数理解析研究所講究録
第 1890 巻 2014 年 228-236

質量交換を伴う二粒子系

富山大・工　角畠　浩 (Hiroshi Kakuhata)
Faculty of Engineering, University of Toyama

1　はじめに

ソリトンが粒子のように振る舞い，ソリトン同士の衝突によって軌道が変化し位相シフトが起こることはよく知られている [1]。この挙動のため，ソリトンを粒子ととらえた Skyrme 模型など原子核や素粒子のモデルとしても用いられている [2]。このような見方にたって，ソリトンの衝突の際にソリトンを粒子と見なせばソリトン間に力が働いているように見えるであろうと考え，ソリトン解からソリトンの相互作用の様子を再現するソリトン粒子の力学を構成を目指してきた [3, 4]。モデルとした外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述する連立非分散方程式 [5, 6]

$$\partial_\tau^2 \boldsymbol{r} - \partial_\sigma^2 \boldsymbol{r} = (\partial_\tau \boldsymbol{r} + \partial_\sigma \boldsymbol{r}) \times (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}) \tag{1}$$

のソリトン解はループソリトンである。ここで，$\boldsymbol{r} = (X, Y, Z)$ はストリングの位置ベクトル，$\boldsymbol{J}$ は一定の外部電流，τ は時間，σ はストリングに沿う弧長に対応するパラメータである。連立非分

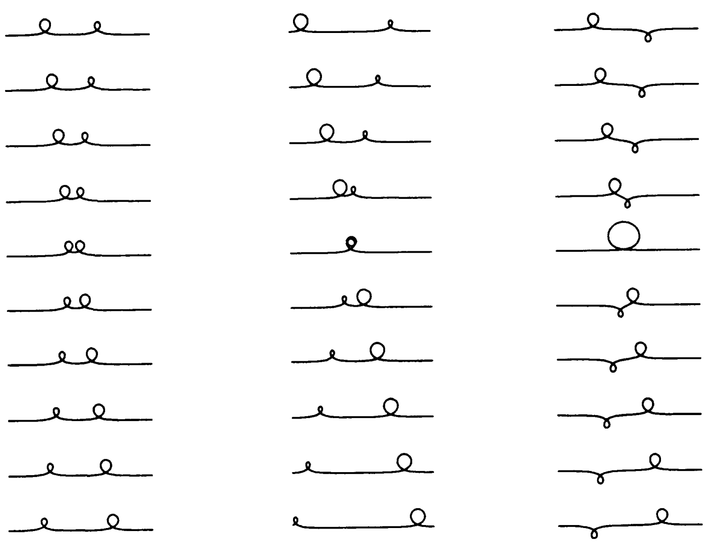

図 1　　$v = 0.12$,　　$v = 0.24$,　　$v = 0.12$

散方程式の 2 ソリトン相互作用においては，それぞれ位相速度 v と $-v$ でソリトンが正面衝突す

るとき，衝突の仕方によって３つのパターンがある。

1. 正（負）の振幅同士の衝突のときは，小さい相対速度ではループソリトン同士が重ならず弾くように衝突し，
2. 大きい相対速度では小さいループが大きいループの中を回る。
3. 正と負の振幅の衝突のときには，小さいループが一時的に消え，このとき大きいループがさらに大きくなる。

このソリトン相互作用におけるソリトンの軌道を解析的に得て，ソリトン粒子の加速度を求めると，正（負）の振幅同士では斥力が，正と負の振幅では引力が働くことがわかる。しかし，質量を一定とする単純な粒子モデルでは，それぞれのソリトン粒子に作用する力の和が 0 にならなず，作用反作用の法則が成立しない [3]。これは現実のソリトンは遠隔作用で相互作用をしないためと考えられ，単にポテンシャルでのみ相互作用するような２粒子系では系の並進不変性が破れ，全運動量が保存しないことになる。従来のソリトン粒子の相互作用の記述ではこの点が十分考慮されていないと思われる [7] 。図 1 の様に，連立非分散方程式のソリトンが衝突する際には振幅を交換し，KdV 方程式など他の多くのソリトン衝突でも振幅が変化することが知られている。ソリトン相互作用において振幅を質量と見なせば，ソリトン粒子の衝突は可変質量の粒子に対する２体問題になる。しかし質量を交換する粒子系の相互作用はあまり調べられていないようである。

前報において，連立非分散方程式のソリトン衝突の挙動を念頭におきながらも，現実のソリトン相互作用を直接フィットする粒子系のモデルを構成するのではなく，質量を交換しながら相互作用する２粒子系の出来るだけ簡単で解析解を持つ toy model の定式化を行い，質量を交換するような２体系のモデルを具体的に構成することが可能であることを示した [8]。実際，ラグランジアンを

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q_2}^2 - U(r) \tag{2}$$

で与えると，運動方程式は

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m_1\dot{q_1} + m_2\dot{q_2}) = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\mu\dot{r} + \frac{m_\infty}{4vM}P_0\dot{r}\right) = -\frac{dU}{dr} \end{aligned} \tag{3}$$

になる。ここで，q_n $(n=1,2)$ は各粒子の座標で，記号 “ $\dot{}$ ” は時間 t による微分を表し，r は相対座標

$$r = q_2 - q_1$$

であり，２つの粒子の質量の和 M を定数，質量差 $m = m_2 - m_1$ を関数とした。ただし，m_∞ は m の $t \to -\infty$ での値である。このとき，m を $m = \frac{m_\infty}{2v}\dot{r}$ として外部拘束条件で与え，sech^2 ポテンシャルで相互作用する定数質量の場合の解を用いてポテンシャル $U(r)$ を求めた。拘束条件をラグランジアンの外から与えたので，力学系としては閉じていない。

本稿では，外部拘束条件をラグランジアンに組み入れ，前報で与えたモデルを閉じた力学系とすることを試みる。以下では，次節で質量が定数の場合の２体相互作用を述べ，第 3 節で質量を交換するモデルを論じ，第 4 節では２体系の重心の運動をごく簡単に述べた。最後にまとめを述べる。

2 質量一定の 2 粒子系

本節では，質量が一定の 2 粒子系でどのような相互作用が起こるのかを簡単に見る。ここでは 2 粒子間の相互作用を sech^2 型のポテンシャルで与え，主に斥力が働く場合を考察する。初期条件として，図 1 のソリトン相互作用と同様に質量 m_1 と m_2 の粒子がそれぞれ速度 v と $-v$ で衝突する場合を考える。すると，粒子の衝突は通常， $t \sim 0$ 付近で起こる（図 2)。この系はラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q_2}^2 - \frac{g}{2}\mathrm{sech}^2 r \tag{4}$$

で与えられる。全質量，重心座標，換算質量

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2, \\ Q &= \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{M}, \\ \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{aligned} \tag{5}$$

をそれぞれ導入すれば，運動方程式は

$$\begin{aligned} M\ddot{Q} &= 0, \\ \mu\ddot{r} &= g\,\mathrm{sech}^2 r \tanh r \end{aligned} \tag{6}$$

で与えられる。よく知られているように，重心と相対座標に対する運動方程式は完全に分離し，重心の運動方程式は自由粒子の運動方程式になる。相対座標に対する運動方程式の解は，運動エネルギーとポテンシャルの高さ $\frac{g}{2}$ （結合定数）の比であるパラメータ

$$a = \frac{g}{4\mu v^2}$$

の値で 3 つに分けられる。$a > 1$ のときは $g > 0$ （斥力）であり，粒子が跳ね返る解

$$r = \sinh^{-1}(\sqrt{a-1}\cosh 2vt) \tag{7}$$

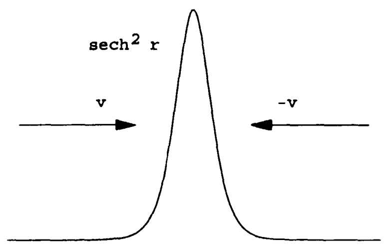

図 2 constant mass particle interaction

が存在し，$a<1$ では通過型の解で

$$r=\sinh^{-1}(\sqrt{1-a}\sinh 2vt) \tag{8}$$

である。このときには $g<0$（引力）の場合を含む。この他に $a=1$ の衝突せずに互いに無限に漸近する解

$$r=\sinh^{-1} e^{2vt} \tag{9}$$

がある。非分散連立方程式では，正（負）の振幅同士のときソリトン間に斥力が働き，図 1 の左の図で振幅の交換が比較的顕著に見えるので，特に解 (7) に注目する。この解の相対速度 $\dot{r}$ は

$$\dot{r}=\frac{2v\sqrt{1-a}\cosh 2vt}{\sqrt{1+(1-a)\sinh^2 2vt}} \tag{10}$$

である。これは十分大きな t に対して

$$\dot{r}\sim 2v\tanh 2vt \tag{11}$$

のように振る舞う。

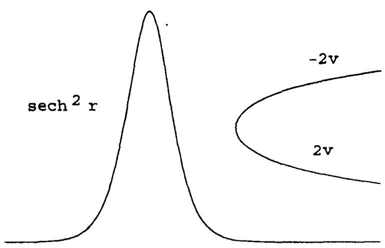

図 3　rebounding interaction

3　質量を交換する粒子のモデル

この節では前節の考察を踏まえて，本稿の目的である質量を交換するモデルを論じる。

3.1　可変質量の２粒子系

まず可変質量で並進不変性を持つ２ソリトン粒子のモデルとして

$$L=\tfrac{1}{2}m_1\dot{q_1}^2+\tfrac{1}{2}m_2\dot{q_2}^2-U(r) \tag{12}$$

で与えられるラグランジアンを考える。ここで，$U(r)$ はポテンシャルである。通常の２体系とは異なり，$m_n(n=1,2)$ は定数ではない。ただし，全質量 $M=m_1+m_2$ は定数であるが，質量の差 $m=m_2-m_1$ が定数ではないとする。質量の挙動を考える前に，運動方程式を考察する。こ

のラグランジアンから得られる運動方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m_1\dot{q}_1\right) &= \frac{dU}{dr}, \\
\frac{d}{dt}\left(m_2\dot{q}_2\right) &= -\frac{dU}{dr}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

である。これは一見ラグランジアン (4) から得られる運動方程式と同じに見えるが，$m_n (n=1,2)$ が定数ではないため様相が異なる。事実，定数質量の場合と同様に重心座標と換算質量を (5) で定義すると，運動方程式は

$$
\begin{aligned}
&M\frac{d}{dt}\left(\dot{Q}-\frac{\dot{m}}{2M}r\right) = 0, \\
&\frac{d}{dt}\left(\mu\dot{r}\right) = -\frac{\dot{m}}{2M}\left(M\dot{Q}-\frac{\dot{m}}{2}r\right) - \frac{dV}{dr}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

となる。定数質量の場合とは異なり，重心座標 Q と相対座標 r に対する運動方程式は完全には分離しない。重心 Q は自由粒子とはならず質量差と相対距離に依存するが，並進不変性を反映して，その運動方程式は全運動量の保存則になっているので容易に積分できる。この結果を用いて質量差 m の関数形を与えれば後者に対する方程式は r だけの式になる。m の関数形にもよるが，このような変数係数の非線形常微分方程式を解くことは一般に困難である。従って，以下では前節の定数質量の解 (7) を解として許容するポテンシャル $U(r)$ を求める，いわゆる逆問題を解くことにする。

3.2 質量の挙動

実際に系のポテンシャルを決定するためには m の関数形が必要となるので，質量の挙動を考察する。質量差が相対距離の関数，すなわち，$m=m(r)$ とするなら，図 3 のような跳ね返り相互作用では質量が元に戻ってしまうので $m=m(t)$ あるいは $m=m(\dot{r})$ でなければならない。ソリトン相互作用で弾く場合の振幅が変化する様子（図 1 の左の図）から，質量の漸近的振る舞いは

$$
\begin{aligned}
&m_1 \to \mu_1,\ m_2 \to \mu_2 \text{ as } t \to -\infty, \\
&m_1 \to \mu_2,\ m_2 \to \mu_1 \text{ as } t \to \infty
\end{aligned}
$$

であると考えられる。ここで μ_1 と μ_2 は衝突前（$t \to -\infty$）の粒子の質量で定数である。ただし，図 1 のソリトンの相互作用にあわせて $\mu_1 > \mu_2$ とする。すると，最もナイーブには $\dot{M}=0$ を満足しなければならないので，個々の粒子の質量が

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m_1(t) = \frac{M-m(t)}{2}, \\
m_2 &= m_2(t) = \frac{M+m(t)}{2}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

で与えられる。図 1 の左の図から，跳ね返る場合の質量差 m は

$$
m \sim \tanh 2vt \tag{16}
$$

のように振る舞うであろうと予想される。m の関数形を (16) に決めてしまう場合はいうまでもなく，m を q_1，q_2 とは独立な力学変数として扱うと様々な困難がある。そこで解 (7) の導関数 $\dot{r}$ が (16) を漸近的に満たすことに着目し，m を拘束条件で与えたのが前報の方法であった。

3.3 拘束条件を内包するモデル

前報の扱いではラグランジアンの外部から拘束条件を持ち込んだが，拘束条件 $m \sim \dot{r}$ をラグランジアンに組込むことを試みる。しかし，この拘束条件は non-holonomic なので単純に Lagrange 乗数としてラグランジアンに加えることは出来ない。これを閉じた力学系とするため，ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q_2}^2 - U(r) - V(m) \tag{17}$$

を考察する。ここで $U(r)$ はソリトン粒子間のポテンシャル，質量 m_1 と m_2 は全質量 M と質量差 m を用いて

$$m_1 = \frac{M-m}{2}, m_2 = \frac{M+m}{2} \tag{18}$$

と与えられ，$V(m)$ は

$$V(m) = \frac{h_1}{2}m^2 - \frac{h_2}{4}m^4 \tag{19}$$

とするが， m を乗数のように扱うのでこれはポテンシャルとは考えない。なお，h_1 と h_2 は運動方程式と初期条件から決める未定の係数である。q_1，q_2 のみならず m についても変分をとると，変分原理により運動方程式は

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(m_1\dot{q_1}) = \frac{1}{2}(M-m)\ddot{q_1} - \frac{\dot{m}\dot{r}}{2} = \frac{dU}{dr}, \\
&\frac{d}{dt}(m_2\dot{q_2}) = \frac{1}{2}(M+m)\ddot{q_2} + \frac{\dot{m}\dot{r}}{2} = -\frac{dU}{dr}, \\
&\frac{1}{4}(\dot{q_1}+\dot{q_2})\dot{r} - \frac{dV}{dm} = \frac{1}{4}(\dot{q_1}+\dot{q_2})\dot{r} - (h_1 - h_2m^2)m = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

を得る。この m の運動方程式である第 3 式は m の時間発展を記述していないので拘束条件である。運動方程式 (20) の第 1 式と第 2 式を加えて運動量保存則

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{q_1} + m_2\dot{q_2}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[M(\dot{q_1}+\dot{q_2}) + m\dot{r}] = 0 \tag{21}$$

を得る。また，両式の差から相対座標の運動方程式

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}[M\dot{r} + m(\dot{q_1}+\dot{q_2})] = -\frac{dU}{dr} \tag{22}$$

が得られる。これは r のみの方程式ではないが，方程式 (21) を積分した値（全運動量）を P_0 とすれば

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left[M\dot{r} + \frac{m}{M}(2P_0 - m\dot{r})\right] = -\frac{dU}{dr}$$

になる。また，拘束条件を，P_0 を用いて

$$\frac{1}{4}(2P_0 - m\dot{r})\dot{r} = (h_1 - h_2 m^2)m$$

として，さらに

$$m = \alpha\dot{r} \tag{23}$$

とすれば（α は定数）

$$\frac{1}{4M}\left(2P_0 - \frac{m^2}{\alpha}\right) = \alpha(h_1 - h_2 m^2)$$

となるので，未定の係数 h_1 と h_2 を

$$h_1 = \frac{P_0}{2\alpha M},\ h_2 = \frac{1}{4\alpha^2 M}$$

とすればよい。$\dot{r}$ を乗じ積分する通常の手順により，相対座標の運動方程式 (23) から

$$\frac{1}{8}\left[\left(M + \frac{2P_0\alpha}{M}\right)\dot{r}^2 - \frac{3\alpha^2}{2M}\dot{r}^4\right] = \varepsilon - U(r)$$

となる。ここで ε は積分定数である。

定数質量の場合の解 (7)，(8)，および (9) が

$$\begin{aligned} &M(\dot{q_1} + \dot{q_2}) + m\dot{r} = 2P_0, \\ &\frac{1}{8}\left[\left(M + \frac{2P_0\alpha}{M}\right)\dot{r}^2 - \frac{3\alpha^2}{2M}\dot{r}^4\right] = \varepsilon - U(r) \end{aligned} \tag{24}$$

の解になるようにポテンシャル $U(r)$ を求める。このとき，運動エネルギーと結合定数の比であった a は単なるパラメータとする。初期条件を定数質量の場合と同一にとると，定数 α，ε，P_0 はそれぞれ

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{m_\infty}{2v}, \\ \varepsilon &= \frac{v^2}{2}\left(M - \frac{m_\infty^2}{2M}\right), \\ P_0 &= -m_\infty v \end{aligned} \tag{25}$$

になる。r の各場合 (7)，(8)，および (9) に対して $\dot{r}$ を (24) に直接代入し，$2vt$ を引数とする双曲線関数（指数関数）を r の関数で表せば，3つ全ての場合に，全く同一のポテンシャル

$$U(r) = \frac{g_1}{2}\mathrm{sech}^2 r + \frac{g_2}{4}\mathrm{sech}^4 r \tag{26}$$

を得る。ここで，sech^2 ポテンシャルと sech^4 ポテンシャルの係数（結合定数）g_1 と g_2 はそれぞれ

$$g_1 = (M - \frac{2m_\infty^2}{M})av^2,\ g_2 = 3\frac{m_\infty^2}{M}a^2v^2 \tag{27}$$

である。この表式から，g_2 は必ず正でなければならないことがわかる。従って，ポテンシャル $U(r)$ の第 1 項 sech^2 ポテンシャルが $g_1 < 0$ ，すなわち引力的であっても，全質量と質量差の不等式

$$M > -m_\infty > \frac{M}{\sqrt{2}}$$

が満足されるとき，近距離では斥力ポテンシャルである第 2 項 sech^4 ポテンシャルが優越し，粒子の跳ね返りが起こる。また，g_1 を独立なパラメータと見なすと，パラメータ a は

$$a = \frac{Mg_1}{(M^2 - 2m_\infty^2)v^2}$$

で与えられ，単純な運動エネルギーと結合定数の比にはならない。

4 重心の解

前節で r を求めたので，定数質量と同一の定義の重心 (5) に対する解を求めることが可能である。a のそれぞれの場合に対して，

$a > 1$

$$Q = \frac{-m_\infty}{2M}\left\{\sqrt{a}\tanh^{-1}\frac{\tanh 2vt}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a-1}\sinh 2vt}{\sqrt{1+(a-1)\cosh^2 2vt}}\sinh^{-1}(\sqrt{a-1}\cosh 2vt)\right\}, \quad (28)$$

$a < 1$

$$Q = \frac{-m_\infty}{2M}\left\{\sqrt{a}\tanh^{-1}\frac{\tanh 2vt}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{1-a}\cosh 2vt}{\sqrt{1+(1-a)\sinh^2 2vt}}\sinh^{-1}(\sqrt{1-a}\sinh 2vt)\right\}, \quad (29)$$

$a = 1$

$$Q = \frac{-m_\infty}{2M}\left\{\frac{1}{2}\ln(1+e^{4vt}) - \frac{\sinh^{-1} e^{-2vt}}{\sqrt{1+e^{-4vt}}}\right\} \quad (30)$$

を得る。質量の移動があるので単純な自由粒子の解とはならない。

5 まとめ

ソリトン粒子の力学を構成することを目指して，質量を交換しながら相互作用する粒子の解析解を持つソリトン相互作用に対応するごく簡単な toy model を構築した。このとき問題設定を逆問題として，定数質量に対する運動方程式 (6) の解 (7), (8), (9) が運動方程式の解になるようにポテンシャルを求めた。ラグランジアンに内包される拘束条件 (23) で質量を与え，跳ね返る解，通過する解，および漸近する解のすべてに成立するポテンシャル (26) を求めた。それは定数質量の

2 粒子系 (4) の解を用いたことに起源を持つ sech^2 ポテンシャルと質量交換をすることに対応する sech^4 ポテンシャルの和である。質量を交換する結果，定数質量とは異なり遠距離では引力であっても近距離では sech^4 ポテンシャルによる斥力が働き，跳ね返る解が存在する。また，重心も自由粒子ではない。そのため，おそらくはソリトン軌道の漸近的挙動だけでは大域的な挙動を決定するのは難しい。従って，まだソリトンの運動には十分対応しないし，運動量保存則を成立させるため「ゲージ場」を導入する [9] など他の可能性もあり得る。正準形式に移行すれば，拘束条件の整合性が問題となるであろう。さらに，実際のソリトンの運動に適用することが課題となる。

参考文献

[1] 例えば，M. J. Ablowitz and H. Segur, "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.

[2] 例えば，V. G. Makhankov, Y. P. Rybakov, V. I. Sanyuk,"The Skyrme Model: Fundamentals Methods Applications", Springer-Verlag, 1993.

[3] 角畠浩，紺野公明，「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」，数理解析研究所講究録 1701「波動現象の数理と応用」，p.197，京都大学数理解析研究所，2010 年

[4] 角畠浩，紺野公明，「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」，数理解析研究所講究録 1761「非線形波動現象の多様性と普遍性」，p.1118，京都大学数理解析研究所，2011 年

[5] H. Kakuhata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.

[6] H. Kakuhata and K.Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.

[7] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, 1993.

[8] 角畠浩，佐伯拓弥，「質量移動を伴う二粒子系—ソリトン粒子の力学に向けて」，数理解析研究所講究録 1847「波動現象研究の数理，モデリングおよび応用」，p.107，京都大学数理解析研究所，2013 年

[9] 角畠浩，「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル III」，数理解析研究所講究録 1800「波動現象の研究の新たな進展」，p.120，京都大学数理解析研究所，2012 年