ON THE THEORY OF NORMALIZED SHINTANI L-FUNCTION AND ITS APPLICATION TO HECKE L-FUNCTION

広瀬稔

本論文の主目的は, 正規新谷 L 関数の理論を展開することと, 正規新谷 L 関数を用いて総実代数体の HeckeL 関数を表すこと, 及びそれらの目的に必要となる Fan の理論を展開することである。本論文中では次数 n の総実代数体 K と K の Hecke 指標 χ に対して, 正規新谷 L 関数を用いて良い性質を持った n 変数の正則関数 $F:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を構成した。ここでいう良い性質として具体的には, F の対角成分が Hecke L 関数となること, F が関数等式をもつこと, 各 $1 \leq j \leq n$ と非負整数 k に対して $s_j - h + (\sigma(j) + 2k) = 0$ が $F(s_1, \ldots, s_n)$ の零因子となっていること, が挙げられる。ただしここで $\sigma(j)$ は χ によって定まる $\{0, 1\}$ の元であり, $h \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ は χ によって定まる複素数である。また χ が類指標となる場合には $h = 0$ となる。また, これらの結果が総実代数体の Hecke L 関数の関数等式の別証明を与えることも本論文では示した。

正規新谷 L 関数は, 新谷卓郎による新谷ゼータ関数の研究の延長線上にあるものである。新谷ゼータ関数は多重 Dirichlet 級数表示と積分表示の両方を持つが, 正規新谷 L 関数は積分表示よってのみ定義される。著者は本論文の第 2 節において, 次のような枠組みで正規新谷 L 関数を定義した。まず n を 1 以上の自然数とし, V を $\mathbb{Q}$ 上の n 次元ベクトル空間とする。さらに Φ を $V \otimes \mathbb{A}_f$ 上の Schwartz-Bruhat 関数とする。また $\mathbb{B}$ を V 上の fan とする。この際, Φ と $\mathbb{B}$ の組に対して正則性という条件を仮定する。また同型 $\rho : V \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ によって V が自然に $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれているものとする。このとき $\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^n$ を定義域とする正則関数として, 新谷 L 関数 $L(\boldsymbol{s}, \Phi, \mathbb{B}, \rho)$ がある種の積分表示によって定義される。また写像 $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ に対して, 正規新谷 L 関数 $L_\sigma(\boldsymbol{s}, \Phi, \mathbb{B})$ が新谷 L 関数の 2^n 個の和として定義される。本論文内の第 2 節では, $L(\boldsymbol{s}, \Phi, \mathbb{B}, \rho)$ 及び $L_\sigma(\boldsymbol{s}, \Phi, \mathbb{B}, \rho)$ が $\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^n$ 全体に正則関数として解析接続されること, $(\mathbb{B}, \rho)$ が特定の条件をみたす場合に $L(\boldsymbol{s}, \Phi, \mathbb{B})$ が和表示を持つこと, 及び $L_\sigma(\boldsymbol{s}, \Phi, \mathbb{B})$ が

$$\Gamma_\sigma(\boldsymbol{s}) L_\sigma(\boldsymbol{s}, \Phi, \mathbb{B}, \rho) = i_\sigma \Gamma_\sigma(\mathbf{1} - \boldsymbol{s})(\mathbf{1} - \boldsymbol{s}, \hat{\Phi}, \varphi(\mathbb{B}), \rho^*)$$

という形の関数等式を持つことを示した。ここで Γ_σ はガンマ因子, i_σ は絶対

値 1 の複素数, $\hat{\Phi}$ は Φ の Fourier 変換, $\varphi(\mathbb{B})$ は $\mathbb{B}$ の dual fan, ρ^* は ρ の双対である。

また, 本論文中の第 4 節において著者は, 正規新谷 L 関数を用いて Heccke L 関数を表すことができることを証明した。実際には K の Hecke 指標 χ と群環の元 $\gamma \in \mathbb{C}[I_K]$($I_K$ は K の分数イデアルのなす群), 及び K 上の基本領域的 Fan$\mathbb{D}$ に対して, 正規新谷 L 関数を用いて, 次のような性質を満たす正則関数 $F_{\chi,\gamma,\mathbb{D}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を構成した。

1. $F_{\chi,\gamma,\mathbb{D}}(s,\ldots,s) = L(s,\chi,f)$. ここで $L(s,\chi,\gamma)$ は χ の Hecke L 関数を γ により少し修正したもの。

2. $F_{\chi,\gamma,\mathbb{D}}$ は次の形の関数等式を持つ。

$$\Gamma_\chi(\boldsymbol{s})F_{\chi,\gamma,\mathbb{D}}(s_1,\ldots,s_n) = i_\chi k(\chi)\Gamma_{\chi^{-1}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{s})F_{\chi^{-1},\hat{\gamma},\varphi(\mathbb{D})}(1-s_1,\ldots,1-s_n)$$

   ただし, Γ_χ は χ によって定まるガンマ因子, $i_\chi k(\chi)$ は χ にのみ依存する複素数, $\hat{\gamma}$ は γ から定まる $\mathbb{C}[I_K]$ の元である。

また, 関数等式により $F_{\chi,\gamma,\mathbb{D}}$ が望ましい零因子を持つことも分かる。このような関数の構成が自明でない理由として, 正規新谷 L 関数が Dirichlet 級数表示を持たないことが挙げられる。著者は, この問題を回避するために, ある種の正規新谷 L 関数の対角成分の計算を級数表示を持つ場合の新谷 L 関数の計算に帰着させる手法を導入した。この方法には基本領域的 Fan の性質が本質的に用いられる。また Hecke L 関数を正規新谷 L 関数で表す際に解決が必要な問題として, 正規新谷 L 関数の定義における $(\Phi,\mathbb{D})$ の正則性条件の問題がある。著者は, 総実代数体の p 進 L 関数の構成に用いられた Cassou-Noguès の手法を拡張することにより, この問題を解決した。

本論文の第 3 節では, これらの結果の証明のために Fan に関する理論を展開した。集合 X に対して X 上の m 次元コーンとは

$$\Lambda(v_1,\ldots,v_m) \quad (v_1,\ldots,v_m \in X)$$

と書かれる形式的な記号であり, また X 上の m 次元 Fan とは X 上の m 次元コーンの形式的な $\mathbb{Z}$ 係数和のことである。$C_m(X)$ で X 上の m 次元 Fan のなす $\mathbb{Z}$ 加群を表す。本論文の第 3.2 節では Abel 群 G が X に作用している場合について考察した。特に $g_1,\ldots,g_m \in G$ と $x \in X$ に対して, 特別な $C_{m+1}(X)$ の元 $F(x;g_1,\ldots,g_m)$ を定義し, いくつかの性質を証明した。ここで示される性質は, 正規新谷 L 関数と Hecke L 関数を結びつける際に必要となる。また第 3.3 節ではある体 F 上の n 次元ベクトル空間 V に対して, $X = V \setminus \{0\}$ となる場合に, 双対写像 $\varphi : C_n(V \setminus \{0\}) \to C_n(V^* \setminus \{0\})$ を定義し, その性質について調べた。第 3.4 節では $X = V/\{0\}$ で更に Abel 群 G が X に線形に作用している場合に, $\varphi(F(x;g_1,\ldots,g_{n-1}))$ について考察した。$W(V^*) \subset C_n(V^*)$

を $\Lambda(v_1,\ldots,v_n)(v_1,\ldots,v_n \in V^* \setminus \{0\}$ は線形従属) で生成される部分 $\mathbb{Z}$ 加群, $I_n(V^* \setminus \{0\}, G) \subset C_n(V^*)$ を

$$\Lambda(gv_1,\ldots,gv_n) - \Lambda(v_1,\ldots,v_n) \quad (g \in G,\ v_1,\ldots,v_n \in V^* \setminus \{0\})$$

で生成される部分 $\mathbb{Z}$ 加群, $\partial_n : C_n(V^*) \to C_{n-1}(V^*)$ を境界写像, $a \in V \setminus \{0\}$,$b \in V^* \setminus \{0\}$ とした時に

$$\varphi(F(a;g_1,\ldots,g_n)) - F(b;g_1,\ldots,g_n) \in W(V^*) + I_n(V^* \setminus \{0\}, G) + \ker \partial_n$$

となるというのが, この節の主結果である。3.1∼3.4 節における議論の大部分が, この結果の証明のために用いられる。またこの結果は第 4 節で $F_{\chi,\gamma,\mathbb{D}}$ の関数等式から Hecke L 関数の関数等式を導く際に用いられる。

以上が本論文の概要である。