2 次元 *Chern-Simons-Dirac* 方程式に対する初期値問題の適切性

岡本　葵

本論文では空間 2 次元 Chern-Simons-Dirac(CSD) 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = -J^\mu, \\ i\alpha^\mu D_\mu \psi = m\beta\psi, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^2), \\ A_\mu(0,x) = a_\mu(x) \in H^r(\mathbb{R}^2) \end{cases} \tag{1}$$

の適切性について述べている．ここで，スピノール $\psi = \psi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2$ 及びポテンシャル $A_\mu = A_\mu(t,x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が未知関数であり，∂_0, ∂_j, D_μ はそれぞれ $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial_\mu - iA_\mu$ を表す．また，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $J^\mu = \langle \alpha^\mu\psi, \psi\rangle$ であり，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は通常の $\mathbb{C}^2$ の内積を表す．$\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ は $\varepsilon^{012} = 1$ となる完全反対称テンソルを表し，m は非負定数，β, α^μ は 2 次の Hermite 行列である：

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ラテン文字は $\{1,2\}$, ギリシャ文字は $\{0,1,2\}$ の範囲を動くものとし，繰り返し現れる指数はこの範囲において和を取るものとする．また，$H^s(\mathbb{R}^2)$ は次で定義される Sobolev 空間である：

$$H^s(\mathbb{R}^2) := \{\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) : \|\varphi\|_{H^s} := \|\langle\xi\rangle^s \widehat{\varphi}\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^2)} < \infty\},$$
$$\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}, \quad \widehat{\varphi} \text{ は } \varphi \text{ の Fourier 変換を表す.}$$

初期値問題が $H^s \times H^r$ で適切であるとは，初期値 $(\psi_0, a_\mu) \in H^s(\mathbb{R}^2) \times H^r(\mathbb{R}^2)$ に対して (i) ある時間区間 $t \in [-T,T]$ において方程式を満たす解 (ψ, A_μ) が存在し，(ii) 解は適当な関数空間において一意的であり，(iii) 得られた解は初期値に連続的に依存する，ことを意味する．適切性は，一般に具体的な解の表示が得られない非線形偏微分方程式を研究する上で基本的な問題として常に論じられる．個々の初期値に対して $T > 0$ が定まり上記の三条件を満たす場合，時間局所的適切であるといい，T が初期値に依らずいくらでも大きくとれるとき時間大域的適切であるという．

本論文では，初期値の属する Sobolev 空間の指数をどこまで下げることができるかという，いわゆる低い正則性における適切性を扱っている．正則性が低い場合には，各非線形項の特異性が顕著に現れるため，個々の非線形効果を精確に捉えることができ，より深い解析が可能になる．

CSD 方程式は，超電導や分数量子 Hall 効果を説明する方程式系であり，ゲージ場の理論に現れる ([5])．また，CSD 方程式はゲージ変換

$$\psi \to \exp(i\chi)\psi, \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\chi, \quad \chi : \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R} \text{ は滑らかな関数}$$

により不変であるため，どのようなゲージ条件を選ぶかによってポテンシャルの満たす方程式が変化する．例えば，Lorenz ゲージ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を課した場合には，ポテンシャルは波動方程式

$$\Box A^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu J_\rho, \quad \mu = 0,1,2 \tag{2}$$

を満たす．一方，Coulomb ゲージ条件 $\partial_j A^j = 0$ を課した場合には，次の楕円型方程式を満たす：

$$\Delta A_0 = \varepsilon_{jk}\partial_k J_j, \quad \Delta A_j = \varepsilon_{jk}\partial_k J_0, \ j = 1,2.$$

既存の結果について述べる．CSD 方程式を含むより一般の波動方程式系については Klainerman and Machedon [9] により $s = r > 3/4$ のとき時間局所的適切であることが示されている．また，Huh [6] により Lorenz ゲージ条件を課した CSD 方程式が $(s, r) = (5/8, 1/2)$ において時間局所的適切であることが示されている．さらに，Lorenz ゲージ条件の下では Huh and Oh [7] により，$s = r > 1/4$ における時間局所的適切性が得られている．Coulomb ゲージ条件では，Huh [6] により $s > 1/2, r = 0$ における時間局所的適切性が示されている．

観測可能な物理量である J^μ や $F_{\mu\nu}$ はゲージ変換で不変であり，ゲージ変換で移り合う二つの解は物理的には区別することができず，同一なものだとみなさなければならない．従って，ポテンシャル A_μ の表現は解析がより簡単になるように選択することができる．特に，Lorenz ゲージ条件では，CSD 方程式において共鳴現象が起こり特異性が強く表れる部分をゲージの選択を適当に行うことにより消去することが可能になる．

具体的には，Lorenz ゲージ条件下では，ゲージ関数 χ を適当に選択することにより，ポテンシャルの初期値を $a_0 = \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 = 0$ を満たすように取り換えることができる．さらに，(2) を積分方程式に書き直し，Dirac 方程式の右辺に代入すると，次の Dirac 方程式が得られる：

$$(-i\alpha^\mu \partial_\mu + m\beta)\psi = \cos(t\sqrt{-\Delta})\varepsilon_{kj}\Delta^{-1}\partial^k|\psi_0|^2 \cdot \alpha_j\psi + \mathcal{N}(\psi, \psi, \psi). \tag{3}$$

ただし，

$$\mathcal{N}(\psi_1, \psi_2, \psi_2) = \int_0^t \varepsilon^{\mu\nu\rho} K_\nu(t - t')\langle\alpha_\rho\psi_1, \psi_2\rangle(t')dt' \cdot \alpha_\mu\psi_3,\ K_\nu(t) = \begin{cases} \cos(t\sqrt{-\Delta}), & \nu = 0, \\ \sin(t\sqrt{-\Delta})\frac{\partial_j}{\sqrt{-\Delta}}, & \nu = j \in \{1, 2\} \end{cases}$$

とおいた．さらに，$\Pi(\xi) = \frac{1}{2}\left(I_2 + \frac{\xi_j\alpha^j}{|\xi|}\right)$ とし，$\psi_\pm := \Pi_\pm\psi$, $\Pi_\pm = \Pi(\pm\nabla/i)$ とおいて，次の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} (-i\partial_t \pm |\nabla|)\psi_\pm = -m\beta\psi_\mp + \Pi_\pm(\cos(t\sqrt{-\Delta})\Delta^{-1}\varepsilon_{kj}\partial^k|\psi_0|^2 \cdot \alpha_j\psi + \mathcal{N}(\psi, \psi, \psi)), \\ \psi(0, x) = \psi_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^2). \end{cases} \tag{4}$$

主結果． (4) は $s > 1/4$ のとき時間局所的適切である．

(4) の解としてスピノール ψ が得られれば (1) の第一式から Chern-Simons 場 $F_{\mu\nu}$ も定まる．さらに，(2) を使ってポテンシャル A_μ を構成することもでき，CSD 方程式の未知関数がすべて求まる．なお，Coulomb ゲージ条件を課した場合にも同様の書き換えが可能であり，Coulomb ゲージ条件下においても単独 Dirac 方程式に書き直した初期値問題は $s > 1/4$ のとき時間局所的適切になる．

適切性の証明においては，方程式を対応する積分方程式に書き直し，縮小写像の原理を用いて適切性を証明するという方法が一般的である．その際，どのような関数空間を用いて縮小性を示すかという問題が生じる．低い正則性を考察する場合には，Bourgain [1] や Klainerman and Machedon [10] により導入された Fourier 制限ノルム

$$X^{s,b}_\pm := \{u(t, x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+2}) : \|u\|_{X^{s,b}_\pm} := \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau \pm |\xi|\rangle^b \widetilde{u}(\tau, \xi)\|_{L^2_{\tau,\xi}} < \infty\}$$

を用いることが多い．ここで，$\widetilde{u}$ は u の時空間 Fourier 変換を表わす．$b > 1/2$ ととれば，これらの空間は $C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^2))$ に連続的に埋め込める．

(4) の線形部分 $(-i\partial_t + |\nabla|)u = 0$ の解は超関数として ‘(τ, ξ) 空間の曲面 $\tau = \pm|\xi|$ 上にのみ台を持つ’ という著しい性質も持つため，非線形方程式を線形方程式からの摂動と捉えるならば，非線形方程式の解もこの曲面の比較的近くに集中していることが予想される．一方，$X^{s,b}_\pm$ ノルムの定義をみると，$b > 0$ の場合は曲面から離れるほどノルムが大きくなるようになっている．従って，特に $b > 1/2$ では $C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^2))$ の中でも曲面 $\tau = \pm|\xi|$ 付近に重点的に分布する関数を中心に取りだして $X^{s,b}_\pm$ 空間が構成されており，この空間が解を見つけるのに有効であることが窺える．また，このような Fourier 制限ノルムを用いて適切性を示す際に鍵となるのは，次の非線形評価

式である：

$$\|(\cos(t\sqrt{-\Delta})\Delta^{-1}\varepsilon_{kj}\partial^k|\psi_0|^2\cdot\alpha_j\psi\|_{X_{\pm}^{s,b-1}}\le C\|\psi_0\|_{H^s}^2\|\psi\|_{X_{\pm'}^{s,b}},\ \|\mathcal{N}(\psi_1,\psi_2,\psi_3)\|_{X_{\pm}^{s,b-1}}\le C\prod_{j=1}^{3}\|\psi_j\|_{X_{\pm_j}^{s,b}}. \quad (5)$$

主結果では，(4) の非線形項を詳細に解析することにより，零構造と呼ばれる特殊な構造を有していることを発見した．ここで，零構造とは強い相互作用が消える特殊な非線形項のことであり，Christodoulou [2] や Klainerman [8] により導入された零条件や零形式を一般化した概念である．元々，零条件や零形式は 2 階の波動方程式の非線形項に対して定義されたものであり，本論文のような 1 階の方程式ではどのような形で零形式が現れるかという研究は多くはない．D'Ancona, Foschi, and Selberg [3] は，強い相互作用が消えるという零形式が持つ特性を抜き出し，1 階の Dirac 方程式の非線形項であってもそのような性質をもつ特殊な非線形項を零構造をもつと表現した．

$X_{\pm}^{s,b}$ ノルムの評価に関しては D'Ancona, Foschi, and Selberg [4] による双線形評価式が有用である場合が多い．実際，(5) の最初の不等式は 2 次の項の評価であるため，その評価式に帰着される．しかしながら，(5) の第二不等式では 3 次の非線形項を評価する必要があるので双線形評価の際には現れなかった非線形効果を考える必要がある．そのため，[4] の証明で重要な役割を果たした Selberg [11] による評価まで立ち戻り，双線形評価では現れないような相互作用を考慮に入れて，(4) の 3 次の項が扱えるように双線形評価式を改良した．さらに，今回用いた多重線形評価式が $s\le 1/4$ では破綻する反例も構成し，本論文の方法では $s<1/4$ における適切性が得られないことも証明した.

参考文献

[1] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations*, I, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 2, 107-156.

[2] D. Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. 2, 267-282.

[3] P. D'Ancona, D. Foschi, and S. Selberg, *Null structure and almost optimal local regularity for the Dirac-Klein-Gordon system*, J. Eur. Math. Soc. **9** (2007), no. 4, 877-899.

[4] P. D'Ancona, D. Foschi, and S. Selberg, *Product estimates for wave-Sobolev spaces in* $2+1$ *and* $1+1$ *dimensions*, Contemporary Math. **526** (2010), 125-150.

[5] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Three-dimensional massive gauge theories*, Physical Review Letters **48** (1982), no.15, 975-978.

[6] H. Huh, *Cauchy problem for the Fermion Field Equation Coupled With the Chern-Simons Gauge*, Lett. Math. Phys. **79** (2007), 75-94.

[7] H. Huh and S. Oh, *Low regularity solutions to the Chern-Simons-Dirac and the Chern-Simons-Higgs equations in the Lorenz gauge*, arXiv:1209.3841v1.

[8] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lectures in Appl. Math., **23**, 1986.

[9] S. Klainerman and M. Machedon, *On the regularity properties of the wave equation*, Math. Phys. Stud., 15, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[10] S. Klainerman and M. Machedon, *Smoothing estimates for null forms and applications*, Duke Math. J. **81**, (1995), no. 1, 99-133.

[11] S. Selberg, *Bilinear fourier restriction estimates related to the 2D wave equation*, Adv. Differential Equations **16** (2011), no. 7-8, 667-690.