントからブルバキに至る数学観の進展過程を、その中間に位置するヒルベルトの数学観をもからめて整理しているが、この主題については、例えばカッシーラーの『実体概念と関数概念』のような、数学の概念形成をめぐるこれまでの哲学研究を乗り越えるためにも、フレーゲの論理主義やヒルベルトの形式主義などについて、さらに掘り下げた研究がなされることを期待したい。また、数学的概念の拡張の問題が、19世紀から20世紀という形での限定された歴史的視野に留まることなく、デカルトやライプニッツなどとの比較研究など、より広い時代を含めた研究の試みへと発展することも望まれる。

以上、審査したところにより、本論文は博士（文学）の学位論文として価値あるものと認められる。なお、2014年1月28日に調査委員3名が、論文内容とそれに関連した事柄について口頭試問を行った結果、合格と認めた。

なお、本論文は、京都大学学位規程第14条第2項に該当するものと判断し、公表に際しては、当分の間、当該論文の全文に代えてその内容を要約したものとすることを認める。