括約誤差に関する研究

Untersuchungen über den Abrundungsfehler in der Bestandesmassenermittlung

大隅眞一

まえがき

一般に測定あるいは計算で，程度の差こそあれ，括約が行われないことはない。測樹において特にそれが問題となるのは，輪尺による立木の胸高直径測定の場合であるが，括約単位の大なることゝ，その影響が断面積あるいは材積におよぶ点に特異性を有する。林木の材積調査では括約は不可避であり，あるいは当然なさるべき場合が非常に多く，厳密には測定の目的，対象，時間あるいは労力等によつて括約単位は当然変つてしかるべきであるが，従来の括約に対する態度は多く常識の程度を出ていない。合理的，集約的な調査では，このことは当然問題となるべきで，そのためには括約によつて生ずる誤差即ち括約誤差の妥当な評価が先決問題となつてくる。

括約誤差は古くからの測樹学における研究課題の一であつた。W. TISCHENDORF から H. A. MEYER に至る一連の卓越した理論的ならびに実験的研究で，この問題はほゞ解決をみたように思われるが，なお不完全な点もあり，又誤解も少くないように思われるので，こゝにこの問題の根本的解明を試みた。本論文は輪尺による林木の直径測定の場合の括約誤差，ならびにその断面積および材積計算への影響をとり扱つたもので，一部既発表(9)(10)(11)* の部分も含まれている。

研究ならびにとりまとめに当つては，京都大学岡崎教授の御指導に負うところ多大である。こゝに深甚の謝意を表する。

緒論

過失（Mistake）による誤差を慮外におけば，一般測定誤差は習慣上定誤差（Systematic error, Systematischr Fehler）** および偶発誤差（Accidental error, Zufälliger Fehler）に区分せられる。定義によれば，前者はその原因が明かであつて，補正によつてとり除くことの出来るものであるが，後者は全く調整不可能な多くの原因から発生するものであり，これを一つの確率変数（Random variable）としてとり扱うことのできるものである。

括約誤差（Rounding error, Abrundungsfehler）の生ずる原因は括約すること自体にあり，括約せざる測定を行うことによりこれをとり除き得るものであるから，上述の定義に従う限り，即ち括約誤差を一般観測誤差の一種と見る限り，それは定誤差であるといえる。しかしながら括

---

* 数字は巻末の引用文献の番号を示す。以下同様

** 誤差の定義および用語は，統計学辞典（1953，東洋経済新報社）による。
誤差の分類は人により必ずしも同じでなく，系統誤差（Systematic error）の中特に，常に同一の大きさおよび符号を以て現れる誤差を一定誤差と呼んで細分する人もあるが（芝亀吉；最小自乗法，応用数学第9巻，1943．河出書房）これが本文中の定誤差でないことはもちろんで，それに相当するものは系統誤差である。系統誤差および定誤差はそれぞれ Systematic error および Constant error に対する訳語であろうが，上記統計学辞典の用語によつても，又定誤差＝Constant error (Systematc error) なる記載が見られる（水野善右衛門，測定値整理法，1949）ことよりしても，両者が同一概念をあらわすものと考えて差し支えないであろう。

約誤差の原因たる括約は意識的になされるものであるから，その補正は技術的に可能であつても，目的上なし得ないことに注意すべきである。即ち括約誤差は一般観測誤差とその性格を根本的に異にし，従つて上述の如き定義を以てこれを律することはできない。

しかもなお括約誤差は，括約せざる測定を行わない限りその大きさが不明であり，又正負何れの方向にも起り得る点において，換言すれば一つの確率変数と見做され得る点において，偶発誤差の性格と厳密には一致しないにしても，大きな類似性を示す。今上述の定義とは別に“一つの確率変数としてとり扱い得るものを偶然誤差＊ と定義する”ならば，括約誤差は偶然誤差である。本論文における偶然誤差とはかゝる意味におけるものである。

括約誤差のかゝる複雑な性格を初て明かにしたのは W. TISCHENDORF [1] であつて，彼が括約誤差は“現実の避け得ざる観測誤差の性格はもたない”が，同時にそれは“避け得ざる観測誤差の性質と，厳密には一致しないまでも，大きな類似を示す”として，GAUSS に準じてそれをとり扱つたことは，理論的には尚不完全であるとしても，又当時の測樹学者の強い批難にもかゝわらず妥当であつたといえる。

或る一個の直径測定値が得られたとき，その値は一定の括約単位（直径階幅，或は括約幅）を以て区分せられた何れかの直径階に属することは確実であるが，その所属直径階内において何れの位置を占めるかは全く偶然に定まるべきことがらである。この偶然的な位置に対する値と，その直径階の予め定められた代表値，即ち直径階の中央階（四捨五入式括約，Auf-und Abrundung für die ,Stufenmitte），あるいは直径階の下限値（切捨括約，Einseitige Abrundung）との差として規定せられる＊＊ 括約誤差は，従つて亦偶然の支配する領域にある。

偶然誤差としての括約誤差の特徴は，その大きさの限界が明瞭なことゝ，測定された直径により，その限界内の或る位置が偶然的に指定されることによつて，その偶然性が附与されることにある。これは無限域において，測定対象の真値を中心とする測定値の偶然変動によつて生ずる一般の偶発測定誤差と取扱上区別さるべき重要な点である。

前沢 [8] が直径測定の方向を増加することによつて括約誤差を減少せしめ得るとしたのは，両者の混同による誤謬ではないかと考えられる。同一樹幹の多方向からの測定における括約誤差は，相互に独立ではあり得ないからである。蛇足ではあるが一方で括約測定を行い，他方で測定方向を増加して，括約による誤差を減少せしめようとすることも現実的に矛盾している。

偶然誤差である括約誤差の正しい評価には確率論の導入を待たねばならないが，この正しい方向を最初に指示したのは W. TISCHENDORF [1] であつた。括約誤差の確率論的取扱にあたつては，先ず括約誤差を生起せしめる直径の，当該直径階内における頻度分布（本数分配）が知られているか又は仮定されねばならない。このような法則の中で最も基本的且つ簡単なものは，一直径階内における各直径が全て等しい確率を以て存在している場合であつて，具体的には一直径階内における本数分配が一様である場合である。これを一様分布（Gleichmässige Verteilung）と呼ぶ。一様分布にあつては括約誤差の確率密度も全変域を通じて等しい筈である。この場合が基本的であるのは，現実の本数分配が，一直径階内では，近似的に一様と見做し得る場合のあることゝともに，本数分配不明の場合になさるべき仮定は一様分布以外にはないからである。

W. TISCHENDORF の研究は，この一様分布以外には出なかつたが，L. TIRÉN ＊＊＊ はその他に

＊ 偶然誤差なる語は一般誤差論においても，しばしば偶発誤差と同義に用いられる。

＊＊ 一般誤差論では，〔誤差〕＝〔測定値〕－〔真値〕と定義する。本論文においてもこれに準じて〔括約誤差〕＝〔括約値〕－〔真値〕と定義する。これは誤差の本質上当然の定義であるが，H. A. MEYER および M. PRODAN 等は〔括約誤差〕＝〔真値〕－〔括約値〕としている。

＊＊＊ 未見；引用は H. A. MEYER,[2] M. PRODAN [3] による。

林分の直径別本数分配が正規分布に従う場合について研究を行い，次いで H. A. MEYER [2) *] は照査法における成長量査定に関連して，彼自身によつて定義せられた択伐林型本数分配 ** の場合の括約誤差を論じた。

本論文ではこれら3つの場合につき論述する。これら以外の本数分配にまで及ぶことの不必要性は，後章において明にされよう。

本論文においては，括約によつて生ずる直径の誤差を直径括約誤差と称し，その影響による断面積，材積および成長量の誤差を，それぞれ断面積-，材積-および成長量括約誤差と呼んで区別する。こゝに成長量とは，照査法において定義せられる如く，同一林分の，一定期間をへだてゝの蓄積の差として規定せられるものである。H. A. MEYER [2)] がその議論を断面積括約誤差までに止めたことは，その目的が照査法における成長量査定方法の妥当性を証明することにあつたにしても，なおかつ必ずしも充分とは称し難い。照査法が採用する材積査定方法にあつても，総材積括約誤差率は，一般には総断面積括約誤差率に等しからざることが証明されるからである。***
本論文で筆者は，断面積括約誤差を基として，材積および成長量括約誤差にまで論及せんとする。

L. TIRÉN [2) 3)], H. A. MEYER [2)], M. PRODAN [3)] 等は，括約誤差の中に系統的括約誤差（Systematischer Abrundungsfehler）と偶然的括約誤差（Zufälliger Abrundungsfehler）の二元的要素を認め，後者を特に直径階区分誤差（Stufeneinteilungsfehler）**** と名付けた。彼等が系統的括約誤差と称するものは，一直径階内の断面積平均木の直径が，その直径階の中央値と一致せざるために生ずる誤差，および正規型本数分配，MEYER 型本数分配において，一直径階内の平均直径がその直径階の中央値と一致せざるために生ずる誤差である。筆者はかゝる区分に反対で，括約誤差は，あらゆる意味において，完全なる偶然誤差であるとの見地に立つて論を進め，彼等をして二元的取扱を余儀なくせしめた括約誤差の複雑なる性格を解明せんとする。

本論文は四捨五入式括約のみをとりあつかう。それは切捨括約が行われることの少いことにもよるが，切捨括約の理論も，原点移動を考慮することにより，簡単に四捨五入式括約の理論に合致せしめ得るからに他ならない。

---

* MEYER, H. A.; Die rechnerischen Grundlagen der Kontrollmethoden. 1934.
照査法における成長量査定法の技術的可能性を証明せんとしたもので，単に括約誤差に止まらず，一般観測誤差，輪尺誤差および断面の正円ならざることに基く誤差等凡そ測樹において起り得るあらゆる種類の誤差を理論的ならびに実験的にとりあつかつており，優れた研究報告である。

** 第3章参照．本論文ではこれを特に MEYER 型本数分配と名付ける。

*** 第4章参照

**** 上述の如く偶然誤差としての括約誤差は，或る一定の幅の直径階の任意の位置を，現実の直径値が偶然的に占めることによつて生ずるものとして把握されるが，これは又逆に一定の直径値に対し，直径階が任意に区分せられることにより生ずるものと考えることも出来る。Stufeneinteilungsfehler なる名称はかゝる観点から与えられたものであろう。

第　1　章

直径階内における本数分配が一様分布に従う場合の括約誤差

本章の論議は，一直径階内における全ての直径の存在に関する確率が，等しいということが知られているか又は仮定せられる場合における直径括約誤差および断面積括約誤差に関するものである。この場合が重要なのは，それが括約誤差に対する考察の基準をなすからである。更に本数分配が不明な場合，たとえば少数の樹木集団の測定に対しても，本章の理論はそのまゝ適用され得るであろう*。H. A. MEYER[2], M. PRODAN.[3] 等は一直径階内における林木の本数が充分多数であることを仮定しているが，かゝる仮定は不必要である。

1. 直径括約誤差**

（a） 単一の直径括約誤差

先ず単一の直径括約誤差について考察を進める。一般に一つの確率量の分布函数を $f(x)$, 確率密度を $\psi(x)$ とすると次の関係がある。

$$f'(x)=\psi(x)\ ,\ f(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi(s)ds\ ,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx=1.$$

今単一の直径括約誤差を Δd で表し，その分布函数を $f(x)$，密度函数を $\psi(x)$ で表す。括約単位を a とすれば，Δd は $\frac{a}{2}$ と $-\frac{a}{2}$ の間の値を全く公平にとり，この外の値はとらない。故に $x\leqq-\frac{a}{2}$ および $x>\frac{a}{2}$ においては $\psi(x)=0$ である。$-\frac{a}{2}<x\leqq\frac{a}{2}$ なるときは Δd はこの間の全ての値を全く公平にとるから，この間においては $\psi(x)=$一定 である。しかして

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\psi(x)dx=1$$

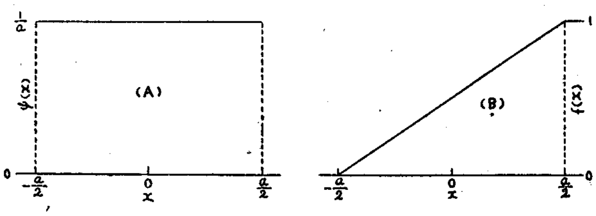
なることは括約誤差の性質ならびに密度函数の性質より明かであつて，これを満足する $\psi(x)$ の値は容易に次の如く見出される。

$$\psi(x)=\frac{1}{a}$$

以上をまとめれば，

$$\left.\begin{array}{lll} x\leqq-\frac{a}{2} & \cdots\cdots\psi(x)=0 & ,\ f(x)\doteqdot 0 \\ -\frac{a}{2}<x\leqq\frac{a}{2} & \cdots\cdots\psi(x)=\frac{1}{a} & ,\ f(x)=\frac{x}{a}+\frac{1}{2} \\ x>\frac{a}{2} & \cdots\cdots\psi(x)=0 & ,\ f(x)=1 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔1.1〕$$

これを図示すれば図〔1.1〕の如くなる。



図〔1.1〕 一様本数分配における単一直径括約誤差の分布
(A)；$\psi(x)$　，(B)；$f(x)$

---

* かゝる少数の樹木の測定にあたつて，括約を行う必要はないであろう。こゝには単にかゝる場合にも以下の理論が成立することを指摘したに過ぎない。

** 本節の所論については文献 (9) 参照。

平均：　$m(\Delta d)=\frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x\,dx=0$ ……………………………………〔1.2〕

分散：　$\mu^2(\Delta d)=\frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\,dx=\frac{a^2}{12}$ ……………………………………〔1.3〕

従つて標準直径括約誤差を $\mu(\Delta d)$ とすれば，

$\mu(\Delta d)=\frac{a}{2\sqrt{3}}$ ……………………………………〔1.4〕

これは既に W. TISCHENDORF [1] の得たところである。式〔1.1〕により，一様分布における単一の直径括約誤差の絶対値が，x を超える確率を，種々の括約単位に対して示せば表〔1.1〕のようになる。

表〔1·1〕一様分布における単一の直径括約誤差の絶対値が x を越える確率 P

a=1cm	2 cm	4 cm	5 cm	P	a=1cm	2 cm	4 cm	5 cm	P
x					x				
0	0	0	0	1	0.3	0.6	1.2	1.5	0.4
0.1	0.2	0.4	0.5	0.8	0.4	0.8	1.6	2.0	0.2
0.2	0.4	0.8	1.0	0.6	0.5	1.0	2.0	2.5	0

（b）直径括約誤差の和－林木測定の際の直径括約誤差

Δd_1, Δd_2,……, Δd_n を以て相互に独立な n 個の直径括約誤差とし，$\Delta D=\Delta d_1+\Delta d_2+\cdots+\Delta d_n$ とするとき，ΔD の確率分布はどうなるか，具体的には n 本の林木を測定した場合の直径括約誤差の和の問題である。この解明は実用的には余り重要ではないが，後論の理解を援ける上に必要であろう。

これについては宇野 [12] の四捨五入の誤差に関する詳細な研究がある。これを準用すれば，ΔD の分布函数は次の如く与えられる。

$f_n(x)=\frac{1}{a^n}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k {}_nC_k\, T_n\left[x+(n-2k)\frac{a}{2}\right]$ ……………………〔1.5〕

又は．

$f_n(x)=\frac{1}{a^n n!}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k {}_nC_k\left[x+(n-2k)\frac{a}{2}\right]$ ……………………〔1.6〕

但し $T_n(x)$ は

$$T_n(x)=\begin{cases}\frac{x^n}{n!} & \cdots\cdots\ x>0\\ 0 & \cdots\cdots\ x\leqq 0\end{cases}$$

なる如く定義された函数で，いうまでもなく

$$\int_{-\infty}^{x} T_{n-1}(s)\,ds=T_n(x)$$

なる性質がある。又 λ は $\frac{x}{a}+\frac{n}{2}$ の整数部分であつて，たとえば $\frac{x}{a}+\frac{n}{2}=3.46$ ならば $\lambda=3$

である。k は正の整数で式中 $k>\lambda$ に相当する項は上の定義により全て 0 となる。

$f_n(x)$ は $(0, \frac{1}{2})$ に関し対称であるから，

$$f_n(x)+f_n(-x)=1$$

従つて直径括約誤差の和の絶対値が x を超える確率は次式によつて与えられる。

$$P=1-\{f_n(x)-f_n(-x)\}=2\{1-f_n(x)\} \quad\cdots\cdots〔1.7〕$$

$n=2\sim10$ なるときの P の値を表〔1.2〕に示す。

表〔1·2〕一様分布における n 個の直径括約誤差の和の絶対値が x を超える確率

$P=1-\{f_n(x)-f_n(-x)\}$

a (cm)				$n\to$ 2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	5									
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.1	0.2	0.4	0.5	0.81	0.8506	0.8672	0.8805	0.8904	0.8924	0.9040	0.9136	0.9214
0.2	0.4	0.8	1.0	0.64	0.7054	0.7382	0.7634	0.7828	0.7959	0.8100	0.8210	0.8264
0.3	0.6	1.2	1.5	0.49	0.5680	0.6160	0.6513	0.6788	0.6986	0.7184	0.7334	0.7436
0.4	0.8	1.6	2.0	0.36	0.4426	0.5030	0.5462	0.5804	0.6064	0.6302	0.6494	0.6648
0.5	1.0	2.0	2.5	0.23	0.3334	0.3956	0.4497	0.4890	0.5202	0.5470	0.5698	0.5880
0.6	1.2	2.4	3.0	0.16	0.2430	0.3116	0.3632	0.4056	0.4405	0.4694	0.4946	0.5162
0.7	1.4	2.8	3.5	0.09	0.1706	0.2358	0.2873	0.3308	0.3668	0.3984	0.4249	0.4486
0.8	1.6	3.2	4.0	0.04	0.1144	0.1722	0.2230	0.2652	0.3015	0.3336	0.3614	0.3861
0.9	1.8	3.6	4.5	0.01	0.0720	0.1220	0.1682	0.2086	0.2441	0.2760	0.3042	0.3303
1.0	2.0	4.0	5.0	0	0.0416	0.0834	0.1239	0.1610	0.1947	0.2252	0.2528	0.2773
1.1	2.2	4.4	5.5		0.0214	0.0546	0.0887	0.1218	0.1527	0.1818	0.2076	0.2315
1.2	2.4	4.8	6.0		0.0090	0.0342	0.0616	0.0900	0.1176	0.1438	0.1684	0.1921
1.3	2.6	5.2	6.5		0.0026	0.0200	0.0414	0.0650	0.0886	0.1125	0.1350	0.1568
1.4	2.8	5.6	7.0		0.0004	0.0108	0.0268	0.0458	0.0660	0.0866	0.1066	0.1267
1.5	3.0	6.0	7.5		0	0.0052	0.0166	0.0314	0.0480	0.0654	0.0832	0.1008
1.6	3.2	6.4	8.0			0.0022	0.0098	0.0210	0.0341	0.0488	0.0641	0.0794
1.7	3.4	6.8	8.5			0.0007	0.0054	0.0134	0.0236	0.0356	0.0484	0.0620
1.8	3.6	7.2	9.0			0.0001	0.0028	0.0082	0.0160	0.0255	0.0362	0.0475
1.9	3.8	7.6	9.5			8×10^{-6}	0.0012	0.0050	0.0105	0.0180	0.0266	0.0360
2.0	4.0	8.0	10.0			0	0.0005	0.0028	0.0067	0.0122	0.0191	0.0270
2.4	4.8	9.6	12.0				2×10^{-7}	0.0001	0.0008	0.0022	0.0043	0.0072
2.8	5.6	11.2	14.0					2×10^{-7}	3×10^{-5}	0.0003	0.0007	0.0014
3.2	6.4	12.8	16.0						9×10^{-8}	8×10^{-6}	6×10^{-5}	0.0002
4.0	8.0	16.0	20.0							0	1×10^{-8}	6×10^{-7}
5.0	10.0	20.0	25.0									0

ΔD の密度函数を $\psi_n(x)$ とすれば，式〔1.5〕より

$$\psi_n(x)=\frac{1}{a^n}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k {}_nC_k\, T_{n-1}\left[x+(n-2k)\frac{a}{2}\right] \quad\cdots\cdots〔1.8〕$$

又は

$$\psi_n(x)=\frac{1}{a^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k {}_nC_k\left[x+(n-2k)\frac{a}{2}\right]^{n-1} \quad\cdots\cdots〔1.9〕$$

直径括約誤差の性質として，又上式より証明される如く， $x>\frac{na}{2}$ 及び $x\leqq-\frac{na}{2}$ なるとき，$\psi_n(x)=0$ なることはいうまでもない。

平均：$\varDelta D$ の平均を $m(\varDelta D)$ とすると，

$$m(\varDelta D)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔1.10〕$$

なることは，式〔1.8〕及び〔1.9〕が $x=0$ に関し対称なることより明である。即ち

$$m(\varDelta D)=\frac{1}{a^n}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k{}_nC_k\int_{-\frac{na}{2}}^{\frac{na}{2}}x\,T_{n-1}\left[x+(n-2k)\frac{a}{2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{a^n}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k{}_nC_k\,\frac{n^2-n+2k}{2(n-k)}\,T_{n+1}[a(n-k)]$$

$T_n(x)$ 及び λ に関する定義を考慮し，n に種々の値を与えることによつて容易に知られる如く，$m(\varDelta D)=0$ である。このことは又次の関係からも容易に得られる。

$$m(\varDelta D)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\psi(x_1)\psi(x_2)\cdots\psi(x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=m(\varDelta d_1)+m(\varDelta d_2)+\cdots+m(\varDelta d_n)=0$$

分散：

$$\mu^2(\varDelta D)=\frac{1}{a^n}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k{}_nC_k\int_{-\frac{na}{2}}^{\frac{na}{2}}x^2T_{n-1}\left[x+(n-2k)\frac{a}{2}\right]dx$$

$$=\frac{a^2}{4(n+2)!}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k{}_nC_k\left[n^3(n-1)+2n^2(2k+1)-8k(n-k)\right](n-k)^n$$

逐次 $n=2,3\cdots\cdots$ とおけば

$$n=2\cdots\cdots\mu^2(\varDelta D_2)=a^2/6$$

$$n=3\cdots\cdots\mu\ (\varDelta D_3)=a^2/4$$

$$\vdots$$

$$\text{一般に}\cdots\cdots\mu^2(\varDelta D_n)=na^2/12\quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔1.11〕$$

従つて標準誤差は $\mu(\varDelta D_n)=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{n}{3}}$ ……………〔1.12〕

これは又“一般に独立なる確率量の和の分散は，それぞれの分散の和に等しい”という統計学の定理よりも容易に導かれることである。

今 $a=2,4,5$ cm, $n=2\sim10$ として $\mu(\varDelta D)$ および誤差の絶対値がそれを超える確率を計算すると，表〔1.3〕のようになる。

表〔1.3〕によれば，n 個の括約誤差の和がそれぞれの標準誤差を超える確率は n の値如何にかゝわらずほゞ相等しく，しかも n の増大と共に或る一定の値に収斂する傾向を示している。

表〔1・3〕一様分布における標準直径括約誤差(cm)および誤差の絶対値がそれを超える確率(P)

n	a			P
	2cm	4cm	5cm	
2	0.8164	1.6328	2.0410	0.3502
3	1.0000	2.0000	2.5000	0.3333
4	1.1547	2.3094	2.8868	0.3307
5	1.2909	2.5818	3.2272	0.3298
6	1.4142	2.8284	3.5355	0.3258
7	1.5275	3.0550	3.8188	0.3245
8	1.6330	3.2660	4.0825	0.3236
9	1.7320	3.4640	4.3300	0.3235+
10	1.8257	3.6514	4.5642	0.3235−

即ちn個の相互に独立なる直径括約誤差の和の分布は，nの増大とともに或る一定の型の分布に近ずくことを暗示する。この一定の型の分布は，宇野[12]の証明にある如く正規分布であつて，前記の確率は正規分布において誤差の絶対値がその標準誤差を超える確率 0.3174 に近ずく傾向を示しているのである。即ち“nが充分大なるとき，$\varDelta D$の分布は近似的に，平均0，分散$\frac{na^2}{12}$を以て正規分布をなす”と見做し得て，式〔1.5〕又は〔1.6〕の正確式による代りに正規分布に関する智識を以て括約誤差の評価をなすことができる。このことは単に今の場合のみでなく，多くの場合に成立する事柄である。こゝにnの充分なる大きさは，表〔1.3〕より$n>4\sim5$と見てよいであろう。尚$\varDelta D$の平均値の周りにおける第3次モーメントを$M_3(\varDelta D)$，第4次モーメントを$M_4(\varDelta D)$とし，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{非対称度} \cdots\cdots & \beta_1=\dfrac{\{M_3(\varDelta D)\}^2}{\{\mu^2(\varDelta D)\}^3} \\ \text{尖度} \cdots\cdots & \beta_2=\dfrac{M_4(\varDelta D)}{\{\mu^2(\varDelta D)\}^2}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔1.13〕$$

とすると，正規分布では$\beta_1=0$，$\beta_2=3$である。従つてこれらの数値の大きさは正規分布に対する近似度を示す一つの目安となる。今の場合$n=4$では$\beta_1=0$，$\beta_2=2.7$，$n=20$では$\beta_1=0$，$\beta_2=2.94$で，$n\to\infty$なる場合の$\psi_n(x)$の正規分布への接近を示している。

さて一般に正規分布函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du$$

但し　σ；標準誤差

において，$\sigma=1$なる場合を特に$\phi(x)$と記せば，$f(x)=\phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$，従つて正規分布において誤差の絶対値がある正数を超える確率は，

$$1-\left[\phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{-x}{\sigma}\right)\right]$$

又$x=\alpha\sigma$（但しαは任意の正数）を超える確率は

$$1-[\phi(\alpha)-\phi(-\alpha)]$$

である。これは即ち標準誤差の値如何にかゝわらず，正規分布である限りは，その誤差の絶対値が標準誤差の正数倍を超える確率は一定であることを意味している。

$$1-[\phi(1)-\phi(-1)]=0.3174$$

であつて，表〔1.3〕はnの増大と共に，直径括約誤差の和の絶対値の，その標準誤差$\mu(\varDelta D)$を超える確率がこの値に近ずく傾向を示しているのである。

以上によつて例えば5 cm 括約の輪尺を用い，直径階内本数分配が一様分布に従う100本の林木を毎木調査した場合の総直径括約誤差に対する標準誤差は，

$$\mu(\varDelta D_{100})=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{100}{3}}=14.43(\mathrm{cm})$$

であり，且$1-[\phi(1.96)-\phi(-1.96)]=0.05$であるから，総直径括約誤差の絶対値が$14.43\times1.96=28.28$ (cm) 以内にあることが，95% の信頼度を以て推定せられる。この値がこの場合の最大可能誤差 250 cm の約$\frac{1}{10}$に過ぎないことに注意すべきである。

2. 断面積括約誤差

前節においては括約による直径測定値の誤差をとりあつかつた。本節においては，このような

誤差を含む直径測定値に基く計算により惹起せらるべき断面積の誤差，即ち断面積括約誤差の性質を論ずる。

（a） 単一の断面積括約誤差

既述の如く，一様本数分配における単一の直径括約誤差 Δd の密度函数は，$\psi(x)=\frac{1}{a}$ である。

これに対応する断面積括約誤差 Δg の密度函数を導こう。d を直径階の中央値，即ち括約せられた直径値とし，又誤差の性質上，直径括約誤差の場合と同様

断面積括約誤差＝括約断面積－真の断面積

と定義する，H. A. MEYER [2]，M. PRODAN [3] 共に

括約誤差＝真値－括約値

と定義しているようであるが，このような定義はやゝもすると誤解を招くおそれがある。しかるときは，

$$\Delta g=\frac{\pi}{4}\left\{d^2-(d-\Delta d)^2\right\}=\frac{\pi}{4}\left\{2d\Delta d-(\Delta d)^2\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots〔1.14〕$$

L. TILÉN [2] [3]，H. A. MEYER [2]，M. PRODAN [3] 等が系統的括約誤差（Systematischer Abrundungsfehler）に対する考慮を余儀なくされたのは，式〔1.4〕において $(\Delta d)^2$ なる項を省略して，誤差伝播の法則を適用したことによるものであろう。直径括約誤差は，一般の偶発誤差と異り，その限界値がかなり大きく，しかもその全変域において等しい，或は殆ど等しい確率密度を有することからして，上の二乗項の無条件なる省略は避けらるべきである。本論文ではかゝる無条件的省略は行われない。

式〔1.14〕において明かなように，Δg は Δd が等値でも，直径階が異るにつれて変化する。

$\Delta d=x$ なるときの，第 i 直径階における Δg の値を y_i で表すと，

$$y_i=\frac{\pi}{4}\left(2d_i x-x^2\right)$$

微分すれば

$$dy_i=\frac{\pi}{2}(d_i-x)\,dx$$

従つて式〔1.1〕より Δg の密度函数として

$$\psi(y_i)=\frac{2}{a\,\pi\,(d_i-x)}$$

が得られる。こゝに a は括約単位である。

しかるに

$$x=d_i\pm\sqrt{d_i^2-\frac{4}{\pi}y_i}$$

$x>d_i$ なる場合はあり得ないから，必ず

$$x=d_i-\sqrt{d_i^2-\frac{4}{\pi}y_i}$$

でなければならぬ。故に

$$\psi(y_i)=\frac{2}{\pi a\sqrt{d_i^2-\frac{4y_i}{\pi}}}=\frac{1}{a\sqrt{\pi}\sqrt{g_i-y_i}}$$

$$但し\quad g_i=\frac{\pi}{4}d_i^2$$

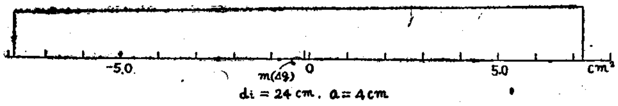
即ち Δg の密度函数は

$$\psi(y_i)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}(g_i-y_i)^{-\frac{1}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots〔1.15〕$$

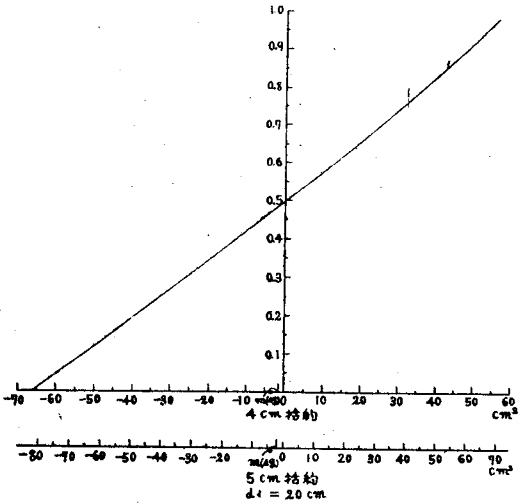
となる。明かに $y_i=0$ に関して非対称で，a の他に直径階及び y_i の函数である。図〔1.2〕にこれを例示する。式〔1.15〕を y_i の全変域について，即ち $-\frac{\pi}{4}\left(d_i a+\frac{a^2}{4}\right)$ より $\frac{\pi}{4}\left(d_i a-\frac{a^2}{4}\right)$ まで積分すれば，Δg の分布函数として

$$f(y_i)=\frac{1}{a}\left(\frac{a}{2}+y_i\right) \cdots\cdots〔1.16〕$$

を得る。いうまでもなく y_i は a が等しくても直径階によりその大きさ及び分布を異にする。図〔1.3〕にこれを例示する。



圖〔1.2〕一様本数分配における単一断面積括約誤差の密度分布



図〔1.3a〕一様本数分配における単一断面積括約誤差の分布

平均：

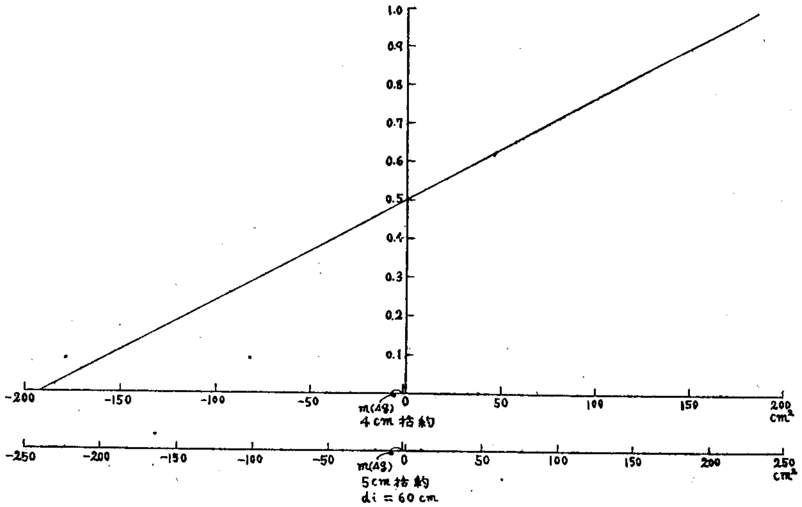
$$m(\Delta g)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{4}\left(d_i a+\frac{a^2}{4}\right)}^{\frac{\pi}{4}\left(d_i a-\frac{a^2}{4}\right)} y_i\,(g_i-y_i)^{-\frac{1}{2}}\,d y_i$$

$$=-\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\left(\frac{a^3}{6}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=-\frac{\pi a^2}{48} \cdots\cdots〔1.17〕$$

式〔1.17〕によれば，断面積括約誤差の平均は，直径階の位置には無関係で括約単位のみの函数であり，しかも常に負の値を示す。換言すれば，括約直径を以て計算された単木の断面積は，直径の大きさに無関係に，**平均として** $\frac{\pi a^2}{48}$ だけ過小の値を与える。これは又括約直径を以て計算された断面積と，当該直径階における平均断面積との差でもある。H. A. MEYER[2] はこのようにして上と同じ結果を導いた。* 彼ならびに L. TIRÉN[2) 3)], M. PRODAN[3] 等のいわゆる系統的括約誤差の一つは即ちこれである。彼等がこれを定誤差の一種と見做したのは，その誘導の方法にもよるが，主たる理由は，それが直径階の位置に関せず常に一定であるからであろう。しかしこれは上述の如く断面積括約誤差の平均であつて，括約測定を行えば断面積が必ず常にこれだけ過小に求められることを意味するものではなく，いわば単なる傾向を示すに過ぎない。従つてこ

* 但し括約誤差定義の関係上，符号は相反する。

れを定誤差とすることは妥当ではない。M. PRODAN [3] の如きは毎木調査の綜合誤差を求めるに当り，これを標準誤差と並列的にとりあつかつているが，誤解も甚だしいといわねばならぬ。表〔1.4〕にその値を示す。



図〔1.3 b〕一様本数分配における単一断面積括約誤差の分布

表〔1・4〕一様分布における単一の断面積括約誤差の平均

括約単位	1 cm	2 cm	4 cm	5 cm
平　均	-0.06 cm²	-0.26 cm²	-1.05 cm²	-1.64 cm²

この表より明かな如く単一の括約断面積誤差の平均は極めて小さく，表〔1.5〕に示す標準誤差に比しても，その百分率は直径階 10 cm（通常調査の対象となる最小の直径階と見做せよう）においてすら，約 5 % に過ぎない。従つて単一の断面積括約誤差の評価に関してはこれを無視しても差し支えないであろう。しかし林分材積測定における総断面積括約誤差の評価においては，これは無視し得べからざる影響を及すことがやがて明となろう。

分散：順序として先ず原点の周りにおける Δg の第二次モーメント $M'_2(\Delta g)$ を求める：

$$M'_{2i}(\Delta g)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{4}\left(d_ia+\frac{a^2}{4}\right)}^{\frac{\pi}{4}\left(d_ia-\frac{a^2}{4}\right)} y_i^2(g_i-y_i)^{-\frac{1}{2}}dy_i=\frac{a^2\pi^2}{32}\left(\frac{2}{3}d_i^2+\frac{1}{40}a^2\right).$$

しかるに，平均の周りにおける Δg の第二次モーメント即ち分散を $\mu^2(\Delta g)$ とすれば，一般に

$$\mu^2(\Delta g)=M_2'(\Delta g)-\{m(\Delta g)\}^2$$

であるから，

$$\mu_i^2(\Delta g)=\frac{a^2\pi^2}{32}\left(\frac{2}{3}d_i^2+\frac{1}{40}a^2\right)-\left(-\frac{\pi a^2}{48}\right)^2=a^2\pi^2\left(\frac{d_i^2}{48}+\frac{a^2}{2880}\right)\quad\cdots\cdots〔1.18〕$$

通常の括約単位は 5〜6 cm 以下であるから，上式の括孤内第 2 項を第 1 項に比して無視すれば，分散の近似値として次式が得られる：

$$\mu_i^2(\Delta g)\fallingdotseq\frac{a^2\pi^2d_i^2}{48}\quad\cdots\cdots〔1.19〕$$

従つて標準誤差は

$$\mu_i(\Delta g)\fallingdotseq\frac{1}{\sqrt{48}}\pi a d_i\quad\cdots\cdots〔1.20〕$$

即ち標準誤差は平均値と異り直径階の位置によりその値を異にする。

最後の二式は単一の直径括約誤差の分散 $\frac{a^2}{12}$ に誤差伝播の法則を適用して得られるものに等しい。* 表〔1.5〕にこれを例示する。これは近似値ではあるが，正確式たる式〔1.18〕の平方根との差は微小であつて，式〔1.20〕を用いても実用上は差し支えないであろう。結果として式〔1.14〕の二乗項を省略して式〔1.1〕に誤差伝播の法則を適用しても略々同一の結論に到達することがわかる。

表〔1・5〕一様分布における単一断面積括約誤差の標準誤差

$d = 10 \sim 80$ cm

直径階	a (cm)			
(cm)	1	2	4	5
	(cm²)	(cm²)	(cm²)	(cm²)
10	4.53	9.16	—	22.65
12	5.44	10.88	21.76	—
14	6.34	12.68	—	—
15	6.80	—	—	34.00
16	7.25	14.50	29.00	—
18	8.15	16.30	—	—
20	9.06	18.12	36.24	45.30
22	9.97	19.94	—	—
24	10.87	21.74	43.48	—
25	11.32	—	—	56.60
26	11.78	23.56	—	—
28	12.68	25.36	50.72	—
30	13.59	27.18	—	67.95
32	14.50	29.00	58.00	—
34	15.40	30.80	—	—
35	15.86	—	—	79.30
36	16.31	32.62	65.24	—
38	17.21	34.42	—	—
40	18.12	36.24	72.48	90.60
42	19.03	38.06	—	—
44	19.93	39.86	79.72	—
45	20.38	—	—	101.90
46	20.84	41.68	—	—
48	21.74	43.48	86.96	—
50	22.65	45.30	—	113.25
52	23.56	47.12	94.24	—
54	24.46	48.92	—	—
55	24.92	—	—	124.60
56	25.37	50.74	101.48	—
58	26.27	52.54	—	—
60	27.18	54.36	108.72	135.90
62	28.09	56.18	—	—
64	28.99	57.98	115.96	—
65	29.44	—	—	147.20
66	29.90	59.80	—	—
68	30.80	61.60	123.20	—
70	31.71	63.42	—	158.55
72	32.62	65.24	130.48	—
74	33.52	67.04	—	—
75	33.98	—	—	169.90
76	34.43	68.86	137.72	—
78	35.33	70.66	—	—
80	36.24	72.48	144.96	181.20

* 従来の研究者は何れもこのような方法で式〔1・19〕或は式〔1・20〕を得た。彼等は何れも式〔1・15〕に想到し得ず，従つて式〔1・18〕を得ることは出来なかつた。

平均の周りにおける Δg の第3次および第4次モーメント：

（i） 第3次モーメント：

原点の周りにおける Δg の第 k 次モーメントを $M_k'(\Delta g)$，平均の周りにおけるそれを $M_k(\Delta g)$ とすれば，

$$M_{3i}'(\Delta g)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{4}\left(d_i a+\frac{a^2}{4}\right)}^{\frac{\pi}{4}\left(d_i a-\frac{a^2}{4}\right)} y_i^3\,(g_i-y_i)^{-\frac{1}{2}}\,d y_i$$

$$=12\,g_i^2\,m_i(\Delta g)+3g_i M_{2i}'(\Delta g)-27\{m_i(\Delta g)\}^2 g_i+\frac{17}{7}\{m_i(\Delta g)\}^3$$

$$M_3(\Delta g)=M_{3i}'(\Delta g)-3M_2'(\Delta g)\,m(\Delta g)+2\{m(\Delta g)\}^3$$

なる関係があるから，

$$M_{3i}(\Delta g)=3[\mu_i^2(\Delta g)+\{m_i(\Delta g)\}^2]\{g_i-m_i(\Delta g)\}$$

$$+3\,g_i\,m_i(\Delta g)\{4g_i-9m_i(\Delta g)\}+\frac{31}{7}\{m_i(\Delta g)\}^3$$

$$=\{m_i(\Delta g)\}^2\{-12\,g_i+\frac{10}{7}m_i(\Delta g)\}$$

通常 $\frac{10}{7}m_i(\Delta g)$ は $12g_i$ に比して極めて小さいから，これを無視すれば，

$$M_{3i}(\Delta g)\fallingdotseq -3\pi d_i^2\{m_i(\Delta g)\}^2=-\frac{\pi^3 a^4 d_i^2}{768} \qquad \text{……〔1.21〕}$$

（ii） 第4次モーメント：

$$M_{4i}'(\Delta g)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{4}\left(d_i a+\frac{a^2}{4}\right)}^{\frac{\pi}{4}\left(d_i a-\frac{a^2}{4}\right)} y_i^4\,(g_i-y_i)^{-\frac{1}{2}}\,d y_i$$

$$=24\,g_i^3\,m_i(\Delta g)+18\,g_i^2\{m_i(\Delta g)\}^2-\frac{688}{7}g_i\{m_i(\Delta g)\}^3$$

$$+6\,g_i^2 M_{2i}'(\Delta g)+9\{m_i(\Delta g)\}^4$$

しかるに

$$M_4(\Delta g)=M_4'(\Delta g)-4M_3'\,m(\Delta g)+6M_2'(\Delta g)\{m(\Delta g)\}^2-3\{m(\Delta g)\}^4$$

なる関係があるから，

$$M_{4i}(\Delta g)=g_i\,m_i(\Delta g)\left[24\,g_i^2+\frac{68}{7}\{m_i(\Delta g)\}^2\right]-30\,g_i^2\{m_i(\Delta g)\}^2$$

$$-12\,g_i\,m_i(\Delta g)M_{2i}'(\Delta g)+6M_{2i}'(\Delta g)\left[g_i^2+\{m_i(\Delta g)\}^2\right]-\frac{26}{7}\{m_i(\Delta g)\}^4$$

通常 $m_i(\Delta g)$ は g_i 又は $M_{2i}'(\Delta g)$ に比して頗る小であり，且つ $M_{2i}'(\Delta g)\fallingdotseq\frac{\pi^2 a^2 d_i^2}{48}$ なることを考慮すれば，結局

$$M_{4i}(\Delta g)\fallingdotseq\{m_i(\Delta g)\}^2\left[18\,g_i^2-\frac{26}{7}\{m_i(\Delta g)\}^2\right]\fallingdotseq\{\mu_i^2(\Delta g)\}^2 \qquad \text{……〔1.22〕}$$

（b） 断面積括約誤差の和——林木の総断面積括約誤差

前項において単一の断面積括約誤差の分布を明かにした。本項においてはこれらの断面積括約誤差の和について論ずる。前述の如く断面積括約誤差は直径階によつてその分布形を異にするから，先ず同一直径階に属する断面積括約誤差の和について考察し，次いで互に異つた直径階に属する断面積括約誤差の和を論ずる。

（i） 同一直径階に属する林木の断面積括約誤差の和

これの正確な形を定めることは頗る困難であるが，吾々の実用に充分な近似度を以て以下の如く推論し得る。

先に「同一分布法則に従う n 個の誤差の和の分布は，n が充分大なるときは，近似的に正規分布をなす」ことを見た。今の場合にもこの法則が適用され得る。

正規分布においては，前述の如く，

$$\beta_1=\frac{\{M_3(\varDelta g)\}^2}{\{\mu^2(\varDelta g)\}^3}=0 \quad , \qquad \beta_2=\frac{M_4(\varDelta g)}{\{\mu^2(\varDelta g)\}^2}=3$$

但し $\beta_1=$ 非対称度，β_2；尖度

である。

単一の断面積括約誤差の分布においては，

$$\beta_1 \fallingdotseq \left(\frac{48}{a^2\pi^2 d_i^2}\right)^3 \times \left(-\frac{\pi^3 a^4 d_i^2}{768}\right)^2=\frac{3a^2}{16\,d_i^2}$$

$$\beta_2 \fallingdotseq 1$$

であつて，通常の括約単位では β_1 は0に近いが，β_2 は3より小で，正規分布から遠ざかること甚しい。

このような単一の断面積括約誤差の n 個の和の分布においては，これらの関係はどうなるか。今 n 個の断面積括約誤差の和を $\varDelta G$ で表わし，平均；$m(\varDelta G)$，分散；$\mu^2(\varDelta G)$，平均の周りにおける $\varDelta G$ の第3次モーメント；$M_3(\varDelta G)$，同じく第4次モーメント；$M_4(\varDelta G)$ とするときは，

$$m_i(\varDelta G)=n\ m_i(\varDelta g)\ ,\ \mu_i^2(\varDelta G)=n\mu_i^2(\varDelta g),$$

$$M_{3i}(\varDelta G)=n\,M_{3i}(\varDelta g)$$

$$M_{4i}(\varDelta G)=n\,M_{4i}(\varDelta g)+6\,{}_nC_2\{\mu_i^2(\varDelta g)\}^2$$

従つて

$$\beta^1 \fallingdotseq \frac{3\,a^2}{16\,n\,d_i^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots〔1.23〕$$

$$\beta_2 \fallingdotseq \frac{1}{n}+\frac{6\,{}_nC_2}{n^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots〔1.24〕$$

Stirling の定理によれば，n が充分大なるときは，

$$n! \fallingdotseq \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}$$

故に

$${}_nC_2 \fallingdotseq \frac{\sqrt{2\pi n}\ n^n\ e^{-n}}{2\sqrt{2\pi(n-2)}\,(n-2)^{n-2}\,e^{-(n-2)}} \fallingdotseq \frac{n^2}{2}$$

従つて n が充分大なるときは，

$$\beta_1 \longrightarrow 0 \quad , \quad \beta_2 \longrightarrow 3$$

となる。即ち

「同一直径階に属する林木の総断面積括約誤差は，測定本数が充分大なるときは，

$$\text{平均}=-\frac{n\pi a^2}{48} \quad , \quad \text{分散}=\frac{n\pi^2 a^2 d_i^2}{48}$$

を以て正規分布をなす」

と結論することが出来る。

それでは，n の充分なる大きさは，実用上如何程であるべきか。式〔1.23〕および式〔1.24〕において，通常の測定では $n=1$ であつても，β_1 はかなり0に近く，従つて β_2 を近似的に3と見做し得るに充分な条件だけについて考察すればよい。n に種々の値を与えて β_2 を計算すれ

ば表〔1.6〕のようになるが，この表に見る如く，$n=5$ 以上ともなれば，ΔG の分布は実用上正規分布と見做しても差し支えないであろう。

表〔1・6〕

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β_2	2.00	2.33	2.50	2.60	2.67	2.72	2.75	2.78	2.80

（ii） 種々の直径階に属する林木の断面積括約誤差の和

便宜上次の記号を定義する。

$$\overline{\mathrm{M}}_2=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mu_i^2(\Delta g)\quad,\quad \overline{\mathrm{M}}_3=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mathrm{M}_{3i}(\Delta g)$$

$$\overline{\mathrm{M}}_4=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mathrm{M}_{4i}(\Delta g)$$

但し n_i；第 i 直径階の本数,

k；直径階の数，$\mathrm{N}=\sum_{i=1}^{k} n_i$

しかるときは,

$$m(\Delta\mathrm{G})=\sum_{i=1}^{k} n_i m_i(\Delta g)\quad,\quad \mu^2(\Delta\mathrm{G})=\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mu_i^2(\Delta g)=\mathrm{N}\overline{\mathrm{M}}_2$$

$$\mathrm{M}_3(\Delta g)=\sum_{i=1}^{k} n_i\mathrm{M}_{3i}(\Delta g)=\mathrm{N}\overline{\mathrm{M}}_3\ ,$$

$$\mathrm{M}_4(\Delta\mathrm{G})=\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mathrm{M}_{4i}(\Delta g)+6\left[\sum_{i=1}^{k}{}_{n_i}\mathrm{C}_2\,\{\mu_i^2(\Delta g)\}^2+\sum_{i\neq j}^{k^{C_2}} n_i\,n_j\,\mu_i^2(\Delta g)\,\mu_j^2(\Delta g)\right]$$

しかるに

$$\{\mu^2(\Delta\mathrm{G})\}^2=\left\{\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mu_i^2(\Delta g)\right\}^2=\sum_{i=1}^{k} n_i^2\,\{\mu_i^2(\Delta g)\}^2+2\sum_{i\neq j}^{k^{C_2}} n_i\,n_j\,\mu_i^2(\Delta g)\,\mu_j^2(\Delta g)\ .$$

故に $\displaystyle\sum_{i\neq j}^{k^{C_2}} n_i\,n_j\,\mu_i^2(\Delta g)\,\mu_j^2(\Delta g)=\frac{1}{2}\left[\{\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mu_i^2(\Delta g)\}^2-\sum_{i=1}^{k} n_i^2\,\{\mu_i^2(\Delta g)\}^2\right]$

従つて

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_4(\Delta\mathrm{G})&=\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mathrm{M}_{4i}(\Delta g)+3\left[2\sum_{i=1}^{k}{}_{n_i}\mathrm{C}_2\,\{\mu_i^2(\Delta g)\}^2+\{\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mu_i^2(\Delta g)\}^2-\sum_{i=1}^{k} n_i^2\,\{\mu_i^2(\Delta g)\}^2\right]\\&=\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mathrm{M}_{4i}(\Delta g)+3\left[\{\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mu_i^2(\Delta g)\}^2+\sum_{i=1}^{k}\{\mu_i^2(\Delta g)\}^2(2\,{}_{n_i}\mathrm{C}_2-n_i^2)\right]\\&=\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mathrm{M}_{4i}(\Delta g)+3\left[\{\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mu_i^2(\Delta g)\}^2-\sum_{i=1}^{k} n_i\,\{\mu_i^2(\Delta g)\}^2\right]\end{aligned}$$

しかるに $\{\mu_i^2(\Delta g)\}^2\fallingdotseq\mathrm{M}_{4i}(\Delta g)$ であるから，結局 $\mathrm{M}_4(\Delta\mathrm{G})\fallingdotseq 3\,\mathrm{N}^2\overline{\mathrm{M}}_2^2-2\,\mathrm{N}\overline{\mathrm{M}}_4$,

以上の結果から β_1，β_2 を求めれば,

$$\beta_1=\frac{\overline{\mathrm{M}}_3^2}{\mathrm{N}\,\overline{\mathrm{M}}_2^3}\fallingdotseq\frac{\pi^6\,a^8\,d_G^4}{768^2}\times\frac{48^3}{\mathrm{N}\pi^6\,a^6\,d_G^6}=\frac{3\,a^2}{16\mathrm{N}\,d_G^2}$$

但し d_G；断面積平均木の直径,

$$\beta_2\fallingdotseq\frac{3\,\mathrm{N}^2\,\overline{\mathrm{M}}_2^2}{\mathrm{N}^2\,\overline{\mathrm{M}}_2^2}-\frac{2\,\mathrm{N}\ \overline{\mathrm{M}}_4}{\mathrm{N}^2\,\overline{\mathrm{M}}_2^2}=3-\frac{2\,\overline{\mathrm{M}}_4}{\mathrm{N}\,\overline{\mathrm{M}}_2^2}$$

$$\beta_2\fallingdotseq\frac{3\,\mathrm{N}^2\,\overline{\mathrm{M}}_3^2}{\mathrm{N}^2\,\mathrm{M}_2^2}-\frac{2\,\mathrm{N}\,\overline{\mathrm{M}}_4}{\mathrm{N}^2\,\overline{\mathrm{M}}_2^2}=3-\frac{2\,\overline{\mathrm{M}}_4}{\mathrm{N}\,\overline{\mathrm{M}}_2^2}$$

$\overline{M}_4 < \overline{M}_2^2$ であるから，$\left(3-\frac{2}{N}\right) < \beta_2 < 3$

従つてこの場合においても，N が充分大なるときには，$\beta_1 \longrightarrow 0$，$\beta_2 \longrightarrow 3$ となる。

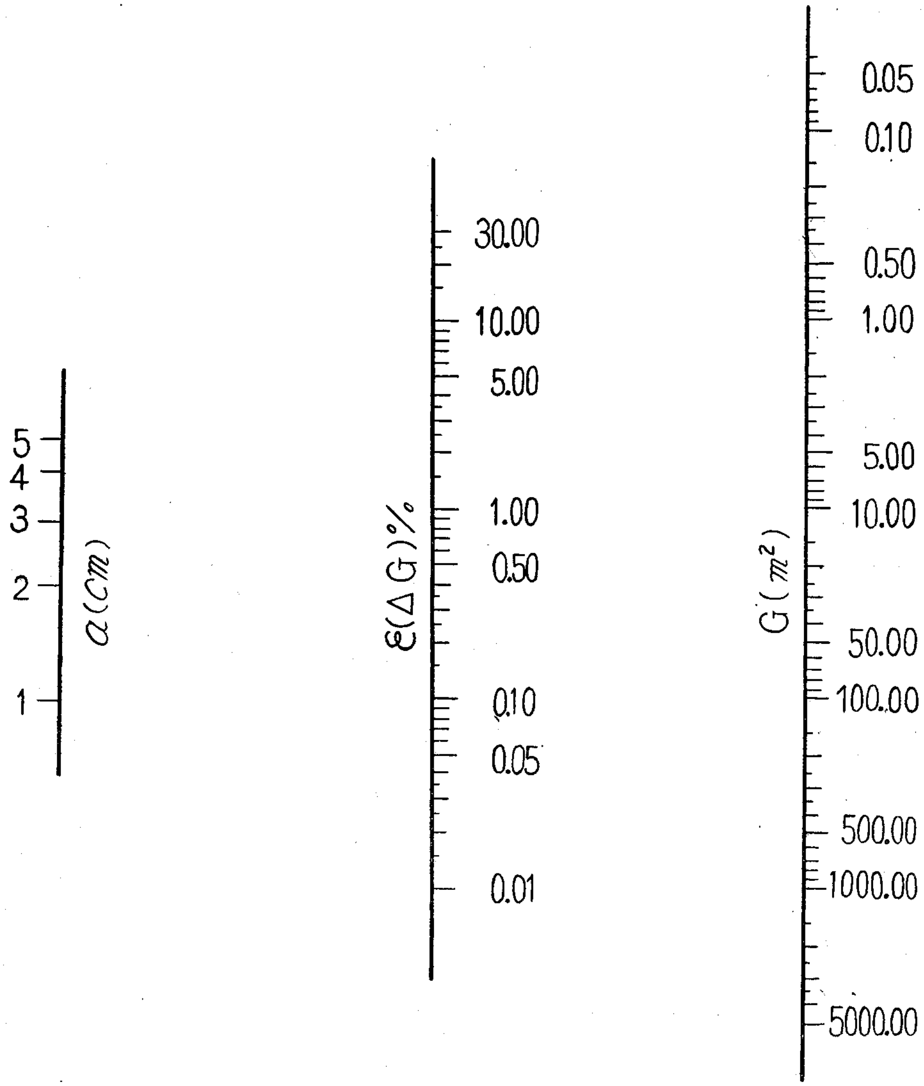
以上によつて一般に次の如く述べることができるであろう。

“第 i 直径階の直径中央値を d_i，本数を n_i，$\sum_{i=1}^{k} n_i = N$ なる林分において，各直径階内における本数分配が一様であるとき，これらの林木を括約単位 a cm を以て測定した場合の総断面積括約誤差は，N が充分大なるとき，近似的に

$$平\quad 均\quad m(\Delta G) = -N\frac{\pi a^2}{48} \cdots\cdots\cdots [1.25]$$

$$標準誤差\quad \mu(\Delta G) \doteqdot \frac{\pi a}{\sqrt{48}}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i d_i^2} \cdots\cdots\cdots [1.26]$$

なる正規分布をなす”と。こゝに N の充分なる大きさは β_1，β_2 の値を考慮して，通常の括約単位にあつては 5～6 以上，安全のためには 10 以上とみれば充分であろう。



〔1.4〕 ε(ΔG)% に対する計算図表 （信頼度 95% N ≧ 5）

標準誤差率を $\mu(\Delta G)\%$ とすると，

$$\mu(\Delta G)\% \fallingdotseq \frac{\pi a}{\sqrt{48}}\sqrt{\sum n_i d_i^2} \times \frac{100}{\frac{\pi}{4}\sum n_i d_i^2} = \frac{50a\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\sqrt{G}} \cdots\cdots [1.26]'$$

こゝに G は少くとも N＝5 以上の断面積合計＊である。信頼度を95％とすると，平均の周りにおける総断面積括約誤差率の推定限界は 1.96 $\mu(\Delta G)$ ％となる。これを $\varepsilon(\Delta G)\%$ で表せば，

$$\varepsilon(\Delta G)\% = \frac{50a\sqrt{\pi}\times 1.96}{\sqrt{3}\sqrt{G}} \fallingdotseq \frac{100a}{\sqrt{G}} \cdots\cdots [1.27]$$

a を cm 単位，G を m^2 であらわせば，

$$\varepsilon(\Delta G)\% \fallingdotseq \frac{a}{\sqrt{G}} \cdots\cdots [1.27]'$$

即ち総断面積括約誤差率は括約単位aに正比例し，$\sqrt{G}$に逆比例することがわかる。図〔1.4〕は $G, a, \varepsilon(\Delta G)\%$ の相互関係を示すもので，これにより $\varepsilon(\Delta G)\%$ を求めることが出来る。逆に G の大略の値を予想し，許容誤差率を定めれば，それに対する括約単位 a を求めることもできる。但しかくして求められる a の範囲は 5～6 cm 以下である。

こゝに注意すべきは，この誤差率は平均値 $-N\frac{\pi a^2}{48}$ を中心としてのものであるということである。即ち総断面積括約誤差は 95％ の信頼度において，

$$-\left\{\frac{G\varepsilon(\Delta G)\%}{100} + N\frac{\pi a^2}{48}\right\} \quad と$$

$\left\{\frac{G\varepsilon(\Delta G)\%}{100} - N\frac{\pi a^2}{48}\right\}$ との間にあり，従つて，真の断面積を G_w とすれば，95％ の信頼度において，

$$\left[G - \left\{\frac{G\varepsilon(\Delta G)\%}{100} - N\frac{\pi a^2}{48}\right\}\right] \leqq G_w \leqq \left[G + \left\{\frac{G\varepsilon(\Delta G)\%}{100} + N\frac{\pi a^2}{48}\right\}\right]$$

であるということである。今少しくこの点について吟味を試みる。

総断面積括約誤差の平均は（単一断面積括約誤差でも同様であるが），林分断面積合計に全く無関係で，括約単位を一定とすれば，それはたゞ測定本数に正比例する。この性質は標準誤差と著しく趣を異にする重要なことがらである。便宜上この平均値を林分断面積合計に対する百分率で示せば，

$$m(\Delta G)\% = N\frac{\pi a^2}{48} \times \frac{100}{G} = -\frac{100a^2}{12d_G^2} \cdots\cdots [1.28]$$

こゝに d_G は林分断面積平均木の直径を示す。

一方式〔1.26〕′を変形すれば，

$$\frac{50a\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\sqrt{G}} = \frac{100a}{\sqrt{3N}\,d_G}$$

両者の絶対値の比をとれば，$\frac{a\sqrt{3}\sqrt{N}}{12d_G}$ を得る。

この比は次の重要なる事実を示す：

（i） Nが小なるときは，平均値は標準誤差に比して極めて小であり，従つてこれを無視して

＊ $G = \frac{\pi}{4}\sum n_i d_i^2$ ，即ちこの断面積合計は真の断面積合計でなく，括約直径を用いて計算されたものである。従つて $\mu(\Delta G)\%$ は真の誤差率ではないが，実用的には便利である。

も差し支えないこと。

(ii) Nが大となるに従つて平均値の比重は次第に大となり，断面積括約誤差の評価上無視し得ざる影響を及すこと*。

(iii) 一様本数分配にあつては，一般に負の誤差を生じ易く，$N \geqq 192\frac{d_G^2}{a^2}$ となれば，測定の97.5% まで，即ち殆ど全ての場合に負の誤差を生ずること。

(iv) この傾向は括約単位の大なる程大きいこと。

(iii) の事実は，例えば 5 cm の括約単位を以て毎木調査を行う場合，その林分の断面積平均木の直径が 20 cm の場合は約 3000 本以上，30 cm の場合は約 7000 本以上の測定をなすとき，総断面積括約誤差は殆ど全ての場合に負であることを示している。表〔1.7〕に m (ΔG) %を表示する。

以上一様分布における括約誤差の性質を明かにし，その評価基準を与えるとともに，L. TIRÉN,

表〔1・7〕一様分布における総断面積括約誤差の平均の断面積合計に対する百分率 m (ΔG) %

断面積平均木の直径* cm	括約単位 a (cm) 1	2	4	5
	%	%	%	%
20	—0.021	—0.084	—0.334	—0.522
22	—0.017	—0.069	—0.276	—0.431
24	—0.014	—0.058	—0.232	—0.362
26	—0.012	—0.049	—0.197	—0.308
28	—0.011	—0.042	—0.170	—0.266
30	—0.009	—0.037	—0.148	—0.232
32	—0.008	—0.032	—0.130	—0.204
34	—0.007	—0.029	—0.115	—0.180
36	—0.006	—0.026	—0.103	—0.161
38	—0.006	—0.023	—0.092	—0.144
40	—0.005	—0.021	—0.083	—0.130
42	—0.005	—0.019	—0.076	—0.118
44	—0.004	—0.017	—0.069	—0.108
46	—0.004	—0.016	—0.063	—0.099
48	—0.004	—0.014	—0.058	—0.090
50	—0.003	—0.013	—0.053	—0.084
52	—0.003	—0.012	—0.049	—0.077
54	—0.003	—0.011	—0.046	—0.072
56	—0.003	—0.011	—0.043	—0.067
58	—0.003	—0.010	—0.040	—0.062
60	—0.002	—0.009	—0.037	—0.058

* 断面積平均木の直径は，平均直径には一致しないが，両者の差は微小であるから，前者に後者を代用せしめて，本表を用いても実用上支障はないであろう。

---

* 絶対額でなく，相対率を問題とする限り，それは余り重要なものではない。照査法における成長量査定の誤差を解明せんとした，H. A. MEYER の立場して，彼が率の小さいそのいわゆる "Systematischer Fehler" としての括約誤差を無視したのはむしろ当然である。

H. A. MEYER, M. PRODAN 等のいわゆる Systematischer Abrundungsfehler なるものの一つは，断面積括約誤差の平均であり，彼等の如くこれを異つた誤差概念に属せしむることの妥当でないこと，ならびにそれが，総断面積括約誤差評価の上に必ずしも無視さるべきでないことを指摘した。

第 2 章

正規型本数分配における括約誤差

同令一斉林における最も典型的な本数分配は正規分布によつて表される。以下このような本数分配における括約誤差について考察する。

1. 直径括約誤差

林木の平均直径を d_m, 標準偏差を σ とすると，本数分配は次式で示される。

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-d_m)^2}{2\sigma^2}} \quad \cdots\cdots [2.1]$$

一方第 i 直径階の中央値を d_i, 直径括約誤差を Δd, 括約単位を a とすれば，Δd の確率密度は次式によつて示される：

$$\psi(z) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(d_i-z-d_m)^2}{2\sigma^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\displaystyle\int_{d_i-\frac{a}{2}}^{d_i+\frac{a}{2}} e^{-\frac{(x-d_m)^2}{2\sigma^2}}\,dx}$$

$$= \frac{e^{-\frac{(d_i-d_m-z)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\displaystyle\int_{t_i-\frac{a}{2\sigma}}^{t_i+\frac{a}{2\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}$$

但し　$-\frac{a}{2} < z \leqq \frac{a}{2}$,　$t = \frac{x-d_m}{\sigma}$,　$t_i = \frac{d_i-d_m}{\sigma}$

上式において

$$A_i = \int_{t_i-\frac{a}{2\sigma}}^{t_i+\frac{a}{2\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

とおけば，

$$\psi(z) = \frac{1}{A_i\sigma}\, e^{-\frac{(\sigma t_i-z)^2}{2\sigma^2}} \quad \cdots\cdots [2.2]$$

或は　$v = \frac{z}{\sigma}$,　$-\frac{a}{2\sigma} < v \leqq \frac{a}{2\sigma}$　とおけば，

$$\psi(v) = \frac{1}{A_i}\, e^{-\frac{(t_i-v)^2}{2}} \quad \cdots\cdots [2.3]$$

式〔2.2〕は即ち正規型本数分配における個々の直径括約誤差の密度函数で，式〔2.3〕は式

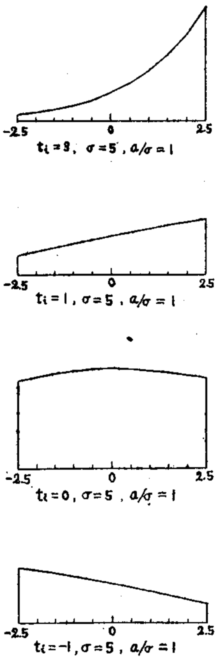
〔2.2〕の規準形である。

式〔2.2〕より明かなように，$\psi(z)$ は t_i，$\frac{a}{\sigma}$，および σ によつてその形を異にする。図〔2.1〕にそれを例示する。

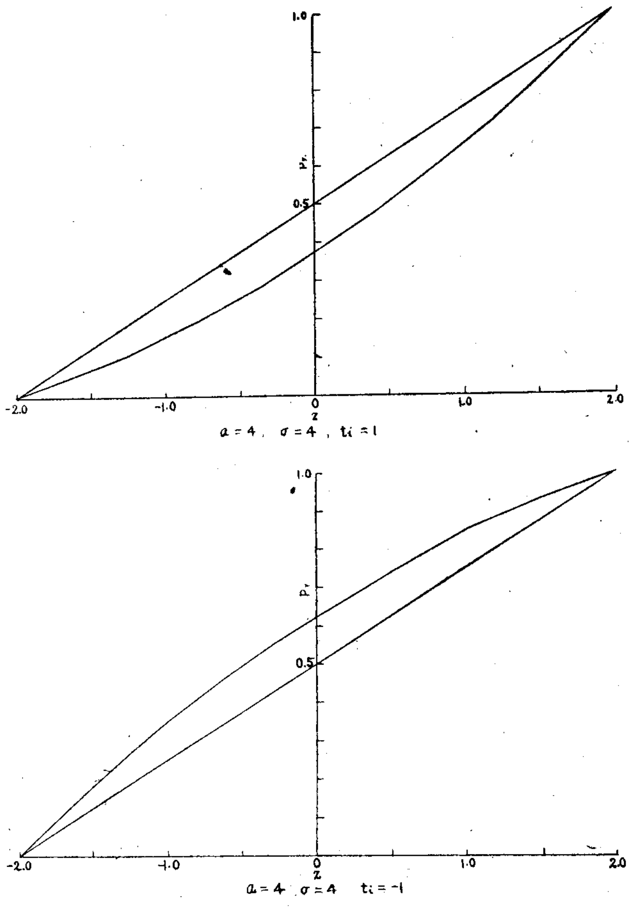
図〔2.1〕より明かなように，$\psi(z)$ は t_i が大となるに従つて一様分布から遠ざかることがわかる。* 式〔2.2〕より z の分布函数として，

$$f(z) = \frac{1}{A_t\sigma}\int_{-\frac{a}{2}}^{z} e^{-\frac{(\sigma t_i - s)^2}{2}}\, ds \quad \cdots\cdots〔2.4〕$$

が得られる。図〔2.2〕にその一例を示す。図上，直線は一様本数分配の場合の Δd の分布を示



図〔2.1〕 正規型本数分配における単一直径括約誤差の密度分布



図〔2.2〕正規型本数分配における単一直径括約誤差の分布

すが，見られる如く両者間には若干のへだたりがある。単一の直径括約誤差が，或る特定値 $-z_0$ と z_0 との間にある確率は，

$$P_r\{-z_0 < z \leqq z_0\} = f(z_0) - f(-z_0)$$

$$= P_r\{-v_0 < v \leqq v_0\} = f(v_0) - f(-v_0) \quad \cdots\cdots〔2.5〕$$

$$但し \quad v_0 = \frac{z_0}{\sigma}$$

より計算され得る。

---

* $t_i=1$ において，$\psi(z)$ の一様分布からの偏りが最大であるとしたのは M. PRODAN におけると同様，筆者の前報においても誤りで，こゝは訂正しておく。

次に $\psi(z)$ の性格を更にはつきりさすために，平均および分散を求める。

平均； この目的には式〔2.2〕の代りに式〔2.3〕を用いるのが便利である。$\Delta d/\sigma$ の第 i 直径階における平均を $m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ とすると，Δd の第 i 直径階における平均 $m_i(\Delta d)$ との間に

$$m_i(\Delta d) = \sigma\, m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$$

なる簡単な関係が成立するからである。

$$m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right) = \frac{1}{A_i}\int_{-\frac{a}{2\sigma}}^{\frac{a}{2\sigma}} v\, e^{-\frac{(t_i-v)^2}{2}}\, dv$$

$$\left.\begin{aligned} &= t_i - \frac{1}{A_i}\xi_{1i} \\ \text{或いは}\quad &= t_i - \frac{1}{A_i}\left\{e^{-\frac{\left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)^2}{2}} - e^{-\frac{\left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)^2}{2}}\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots〔2.6〕$$

但し

$$\xi_{pi} = \int_{t_i-\frac{a}{2\sigma}}^{t_i+\frac{a}{2\sigma}} t^p e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}\left\{\theta_p\left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)-\theta_p\left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)\right\},\ 0<\left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)$$

或いは $\quad = \sqrt{2\pi}\left\{\theta_p\left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)+\theta_p\left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)\right\},\quad \left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)<0<\left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)$

或いは $\quad = \sqrt{2\pi}\left\{\theta_p\left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)-\theta_p\left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)\right\},\quad \left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)<0$

こゝに θ_p は不完全正規積率函数で

$$\theta_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x s^p e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds$$

α を正数とするとき，

p が奇数ならば，$\theta_p(\alpha) = -\theta_p(-\alpha)$

p が偶数ならば，$\theta_p(\alpha) = \theta_p(-\alpha)$

分散； 第 i 直徑階における Δd の分散を $\mu_i^2(\Delta d)$，$\frac{\Delta d}{\sigma}$ のそれを $\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ とすると，$\mu_i^2(\Delta d) = \sigma^2\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ であるから，$\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ さえ求めればよい。

$$M'_2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right) = \frac{1}{A_i}\int_{-\frac{a}{2\sigma}}^{\frac{a}{2\sigma}} v^2\, e^{-\frac{(t_i-v)^2}{2}}\, dv$$

$$= 2\, t_i\, m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right) - t_i^2 + \frac{1}{A_i}\xi_{2i}$$

$$\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right) = M'_2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right) - \left\{m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)\right\}^2$$

故に

$$\left.\begin{aligned}\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right) &= \frac{1}{A_i}\xi_{2i} - \left\{t_i - m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{A_i}\left(\xi_{2i} - \frac{1}{A_i}\xi_{1i}^2\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots〔2.7〕$$

平均，分散共に t_i と $\frac{a}{\sigma}$ の函数であることが知られる。実際的には $|t_i|<2$，又 $\sigma = 5\sim10$，

$a=2\sim5$, 従つて a/σ としては 0.2～1.0 の範囲を考えれば充分であろう。表〔2.1〕および表〔2.2〕はこのような範囲における $m_t\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ と $\mu_t^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ の数値を示す。t_t と $m_t\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ とは符号相等しく，$|t_t|$ が等しければ $\left|m_t\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)\right|$ も等しい。又 $\mu_t^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ は $|t_t|$ の等値に対して常に相等しい。

表〔2·1〕単一の直径括約誤差の平均（σ で割つた絶対値を示す）(cm)

t_t ＼ a/σ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	0	0	0	0	0
0.2	0.0007	0.0027	0.0060	0.0105	0.0161
0.4	0.0014	0.0053	0.0119	0.0209	0.0322
0.6	0.0020	0.0080	0.0178	0.0312	0.0481
0.8	0.0027	0.0106	0.0236	0.0415	0.0638
1.0	0.0033	0.0132	0.0295	0.0517	0.0793
1.2	0.0040	0.0159	0.0353	0.0618	0.0946
1.4	0.0046	0.0185	0.0410	0.0717	0.1095
1.6	0.0053	0.0211	0.0468	0.0814	0.1240
1.8	0.0060	0.0237	0.0524	0.0909	0.1382
2.0	0.0067	0.0263	0.0580	0.1004	0.1520

表〔2·2〕単一の直径括約誤差の分散（σ^2 で割つた値を示す）(cm)

t_t ＼ a/σ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	0.0033	0.0133	0.0296	0.0522	0.0805
0.2	0.0033	0.0133	0.0296	0.0522	0.0804
0.4	0.0033	0.0133	0.0295	0.0520	0.0800
0.6	0.0033	0.0133	0.0294	0.0516	0.0793
0.8	0.0033	0.0132	0.0293	0.0512	0.0782
1.0	0.0033	0.0132	0.0292	0.0507	0.0768
1.2	0.0033	0.0132	0.0290	0.0501	0.0754
1.4	0.0033	0.0131	0.0288	0.0493	0.0737
1.6	0.0033	0.0131	0.0286	0.0483	0.0716
1.8	0.0033	0.0130	0.0283	0.0470	0.0697
2.0	0.0033	0.0130	0.0280	0.0463	0.0678

表〔2.1〕によれば，$m_t\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ の値は，t_t および $\frac{a}{\sigma}$ が大となるに従つて 0 から遠ざかる。これは前述の如く $\frac{\Delta d}{\sigma}$ の密度分布が，t_t および $\frac{a}{\sigma}$ の値とともに非対称性を増大することよりの当

然の帰結である。$t_i=0\sim2$ の範囲においては $m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ は近似的に t_i に比例することも見逃せない事実である。

表〔2.2〕に示された $\frac{\Delta d}{\sigma}$ の分散 $\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ は，t_i および a/σ とともに漸次減少するが，$a/\sigma=0.8$ 以下，$t_i=0\sim2.0$ の範囲では，その値は t_i に殆ど無関係であるといえる。一様本数分配での単一の直径括約誤差の分散 $a^2/12$ において順次 $a=0.2\,\sigma$, $0.4\,\sigma$, $0.6\,\sigma$,……とおくと，$a^2/12$ は，$t_i=0$, $a/\sigma=0.2$, 0.4, 0.6,……に対応する $\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ の値に σ^2 を乗じたものとそれぞれ近似的に等しくなる。$\mu_i^2(\Delta d)=\sigma^2\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$ であるから，上の二つの事実は a/σ が 0.8 位までなら，t_i の値にかゝわらず，

$$\mu_i^2(\Delta d)\fallingdotseq\frac{a^2}{12}$$

とすることが出来るということを示している。若し標準誤差 $\mu_i(\Delta d)$ を考えるなら，$t_i=2$, $a/\sigma=1$ においてもなお

$$\mu_i(\Delta d)\fallingdotseq\frac{a}{\sqrt{12}}$$

と見做してよいであろう。例えば現実における最も極端と考えられる場合においてすら，

$t_i=2,\quad \sigma=4,\quad a=4$

…………　$\mu_i(\Delta d)=1.04$,　　近似値 $\mu_i(\Delta d)\fallingdotseq1.16$,

$t_i=2,\quad \sigma=5,\quad a=5$

…………　$\mu_i(\Delta d)=1.26$,　　近似値 $\mu_i(\Delta d)\fallingdotseq1.41$,

である。しかして $\frac{a}{\sqrt{12}}$ は $\mu_i(\Delta d)$ の正確値よりも常に過大であり，従つて若し $\mu_i(\Delta d)$ に代うるに $\frac{a}{\sqrt{12}}$ を用いれば，常に誤差を過大評価することになるが，このことは吾々にとつてむしろ好都合というべきである。

2. 断面積括約誤差

（a）　単一の断面積括約誤差

単一の断面積括約誤差を Δg で示し，式〔2.2〕において，

$$y_i=\frac{\pi}{4}(2d_i z-z^2)$$

とおくと，Δg の密度函数として

$$\psi(y_i)=\frac{1}{A_i\sigma\sqrt{\pi}}(g_i-y_i)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2(\sqrt{g_i-y_i}-\sqrt{g_m})^2}{\sigma^2\pi}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔2.8〕$$

但し　$g_i=\frac{\pi}{4}d_i^2$，$g_m=\frac{\pi}{4}d_m^2$

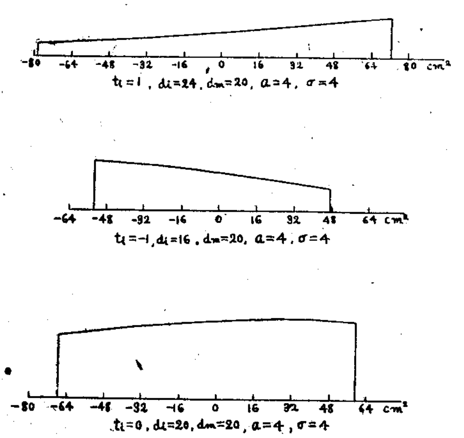
が得られる。

或は，$y_i/\sigma^2=w_i$,　$\gamma=\frac{\pi\,d_m^2}{4\sigma^2}=\frac{g_m}{\sigma^2}$，$\eta_i=\frac{\pi\,d_i^2}{4\sigma^2}=\frac{g_i}{\sigma^2}$ とおくと，式〔2.3〕に対応して，

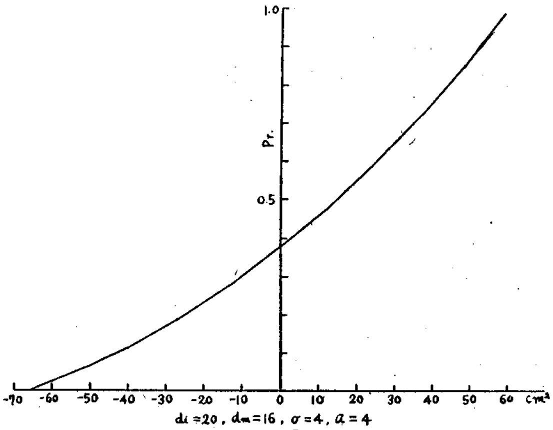
$$\psi(w_i)=\frac{1}{A_i\sqrt{\pi}}(\eta_i-w_i)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2(\sqrt{\eta_i-w_i}-\sqrt{\gamma})^2}{\pi}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔2.9〕$$

が得られる。

直径括約誤差の分布が，t_i, a/σ および σ に依存するに対し，断面積括約誤差の分布は，それらの他に直径階の中央値 d_i 自体の函数でもある点に注意を要する。図〔2.3〕にそれを例示する。



図〔2.3〕正規型本数分配における単一断面積括約誤差の密度分布



図〔2.4〕正規型本数分配における単一断面積括約誤差の分布

Δg の分布函数は式〔2.8〕を積分して

$$f(y_i)=\frac{1}{A_i\,\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{4}\left(d_i a+\frac{a^2}{4}\right)}^{y_i}(g_i-s)^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{2\left(\sqrt{g_i-s}-\sqrt{g_m}\right)^2}{\sigma^2\pi}}\,ds\cdots\cdots〔2.10〕$$

となる。これは更に $\dfrac{2\left(\sqrt{g_i-s}-\sqrt{g_m}\right)}{\sigma\sqrt{\pi}}=t$ とおくことによつて簡単な形

$$f(t)=\frac{1}{A_i}\int_{t}^{t_i+\frac{a}{2\sigma}}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds$$

に導くことができるから，確率積分の表を利用して任意の y_i に対し $f(y_i)$ を求めることができる。図〔2.4〕にその一例を示す。

平均；$\Delta(g)$ の平均 $m(\Delta g)$ を求めるには，先ず $\Delta g/\sigma^2$ の平均 $m\left(\dfrac{\Delta g}{\sigma^2}\right)$ を求めて後，

$$m(\Delta g)=\sigma^2 m\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right)$$

なる簡単な関係を利用すればよい。式〔2.9〕において，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2\sqrt{\eta_i-w_i}-\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\pi}}=s_i\\ \text{即ち}\qquad &w_i=\eta_i-\gamma-\frac{\pi}{4}s_i^2-\sqrt{\pi\gamma}\,s_i\end{aligned}\right\}\text{とおくと．}$$

$$\psi(s_i)=\frac{1}{A_i}\,e^{-\frac{s_i^2}{2}}$$

となる。$\Delta g/\sigma^2$ の平均 $m\left(\dfrac{\Delta g}{\sigma^2}\right)$ および分散 $\mu^2\left(\dfrac{\Delta g}{\sigma^2}\right)$ を求めるために，先ず上式について各種モーメントを求めると次の如くなる。

$$M_1'=\int_{t_i-\frac{a}{2\sigma}}^{t_i+\frac{a}{2\sigma}}\frac{1}{A_i}\,s_i\,e^{-\frac{s_i^2}{2}}\,ds_i=\frac{1}{A_i}\,\xi_{1i}$$

$$M_2' = \int_{t_i-\frac{a}{2\sigma}}^{t_i+\frac{a}{2\sigma}} \frac{1}{A_i} s_i^2 e^{-\frac{s_i^2}{2}} ds_i = \frac{1}{A_i}\xi_{2i}$$

$$M_3' = \int_{t_i-\frac{a}{2\sigma}}^{t_i+\frac{a}{2\sigma}} \frac{1}{A_i} s_i^3 e^{-\frac{s_i^2}{2}} ds_i = \frac{1}{A_i}\xi_{3i}$$

$$M_4' = \int_{t_i-\frac{a}{2\sigma}}^{t_i+\frac{a}{2\sigma}} \frac{1}{A_i} s_i^4 e^{-\frac{s_i^2}{2}} ds_i = \frac{1}{A_i}\xi_{4i}$$

従つて $m\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right)$ は,

$$m_i\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right) = \eta_i - \gamma - \frac{\pi}{4A_i}\xi_{2i} - \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{A_i}\xi_{1i}$$

しかるに,

$$\frac{1}{A_i}\xi_{1i} = t_i - m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right),\quad \frac{1}{A_i}\xi_{2i} = \mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right) + \left\{t_i - m\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)\right\}^2,$$

$$\eta_i = \frac{\pi d_i^2}{4\sigma^2},\quad \gamma = \frac{\pi d_m^2}{4\sigma^2},\quad \eta_i - \gamma = \frac{\pi}{4\sigma} t_i (d_i + d_m)$$

なる関係を考慮すると，次式が得られる：

$$\left.\begin{aligned} m_i\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right) &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2 d_i m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)}{\sigma} - \mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right) - \left\{m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)\right\}^2\right] \\ \text{従つて}\quad m_i(\Delta g) &= \frac{\pi}{4}\left[2 d_i m_i(\Delta d) - \mu_i^2(\Delta d) - \{m_i(\Delta d)\}^2\right] \end{aligned}\right\}\cdots\cdots〔2.11〕$$

表〔2.1〕及び表〔2.2〕に補間法を適用すれば，式〔2.11〕より $m(\Delta g)$ の値が算出される。

上式において

$$\mu_i^2(\Delta d) + \{m_i(\Delta d)\}^2 \fallingdotseq \frac{a^2}{12}$$

とおくことができるから,

$$m_i(\Delta g) \fallingdotseq -\frac{\pi a^2}{48} + \frac{\pi}{2} d_i m_i(\Delta d)$$

こゝに $-\frac{\pi a^2}{48}$ は一様分布における単一の断面積括約誤差の平均であるから，正規型本数分配における単一の断面積括約誤差の平均は，一様分布の場合のそれに対し，$\frac{\pi}{2} d_i m_i(\Delta d)$ だけ修正されるものと考えることができる。

$m_i(\Delta d)$ の等値に対し，t_i の正負に応じて二つの直径階が対応するが，$\frac{\pi}{2} d_i m_i(\Delta d)$ は，t_i が正ならば相殺的効果を，t_i が負ならば相加的効果をおよぼす。従つて林木平均直径 d_m よりも大なる直径階では，$m_i(\Delta g)$ は $\frac{\pi a^2}{48}$，$\frac{\pi}{2} d_i m_i(\Delta d)$ の大小により正又は負の値をとるが，概して正の場合が多く，又 d_m より小なる直径階では全て負となるであろう。式〔2.11〕を変形すると,

$$m_i(\Delta g) = \frac{\pi}{4}\left[2\sigma t_i m_i(\Delta d) + 2 d_m m_i(\Delta d) - \mu_i^2(\Delta d) - \{m_i(\Delta d)\}^2\right],$$

$$\mu_i^2(\Delta d) = \frac{\sigma^2}{\quad} \xi_{2i} - \{\sigma t_i - m_i(\Delta d)\}^2$$

を代入すると，

$$m_i(\Delta g) = \frac{\pi}{4}\left\{2\, d_m\, m_i(\Delta d) + \sigma^2\left(t_i^2 - \frac{\xi_{2i}}{A_i}\right)\right\}$$

或は

$$m_i\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right) = \frac{\pi}{4}\left\{2\left(\frac{d_m}{\sigma}\right) m_i\left(\frac{\Delta g}{\sigma}\right) + \left(t_i^2 - \frac{\xi_{2i}}{A_i}\right)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔2.12〕$$

分散：

$$w_i^2 = \left(\eta_i - \gamma - \frac{\pi}{4} s_i^2 - \sqrt{\pi\gamma}\, s_i\right)^2$$

$$= (\eta_i - \gamma)^2 - 2(\eta_i - \gamma)\left(\frac{\pi}{4} s_i^2 + \sqrt{\pi\gamma}\, s_i\right) + \frac{\pi^2}{16} s_i^4 + \frac{\pi\sqrt{\pi\gamma}}{2} s_i^3 + \pi\gamma s_i^2$$

故に

$$M_2'\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right) = (\eta_i - \gamma)^2 - 2(\eta_i - \gamma)\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\xi_{2i}}{A_i} + \frac{\sqrt{\pi\gamma}\,\xi_{1i}}{A_i}\right) + \frac{\pi^2}{16}\,\frac{\xi_{4i}}{A_i} + \frac{\pi\sqrt{\pi\gamma}}{2}\cdot\frac{\xi_{3i}}{A_i} + \pi\gamma\,\frac{\xi_{4i}}{A_i}$$

しかるに

$$\mu_i^2\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right) = M_2'\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right) - \left\{m_i\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right)\right\}^2,$$

$$\left\{m_i\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right)\right\}^2 = (\eta_i - \gamma)^2 - 2(\eta_i - \gamma)\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\xi_{2i}}{A_i} + \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{A_i}\xi_{1i}\right) + \left(\frac{\pi}{4A_i}\xi_{2i} + \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{A_i}\xi_{1i}\right)^2$$

故に

$$\mu_i^2\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right) = \pi\gamma\,\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right) + \frac{\pi\sqrt{\pi\gamma}}{2}\left(\frac{\xi_{3i}}{A_i} - \frac{\xi_{1i}\,\xi_{2i}}{A_i^2}\right) + \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{\xi_{4i}}{A_i} - \frac{\xi_{2i}^2}{A_i^2}\right)$$

$$= \frac{\pi^2 d_m^2}{4\sigma^2}\,\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right) + \frac{\pi^2 d_m}{4\sigma}\left(\frac{\xi_{3i}}{A_i} - \frac{\xi_{1i}\,\xi_{2i}}{A_i}\right) + \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{\xi_{4i}}{A_i} - \frac{\xi_{2i}^2}{A_i^2}\right)$$

従つて

$$\mu_i^2(\Delta g) = \frac{\pi^2 d_m^2}{4}\,\mu_i^2(\Delta d) + \frac{\pi^2 d_m \sigma^3}{4}\left(\frac{\xi_{3i}}{A_i} - \frac{\xi_{1i}\,\xi_{2i}}{A_i^2}\right) + \frac{\pi^2\sigma^4}{16}\left(\frac{\xi_{4i}}{A_i} - \frac{\xi_{2i}^2}{A_i^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots〔2.13〕$$

式〔2.13〕は即ち単一の断面積括約誤差の分散を示す。それは t_i および a/σ の他に，m および σ の函数でもあつて，これの一般的表示は困難であるが，m/σ は現実林では通常 3～5 と見て差支えないであろうから，試みに $m/\sigma = 4$ なる場合の $\mu_i^2\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right)$ の値を表〔2.3〕に例示した。

一様本数分配における単一の断面積括約誤差の分散を近似的に $\frac{\pi^2 d_i^2 a^2}{48}$ とすると，

$$\frac{\pi^2 d_i^2 a^2}{48} = \frac{\pi^2(d^2_m + \sigma t_i)^2 a^2}{48}$$

$$= \frac{\pi^2(d_m^2 + 2\,d_m\,\sigma\, t_i + \sigma^2 t_i^2)p^2\sigma^2}{48}$$

$$= \frac{\pi^2 d_m^2}{4\sigma^2}\cdot\frac{p^2}{12} + \frac{\pi^2 d_m}{4\sigma}\cdot\frac{p^2 t_i}{6} + \frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{p^2 t_i^2}{3}$$

但し $p = \frac{a}{\sigma}$

表〔2·3〕 単一の断面積括約誤差の分散
($m/\sigma = 4$. σ^4 で割つた値を示す)

t_i \ a/σ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
−2.0	0.0320	0.1293	0.2921	0.4973	0.7285
−1.8	0.0395	0.1589	0.3524	0.5715	0.8828
−1.6	0.0470	0.1897	0.4201	0.7065	1.0629
−1.4	0.0550	0.2235	0.4968	0.8450	1.2779
−1.2	0.0634	0.2585	0.5691	0.9910	1.5038
−1.0	0.0730	0.2950	0.6553	1.1445	1.7450
−0.8	0.0831	0.3345	0.7458	1.3090	2.0121
−0.6	0.0939	0.3809	0.8450	1.4840	2.2927
−0.4	0.1053	0.4263	0.9455	1.6700	2.5840
−0.2	0.1175	0.4744	1.0569	1.8596	2.8998
0	0.1301	0.5252	1.1690	2.0622	3.2058
0.2	0.1437	0.5785	1.2869	2.2726	3.5292
0.4	0.1578	0.6343	1.4080	2.4733	3.8282
0.6	0.1726	0.6935	1.5352	2.6807	4.1166
0.8	0.1880	0.7491	1.6626	2.8931	4.3995
1.0	0.2040	0.8116	1.7914	3.1036	4.6701
1.2	0.2208	0.8751	1.9230	3.3074	4.9301
1.4	0.2375	0.9390	2.0572	3.5038	5.1801
1.6	0.2542	1.0054	2.1884	3.6944	5.4206
1.8	0.2710	1.0731	2.3203	3.8836	5.6531
2.0	0.2879	1.1438	2.4529	4.0568	5.8786

式〔2.13〕との係数比較において，$\frac{p^2}{12}\fallingdotseq\mu_i^2\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)$，$\left|\frac{p^2 t_i}{6}\right|\fallingdotseq\left|\frac{\xi_3}{A_i}-\frac{\xi_1\xi_2}{A_i^2}\right|$，

$\frac{p^2 t_i^2}{3}\fallingdotseq\frac{\xi_4}{A_i}-\frac{\xi_2^2}{A_i^2}$ なる3条件が満されるならば，

$$\mu_i^2\,(\Delta g)\fallingdotseq\frac{\pi^2 d_i^2 a^2}{48}$$

と見做すことによつて，誤差評価は一層簡単になる。数値計算の結果は上の条件が実用的にはほゞ満足されることを示す。表〔2.3〕について2～3の計算例を挙げる。表〔2.4〕は何れも $|t_i|=2$ の場合の計算値であるが，それでも近似度は極めて良好で，最後の二例の如く，$a/\sigma=1$ なる極端なる場合においてさえ，尚良好な近似度を示している。一般にはこの近似度はより以上に

表〔2・4〕単一の標準断面積括約誤差の計算例（何れも絶対値を示す）

σ	m	a	d_i	正確値	近似値	差	差率（%）
10	40	2	20	17.9	18.1	+ 0.2	+ 1.1
10	40	2	60	53.6	54.5	+ 0.9	+ 1.7
10	40	4	20	35.9	36.3	+ 0.4	+ 1.2
10	40	4	60	106.9	109.9	+ 3.0	+ 2.8
8.33	33.3	5	16.6	37.3	37.8	+ 0.5	+ 1.3
8.33	33.3	5	49.9	107.8	113.3	+ 5.5	+ 5.1
5	20	4	10	17.6	18.1	+ 0.5	+ 2.8
5	20	4	30	50.3	54.3	+ 4.0	+ 7.9
5	20	5	10	21.4	22.6	+ 1.2	+ 5.6
5	20	5	30	60.6	67.8	+ 7.2	+12.0

良好である筈で，式〔2.13〕に代うるに $\mu_i^2\,(\Delta g)\fallingdotseq\pi^2 d_i^2 a^2/48$ を以てする近似計算は，充分実用に堪え得るであろう。更に，好都合にも，近似計算の結果は全て過大であることがわかる。かくて**一般実用域内において**一様分布におけると同一の近似式が得られる。

$$\mu_i^2\,(\Delta g)\fallingdotseq\frac{\pi^2 d_i^2 a^2}{48}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots〔2.14〕$$

（b）断面積括約誤差の和——正規型本数分配における林木の総断面積括約誤差。

正規型本数分配における N 本の総断面積括約誤差を ΔG であらわすと，ΔG の密度函数は，一様本数分配の場合と同様に，N が充分大なるときは，近似的に平均 $m\,(\Delta G)=\sum_{i=1}^{k} n_i\, m_i\,(\Delta g)$，分散 $\mu^2\,(\Delta G)=\sum_{i=1}^{k} n_i\,\mu_i^2\,(\Delta g)$ なる正規分布を以て表されるであろう。こゝに $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$，k は直径階の数である。N の充分なる大きさについては，一様本数分配の場合以上に非対称なる Δg の分布形を考慮し，8～10 以上とするのが妥当であろう。若し N 本の林木が，全て同一直径階に属する場合には，平均 $=N\,m_i\,(\Delta g)$，分散 $=N\,\mu_i^2\,(\Delta g)$ なることはいうまでもない。

次にこのような林分の材積を調査する場合の平均，分散および括約誤差率について考察してみる。

式〔2.12〕より

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\, m_i\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right)=\frac{\pi}{4}\left\{2\,\frac{d_m}{\sigma}\sum_{i=1}^{k} n_i\, m_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)+\sum_{i=1}^{k} n_i\left(t_i^2-\frac{\xi_{2i}}{A_i}\right)\right\}$$

{ } 内第一項は，一般に相殺される性質を有し，従つて上式は

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\, m_i \left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right) \doteqdot \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{k} n_i \left(t_i^2 - \frac{\xi_{2i}}{A_i}\right)$$

$\sum_{i=1}^{k} n_i = N$ とおけば，第 i 直径階の本数密度は，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} A_i$ であるから，$n_i = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} A_i$，

故に
$$\sum_{i=1}^{k} n_i\, m_i \left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right) \doteqdot \frac{N\pi}{4} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (A_i t_i^2 - \xi_{2i})$$

今 $\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} (A_i t_i^2 - \xi_{2i})$ の値を計算すると表〔2.5〕のようになる。

表〔2·5〕 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (A_i t_i^2 - \xi_{2i})$ の値

t_i ＼ a/σ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	− 0.000265	− 0.002102	− 0.006990	− 0.016227	− 0.030860
0.2	− 0.000239	− 0.001897	− 0.006311	− 0.014663	− 0.027916
0.4	− 0.000166	− 0.001323	− 0.002320	− 0.007590	− 0.016444
0.6	− 0.000062	− 0.000498	− 0.001678	− 0.003972	− 0.007742
0.8	+ 0.000053	+ 0.000421	+ 0.001371	+ 0.003092	+ 0.005660
1.0	+ 0.000161	+ 0.001269	+ 0.004202	+ 0.009683	+ 0.018244
1.2	+ 0.000243	+ 0.001922	+ 0.006391	+ 0.014825	+ 0.028161
1.4	+ 0.000490	+ 0.002311	+ 0.007701	+ 0.018056	+ 0.034322
1.6	+ 0.000303	+ 0.002422	+ 0.008099	+ 0.018978	+ 0.036500
1.8	+ 0.000288	+ 0.002298	+ 0.007722	+ 0.018179	+ 0.035183
2.0	+ 0.000255	+ 0.002015	+ 0.006795	+ 0.016076	+ 0.031335

或る直径階の中央値が，丁度林木平均直径に一致する場合を仮定すると，a/σ の値に応じ $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (A_i t_i^2 - \xi_{2i})$ の値は大約表〔2.6〕のように推定される。

表〔2·6〕 $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (A_i t_i^2 - \xi_{2i})$ の値

a/σ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (A_i t_i^2 - \xi_{2i})$	+ 0.0021	+ 0.0068	+ 0.0177	+ 0.0279	+ 0.0370

上表の値を α を以てあらわすと，

$$m\,(\Delta G) = \sigma^2 \sum n_i\, m_i \left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right) \doteqdot N \frac{\pi}{4} \sigma^2 \alpha$$

括約断面積合計 G に対する百分率であらわせば，

$$m\,(\Delta G)\,\% = \frac{100\, m\,(\Delta G)}{G} \doteqdot \frac{100\,N \frac{\pi}{4} \sigma^2 \alpha}{N \frac{\pi}{4} d_G^2} = \frac{100\, \sigma^2 \alpha}{d_G^2}$$

しかるに $a/\sigma = p$ とおくと

$$\sigma^2 \alpha = a^2 \frac{\alpha}{p^2}$$

α/p^2 は上表において，大略平均して $\frac{1}{24}$ とおき得るから結局

$$m\,(\Delta G)\,\% \doteqdot \frac{100\, a^2}{24\, d_G^2} \quad \cdots\cdots〔2.15〕$$

一様分布における m (ΔG) % は正確に $-\frac{100\ a^2}{12\ d_G^2}$ であるから，正規型本数分配における総断面積括約誤差の平均の偏差率は，通常の括約単位においては一様分布の場合に比し，符号相反し，絶対値において約 $\frac{1}{2}$ である。

従つて正規型本数分配においては，総断面積括約誤差は，一様分布の場合とは逆に，正値をとる場合が多いと考えられ，しかも m (ΔG) % は測定本数に無関係であるが，標準誤差に基く総断面積括約誤差率の推定限界 ε (ΔG) % は，$\sqrt{\mathrm{N}}$ に逆比例するから，測定本数の増加するに従い，正の誤差のみとなる場合も予想される。

以上論ずる所により，正規型本数分配における総断面積括約誤差も亦，その平均値のみを考慮するならば，一様分布における ε (ΔG) % の計算図表 表〔1.4〕によつて評価し得られるであろう。

第 3 章

Meyer 型本数分配における括約誤差

擇伐林の本数分配函数として H. A. Meyer [2] は次式を与えた：

$$\psi(x) = \kappa e^{-\alpha x} \quad \cdots\cdots〔3.1〕$$

但し，x；直径，κ，α；常数

α は減少係数で，本数減少率の大なる程 α の値は大きい。異常の場合を除けば，α=0.05～0.08 であると H. A. Meyer [2] はいう。この H. A. Meyer の式によつて表される択伐林型本数分配を，私は特に Meyer 型本数分配と名付けたいと思う。以下これについて括約誤差の諸性質を明にする。

1. 直径括約誤差

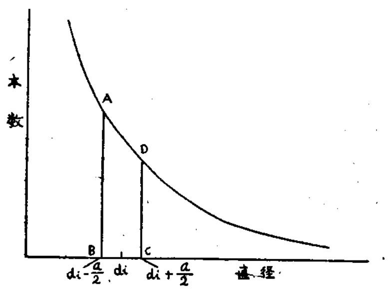
図〔3.1〕は式〔3.1〕によつて表される本数分配を示す。図において直径が第 i 直径階に属する確率は面積 ABCD で表される。即ち

$$A_i' = \kappa\int_{d_i-\frac{a}{2}}^{d_i+\frac{a}{2}} e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= \frac{\kappa}{\alpha}\left(e^{-\alpha(d_i-\frac{a}{2})} - e^{-\alpha(d_i+\frac{a}{2})}\right)$$

但し d_i；第 i 直径階の中央値，

a； 括約単位



図〔3.1〕Meyer 型本数分配曲線

一方 d_i-z $\left(但し\ -\frac{a}{2}<z<\frac{a}{2}\right)$ における直径の確率密度は

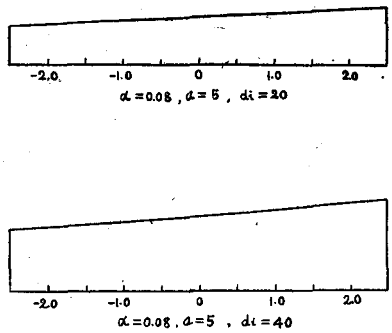
$$B_i = \kappa\, e^{-\alpha(d_i-z)}$$

故にこの場合の単一の直径括約誤差 Δd の密度函数は次式によつて与えられる：

$$\psi(z) = \frac{B_i}{A_i'} = \frac{\alpha\, e^{-\alpha(d_i-z)}}{\left(e^{-\alpha(d_i-\frac{a}{2})} - e^{-\alpha(d_i+\frac{a}{2})}\right)} = \frac{1}{A_i}\, e^{-\alpha(d_i-z)} \quad \cdots\cdots〔3.2〕$$

$$但し\quad A_i = \frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha\left(d_i-\frac{a}{2}\right)} - e^{-\alpha\left(d_i+\frac{a}{2}\right)}\right)$$

即ち $\psi(z)$ は κ には無関係で，たゞ減少係数 α，括約単位 a および当該直径階の中央値 d_i の函数である。図〔3.2〕に $\alpha=0.08$, $a=5$, $d_i=20$ および40 の場合の $\psi(z)$ の分布形を例示する。



図〔3.2〕MEYER 型本数分配における単一直径括約誤差の密度分布

平均： Δd の平均 $m(\Delta d)$ は次の如く導かれる。

$$m(\Delta d) = \frac{1}{A_i}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z e^{-\alpha(d_i-z)}\,dz$$

$$= -\frac{1}{\alpha} + \frac{a\left(e^{-\alpha\left(d_i-\frac{a}{2}\right)} + e^{-\alpha\left(d_i+\frac{a}{2}\right)}\right)}{2\left(e^{-\alpha\left(d_i-\frac{a}{2}\right)} - e^{-\alpha\left(d_i+\frac{a}{2}\right)}\right)}$$

更に

$$\frac{\left(e^{-\alpha\left(d_i-\frac{a}{2}\right)} + e^{-\alpha\left(d_i+\frac{a}{2}\right)}\right)}{\left(e^{-\alpha\left(d_i-\frac{a}{2}\right)} + e^{-\alpha\left(d_i+\frac{a}{2}\right)}\right)} = \frac{e^{-\alpha\left(d_i-\frac{a}{2}\right)} - e^{-\alpha\left(d_i+\frac{a}{2}\right)} + 2e^{-\alpha\left(d_i+\frac{a}{2}\right)}}{e^{-\alpha\left(d_i-\frac{a}{2}\right)} - e^{-\alpha\left(d_i+\frac{a}{2}\right)}}$$

$$= 1 + \frac{2}{e^{\alpha a} - 1}$$

故に

$$m(\Delta d) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{a}{2} + \frac{a}{e^{\alpha a} - 1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔3.3〕$$

式〔3.3〕は，即ち H. A. MEYER[2] が Systematischer Fehler の一つとして得たものと同一のものである。但し誤差定義の関係上符号相反する。この平均値が直径階の位置に無関係であつて，たゞ減少係数 α と括約単位 a のみの函数である点に注意すべきである。

照査法における成長量査定の誤差を追求せんとした H. A. MEYER の立場にあつて，直径そのものに無関係なる $m(\Delta d)$ を Systematischer Fehler としたのは，一見当然の如く考えられるが，$m(\Delta d)$ は決して別個の独立誤差ではなく，その意味する所は括約によつて測定せられた直径が，直径階の中央値に対し**平均として**示すであろう偏位に過ぎないことに思い至れば，彼の取扱の不適当なることが諒解せられるであろう。

表〔3.1〕に $m(\Delta d)$ の数値を示す。

表〔3·1〕MEYER 型本数分配における単一の直径括約誤差の平均 *

α ＼ a (cm)	1	2	4	5
	cm	cm	cm	cm
0.05	0.00382	0.01682	0.06660	0.10408
0.06	0.00504	0.02012	0.07993	0.12492
0.07	0.00587	0.02340	0.09325	0.14558
0.08	0.00667	0.02665	0.10653	0.16622

* これと同じものを H. A. MEYER は“直径平均木の，階の中央値からの偏位”として計算した。但し符号相反す。本表の数値は，MEYER の表が小数第3位に止るに対し，他の計算に対する必要から，小数第5位まで計算された。

分散：

$$M_2'\ (\Delta d) = \frac{1}{A_i}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2\, e^{-\alpha\ (d_i - z)}\, dz$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{2}{\alpha^2} - \frac{a}{A_i\ \alpha^2}\left(e^{-\alpha\ (d_i - \frac{a}{2})} + e^{-\alpha\ (d_i + \frac{a}{2})}\right)$$

しかるに

$$\frac{\alpha}{A_i\ \alpha}\left(e^{-\alpha\ (d_i - \frac{a}{2})} + e^{-\alpha\ (d_i + \frac{a}{2})}\right) = 2\left\{m\ (\Delta d) + \frac{1}{\alpha}\right\}$$

故に

$$M_2'\ (\Delta d) = \frac{a^2}{4} - \frac{2}{\alpha} m\ (\Delta d)$$

従つて分散は

$$\mu_i^2\ (\Delta d) = \frac{a^2}{4} - \frac{2}{\alpha} m\ (\Delta d) - \{m\ (\Delta d)\}^2 \quad \cdots\cdots〔3.4〕$$

即ち平均と同様，分散従つて亦標準誤差も直径階の位置には無関係で，α と a だけの函数である。表〔3.2〕にその値を示す。これらの値が，一様分布において対応する値 $\frac{a^2}{12}$ と極めてよく近似する点に注意を要する。

表〔3・2〕 MEYER 型本数分配における単一の直径括約誤差の分散

α ＼ a (cm)	1	2	4	5*
0.05	0.081054	0.326917	1.331565	2.075967
0.06	0.081746	0.328929	1.329278	2.070396
0.07	0.082251	0.330873	1.327020	2.069379
0.08	0.083206	0.333040	1.325401	2.066871

2. 断面積括約誤差

（a） 単一の断面積括約誤差

$$y_i = \frac{\pi}{4}\left[\,2\,d_i\,z - z^2\,\right]$$

とおけば，式〔3.2〕より単一の断面積括約誤差 Δg の密度函数として次式が得られる：

$$\psi\ (y_i) = \frac{1}{A_i\ \sqrt{\pi}\ \sqrt{g_i - y_i}}\, e^{-\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\sqrt{g_i - y_i}} \quad \cdots\cdots〔3.5〕$$

但し $g_i = \frac{\pi}{4} d_i^2$

平均： 式〔3.5〕より，

$$m_i\ (\Delta g) = \frac{1}{A_i\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{4}\left(d_i\ a - \frac{a^2}{4}\right)}^{\frac{\pi}{4}\left(d_i\ a - \frac{a^2}{4}\right)} y_i\ (g_i - y_i)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\sqrt{g_i - y_i}}\, d\,y_i$$

この積分を求めると $m_i\ (\Delta g)$ は結局次の如く表される：

$$m_i\ (\Delta g) = \frac{\pi}{4}\left\{2\ m_i\ (\Delta d)\ (d_i + \frac{1}{\alpha}) - \frac{a^2}{4}\right\} \cdots\cdots〔3.6〕$$

式〔3.6〕によれば断面積括約誤差の平均は，直径括約誤差の平均と異り，直径階の中央値の函数でもあり，一般に正値を示す。H. A. MEYER はその本数分配における断面積平均木の断面積を計算し，それと直径階の中央値に対応する断面積の差を以て，この場合の Systematischer Abrundungsfehler としているようである。結果はもとより式〔3.6〕と一致する。$m\ (\Delta d)$ と異り直径階の中央値に関係する $m\ (\Delta g)$ を Systematischer Fehler として取り扱つた彼にと

つて，照査法の成長量査定に関し，この**誤差の差**をも考慮せざるを得なくなつたのは，けだし当然のことゝ云える。なお彼はこれに関連して，断面積平均木の直径を，$\Delta=0.05,\ 0.08$，括約単位1～6 cm，直径階の中央値20，60，100 cm について計算している。

表〔3.3〕は $d_i=60$ cm に対応する断面積括約誤差の平均を示す。

表〔3・3〕MEYER 型本数分配における単一の断面積括約誤差の平均（$d_i=60$ cm）

α ＼ a (cm)	1	2	4	5
	cm²	cm²	cm²	cm²
0.05	0.2837	1.3283	5.2276	8.1702
0.06	0.4106	1.6376	6.4842	10.1350
0.07	0.4886	1.9451	7.7395	12.0785
0.08	0.5633	2.2495	8.9902	14.0207

分散：　式〔3.5〕より

$$M_{2i}(\Delta g)=\frac{1}{A_i\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{4}\left(d_i a+\frac{a^2}{4}\right)}^{\frac{\pi}{4}\left(d_i a-\frac{a^2}{4}\right)} y_i^2\,(g_i-y_i)^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\sqrt{g_i-y_i}}\,dy_i$$

この積分を求めると結局

$$M_{2i}(\Delta g)=\frac{\pi^2 d_i^2 a^2}{16}-\frac{\pi^2 d_i^2 m(\Delta d)}{2\alpha}+\frac{\pi^2 a^4}{256}-\frac{\pi^2 d_i a^2 m(\Delta d)}{16}$$
$$+\frac{\pi^2 d_i a^2}{8\alpha}-\frac{\pi^2 a^2 m(\Delta d)}{16\alpha}+\frac{\pi^2 a^2}{8\alpha^2}-\frac{3\pi^2 d_i m(\Delta d)}{2\alpha^2}-\frac{3\pi^2 m(\Delta d)}{2\alpha^3}$$

が得られる。しかるに

$$\mu^2(\Delta g)=M_2(\Delta g)-\{m(\Delta g)\}^2$$

故に

$$\mu_i^2(\Delta g)=\mu^2(\Delta d)\frac{\pi^2}{2}\left[\frac{d_i^2}{2}+\frac{d_i}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right]-\frac{\pi^2 m(\Delta d)}{2\alpha^2}\left[d_i+\frac{1}{\alpha}-\frac{m(\Delta d)}{2}\right]\cdots\cdots〔3.7〕$$

表〔3.4〕は式〔3.7〕によつて計算された標準断面積括約誤差即ち $\mu_i(\Delta g)$ の値を $d_i=60$ cm について示したものである。表中"正確値"は式〔3.7〕によつて計算したものであり，"近似値"は一様本数分配における標準断面積括約誤差の近似値 $\frac{\pi\, a\, d_i}{\sqrt{48}}$ を用いて計算したものである。

表〔3・4〕MEYER 型本数分配における単一の標準断面積括約誤差（$d_i=60$ cm）

α ＼ a (cm)	1		2		4		5	
	正確値	近似値	正確値	近似値	正確値	近似値	正確値	近似値
	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²
0.05	26.5	27.2	53.2	57.4	108.8	108.8	135.5	132.5
0.06	26.6	〃	53.8	〃	108.7	〃	135.3	〃
0.07	26.8	〃	54.0	〃	108.2	〃	135.2	〃
0.08	27.1	〃	54.2	〃	108.0	〃	135.1	〃

表に見る如く両者の近似は極めて良好である。即ち吾々は，正規型本数分配におけると同様，こゝでも亦式〔3.7〕の代りに次の実用的近似式を得る：

$$\mu_i^2(\Delta g)\fallingdotseq\frac{\pi^2 a^2 d_i^2}{48}\cdots\cdots\cdots\cdots〔3.8〕$$

（b）断面積括約誤差の和——MEYER 型本数分配に従う林木の総断面積括約誤差。

屢々論及する所に従つて，この場合も亦次の如く推論することができるであろう。

"MEYER 型本数分配に従う林木の総断面積括約誤差は，測定本数が充分大なるときは，近似

的に平均 $=\sum_{i=1}^{k} n_i\, m_i\,(\varDelta g)$，　分散 $=\sum_{i=1}^{k} n_i\, \mu_i^2\,(\varDelta g)$ なる正規分布をなす”と。但し n_i は第 i 直径階の本数，k は直径階の数である。こゝに $\sum_{i=1}^{k} n_i=N$ の充分なる大きさは，実用的には 10 前後と見て差し支えないであろう。

今総断面積括約誤差の平均を $m\,(\varDelta \mathrm{G})$，分散を $\mu^2\,(\varDelta \mathrm{G})$ であらわすと，これらは以下のようになる。

平均：

$$m\,(\varDelta \mathrm{G})=\sum_{i=1}^{k} n_i\, m_i\,(\varDelta g)=\frac{\pi}{4}\left[2\,m\,(\varDelta d)\,\left(\sum n_i\, d_i+\frac{N}{\alpha}\right)-\frac{Na^2}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi N}{4}\left[2\,m\,(\varDelta d)\,\left(d_m+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{a^2}{4}\right]$$

但し　$d_m=\dfrac{\sum n_i\, d_i}{N}$

しかるに $\dfrac{\pi}{4}\left[2\,m\,(\varDelta d)\,\left(d_m+\dfrac{1}{\alpha}\right)-\dfrac{a^2}{4}\right]$ は林木平均直径 d_m に対する断面積括約誤差の平均であるから，これを $m_m\,(\varDelta g)$ とおけば，

$$m\,(\varDelta \mathrm{G})=\mathrm{N}\,m_m\,(\varDelta g) \quad \cdots\cdots〔3.9〕$$

従つて林木平均直径を知れば，表〔3.1〕を併用することによつて $m\,(\varDelta \mathrm{G})$ を求めることが出来る。実用的には次の如くするのが便利であろう。

林木の断面積合計を $\mathrm{G}=\frac{\pi}{4}\sum n_i\, d_i^2 \fallingdotseq \mathrm{N}\frac{\pi}{4}d_m$ * とおけば，

$$m\,(\varDelta \mathrm{G})\,\% \fallingdotseq \frac{2\,m\,(\varDelta d)\,\left(d_m+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{a^2}{4}}{d_m^2} \quad \cdots\cdots〔3.10〕\ **$$

$a=1,\ 2,\ 4,\ 5\,\mathrm{cm}$，$\alpha=0.05\sim0.08$，$d_m=20\sim50\,\mathrm{cm}$ に対する $m\,(\varDelta \mathrm{G})\,\%$ の値を表〔3.5〕に示す。式〔3.10〕において d_m の代りに d_i を用いれば，$m\,(\varDelta \mathrm{G})\,\%$ の代りに $m_i\,(\varDelta g)\,\%$ が得られる。この場合には，$m\,(\varDelta \mathrm{G})\,\%$ が近似値であるに対し，$m_i\,(\varDelta g)\,\%$ は正確値となる。従つて表〔3.5〕において d_m の代りに d_i とおけば，$m_i\,(\varDelta g)\,\%$ が得られる。

分散：

前述の如く，　$\mu_i^2\,(\varDelta g) \fallingdotseq \dfrac{\pi^2\, a^2\, d_i^2}{48}$

従つて

$$\mu^2\,(\varDelta \mathrm{G}) \fallingdotseq \frac{\pi^2\, a^2}{48}\sum_{i=1}^{k} n_i\, d_i^2$$

これは一様分布におけると同様であり，従つて平均値を中心としての総断面積括約誤差率の推定限界は図〔1.4〕に示した計算図表によつて求め得られる。

以上によつて明かな如く，MEYER 型分布における総断面積括約誤差は，一般に正値をとることが多く，その傾向は林木平均直径の小なる程，又断面積合計の大なる程増大することが，図〔1.4〕及び表〔3.5〕より知られる。例えば平均直径 30 cm，$\alpha=0.06$，$a=5\,\mathrm{cm}$ なる場合，断面積合計が 60 m^2 までに及べば，即ち約 830 本を測定すれば，その断面積合計に対する総断面積括約誤差は測定の 97.5 % まで正値となるであろう。断面積括約誤差の平均の偏差が MEYER 型本数分配において最も著しいことは注目すべきである。

* 断面積平均木の直径が，林木平均直径に，一致しないことはいうまでもない。しかしその差は極めて小でこゝでの目的には上の近似式で充分である。

$$d_G{}^2=\frac{\sum d_i^2}{N}=\frac{(\sum d_i)^2-2\sum_{i\neq j}^{{}_NC_2}(d_i\, d_j)}{N}$$，今 ${}_NC_2$ 個の $d_i\, d_j$ の平均を近似的に d_m^2 とおけば

$d_G{}^2 \fallingdotseq N\, d_m^2-(N-1)\, d_m^2=d_m^2$，即ち $d_G \fallingdotseq d_m$

** 本式による $m\,(\varDelta \mathrm{G})$ の百分率は真の断面積合計に対するものではなく，括約直径を用いて算出されたそれに対するものである。

表〔3·5 a〕 MEYER 型本数分配における林木の総断面積括約誤差の
平均の断面積合計に対する百分率

平均直径 cm	a = 1 cm				a = 2 cm			
	α=0.05	0.06	0.07	0.08	0.05	0.06	0.07	0.08
20	0.014	0.030	0.038	0.046	0.086	0.119	0.151	0.183
21	0.014	0.029	0.037	0.045	0.086	0.117	0.149	0.178
22	0.015	0.029	0.036	0.043	0.085	0.115	0.144	0.173
23	0.015	0.028	0.035	0.042	0.083	0.113	0.141	0.168
24	0.015	0.028	0.035	0.041	0.083	0.111	0.137	0.164
25	0.015	0.028	0.034	0.040	0.082	0.108	0.134	0.160
26	0.015	0.027	0.033	0.039	0.080	0.106	0.131	0.156
27	0.015	0.026	0.032	0.038	0.079	0.104	0.128	0.152
28	0.015	0.025	0.031	0.037	0.078	0.102	0.125	0.148
29	0.015	0.025	0.031	0.036	0.077	0.100	0.122	0.144
30	0.015	0.024	0.030	0.035	0.075	0.098	0.119	0.140
31	0.014	0.024	0.029	0.034	0.074	0.096	0.116	0.137
32	0.014	0.023	0.029	0.033	0.073	0.094	0.114	0.134
33	0.014	0.023	0.028	0.033	0.072	0.092	0.112	0.131
34	0.014	0.022	0.028	0.032	0.070	0.090	0.110	0.127
35	0.014	0.022	0.027	0.032	0.069	0.088	0.108	0.125
36	0.014	0.022	0.026	0.031	0.068	0.086	0.105	0.123
37	0.013	0.021	0.025	0.030	0.067	0.084	0.103	0.121
38	0.013	0.021	0.025	0.029	0.066	0.083	0.100	0.118
39	0.013	0.020	0.024	0.029	0.065	0.081	0.098	0.115
40	0.013	0.020	0.024	0.028	0.064	0.080	0.096	0.112
41	0.013	0.020	0.023	0.028	0.063	0.079	0.094	0.109
42	0.013	0.019	0.023	0.027	0.061	0.077	0.092	0.107
43	0.012	0.019	0.022	0.027	0.060	0.075	0.091	0.105
44	0.012	0.019	0.022	0.026	0.059	0.074	0.089	0.104
45	0.012	0.018	0.022	0.026	0.058	0.073	0.087	0.102
46	0.012	0.018	0.021	0.025	0.057	0.072	0.086	0.100
47	0.012	0.018	0.021	0.025	0.057	0.071	0.084	0.098
48	0.012	0.017	0.021	0.024	0.056	0.070	0.083	0.096
49	0.011	0.017	0.020	0.024	0.055	0.069	0.082	0.095
50	0.011	0.017	0.020	0.023	0.055	0.068	0.086	0.093

表〔3・5b〕 MEYER 型本数分配における林木の総断面積括約誤差の平均の断面積合計に対する百分率

平均直径 cm	a = 4 cm				a = 5 cm			
	α=0.05	0.06	0.07	0.08	0.05	0.06	0.07	0.08
20	0.33	0.47	0.60	0.73	0.52	0.73	0.94	1.14
21	0.33	0.46	0.59	0.71	0.52	0.72	0.92	1.12
22	0.33	0.45	0.57	0.69	0.52	0.71	0.89	1.08
23	0.33	0.44	0.56	0.67	0.51	0.70	0.87	1.05
24	0.32	0.44	0.55	0.66	0.51	0.68	0.85	1.02
25	0.32	0.43	0.53	0.64	0.50	0.67	0.83	1.00
26	0.31	0.42	0.52	0.62	0.49	0.66	0.81	0.97
27	0.31	0.41	0.51	0.61	0.49	0.64	0.79	0.95
28	0.30	0.40	0.50	0.59	0.48	0.63	0.77	0.92
29	0.30	0.39	0.48	0.58	0.47	0.61	0.75	0.90
30	0.30	0.39	0.47	0.56	0.46	0.60	0.74	0.88
31	0.29	0.38	0.46	0.55	0.45	0.59	0.72	0.86
32	0.29	0.37	0.45	0.54	0.44	0.58	0.71	0.84
33	0.28	0.36	0.44	0.52	0.44	0.57	0.69	0.82
34	0.28	0.35	0.43	0.51	0.43	0.55	0.68	0.80
35	0.27	0.35	0.42	0.50	0.42	0.54	0.66	0.78
36	0.27	0.34	0.41	0.49	0.42	0.53	0.65	0.76
37	0.26	0.33	0.41	0.48	0.41	0.52	0.63	0.75
38	0.26	0.33	0.40	0.47	0.40	0.51	0.62	0.73
39	0.25	0.32	0.39	0.46	0.40	0.50	0.61	0.71
40	0.25	0.32	0.38	0.45	0.39	0.49	0.60	0.70
41	0.24	0.31	0.37	0.44	0.38	0.48	0.59	0.69
42	0.24	0.30	0.37	0.43	0.38	0.47	0.58	0.68
43	0.24	0.30	0.36	0.42	0.37	0.46	0.57	0.66
44	0.23	0.29	0.35	0.41	0.36	0.45	0.55	0.65
45	0.23	0.29	0.35	0.41	0.36	0.44	0.54	0.64
46	0.23	0.28	0.34	0.40	0.35	0.44	0.54	0.63
47	0.22	0.28	0.33	0.39	0.35	0.43	0.53	0.61
48	0.22	0.27	0.33	0.39	0.34	0.43	0.53	0.60
49	0.22	0.26	0.32	0.38	0.33	0.42	0.52	0.59
50	0.21	0.26	0.32	0.38	0.33	0.42	0.52	0.58

第 4 章

林分材積測定における括約誤差

前章迄に三つの基本的本数分配における直径ならびに断面積括約誤差の性格を明かにした。本章においてはこれに基いて林分材積測定における括約誤差の評価について考察する。

直径あるいは断面積括約誤差の林分材積に対する影響は求積方式によつて異る。こゝには次のように限定された場合について考察する。

（i） 材積測定は毎木調査に単式材積表＊を併用することによつて行われる。

（ii） 材積表自体の誤差および他の種類の誤差はなきものとする。

材積測定において括約誤差が問題となるのは，毎木調査による集約な材積調査における場合であつて，標準地法の如きにあつては問題となることはないといつてよい。単式材積表はアルガン表を代表的なものとする，最も進歩した形のものであつて，形数，樹高を無視する点で一見不正確と見えるが，予備調査によつて適当な表を選び，或は当該地方に対して調整された表を用いるときは，その精度と簡便なることは他の如何なる方法にも勝るといえる。如何なる材積表といえども対象林分に対する適合度の点で表自体に誤差を含むことはいうまでもなく，照査法における経理表の如く，それ自体を不変の尺度とみる場合は別として，一般にはもとよりこの誤差を無視し得ないが，こゝにはこの誤差は，他の例えば偶然測定誤差とともに考慮外におくこととする。

1. 林分材積測定における括約誤差

単式材積表においては，材積は直径のみの函数として示されている。従つてこれの使用においては，直径を測定することによつて直に材積を知り得るわけであるが，それには直径と材積との間に何等かの函数関係を予想しているのはいうまでもない。この関係としては種々のものが考えられるが，最も簡単なものは，

$$v = cd^2$$

である。この場合には林分材積 V は

$$V = c\sum_{i=1}^{k} n_i d_i^2$$

但し c；常数，n_i；第 i 直径階の本数，d_i；第 i 直径階の直径中央値，

したがつて V の材積括約誤差は，いうまでもなく，総断面積括約誤差率と一致する。しかし上式を書き換えると，

$$v = c'g\ , \quad 但し \quad g = \frac{\pi}{4}d^2$$

であつて，これは c' 即ち形状高が直径の如何を問わず等しいとすることで，もとより一般には成立せず，在来の材積表の数字を検しても，このような仮定に立つものはない。たゞ極めて均一な林分では，括約誤差の評価には差し支えない程度の近似度で，上の仮定が許されると見て，断面積括約誤差率を以て，材積括約誤差率と見做してよかろう。

より一般的且簡便な函数式としては，

$$v = \alpha d^{\beta} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔4.1〕$$

但し便宜上 v は m^3 単位，d は cm^2 単位で表す

がある。これは直径と材積との関係を表す最も一般的な式と見ることが出来る。もとより常数 α, β は材積表により，林分によつて異なるのは当然で，そこに材積表選択の，若しくは新なる調整

＊ 樹種，樹高を区別せず，胸高直径のみの函数として材積を表示せるもの，岡崎 (6) 参照

の必要性が生ずるわけである。かゝる函数関係で代表せられる材積表を用いた場合の材積括約誤差は近似的に以下のように推定されよう。

式〔4.1〕で直径括約誤差を Δd とすると，それによる v の誤差 Δv は近似的に

$$\Delta v = \alpha\beta d^{\beta-1}\Delta d$$

従つて Δv の分散 $\mu^2(\Delta v)$ は，直径括約誤差の分散を $\mu^2(\Delta d)$ とすると，

$$\mu^2(\Delta v) = \alpha^2\beta^2 d^{2(\beta-1)}\mu^2(\Delta d)$$

林分材積を V とすると，

$$V = \sum_{i=1}^{k} n_i v_i = \alpha\sum_{i=1}^{k} n_i d_i^{\beta}$$

但し n_i；第 i 直径階の本数，d_i；第 i 直径階の直径中央値。

従つて林分材積括約誤差の分散は

$$\mu^2(\Delta V) = \alpha^2\beta^2\sum_{i=1}^{k} n_i d_i^{2(\beta-1)}\mu_i^2(\Delta d)$$

括約単位を a とすると，本数分配の如何を問わず

$$\mu_i^2(\Delta d) \fallingdotseq \frac{a^2}{12}$$

であるから，

$$\mu^2(\Delta V) \fallingdotseq \frac{a^2\beta^2}{12}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\frac{v_i}{d_i}\right)^2 \quad\cdots\cdots〔4.2〕$$

従つて標準誤差率は

$$\mu(\Delta V)\,\% \fallingdotseq \frac{50\,a\,\beta}{V\sqrt{3}}\sqrt{\sum n_i\left(\frac{v_i}{d_i}\right)^2} \quad\cdots\cdots〔4.2〕$$

信頼度95％における林分材積括約誤差率の推定限界は

$$\varepsilon(\Delta V)\,\% \fallingdotseq \frac{60\,a\,\beta}{V}\sqrt{\sum n_i\left(\frac{v_i}{d_i}\right)^2} \quad\cdots\cdots〔4.3〕$$

但し a, d_i；cm 単位，v_i，m^3 単位

これに対する ΔV の平均は，林分材積に対する百分率として，

$$m(\Delta V)\,\% \fallingdotseq \frac{100\,\beta}{V}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\frac{v_i}{d_i}\right) m_i(\Delta d) \quad\cdots\cdots〔4.4〕$$

但し a，d_i；cm 単位，v_i，V；m^3 単位。

こゝに注意すべきは，式〔4.4〕において，例えば一様本数分配における如く，$m_i(\Delta d)=0$ ならば $m(\Delta V)\,\%=0$ となることである。これが実際には 0 とならないことは，$m(\Delta d)=0$ でも断面積括約誤差の平均が 0 とならないことよりも明かである。この現象は式〔4.1〕に従つて誤差伝播の法則を適用したことに基くものである。この点に本法の欠陥がある。

材積表は必ずしも式〔4.1〕で規定せられず，経験的に定められたものも少くない。一般に何れの場合にも成立する近似的な林分材積括約誤差の評価法として次のような方法が成立する。

今第 i 直径階における単木の材積を v_i，形状高を c_i，断面積を g_i，とすると，

$$v_i = c_i g_i \quad , \quad V = \sum n_i c_i g_i$$

形状高が同一直径階内では相等しいとすると，

$$\mu^2(\Delta V) = \sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 \mu_i^2(\Delta g)$$

何れの本数分配でも

$$\mu_i^2(\varDelta g) \fallingdotseq \frac{\pi^2 a^2 d_i^2}{48}$$

であるから，

$$\mu^2(\varDelta V) \fallingdotseq \frac{\pi^2 a^2}{48}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 d_i^2 = \frac{\pi a^2}{12}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i v_i$$

従つて

$$\mu(\varDelta V)\% \fallingdotseq \frac{50\,a\sqrt{\pi}}{V\sqrt{3}}\sqrt{\sum n_i c_i v_i} \fallingdotseq \frac{50a}{V}\sqrt{\sum n_i c_i v_i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots〔4.5〕$$

$$\varepsilon(\varDelta V)\% \fallingdotseq \frac{100\,a}{V}\sqrt{\sum n_i c_i v_i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots〔4.6〕$$

便宜上 a を除き c_i，V，v_i を全てメートル単位であらわすと，上式は

$$\varepsilon(\varDelta V)\% \fallingdotseq \frac{a}{V}\sqrt{\sum n_i c_i v_i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots〔4.6〕'$$

但し　a；(cm)，c_i；(m)，V, v_i；(m^3)

となる。若し形状高が各直径階を通じて等しいと仮定すれば，$\varepsilon(\varDelta V)\% = \varepsilon(\varDelta G)\%$ となる。平均は

$$m(\varDelta V)\% = \frac{100}{V}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i m_i(\varDelta g) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots〔4.7〕$$

これらの式は林木材積括約誤差の概算的事前評価には不便である。

表〔4.1〕によれば，$c \fallingdotseq 9 \sim 15$ と見做してよいから，$3\sqrt{V} \leqq \sqrt{\sum n_i c_i v_i} \leqq 3.9\sqrt{V}$，従つて概略 $\sqrt{\sum n_i c_i v_i} \fallingdotseq 3.5\sqrt{V}$ とおけば，

$$\varepsilon(\varDelta V)\% \fallingdotseq \frac{3.5\,a}{\sqrt{V}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots〔4.6〕''$$

又大約 $m(\varDelta V)\% \fallingdotseq m(\varDelta G)\%$ と見做せば，$m(\varDelta V)\%$ は正規分布では一般に 0.1 % 以下，MEYER 型分布でも特殊の場合を除けば，0.8 % 以下と見做してよい。他方 $\varepsilon(\varDelta V)\%$ は蓄積 V の平方根に逆比例するから，例えば $V=400\,m^3$ なら $a=5\,cm$ でも $\varepsilon(\varDelta V)\% \fallingdotseq 0.9$ に過ぎない。従つて蓄積が或る程度大ならば現行括約単位での誤差は殆ど問題とするに足りない。又以上の理論は現行括約単位，即ち $a=5\sim6\,cm$ を前提としているが，この範囲内において括約単位の選択が問題となるような場合は，蓄積が少くて $\varepsilon(\varDelta V)\%$ がかなり大きくなる懸念のある場合であり，$m(\varDelta V)\%$ を $\varepsilon(\varDelta V)\%$ に対して無視してよい場合である。このような場合に限り式〔4.6〕″から

$$a \fallingdotseq \frac{\sqrt{V}\,\varepsilon(\varDelta V)\%}{3.5} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots〔4.8〕$$

とおくことによつて，蓄積の推定値と許容誤差率とを与えれば，括約単位が決定されることになる。* 式〔4.6〕″或は〔4.8〕で $\sqrt{V} \fallingdotseq 3.5\sqrt{G}$ とおけば，$\varepsilon(\varDelta V)\% \fallingdotseq \varepsilon(\varDelta G)\%$，$a \fallingdotseq \sqrt{G}\;\varepsilon(\varDelta G)\%$ となつて，図〔1.4〕によつて材積括約誤差および括約単位の概略値を求め得ることがわかる。しかし現実問題として，吾々にとつては林分の断面積合計よりも蓄積の推定の方が行い易いことを考慮すれば，上式によるのが便利であろう。

---

* 式〔4·8〕が成立するのは $a=5\sim6^{cm}$ 以内である。算出された a が 6 以上になる場合は，現行の最大括約単位を用いても充分目的を達し得ることになる。

表〔4・1〕2〜3 の材積表* における形状高の値**

径級	直径 (cm)	ビョレイ一般経理表***		アルガン第12表		アルガン第8表	
		材積 (SV)	c (m)	材積(m^3)	c (m)	材積(m^3)	c (m)
副木	15****					0.1	5.8
小径木	20	0.27	8.6	0.25	8.0	0.2	6.4
	25	0.45	9.2	0.5	10.2	0.4	8.2
	30	0.69	9.8	0.8	11.3	0.6	8.5
中径木	35	1.02	10.6	1.1	11.4	0.9	9.3
	40	1.43	11.4	1.5	11.9	1.2	9.6
	45	1.90	11.9	2.0	12.5	1.6	10.0
	50	2.42	12.6	2.6	13.4	2.0	10.2
大径木	55	2.99	12.6	3.3	13.8	2.6	10.9
	60	3.60	12.7	4.0	14.1	3.2	11.3
	65	4.26	12.8	4.8	14.5	3.8	11.5
	70	4.95	12.9	5.6	14.5	4.5	11.7
	75	5.68	12.9	6.5	14.7	5.2	11.8
	80	6.44	12.8	7.5	14.9	6.0	11.9
	85	7.22	12.7	8.5	15.0	6.8	12.0
	90	8.03	12.6	9.6	15.1	7.7	12.1
	95	8.86	12.5	10.8	15.2	8.6	12.1
	100	9.70	12.4	12.0	15.3	9.6	12.2

* 表の引用は岡崎 (6) による。

** 形状高は表の材積を対応する直径から求めた断面積で除して求め，表中を c を用いて表した。

*** 原表の材積は小数点以下第 5 位まで示されているが，こゝでは第2位までに止めた。又直径は130 cm まで及んでいるが，これも 105 cm 以下は省略した。

**** 原表には何れにも 15 cm のものは与えられていない。こゝでは後の計算の便宜上第8表にのみ推定値を附記した。

2. 照査法の成長量査定における括約誤差

成長量の査定は照査法の生命であるが，終蓄積および当該経理期間中の伐採材積の和と原蓄積との差を以てする成長量の査定方法に対し，短い経理期間にもかゝわらず，4 cm 又は 5 cm の如き大なる括約単位を適用して得られる成長量の信頼性に，強い疑惑がもたれていることは見逃し得ない事実である。現実の測定では括約誤差以外に偶然測定誤差，輪尺誤差* が加わるから，若しこれらの誤差の総計が一経理期間内の成長量を上廻るとすれば，測定された成長量は全く無意味なものとなる。

この問題に関しては既に H. A. MEYER[2]，岡崎[5] の研究があり，何れも照査法で採用している林班面積，経理期間の下にあつては，4 cm 又は 5 cm の括約単位でも，成長量の査定は一般に可能であることを指摘しているが，こゝでは前節に基いて若干の考察を試みることにする。生長量査定においては輪尺誤差は一応無視し得るとしても，偶然測定誤差を慮外においての以下の考察はもとより不完全たるをまぬがれないが，成長量査定に対する括約の影響の程度，ならびに成長量査定にあたつて選択さるべき括約単位の大きさに対する一指標を与えることは可能であろう。

* 輪尺誤差は元来定誤差であるから，若し原蓄積と終蓄積の測定に共に同一の輪尺が用いられるとすれば，林木組成の変化に伴う若干の誤差を伴うにしてもそれは成長量の査定には殆ど影響しない。

V_1 ; 原蓄積 (sv)＊，　V_2 ; 終蓄積 (sv)

E ; 当該経理期間中の伐採材積 (sv)

Z ; 成長量 (sv)，　p ; 当該経理期間内における，原蓄積に対する成長率 (%)

とすると，

$$Z = V_2 + E - V_1$$

従つて成長量括約誤差を ΔZ とすると，ΔZ の分散は，

$$\mu^2(\Delta Z) \fallingdotseq \frac{\pi a^2}{12}\left[100^4 \sum c_i v_i (n_{i1}+n_{i2}+n_{iE})\right]$$

但し c_i ; 経理表における第 i 直径階の形状高 (m), a ; 括約単位 (cm), v_i ; 経理表における第 i 直径階の材積 (m^3), n_{i1} ; 初回調査における第 i 直径階の本数, n_{i2} ; 期末調査における第 i 直径階の本数, n_{iE} ; 当該経理期間中の伐採木のうち，第 i 直径階に属するものの本数，

故に標準成長量括約誤差は，

$$\mu(\Delta Z)\% \fallingdotseq \frac{50\,a \times 100^2}{(V_2+E-V_1)\,100^3}\sqrt{\sum c_i v_i (n_{i1}+n_{i2}+n_{iE})}$$

$$= \frac{a}{2\,(0.0\,p\,V_1)}\sqrt{\sum c_i v_i (n_{i1}+n_{i2}+n_{iE})} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔4.9〕$$

従つて

$$\varepsilon(\Delta Z)\% \fallingdotseq \frac{a}{0.0\,p\;V_1}\sqrt{\sum c_i v_i (n_{i1}+n_{i2}+n_{iE})} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔4.10〕$$

成長量査定では，林分材積括約誤差の平均 $m(\Delta V_1)$ と $m(\Delta V_2)$ および $m(\Delta V_E)$ は相殺されると見做し得るから，成長量括約誤差率としては，$\varepsilon(\Delta Z)\%$ のみを考慮すれば充分である。

式〔4.10〕によつて成長量括約誤差率の事後計算は可能となるが，その概算的事前評価にはこれを次の如く簡便化するのがよいであろう。前節におけると同様概略

$$\sqrt{\sum c_i v_i (n_{i1}+n_{i2}+n_{iE})} \fallingdotseq 3.5\sqrt{\sum c_i v_i (n_{i1}+n_{i2}+n_{iE})}$$

とおき得，又 $\sum v_i (n_{i1}+n_{i2}+n_{iE}) = 2.0p\,V_1 \fallingdotseq 2\,V_1$ となし得るから，これらを式〔4.10〕に代入すれば次の簡便式を得る：

$$\varepsilon(\Delta Z)\% \fallingdotseq \frac{5\,a}{0.0p\sqrt{V_1}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔4.11〕$$

変形すれば括約単位の算出式として次式が得られる：

$$a = \frac{0.0\,p\sqrt{V_1}\;\varepsilon(\Delta Z)\%}{5} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔4.12〕^{**}$$

即ち成長率の大なる林分程，立地条件が等しければ経理期の長い程大なる括約単位を使用してよく，又 ha 当り蓄積が大なる程，林班面積が大なる程，括約単位は大きくしてよいことになる。

この両式は照査法による森林経営を行うにあたり，少なからぬ参考となろう。

今 ha 当蓄積 400 m^3，$p=8$ (%) なる林分を考えると，林分面積と括約単位とに対する成長量括約誤差の関係は次表のようになる。

表〔4・2〕 成長量括約誤差率と括約単位 (ha 当蓄積 400m^3, $p = 8\%$)

面積 ha ＼ a(cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
1	3.1	2.2	1.8	1.6	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0	1.0
2	6.3	4.4	3.6	3.1	2.8	2.5	2.4	2.2	2.1	2.0
4	12.5	8.9	7.2	6.3	5.6	5.1	4.7	4.4	4.2	4.0
5	15.6	11.1	9.0	7.8	7.0	6.4	5.9	5.5	5.2	4.9

* sv≒m^3 であるから，以下の論述では m^3 と見做して取り扱う。

** 式〔4・8〕についての注意は本式にも当てはまる。

照査法が採用する林班面積は一般に 5〜10 ha, 経理期間は 6〜8 年であるから，普通の森林ならば 5 cm 括約単位を以てしても，その成長量査定は充分有意義であり，従つて照査法の基礎が括約によつておびやかされることはないであろう。たゞ極端に成長の悪い蓄積の小なる林分では，経理期を長くするか，林班面積を大きくするか，若しくは括約単位を小さくすることを考慮せねばならぬであろうが，照査法の本質からして，経理期の長さおよび林班面積にはおのずから限度があるから，結局括約単位を小さくしなければならぬことになる。

択伐林に多くみられる如く，林木構成が 2 つ以上の径級に跨り，各径級別に成長量を査定する必要がある場合には事情はやゝ異り，各径級別に蓄積，成長率を考慮することによつて，それぞれの括約単位を定める必要がある。若し各級それぞれに，或は何れか一つの径級が他に比して，採用さるべき括約単位を異にするときは，厳密には各径級それぞれの括約単位を用うべきであろうが，それは余りにも煩雑で到底実行し得ぬばかりか，却つて新たなる誤差の原因ともなろう。従つてかゝる場合には算出された括約単位の中，最小のものを全径級に適用するか，若しくは径級を再編成するのが賢明な策といえよう。

第 5 章

実 証 的 考 察

前章迄の理論的考察の結果に対し，本章では現実林における若干の測定結果を引例して，これが実証的考察を試みる。

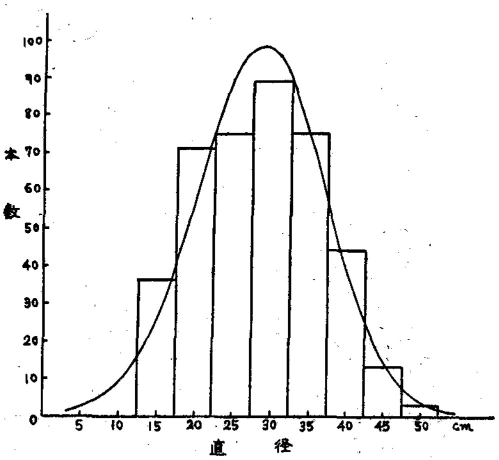
1. 一斉林型についての考察

表〔5.1〕および図〔5.1〕は京都大学芦生演習林に近接する同大学四明会所有のスギ一斉林 * の直径階別本数分配を示す。図〔5.1〕に見る如く，本林分は直径に関し，平均値 28.6 cm, 標準偏差 8.11 cm を有する仮想正規母集団の一標本と見做され得る。この林分につき，精密な耗目盛の真鍮製輪尺 ** を以て耗

表〔5・1〕京都大学四明会所有スギ一斉林における直径階別本数分配表

直径階 cm	15	20	25	30	35	40	45	50	計
本数	36	71	75	89	75	44	14	34	406

平均直径 $d_m = 28.6$ cm，標準偏差 $\sigma = 8.11$ cm.



図〔5.1〕京都大学四明会スギ一斉林における直径階別本数分配

* 本林分は嘗て岡崎教授が照査法の適用に関する基礎的研究の一部として偶然測定誤差等の実験に供せるもので，胸高の印付け，番号付け等は全て同教授により行われた。本章に引用せる数値は，これらの番号，測定位置に従い，筆者において新に測定したものである。岡崎 (7) 参照。

** 岡崎教授がその照査法適用に関する基礎的研究を行うにあたり，特に作成せる精密な輪尺であるが，机上括約を行つた本章の場合，輪尺誤差はいうまでもなく問題とならない。

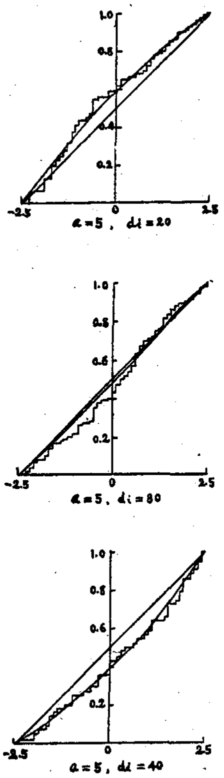
単位で測定された測定値を用い，机上括約の方法で括約誤差の実証的吟味を行うこととした。

先ず 406 個の粍単位で測定された全ての直径値を 1, 2, 4, 5 cm の各括約単位を以て机上括約し，括約直径値から元の測定値を引いたものを以て直径括約誤差とし，括約せる直径値に対応する円面積より元の測定値に対応する円面積を引いたものを以て断面積括約誤差とした。* 何れの括約単位を用いても今の目的には同様であるから，以下 5 cm 括約の場合について述べる。

（i） 単一の直径括約誤差の分布

単一の直径括約誤差の理論的分布は，式〔2.4〕によつて与えられ，図〔2.2〕に例示された如き形をとるが，これに対する実験的考察を試みる。

例を供試林分の 20, 30, 40 cm 直径階にとり，各直径階別に，定値 C よりも小なる如き直径括約誤差の数の，直径階別誤差数，即ち直径階別本数に対する比を計算し，C を 0.1 cm を単位とする不連続変数として，この比を直角座標系を用いて図示すると，図〔5.2〕の如き階段状折線が得られる。この比はいうまでもなく単一の直径括約誤差の，定値 C よりも小なる確率の実現値と見做され得るものであり，得られた階段状折線は単一の直径括約誤差の確率分布に対応するものである。従つて若し式〔2.4〕によつて理論的確率分布曲線を導けば，この曲線と折線とは大体一致する筈である。図の実線で示した曲線は理論的分布を示すものであるが，折線はほゞこの曲線と一致する傾向を示している。図〔2.2〕および本図によつて明かな如く，分布曲線は平均値を界として，それより小なる直径階では上方に凸，大なる直径階では下方に凸となる。直径階 30 cm はその内部に平均値 28.6 cm を含むが故に，その中央値の平均値からの偏りに応じて，S 字状の曲線を示すことが理解される。尚直線は一様本数分配における単一の直径括約誤差の分布を示すが，階段状折線とこれとの距離はかなりに大きい。このことは個々の直径階を独立に考えれば，一様分布と見做され得る場合でも，実際にはそうでないことを示すものである。但し括約単位と標準偏差との比 a/σ が小なる程，両者のへだたりは漸次小となることは推察に難くない。従つて a/σ を小ならしめれば** 正規型本数分配の場合といえども，その括約誤差の評価は一様分布に準じてなし得ることが結論される。



図〔5.2〕正規型本数分配における単一直径括約誤差の分布の一例
（京都大学四明会スギ一斉林）

（ii） 直径階別総断面積括約誤差率

前項に引例した 20, 30, 40 cm 直径階につき，それぞれの測定値を測定番号順に，元則として 10 個，端数ある場合はそれを一括して一つの群とすることにより，三直径階を通じて 20 個の群に分つ（表〔5.2〕）。

各群につき 5 cm 括約の場合の括約断面積合計に対する総断面積括約誤差率を算出すると，表〔5.2〕第 5 欄の如き値が得られる。他方図〔1.4〕より ε (ΔG) % を，式〔2.11〕および表〔2.1〕より

* 粍単位における測定値といえども，厳密には括約された数値であることにはかわりはない，こゝでは現実の林木調査において得られる限りの最も精密な値として，これを真値と見做した。

** 今の場合 $a=1$ cm とすれば，この条件はほゞ充されよう。406 本位の本数で，1 cm 直径階幅では，一直径階に属する本数が小に過ぎ，一般的な傾向を示すことが困難であるので，こゝには引例を省略した。

表〔5・2〕京都大学四明会スギ一斉林における直径階別総断面積括約誤差率
$d=20,\ 30,\ 40\ \mathrm{cm},\quad a=5\ \mathrm{cm},\quad N=9\sim14.$

番号	直径階 cm	断面積合計 1 mm	断面積合計 5 cm	総断面積括約誤差率 実験値	総断面積括約誤差率 $\varepsilon(\Delta G)\%$	総断面積括約誤差率 $m(\Delta G)\%$	総断面積括約誤差率 百分率断面積括約誤差の推定存在区間
		m^2	m^2	%			%
1	20	0.32281	0.31420	− 2.74	9.2	− 3.14	−12.3〜+6.1
2	〃	0.34903	〃	− 11.10	〃	〃	〃
3	〃	0.33720	〃	− 7.33	〃	〃	〃
4	〃	0.33325	〃	− 6.06	〃	〃	〃
5	〃	0.33674	〃	− 7.16	〃	〃	〃
6	〃	0.30778	〃	+ 1.99	〃	〃	〃
7	〃	0.33665	0.34562	+ 2.60	8.5	〃	−11.6〜+5.5
8	30	0.69153	0.70690	+ 2.81	5.8	+ 0.06	− 5.7〜+5.9
9	〃	0.71778	〃	− 1.54	〃	〃	〃
10	〃	0.66970	〃	+ 5.27	〃	〃	〃
11	〃	0.73198	〃	− 3.55	〃	〃	〃
12	〃	0.70203	〃	+ 0.69	〃	〃	〃
13	〃	0.74207	〃	− 4.96	〃	〃	〃
14	〃	0.69194	〃	+ 2.12	〃	〃	〃
15	〃	0.68023	〃	+ 3.78	〃	〃	〃
16	〃	0.52963	0.56502	+ 6.24	6.6	〃	− 6.6〜+6.7
17	40	1.22762	1.25660	+ 2.32	4.5	+ 1.58	− 3.3〜+6.1
18	〃	1.19940	〃	+ 4.55	〃	〃	〃
19	〃	1.28023	〃	− 1.88	〃	〃	〃
20	〃	1.71955	1.75924	+ 2.26	3.7	〃	− 2.1〜+5.3

総断面積括約誤差の平均 $m(\Delta G)$ の括約断面積合計に対ける百分率 $m(\Delta G)\%$ を求めると，それぞれ表〔5.2〕の第6，第7欄の如くなり，結局総断面積百分率括約誤差の推定存在区間として第8欄が得られる。実験値は 95% の信頼度においてこの推定存在区間内に存在すべきであるが，20 個の標本につき，実験値はすべてこの区間内に入り，推定の正しさを立証している。$m(\Delta G)$ の性質を考慮するとき，断面積括約誤差率は平均直径を含む直径階を中心として，それよりも小なる直径階では一般に負号をとることが多かるべく，大なる直径階では正号をとること多かるべきであるが，実験値はこの傾向をもよく代表している。

前述せる如く $m(\Delta G)$ は，若し全直径階にわたつて断面積合計をとるときは，極めて小となるが，各直径階別断面積合計に対するその値は表〔5.2〕における如く，直径階によつてはかなりの大きさに達することに注意すべきである。

(iii) 全林総断面積括約誤差率

前項では直径階別の総断面積括約誤差率について考察したが，こゝでは一般調査におけるそれを吟味するために，直径階による区分を無視して，全林から抽出した任意標本について考察を試みる。

406 個の測定値を基として，乱数表により大きさ 20 の標本を 40 個抽出する。従つて 40 個の標本を通じ，一つの測定値が平均約 2 回用いられていることになる。このような標本を用いることは厳密には正しくないかも知れぬが，${}_{406}C_{20}$ に比し40は頗る小さいから，各標本の独立性はほゞ満足せられているものと見做さるべく，更にこのような方法を今の場合に適用するについて

は，現実林における直径分布の無作為性を仮定しなければならぬが，この仮定も亦ほゞ充されているると考えてよいであろう。

このような 40 個の標本について，5 cm 括約における総断面積括約誤差率を算出し，表〔1.4〕

表〔5･3〕京都大学四明会スギ一斉林における 40 個の任意標本の総断面積括約誤差率 $a=5\,\mathrm{cm}$，$N=20$

番号	断面積合計		断面積括約誤差率		番号	断面積合計		断面積括約誤差率	
	1 mm	5 cm	実験値	$\varepsilon(\Delta G)\%$		1 mm	5 cm	実験値	$\varepsilon(\Delta G)\%$
	m^2	m^2	%	%		m^2	m^2	%	%
1	1.2992	1.2763	− 1.76	4.3	21	1.3251	1.3195	− 0.42	4.1
2	1.4051	1.4000	− 0.36	4.0	22	1.4248	1.4668	+ 2.94	4.0
3	1.3083	1.3214	+ 0.94	4.1	23	1.0729	1.0544	− 1.72	4.8
4	1.2766	1.2920	+ 1.22	4.2	24	1.2946	1.2861	− 0.65	4.2
5	1.4972	1.5218	+ 1.64	3.8	25	1.2611	1.2940	+ 2.61	4.2
6	1.3182	1.3136	− 0.35	4.1	26	1.5050	1.5080	+ 0.19	3.9
7	1.4946	1.4824	− 0.81	3.9	27	1.2665	1.2665	− 0.00	4.3
8	1.8676	1.9360	+ 3.53	3.6	28	1.2694	1.2881	+ 1.47	4.2
9	1.3758	1.3352	− 2.95	4.1	29	1.3291	1.3450	+ 1.20	4.1
10	1.4756	1.4353	− 2.75	4.0	30	1.5763	1.5728	+ 0.23	3.9
11	1.2879	1.3352	+ 3.68	4.1	31	1.4120	1.4628	+ 3.61	4.0
12	1.5258	1.4844	− 2.70	3.9	32	1.9011	1.9380	+ 1.94	3.6
13	1.6574	1.5944	− 3.80	3.9	33	1.5306	1.4979	− 2.14	3.9
14	1.1378	1.1585	+ 1.82	4.8	34	1.3554	1.3509	− 0.33	4.1
15	1.5770	1.5884	+ 0.72	3.8	35	1.3000	1.2940	− 0.47	4.2
16	1.2778	1.2979	+ 1.57	4.2	36	1.2553	1.2429	− 0.99	4.3
17	1.3925	1.4078	+ 1.10	4.0	37	1.2476	1.2154	− 0.58	4.5
18	1.1382	1.1781	+ 3.51	4.7	38	1.1385	1.2096	*+ 6.24	4.5
19	1.2671	1.3176	+ 3.98	4.1	39	1.1621	1.1117	− 3.87	4.7
20	1.4817	1.4864	+ 0.32	3.9	40	1.2397	1.1762	*− 5.13	4.7

によつて $\varepsilon(\Delta G)\%$ を求めると表〔5.3〕の如くなる。式〔2.15〕によれば，この場合の $m(\Delta G)\%$ は約 $+0.1\%$ に過ぎず，$\varepsilon(\Delta G)\%$ に比して頗る小であるから，これを無視して $\varepsilon(\Delta G)\%$ のみによつて誤差評価を行つて差し支えない。表〔5.3〕に見る如く，40 個の実験値の中，2 個（表中※印を附したもの）のみが絶対値において $\varepsilon(\Delta G)\%$ よりも大きく，推定の正しさを実証している。

本実験では，一標本当りの本数が小であるから，実験誤差率の符号は正負相半ばしているが，本数が大となるに従つて正の誤差が多くなるのであろうことは式〔2.15〕より容易に推測できる。平均直径 30 cm 前後の林分に 5 cm 括約を適用する場合，$\varepsilon(\Delta G)\%$ と $m(\Delta G)\%$ とが等しくなるのは約 25,000 本の本数においてゞあり，この本数を超えれば，総断面積括約誤差は測定の 97.5 % まで正となるであろう。このことは逆に小面積の調査では，林木平均直径（正確には断面積平均木の直径）に比して特に大なる括約単位を用いざる限り，$m(\Delta G)\%$ を考慮する必要がないとの推論に導く。

2. 択伐林型についての考察

典型的な択伐林は MEYER 型本数分配をなすものと見做される。吾が国において MEYER 型本数分配をなす林分を現実に求めることは困難であろうと考えられたので，こゝには不完全なが

らも比較的これに近いと見做される京都大学芦生演習林内スギ天然生林分に関する測定値を用いることとした。表〔5.4〕ならびに図〔5.3〕のヒストグラムはこの林分の直径階別本数分配を示す。

表〔5•4〕 京都大学芦生演習林内スギ天然生林分における直径階別本数分配 *

直径階 cm	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	計
本　数	104	82	65	48	46	32	46	23	12	2	460

平均直径　$d_m = 28.6\,\mathrm{cm}$

よく経理せられた択伐林と異り，天然生林のためかなり不斉であるが，大体において択伐林的本数分配を示している。

これに MEYER 型密度函数を当てはめてみる。既述の如く MEYER 型密度函数は

$$\psi(x) = k\,e^{-\alpha x}$$

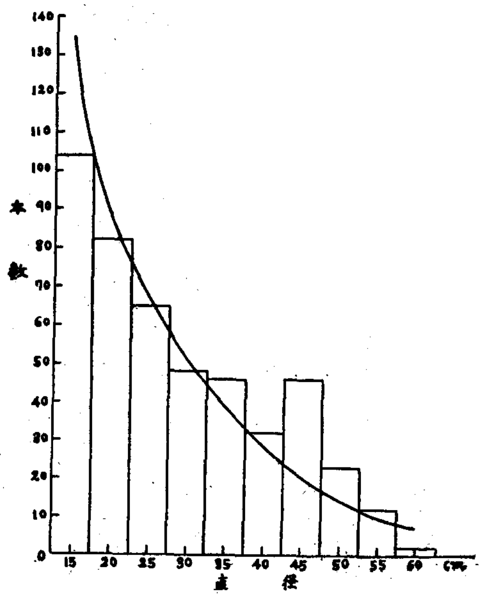
で表される。式中の常数 k, α を表〔5.4〕より，次のようにして求める：

今の場合の理論的分布限界は $x=12.5\sim\infty$ であるから，密度函数の性質上

$$k\int_{12,5}^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx=1$$

でなければならない。即ち

$$\frac{k}{\alpha}\,e^{-12.5\,\alpha}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$



図〔5.3〕京都大学芦生演習林内スギ天然生林分における直径階別本数分配

平均を $\tilde{x}$ とすれば

$$\tilde{x} = k\int_{12.5}^{\infty} x\,e^{-\alpha x}\,dx = \frac{k}{\alpha}\,e^{-12.5\,\alpha}\left(12.5+\frac{1}{\alpha}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

（a）（b）両式より

$$\tilde{x} = 12.5 + \frac{1}{\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

表〔5.4〕より求められる平均直径は 28.6 cm であるが，これを式（c）の $\tilde{x}$ の値として代入すれば，α の推定値が得られる：

$$\alpha = \frac{1}{16.1} \fallingdotseq 0.06$$

式（a）に代入して

$$k = 0.127$$

即ち表〔5.4〕に対する本数分配曲線は，

$$y = 0.127\,e^{-0.06\,x}$$

で与えられる。

* 本表は京都大学学生（1952年当時）武居，菅原，田淵による調査結果をまとめたものである。原表は直径階 10 cm に属するもの 24 本を含を含むが，本表ではこれを除外した。

第 i 直径階の理論的確率は

$$P_i=0.127\int_{d_i-\frac{a}{2}}^{d_i+\frac{a}{2}} e^{-0.06x}\,dx = \frac{-0.127}{0.06}\left[e^{-0.06\,d_i}\left(\frac{1-e^{0.06\,a}}{e^{0.03\,a}}\right)\right]$$

$a=5\,\mathrm{cm}$ とすれば,

$$P_i=0.63\,e^{-0.06\,d_i}$$

従つて第 i 直径階の理論的本数は

$$n_i=NP_i=0.63\,Ne^{-0.06\,d_i}$$

但し n_i; 第 i 直径階の本数, N; 総本数。

これを図示すれば図〔5.3〕の曲線が得られる。

明かにこの林分は小なる直径階に属するものの本数において過少であり，大なる直径階に属するものの本数において過多である。こゝでは試みに本林分を上述の如き Meyer 型本数分配に従う仮想林分からの一標本と見做して，その測定における括約誤差を吟味してみる。

本林分においても亦，前節の例と同じく，各個樹毎に一定方向から番号を附し，印付けせられた胸高の直径は，粍単位を以て測定せられた。前節とやゝ方法を変え，460 個の直径測定値を測定番号順に，10 個の種々の大きさの群に分ち，各群につき 1,2,4,5 cm の 4 種の括約単位に対応する総断面積括約誤差率を算出し，表〔1.4〕ならびに表〔3.5〕により $\varepsilon(\Delta G)$ %, $m(\Delta G)$ % および百分率断面積括約誤差の推定存在区間を求めてみた。これらを断面積合計の大きさの順に整理したものが表〔5.5〕である。

表〔5•5〕京都大学芦生演習林内スギ天然生林における断面積括約誤差率，$a=1,\ 2,\ 4,\ 5\,\mathrm{cm}$，$N=29\sim98$

番号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
断面積合計		m² 1.61	1.86	2.04	2.17	2.19	6.34	6.80	6.98	7.20	7.35
実験値(%)	cm 1	+ 0.17	− 0.25	− 0.68	− 0.66	+ 0.38	− 0.21	− 0.36	+ 0.08	− 0.38*	+ 0.07
	2	+ 1.33	+ 1.00	− 0.41	+ 0.07	+ 0.57	+ 0.31	+ 0.18	+ 0.37	+ 0.11	+ 0.04
	4	− 0.82	− 0.93	− 0.38	+ 0.42	+ 0.75	− 0.21	− 0.10	+ 0.77	+ 0.43	+ 0.83
	5	− 1.70	+ 1.10	− 2.30	+ 0.14	+ 2.40	− 0.11	+ 0.50	+ 1.05	+ 2.27	− 2.12*
$\varepsilon(\Delta G)$%	cm 1	0.79	0.74	0.70	0.68	0.68	0.40	0.38	0.38	0.38	0.37
	2	1.58	1.48	1.40	1.36	1.36	0.80	0.76	0.76	0.76	0.74
	4	3.16	2.96	2.80	2.72	2.72	1.60	1.52	1.52	1.52	1.48
	5	3.95	3.70	3.50	3.40	3.40	2.00	1.90	1.90	1.90	1.85
$m(\Delta G)$%	cm 1	+ 0.02	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃
	2	+ 0.10	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃
	4	+ 0.39	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃
	5	+ 0.47	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃	〃
百分率断面積括約誤差の推定存在区間	cm 1	−0.77～+0.81	−0.72～+0.76	−0.68～+0.72	−0.66～+0.70	−0.66～+0.70	−0.38～+0.42	−0.36～+0.40	−0.36～+0.40	−0.36～+0.40	−0.35～+0.39
	2	−1.48～+1.68	−1.38～+1.58	−1.30～+1.50	−1.26～+1.46	−1.26～+1.46	−0.70～+0.90	−0.66～+0.86	−0.66～+0.86	−0.66～+0.86	−0.64～+0.84
	4	−2.77～+3.55	−2.57～+3.35	−2.41～+3.19	−2.33～+3.11	−2.33～+3.11	−1.21～+1.99	−1.13～+1.91	−1.13～+1.91	−1.13～+1.91	−1.09～+1.87
	5	−3.48～+4.42	−3.23～+4.17	−3.03～+3.97	−2.93～+3.87	−2.93～+3.87	−1.53～+2.47	−1.43～+2.37	−1.43～+2.37	−1.43～+2.37	−1.38～+2.32

40 個の実験値の中 2 個（表中 ※ 印を附したもの）が推定区間外にあり，推定の正しさを立証している。又 MEYER 型本数分配では，第 3 章に述べた如く，その総断面積括約誤差率は正値をとることが多かるべく，この傾向は α, a, および林木平均直径が一定なる限り断面積合計が大となるに従つて増大すべきであるが，表〔5.5〕の実験値はこのことをもよく示しているものといえる。

3. 林分材積括約誤差率についての考察

前章において，毎木調査の結果に単式材積表を併用する場合の林分材積括約誤差率についてその評価基準を与えた。本節では現実林における測定結果を引例してその理論の妥当性を吟味しようと思う。しかしてこの目的のためには，現実林における直径測定値の他に，その林分に対する適当な単式材積表が与えられていることが必要であるが，この意味においては前二節に引例したものは何れも本節の目的には不適格であるので，こゝには愛知県加茂郡賀茂村所在の愛知県有林内に岡崎教授により設定された照査法試験地＊における調査資料を借用することとした。その全林木の直径が粍単位で精確に調査せられ，又岡崎，重本によつて，採用さるべき材積表としてのアルガン第 8 表の妥当性が結論ずけられていることが，本節の目的に最も好都合であつたからである。

本試験地は試験区と対照区とに分れているが，それぞれの直径階別本数分配，平均直径，および標準偏差は表〔5.6〕および図〔5.4〕の如くであつて，共に典型的な一斉林型を示している。20 cm 直径階以上について作表されているアルガン表を併用する関係上，その 15 cm 直径階の材積は推定によつて補い得るにしても，10 cm 直径階以下の林木まで用いることは妥当でないと考えられたので，こゝでは 15 cm 直径階以上の林木につき，試験区 259 本，対照区 261 本

表〔5･6〕 愛知県有林内照査法試験地における直径階別本数分配

試　験　区

直径階 (cm)	5	10	15	20	25	30	35	40	計
本数	6	13	42	100	80	31	4	2	278

平均直径 21.4 cm，　標準偏差 6.44 cm

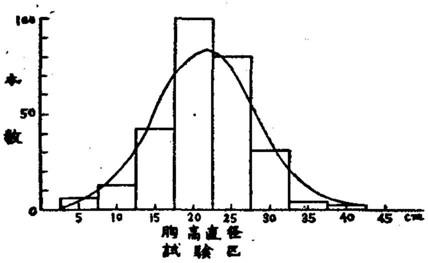
対　照　区

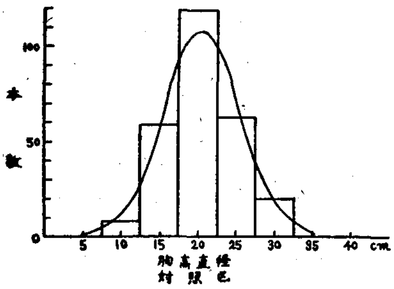
直径階 (cm)	10	15	20	25	30	計
本数	8	39	119	63	20	269

平均直径 20.5 cm　標準偏差 4.76 cm

を供試木として用いることゝし，測定番号に従つて試験区は 25 本のもの 9 組，34 本のもの 1 組計 10 組に，対照区は 26 本のもの 9 組，27 本のもの 1 組計 10 組に区分した。括約単位としては 5 cm を選び，粍単位で得られている測定値を机上括約し，各組につき表〔4.1〕アルガン第 8 表より総材積括約誤差率を算出した。総材積括約誤差は括約せざる測定値に対応する断面積にそれが属する直径階の形状高 c を乗じて得られる値の合計を総材積の真値とし，括約材積

＊ 本試験地は，文部省科学試験研究所費により岡崎教授を主任研究者として進められつゝある「照査法の適用に関する基礎的研究」のために昭和 28 年上記愛知県有林内に設定されたもので，スギを主とし，僅かにヒノキを混ずる同令林である。





図〔5.4〕愛知県賀茂県有林内照査法試験地における試験区ならびに対照区の直径階別本数分配

の合計から真値を引いて求めた。

以上の結果は式〔4.6〕′による推定限界値と共に表〔5.7〕に表示せられた。今の場合は各組の総材積は極めて小さく，又それらの合計である試験区，対照区の総材積も比較的小であるから，$m(\Delta V)$ % は無視して差し支えない。

理論に従えば，総材積括約誤差率の絶対値が，推定限界値を超える確率は 5 % であるべきであるが，表〔5.7〕によれば 20 個の実験値の中※印を附した1個のみが推定限界の外に出て，推定の正しさを実証している。

各組の総材積が小であるため，誤差の符号に対する傾向はあらわれていないが，式〔4.7〕による $m(\Delta V)$ % は正規分布では正であるから，材積が大となるに従い総材積括約誤差は正の符号をとることが多かるべきである。たゞ2個の測定値を例証とすることは，軽率のそしりをまぬがれないかも知れぬが，試験区，対照区の総材積括約誤差が全て正値をとつていることは，この傾向の一端を示すものと解されてよいであろう。

表〔5·7〕総材積括約誤差率の推定限界値と実験値

区分	番号	材積 m³	誤差 m³	誤差率 % 実験値	誤差率 % 推定限界値
試験区	1	5.2	+ 0.28	+ 5.38	5.8
	2	5.7	− 0.06	− 1.05	5.4
	3	5.7	+ 0.04	+ 0.70	5.7
	4	6.3	− 0.18	− 2.90	5.3
	5	7.0	+ 0.35	+ 5.00	5.2
	6	8.0	− 0.32	− 4.00	4.9
	7	8.5	+ 0.38	+ 4.48	4.8
	8	9.3	+ 0.34	+ 3.66	4.7
	9	10.8	+ 0.25	+ 3.22	4.3
	10	14.1	− 0.17	− 1.22	3.8
	計	80.6	+ 0.91	+ 1.16	1.6
対照区	11	4.3	+ 0.22	+ 5.10	6.2
	12	4.9	− 0.02	− 0.41	5.9
	13	5.7	− 0.12	− 2.11	5.5
	14	6.2	0	0	5.4
	15	6.6	− 0.09	− 1.36	5.0
	16	7.2	+ 0.13	+ 1.81	5.1
	17	7.3	− 0.20	− 2.74	5.1
	18	7.6	− 0.07	− 0.92	5.0
	19	7.9	+ 0.44	+ 5.57 *	4.9
	20	9.3	− 0.03	− 0.32	4.6
	計	67.0	+ 0.44	+ 0.66	1.6

結　　　論

括約誤差は対象林分の直径別本数分配に従つてその確率分布を異にする。従つてその厳密な評価には，直径別本数分配を知ること又は仮定することが前提となる。本論文においては基本的な三つの本数分配について，括約誤差の性格が解明された。その結果として明かにされた著しい事実は，標準断面積括約誤差を基準とする，断面積括約誤差の平均を中心としての断面積括約誤差率の推定限界は三つの本数分配に共通に，充分なる近似値，$\varepsilon(\Delta G)\,\% = \frac{a}{\sqrt{G}}$ （但し a;(cm) G;(m^2)）によつて与えられるということである。一様，正規および Meyer 型の三つの分布型は，直径別本数分配の基本的，代表的なものと考えられ，現実林の本数分配はこの三基本型又はそれらの中間型の何れかに帰せられるであろう。従つて図〔1.4〕に計算図表として与えられた上述の推定限界は，本数分配の如何を問わず適用され得るであろう。本数分配が正規分布又は Meyer 型分布に対し，高度の接近を示している林分にあつては，それぞれに与えられた計算式により，より正確な誤差評価をなし得るであろうが，しかもなお上述の簡便なる図表計算は，かゝる煩雑なる計算の必要なきまでに良好なる近似を示す。

断面積括約誤差の評価上注意さるべきはその平均である。それは上述の標準誤差に基く推定限界は平均を中心としてのものであり，両者を同時に考慮することによつてこそ断面積括約誤差の正しい評価をなし得るからである。この平均は標準誤差と異り，本数分配の特徴を最もよく反映しており，標準誤差の如く，本数分配を超越しての近似計算を許さない。従つて厳密なる断面積括約誤差の評価にあつては，第5章に例示せる如く，図〔1.4〕によつて得られる $\varepsilon(\Delta G)\,\%$ に，断面積合計に対する百分率として表された，それぞれの本数分配に応じての断面積括約誤差の平均値 $m(\Delta G)\,\%$ を加減せねばならない。しかるにこの $m(\Delta G)\,\%$ は，Meyer 型本数分配の特殊の場合を除き，測定本数の小なる間は一般に $\varepsilon(\Delta G)\,\%$ に比して無視し得る程に小さく，従つて小面積の調査ではこれを考慮する必要は一般にはない。断面積合計が大となるに従い $\varepsilon(\Delta G)\,\%$ はその平方根に逆比例して減少するのに対し，$m(\Delta G)\,\%$ は林分断面積平均木の直径および括約単位が変らない限り変化しないから，林分面積の増大と共に，$m(\Delta G)\,\%$ に対する考慮の必要性は増大し，遂には $m(\Delta G)\,\%$ が $\varepsilon(\Delta G)\,\%$ に代つて断面積括約誤差としての支配的な役割を演じることになる。しかしてこゝに考えられることは，$m(\Delta G)\,\%$ は一般に極めて小さく，0.1～0.8％程度と見做してよいから，相対的誤差を問題とする限り，大面積調査では，現行括約単位における括約誤差は殆ど考慮する必要はないであろうということである。

現実林の本数分配は近似的に正規分布又は Meyer 型分布の何れかに属するものと見做し得るであろうが，本数が極めて少ないか，又は非常に不規則な林分にあつて，その本数分配が何れとも定められ難い場合，括約誤差評価に当つてなさるべき唯一の仮定は一様分布以外にはなく，従つて第1章の理論に従わるべきであるが，安全のためには $m(\Delta G)\,\% = 0$ とし，その代りに求められた $\varepsilon(\Delta G)\,\%$ に 0.5％程度を加えて，誤差の推定限界をやゝ過大に評価するのが賢明であろう。

林分材積に対する括約誤差の影響は，求積法によつて異り，他の種類の誤差とも関連する故に一般的な論述は困難である。単式材積表を併用する場合の材積括約誤差は式〔4.6〕′および〔4.7〕を以て評価せられる。比較的均一な林分では断面積括約誤差率を以て近似的に材積括約誤差率としてよいであろう。誤差の許容限界は調査の目的と条件とによつて異るにしても，一般に総蓄積の大なる林分では，現行括約単位に対する括約誤差は，考慮する必要はないと結論出来る。

最後に残された重要なる課題は，括約単位に対する一般的基準を与えることである。本論文に

おいては，主たる目標が現行括約単位での括約誤差の評価におかれ，従つて理論の前提として現行の 5〜6 cm 以下の括約単位が仮定せられ，叉他の種類の誤差が慮外におかれたため，一応所期の主目的は達し得られたにしても，括約単位の選択基準に関しても亦上記の範囲内に限定されざるを得ず，これが一般的選択基準が与えられなかつたのも止むを得ない。場合によつては現行括約単位より更に大なる括約単位を用い得ることの可能性は，既述せる所より充分推測し得る所である。この問題の解決には，単に括約誤差のみならず，偶然測定誤差，輪尺誤差等をも含めた，より広範にして且より厳密なる理論の展開を必要とするであろう。そしてその過程において，括約誤差と他の種類の誤差との関連性，ならびにそれらの林分材積に対する綜合的作用が解明さるべきであろう。

要　　約

1. W. TISCHENDORF の指摘せる如く，括約誤差は一般偶発誤差とは区別さるべきではあるが，しかもなお極めて類似した性格を有する一種の偶然誤差である。従つてその解明は確率論の導入によつてのみ可能となる。しかして括約誤差は対象林分の直径階別本数分配によつてその確率分布を異にする。

2. 三つの基本的な場合として，一様本数分配，正規型本数分配および MEYER 型本数分配について考察せられた結果，林木調査における総断面積括約誤差に関し以下の結論が得られた：

（i）総断面積括約誤差は本数分配の如何を問わず，測定本数 N が 8〜10 以上となれば，近似的に平均 $m\ (\varDelta G)$，分散 $\mu^2\ (\varDelta G) = \frac{\pi^2 a^2}{48} \sum_{i=1}^{k} n_i\, d_i^2$ なる正規分布をなす。こゝに a は括約単位，k は直径階の数，n_i，d_i はそれぞれ第 i 直径階の本数および直径中央値である。

（ii）従つて平均を中心とする信頼度 95 % の総断面積括約誤差の推定限界は，括約断面積合計に対する百分率として次式で示される：

$$\varepsilon\ (\varDelta G)\ \% = \frac{a}{\sqrt{G}}$$

但し a；括約単位（cm），G；括約断面積合計（m²）。

$\varepsilon\ (\varDelta G)\ \%$，$G$, a の関係は図〔1.4〕に計算図表の形で示された。本図は総断面積括約誤差の評価に当つて有用である。

（iii）平均 $m\ (\varDelta G)\ \%$ は三つの基本的本数分配においてそれぞれ異つた形をとる。即ちこれを括約断面積に対する百分率で示せば，

一様本数分配にあつては

$$m\ (\varDelta G)\ \% = -\frac{100a^2}{12d_G{}^2}$$

MEYER 型本数分配にあつては，

$$m\ (\varDelta G)\ \% = \frac{100}{d_G{}^2}\left[2\,m\ (\varDelta d)\ (d_m + \frac{1}{\alpha}) - \frac{a^2}{4}\right]$$

こゝに $m\ (\varDelta d)$ は MEYER 型分布における単一の直径括約誤差の平均で

$$m\ (\varDelta d) = -\ \frac{1}{\alpha} + \frac{a}{2} + \frac{a}{e^{a\alpha} - 1}$$

で与えられる。但し α は MEYER 型分布

$$\psi\ (x) = k\, e^{-\alpha x}$$

における常数で，H. A. MEYER によれば通常 0.05〜0.08 である。d_m は林木平均直径で

$$d_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i\, d_i$$

である。これらは実用に便利な形において表〔1.8〕および表〔3.5〕に表示せられた。正規型本

数分配にあつては，その正確な形は頗る煩雑で，一般表示は困難であるが，括約断面積合計に対する百分率として近似的に

$$m\,(\varDelta G)\ \% \fallingdotseq \frac{100a^2}{24d_G{}^2}$$

で与えられる。上記各式において，d_G は断面積平均木の直径であるが，便宜上林木平均直径 d_m を以て代用し得られるであろう。

L. Tirén, H. A. Mèyer, M. Prodan 等は，これらの平均を定誤差としたが，かゝる取扱は妥当ではない。

(iv) 総断面積括約誤差の評価は $\varepsilon\,(\varDelta G)\ \%$ と $m\,(\varDelta G)\ \%$ の両者を同時に考慮することによつてなさるべきである。測定本数が少いときは，一般に $m\,(\varDelta G)\ \%$ は $\varepsilon\,(\varDelta G)\ \%$ に比して無視し得る程度に小であつて，これを考慮する必要はないが，測定本数が大となるにつれ，$\varepsilon\,(\varDelta G)\%$ は次第に減少して $m\,(\varDelta G)\ \%$ に近ずく。従つて正規型，Meyer 型分布共に測定本数が大となるにつれ，正の誤差を生ずる傾向を有し，$\varepsilon\,(\varDelta G)\ \%$ が $m\,(\varDelta G)\ \%$ 以下となるに至れば誤差は全て正となるであろう。$m\,(\varDelta G)\ \%$ の値は一般に小であるから，相対誤差を問題とする限り無視して差支えないであろうが，絶対誤差の評価では上述の意味において重要なる意義を有する。

3. 林分材積に対する括約の影響は求積法によつて異る。単式材積表を用いる場合の林分材積誤差の評価は一般に次式によつてなされる。

$$\varepsilon\,(\varDelta V)\ \% \fallingdotseq \frac{a}{V}\sqrt{\sum n_i\, c_i\, v_i}$$

$$m\,(\varDelta V)\ \% = \frac{100}{V}\sum n_i\, c_i\, m_i\,(\varDelta g)$$

但し　a；括約単位 (cm)，V；林分材積 (m^3)
n_i；第 i 直径階の本数，
c_i；使用材積表における第 i 直径階の形状高$\left(=\frac{v_i}{g_i}\right)$ (m).
v_i；第 i 直径階における材積 (m^3).

4. 照査法が採用する如き成長量査定における誤差即ち成長量括約誤差に対する誤差率の推定限界は次式によつて与えられる。

$$\varepsilon\,(\varDelta Z)\ \% \fallingdotseq \frac{a}{0.0p\ V_1}\sqrt{\sum c_i\, v_i\,(n_{i1}+n_{i2}+n_{iE})}$$

但し　a；括約単位 (cm)，V_1；原蓄積 (m^3)，n_{i1}, n_{i2}, n_{iE}；それぞれ経理期の初めおよび終りにおける，ならびに当該経理期中に伐採された第 i 直径階の本数，
p；当該経理期中の V_1 に対する生長率 (%)

上式に対する簡便式として

$$\varepsilon\,(\varDelta Z)\ \% \fallingdotseq \frac{5\,a}{0.0p\sqrt{V_1}}$$

が得られ，これを変形することにより，括約単位の算出式として

$$a \fallingdotseq \frac{0.0p\sqrt{V_1}\ \varepsilon\,(\varDelta Z)\ \%}{5}$$

が得られる。

5. 以上の理論の妥当性は現実林における実験を以て検討せられた。実験に供せられた林分は正規型および Meyer 型分布に従うと見做され得るスギ林であるが，実験の全ての場合を通じて理論の正しさが実証せられた。

主なる引用文献

1) TISCHENDORF, W.; Lehrbuch der Holzmassenermittlung. 1927.
2) MEYER, H. A.; Die rechnerischen Grundlagen der Kontrollmethoden. 1934.
3) PRODAN, M.; Messung der Waldbestände. 1950.
4) 吉田正男; 測樹学要論, 1930.
5) 岡崎文彬; 照査法の実態, 1951.
6) 〃 ; 蓄積と成長量の正しい測り方, 林業解説シリーズ 39. 1951.
7) 〃 ; 照査法と林木調査, 林業技術, 102, 103. 1950.
8) 前沢完次郎; 胸高断面積の括約誤差について, 日本林学会誌, 第35巻. 1953.
9) 大隅真一; 毎木調査の誤差に関する研究, 第1報, 第61回日本林学会大会講演（集）, 1952.
10) 〃 ; 同 第2報, 第2回日本林学会関西支部大会講演（集）, 1952.
11) 〃 ; 同 第3報, 第62回日本林学会大会講演（集）, 1953.
12) 宇野利夫; 数値計算論, 1931.
13) 統計科学研究会; 統計数値表. 1952.
14) 東洋経済新報社; 統計学辞典. 1953.

Zusammenfassung

1. Der Abrundungsfehler soll von gewöhnlichem, zufälligem Beobachtungsfehler grundsätzlich unterscheidet werden, doch ist er sicher ein zufälliger, wie W. TISCHENDORF mit Recht aufmerksam gemacht hat. Mutmassliche Grösse des Abrundungsfehlers lässt sich daher nur durch die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie abschätzen.

2. Der Abrundungsfehler verhält sich voneinander verschieden, je nach der Stammzahlverteilung aufzunehmenden Bestandes. Aus den theoretischen Untersuchungen, welche über den Kreisflächenabrundungsfehler in den drei gründlichen Stammzahlverteilungen, gleichmässiger, Normal- und MEYERscher Verteilung ausgeführt worden sind, erklärte sich es wie folgt:

(1) Der gesammte Kreisflächenabrundungsfehler in der Bestandesmassenermittlung verhält sich annäherund nach der Normalverteilung mit Durchschnitt $m(\Delta G)$ und mittlerem Fehler

$$\mu(\Delta G) = \frac{\pi a}{4\sqrt{3}}\sqrt{\sum n_i d_i^2}$$

in jeder Stammzahlverteilung, wobei sind: a Abrundungseinheit (Stufengrösse), n_i die Stammzahl einer bestimmten Stufe und d_i deren Mittendurchmesser.

(2) Berechnet man also die Grenzwerte des prozentualen Kreisflächenabrundungsfehlers nach der von $\mu(\Delta G)$ abgeleiteten Formel

$$\varepsilon(\Delta G)\% \fallingdotseq \frac{a}{\sqrt{G}},$$

in welcher a Abrundungseinheit in cm und G Kreisflächensumme in m² sind, so lässt sich erwarten, dass wirklicher prozentualer Kreisflächenabrundungsfehler sei in 95 % Fällen zwischen beiden Grenzwerten $m(\Delta G)\% + \varepsilon(\Delta G)\%$ und $m(\Delta G)\% - \varepsilon(\Delta G)\%$.

(3) Der Durchschnitt $m(\Delta G)$ ist charakteristisch für drei Stammzahlverteilungen. Falls man ihn als Prozentsatz zur Kreisflächensumme mit $m(\Delta G)\%$ bezeichnet, so kann er bei gleichmässiger Stammzahlverteilung nach der folgenden

Formel berechnet werden :

$$m\ (\Delta G)\ \% = -\frac{100\ a^2}{12\ d_G^2}$$

wobei d_G der Durchmesser des Kreisflächenmittelstammes und bei Normalstammzahlverteilung

$$m\ (\Delta G)\ \% \doteqdot \frac{100\ a^2}{24\ d_G^2}$$

und bei MEYERscher Stammzahlverteilung

$$m\ (\Delta G)\ \% = \frac{100}{d_G^2}\left[2\ m\ (\Delta d)\ (d_m + \frac{1}{\alpha}) - \frac{a^2}{4}\right],$$

wobei sind: $m\ (\Delta d) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{a}{2} + \frac{a}{e^{\alpha a} - 1}$, α die in MEYERscher Formel enthaltenen Konstante und d_m der Mitteldurchmesser aufzunehmenden Bestandes. In den obigen Formeln, darf man ruhig d_m an Stelle von d_G setzen.

Es ist nicht richtig, dass L. TIRÉN, H. A. MEYER, M. PRODAN u. a. $m\ (\Delta G)$ als einen der systematischen Fehler betrachtet haben.

(4) Man kann die wahrscheinliche Gösse des Kreisflächenabrundungsfehlers dadurch genau abschätzen, dass man $\varepsilon\ (\Delta G)\ \%$ und $m\ (\Delta G)\ \%$ gleichzeitig in Betracht zieht. Bei weniger Stammzahl, ist $m\ (\Delta G)\ \%$ verglichen mit $\varepsilon\ (\Delta G)\ \%$ im allgemeinen so winzig, dass man keine Rücksicht auf jenen zu nehmen braucht. $\varepsilon\ (\Delta G)\ \%$ vermindert sich aber mit der Zunahme der zu messenden Stammzahl, und wenn es kleiner als $m\ (\Delta G)\ \%$ wird, kann der gesammte Kreisflächenabrundungsfehler erwartet werden, positiv bei Normal- und MEYERscher, und negativ bei gleichmässiger Stammzahlverteilung in 97.5 % Fällen.

$m\ (\Delta G)\ \%$, was im allgemeinen gering bleibt, ist belanglos, wenn man sich interessiert nur auf den relativen Fehler, aber für die Abschätzung des absoluten Fehlers muss es grosse Bedeutung haben.

3. Der Einfluss der Abrundung auf die Bestandesmasse hängt vom Kubierungsverfahren ab. Im Fall der Anwendung des Tarifs kann der durch die Abrundung des Durchmessers bedingte Fehler der Bestandesmasse d. h. der Bestandesmassenabrundungsfehler im allgemeinen nach folgender Folmel abgeschätzt werden;

$$\varepsilon\ (\Delta G)\ \% \doteqdot \frac{a}{V}\sqrt{\Sigma\ n_i\ c_i\ v_i}\ , \quad m\ (\Delta V)\ \% = \frac{100}{V}\ \Sigma\ n_i c_i\ m_i\ (\Delta g)\ ,$$

wobei sind: a Abrundungseinheit in cm, V Bestandesmasse in m³, n_i die in einer bestimmten Stufe gehörige Stammzahl, c_i die Formhöhe einer bestimmten Stufe im angewandten Tarif in m und v_i der im Tarif dem Mittendurchmesser einer bestimmten Stufe entsprechende Inhalt des einzelnen Stammes in m³.

4. Drückt man den durch die Abrundung des Durchmessers erfolgten Fehler des Zuwachses mit "Zuwachsabrundungsfehler" aus, der als die Differenz vom Anfangsvorrat und der Summe des End- und Nutzungsvorrates in betreffender Periode definiert wird, so kann er nach folgender Folmel abgeschätzt werden;

$$\varepsilon\ (\Delta Z)\ \% \doteqdot \frac{a}{0.0p\ V_1}\sqrt{\Sigma\ c_i\ v_i\ (n_{i1} + n_{i2} + n_{iE})}$$

wobei sind; a Abrundungseinheit in cm, V_1 Anfangsvorrat in m³, n_{i1}, n_{i2} und n_{iE}

Anfangs-, End- und Nutzungsstammzahl in einer bestimmten Stufe und p das periodische Zuwachsprozent in betreffender Periode. Wir dürfen die obige Formel folgenderweise vereinfachen;

$$\varepsilon(\varDelta Z)\% \fallingdotseq \frac{5a}{0.0p\sqrt{V_1}},$$

und davon können wir als Rechnungsformel

$$a \fallingdotseq \frac{5}{0.0p\sqrt{V_1}\ \varepsilon(\varDelta Z)\%}$$

ableiten.

5. Durch experimentelle Untersuchungen über einen Bestand von Sugi (*Cryptomeria japonica*), der annähernd der MEYERschen Stammzahlverteilung folgt und zwei Bestände, die annähernd der Normalstammzahlverteilung folgen, ist die Richtigkeit der oben angegebenen Theorieen beweist worden.