

A Rellich type theorem for discrete Schrödinger operators and its applications

磯崎 洋 (筑波大学数理物質系数域)

Hiroshi Isozaki

(Faculty of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

森岡 悠 (筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻/学振 DC2)

Hisashi Morioka

(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba /

JSPS Research Fellow DC2)

1 Rellich 型定理

Rellich [12] は, Helmholtz 方程式に関する次のような結果を示した: $u \in H_{loc}^2(\mathbf{R}^d)$ が, ある定数 $\lambda, R_0 > 0$ に対して

$$(-\Delta - \lambda)u = 0, \quad |x| > R_0,$$

を満たし, かつ

$$u(x) = o(|x|^{-(d-1)/2}), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

であるならば, $|x| > R_0$ において $u(x) = 0$ である.

この結果は, 連続スペクトルに埋蔵された固有値の非存在, 従って連続スペクトルの絶対連続性の証明等に有用であり, 極限吸収原理の証明にも重要な役割を果たしてきた. より広いクラスの線型偏微分方程式に一般化されており, Fourier 変換を用いて多項式の”割り算”の問題としての取り扱いがなされている ([15], [9], [10], [4], [11], など). すなわち, 定係数線型偏微分方程式 $P(D)u = f \in \mathcal{E}'$ について, Fourier 変換をすれば $P(\xi)\tilde{u}(\xi) = \tilde{f}(\xi)$ となる. (\mathcal{E}' はコンパクトな台を持つ超関数全体.) 多項式 $P(\xi)$ が $\tilde{f}(\xi)$ を何らかの意味で割り切れれば, Paley-Wiener の定理により, $u \in \mathcal{E}'$ であることが分かる. また, Rellich 型定理に関する議論においては, 自然に Besov 空間 ($\mathcal{B}, \mathcal{B}^*$ 空間) の概念が登場する.

本稿では, 正方格子上の離散 Schrödinger 作用素に対する Rellich 型定理とそのスペクトル理論への応用を与える. 主に Isozaki-Morioka [7] と, その後の研究の成果に基づいている.

$\mathbf{Z}^d = \{n = (n_1, \dots, n_d); n_j \in \mathbf{Z}, j = 1, \dots, d\}$ を d 次元正方格子 (ただし $d \geq 2$) とし, $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)$ をその基底とする. 離散 Laplace 作用素を次のように定義する:

$$-(\Delta_{disc}\hat{u})(n) = \frac{d}{2}\hat{u}(n) - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^d\left(\hat{u}(n+e_j) + \hat{u}(n-e_j)\right), \quad \hat{u} = \{\hat{u}(n)\}_{n \in \mathbf{Z}^d}.$$

主定理は次の通りである.

Theorem 1.1. $\lambda \in (0, d)$, $R_0 > 0$ とする. \hat{u} が

$$(1.1) \quad (-\Delta_{disc} - \lambda)\hat{u} = 0, \quad |n| > R_0,$$

$$(1.2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{R_0 < |n| < R} |\hat{u}(n)|^2 = 0,$$

を満たすならば, ある定数 $R_1 > R_0$ が存在して, $|n| > R_1$ において $\hat{u}(n) = 0$ である.

なお, Theorem 1.1 は, $\lambda \in (0, d) \setminus \mathbf{Z}$ の場合については [7] で示し, $\lambda \in (0, d) \cap \mathbf{Z}$ については現在準備中の原稿に盛り込む予定である. 関連する重要な先行研究として, Shaban-Vainberg [13] がある. Theorem 1.1 の証明の後半部分は, [13] において, 離散 Helmholtz 方程式の放射条件を導出した際に用いた議論を適用可能である.

2 Rellich 型定理の応用例

Theorem 1.1 の証明を述べる前に, 応用の事例を紹介する. ここで得られる結果は, 楕円型方程式の理論においては基本的なものであり, その離散アナロジーと言える.

2.1 埋蔵固有値の非存在

離散 Schrödinger 作用素 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ を考える. ここで $\hat{H}_0 = -\Delta_{disc}$, \hat{V} は, 有限個の台を持つ実数値関数 $\hat{V}(n)$ によるかけ算作用素である. この仮定の下では, Δ_{disc} の定義と Weyl の定理により, $\sigma(\hat{H}_0) = \sigma_{ac}(\hat{H}_0) = \sigma_{ess}(\hat{H}) = [0, d]$ であることが分かる. 次の結果は, \hat{H} の本質的スペクトルに埋め込まれた固有値の非存在を示すものである. (端点については, 例えば [3] により, 5次元以上の場合に固有値の例が示されている.)

Theorem 2.1. $\sigma_p(\hat{H}) \cap (0, d) = \emptyset$.

実際, 埋蔵固有値 λ の存在を仮定すると, Rellich 型定理により対応する ℓ^2 -固有関数 $\hat{\psi}_\lambda$ の値は十分遠方では $\hat{\psi}_\lambda(n) = 0$ となる. 方程式 $(\hat{H} - \lambda)\hat{\psi}_\lambda = 0$ により, 0 を \mathbf{Z}^d 全体に延長することができる.

2.2 外部問題と一意接続定理

有界部分集合 $\Omega \subset \mathbf{Z}^d$ の各点 $n \in \Omega$ について, その次数を

$$\deg_\Omega(n) := \#\{m \in \Omega; |m - n| = 1\}$$

と定義する. Ω の内部と境界を, それぞれ

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Omega} &= \{n \in \Omega; \deg_\Omega(n) = 2d\}, \\ \partial\Omega &= \{n \in \Omega; \deg_\Omega(n) < 2d\}, \end{aligned}$$

と定義する. Ω が連結であるとは, 任意の 2 点 $m, n \in \Omega$ に対し, $n^{(j)} \in \Omega$, $j = 0, \dots, k$ が存在し,

$$n^{(0)} = m, n^{(k)} = n, |n^{(j-1)} - n^{(j)}| = 1, j = 1, \dots, k,$$

を満たすことと定義する.

ここでは, 有界連結な部分集合 Ω_{int} の外部領域 $\Omega_{ext} = \mathbf{Z}^d \setminus \overset{\circ}{\Omega}_{int}$ において,

$$\widehat{H}_{ext} = -\Delta_{disc} + \widehat{V}, \quad \widehat{V}(n) \in \mathbf{R}, \quad \#\text{supp}\widehat{V} < \infty, \quad \text{supp}\widehat{V} \subset \overset{\circ}{\Omega}_{int},$$

を考える. 境界条件は特に指定しない.

Ω_{ext} の形状について条件を導入する. $j = 1, \dots, d$, 及び $n \in \mathbf{Z}^d$ に対し, n を頂点とする cone を

$$C_{j,\pm}(n) := \left\{ m \in \mathbf{Z}^d; \sum_{i \neq j} |m_i - n_i| \leq \pm(m_j - n_j) \right\}$$

と表す.

Definition 2.2. 外部領域 Ω_{ext} が *cone condition* を満たすとは, 任意の点 $n \in \Omega_{ext}$ に対し, ある j について $C_{j,+}(n)$ または $C_{j,-}(n)$ が存在し, $C_{j,\pm}(n) \subset \Omega_{ext}$ となることである.

例えば立方体の外部, ひし形の外部として Ω_{ext} を定めた場合には cone condition を満たす. あるいはジグザグ状の境界を持つ場合にも cone condition は満たされる.

一意接続定理は次の結果である. 証明は埋蔵固有値の証明と同様, Theorem 1.1 と, 方程式による 0 の延長を用いる.

Theorem 2.3. Ω_{ext} は *cone condition* を満たすとする. ある $\lambda \in (0, d)$ に対し,

$$(\widehat{H}_{ext} - \lambda)\widehat{u} = 0 \quad \text{in} \quad \overset{\circ}{\Omega}_{ext},$$

かつ (1.2) を満たすならば, Ω_{ext} で $\widehat{u} = 0$ である.

なお, Ω_{ext} が cone condition を満たさない場合については, Theorem 2.3 の反例を作ることができる. 一方, Ω_{ext} が cone condition を満たす場合には, 外部問題に Dirichlet 条件または Robin 条件を与えた場合の埋蔵固有値の非存在も証明することができる.

2.3 離散 Helmholtz 方程式に対する放射条件と解の一意性

Theorem 1.1 は, 離散 Schrödinger 作用素の散乱理論と逆問題 ([6]) において重要な役割を果たした. 離散 Helmholtz 方程式に対する放射条件の導出と, 放射条件を満たす解の一意性の証明が Theorem 1.1 の研究の動機である.

3 Besov 空間

3.1 トーラス上の Besov 空間

Isozaki-Korotyaev [5] は, トーラス $\mathbf{T}^d = \mathbf{R}^d / (2\pi\mathbf{Z})^d$ 上での Besov 空間を用いて離散 Schrödinger 作用素の散乱理論を記述した. 同様のことは, より一般にコンパクトリーマン多様体上で擬微分作用素を用いて記述できる ([7] など) が, 本稿では簡単のため \mathbf{T}^d に限る.

\mathcal{U} を $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ から $L^2(\mathbf{T}^d)$ へのユニタリ作用素

$$(\mathcal{U}\hat{f})(x) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} \hat{f}(n) e^{-in \cdot x}$$

とする. 離散 Laplace 作用素は, \mathcal{U} により,

$$(3.1) \quad H_0 = \mathcal{U}\hat{H}_0\mathcal{U}^*, \quad H_0 = h(x) = \frac{1}{2} \left(d - \sum_{j=1}^d \cos x_j \right)$$

と \mathbf{T}^d 上に変換される.

$\langle t \rangle = (1 + |t|^2)^{1/2}$ とおく. さらに, Δ を \mathbf{T}^d 上の周期境界条件を持つ Laplace 作用素とする. $s \in \mathbf{R}$ に対し, Sobolev 空間 \mathcal{H}^s は, ノルム $\|u\|_s = \|\langle \sqrt{-\Delta} \rangle^s u\|_{L^2(\mathbf{T}^d)}$ に関する $D(\langle \sqrt{-\Delta} \rangle^s)$ の完備化である. また, Besov 空間 \mathcal{B} のノルムは

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j/2} \|\chi(2^{j-1} \leq \sqrt{-\Delta} < 2^j) f\|_{L^2(\mathbf{T}^d)}$$

で与えられる. ここで, 自己共役作用素 T に対して $\chi(a \leq T < b) := \chi_{[a,b)}(T)$ であり, $\chi_I(T)$ は区間 I の定義関数である. 共役空間 \mathcal{B}^* は, ノルム

$$\|u\|_{\mathcal{B}^*}^2 = \sup_{R>1} \frac{1}{R} \|\chi(|\sqrt{-\Delta}| < R) u\|_{L^2(\mathbf{T}^d)}^2$$

で定義される ([1] と同様である).

$\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 = L^2(\mathbf{T}^d)$ とおくと, 次の関係を得る.

Lemma 3.1. $s > 1/2$ に対し, $\mathcal{H}^s \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{H}^{1/2} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{-1/2} \subset \mathcal{B}^* \subset \mathcal{H}^{-s}$.

3.2 正方格子上の Besov 空間

\mathbf{T}^d 上で定義した関数空間は, \mathcal{U}^* により正方格子上で $\hat{\mathcal{H}}^s = \mathcal{U}^* \mathcal{H}^s$, $\hat{\mathcal{B}}^* = \mathcal{U}^* \mathcal{B}^*$ と定義される. そのノルムは,

$$\|\hat{u}\|_{\hat{\mathcal{H}}^s}^2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} (1 + |n|^2)^s |\hat{u}(n)|^2, \quad \|\hat{u}\|_{\hat{\mathcal{B}}^*}^2 = \sup_{R>1} \frac{1}{R} \sum_{|n|<R} |\hat{u}(n)|^2,$$

で与えられる. 次の事実が成り立つ ([6], Lemma 5.4).

Lemma 3.2. (1) $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbf{Z}^d)$ が $|\hat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-(d-1)/2}$ を満たすならば, $\hat{f} \in \hat{\mathcal{B}}^*$.
 (2) $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbf{Z}^d)$ が, ある $\epsilon > 0$ に対して $|\hat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-(d-1)/2-\epsilon}$ を満たすならば, (1.2) を満たす.

Theorem 1.1 と Lemma 3.1, 3.2 は, $\hat{\mathcal{B}}^*$ が Helmholtz 方程式

$$(\hat{H}_0 - \lambda)\hat{u} = 0 \quad \text{on } \mathbf{Z}^d$$

の非自明解を含むような最小の関数空間であることを意味している.

4 Fermi 面

Theorem 1.1 の証明に際しては, 次の多様体を調べるのが重要である:

$$M_\lambda = \{x \in \mathbf{T}^d; h(x) = \lambda\}.$$

ここで, $h(x)$ は (3.1) で定義されたものである. M_λ は $\lambda \in (0, d)$ において一般に凸ではなく, また $\lambda \in (0, d) \cap \mathbf{Z}$ では離散的な特異性を持つ ($\nabla h(x) = 0$ となる $x \in M_\lambda$ が存在する). $d = 2, 3$ の場合について, 図 1~図 8 にその形を示した.

以下, \mathbf{T}^d を複素変数に拡張し, 複素トーラス $\mathbf{T}_\mathbb{C}^d = \mathbf{C}^d / (2\pi\mathbf{Z})^d$ で考える.

$$M_\lambda^\mathbb{C} = \{z \in \mathbf{T}_\mathbb{C}^d; h(z) = \lambda\}$$

と定義すると, $M_\lambda^\mathbb{C} \cap \mathbf{R}^d = M_\lambda$ である.

$z, z' \in \mathbf{C}$ に対し, ある $N \in \mathbf{Z}$ が存在して $z' = z + \pi N$ と表せるとき, $z \equiv z' \pmod{\pi}$ と書くこととしよう.

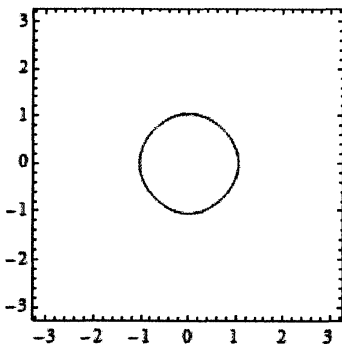


図 1 $d = 2, \lambda = 0.25$.

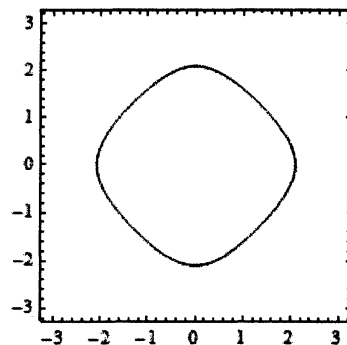
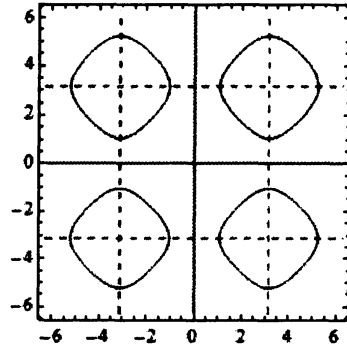
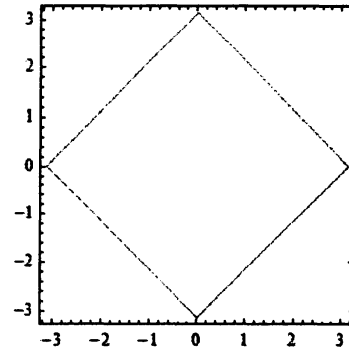
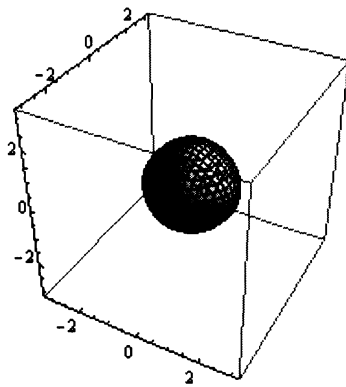
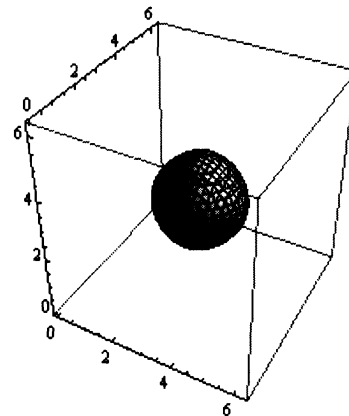
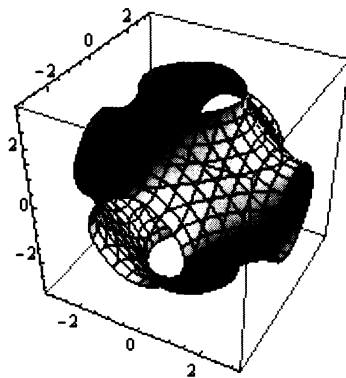
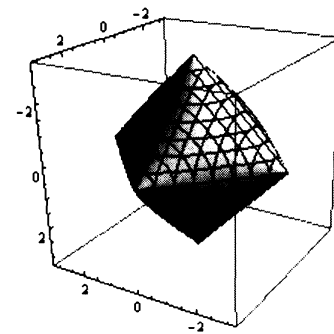


図 2 $d = 2, \lambda = 0.75$.

図3 $d = 2, \lambda = 1.25$.図4 $d = 2, \lambda = 1$.図5 $d = 3, \lambda = 0.45$.図6 $d = 3, \lambda = 2.55$.図7 $d = 3, \lambda = 1.45$.図8 $d = 3, \lambda = 1$.

Lemma 4.1. (1) $\lambda \in (0, d) \setminus \mathbf{Z}$ のとき, $M_\lambda^{\mathbf{C}}$ は, $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^d$ の $(d-1)$ 次元複素部分多様体である.
 (2) $\lambda \in (0, d) \cap \mathbf{Z}$ のとき, $M_\lambda^{\mathbf{C}} = (\text{reg } M_\lambda^{\mathbf{C}}) \cup (\text{sng } M_\lambda^{\mathbf{C}})$ と分割できる. ここで,

$$\begin{aligned} \text{sng } M_\lambda^{\mathbf{C}} &= \{z \in M_\lambda^{\mathbf{C}} ; z_j \equiv 0 \pmod{\pi}, j = 1, \dots, d\}, \\ \text{reg } M_\lambda^{\mathbf{C}} &= M_\lambda^{\mathbf{C}} \setminus \text{sng } M_\lambda^{\mathbf{C}}, \end{aligned}$$

であり, $\text{reg } M_\lambda^{\mathbf{C}}$ は $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^d$ の $(d-1)$ 次元複素部分多様体である.

言い換えれば, $\lambda \in (0, d) \setminus \mathbf{Z}$ のときは, $\text{sng } M_\lambda^{\mathbf{C}} = \emptyset$, $M_\lambda^{\mathbf{C}} = \text{reg } M_\lambda^{\mathbf{C}}$ である.

実際, $\nabla h(z) = \frac{1}{2}(\sin z_1, \dots, \sin z_d)$ であるから, $\lambda \in (0, d) \setminus \mathbf{Z}$ ならば, $M_\lambda^{\mathbf{C}}$ で $\nabla h(z) \neq 0$ である. 逆に, $\nabla h(z) = 0$ なる特異点を $M_\lambda^{\mathbf{C}}$ 上に持つのは $\lambda \in (0, d) \cap \mathbf{Z}$ のときに限り, それは $\text{sng } M_\lambda^{\mathbf{C}}$ である.

[13] の議論では, $M_\lambda^{\mathbf{C}}$ の既約性を用いて, ある解析的な関数の零点について議論したが, 我々の目的には次のより弱い形の補題で十分である. Analytic set の既約性 (複素多様体としての連結性にほぼ等しい) については, [2], [8] などを見よ.

Lemma 4.2. $\lambda \in (0, d)$ とする. また, $\{S_{\lambda, j}\}_j$ を $\text{reg } M_\lambda^{\mathbf{C}}$ の連結成分とする. 任意の $S_{\lambda, j}$ について, $\mathbf{R}^d \cap S_{\lambda, j}$ は M_λ の空でない開集合を含む.

Proof. $z_j = \arccos w_j$ について, リーマン面 \mathbf{S} を考える: $j \in \mathbf{Z}$ に対し,

$$\Pi_j = \{z \in \mathbf{C}; j\pi < \text{Re } z < (j+1)\pi\} \cong \mathbf{D}_j = \mathbf{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty)),$$

$$\Pi_{j,o}^\pm = \{z \in \mathbf{C}; (2j-1)\pi < \text{Re } z < (2j+1)\pi, \pm \text{Im } z > 0\} \cong \mathbf{D}_{j,o}^\pm = \mathbf{C} \setminus (-\infty, 1],$$

$$\Pi_{j,e}^\pm = \{z \in \mathbf{C}; 2j\pi < \text{Re } z < (2j+2)\pi, \pm \text{Im } z > 0\} \cong \mathbf{D}_{j,e}^\pm = \mathbf{C} \setminus [-1, \infty),$$

として,

$$\mathbf{S} = \bigcup_j (\mathbf{D}_j \cup \mathbf{D}_{j,o}^\pm \cup \mathbf{D}_{j,e}^\pm).$$

リーマン面は, \mathbf{D}_{2j-1} に対し, $\mathbf{D}_{j-1,e}^\pm, \mathbf{D}_{j,o}^\pm$ が, \mathbf{D}_{2j} に対し, $\mathbf{D}_{j,o}^\pm, \mathbf{D}_{j,e}^\pm$ が接続している.

変数変換 $z \mapsto w$ により, $h(z) = \lambda$ は

$$w_1 + \dots + w_d = d - 2\lambda$$

となる.

$d = 2$ のときを考える. 任意の連結成分 $S_{\lambda, k}$ について, $z \in S_{\lambda, k}$ とする. このとき, $w_1 + w_2 = 2(1 - \lambda) \in (-2, 2)$ であって, ある $j_1, j_2 \in \mathbf{Z}$ に対し, 次の 4 通りの場合が考えられる:

1. $w_1 \in \mathbf{D}_{2j_1} \cup \mathbf{D}_{j_1,o}^\pm \cup \mathbf{D}_{j_1,e}^\pm$, $w_2 \in \mathbf{D}_{2j_2} \cup \mathbf{D}_{j_2,o}^\pm \cup \mathbf{D}_{j_2,e}^\pm$,
2. $w_1 \in \mathbf{D}_{2j_1} \cup \mathbf{D}_{j_1,o}^\pm \cup \mathbf{D}_{j_1,e}^\pm$, $w_2 \in \mathbf{D}_{2j_2-1} \cup \mathbf{D}_{j_2,o}^\pm \cup \mathbf{D}_{j_2-1,e}^\pm$,
3. $w_1 \in \mathbf{D}_{2j_1-1} \cup \mathbf{D}_{j_1,o}^\pm \cup \mathbf{D}_{j_1-1,e}^\pm$, $w_2 \in \mathbf{D}_{2j_2} \cup \mathbf{D}_{j_2,o}^\pm \cup \mathbf{D}_{j_2,e}^\pm$,
4. $w_1 \in \mathbf{D}_{2j_1-1} \cup \mathbf{D}_{j_1,o}^\pm \cup \mathbf{D}_{j_1-1,e}^\pm$, $w_2 \in \mathbf{D}_{2j_2-1} \cup \mathbf{D}_{j_2,o}^\pm \cup \mathbf{D}_{j_2-1,e}^\pm$.

いずれの場合も, $\{w; w_1 + w_2 = 2(1 - \lambda)\}$ は, ある $\mathbf{D}_{\rho_1} \times \mathbf{D}_{\rho_2}$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{Z}$ において $\{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2; -1 < y_j < 1, j = 1, 2\}$ との共通部分に連結であり, かつ共通部分は実 1 次元の集合である.

$d-1$ のとき, Lemma が成り立つと仮定する. d のとき, 任意の連結成分 $S_{\lambda,k}$ の元 $z \in S_{\lambda,k}$ をとり,

$$w_1 + \cdots + w_d = d - 2\lambda$$

を考える.

$$(w_1 + \cdots + w_{d-1}) + w_d = d - 2\lambda \in (-d, d)$$

と見て, ある $\mathbf{D}_{\rho_1} \times \cdots \times \mathbf{D}_{\rho_d}$, $\rho_1, \dots, \rho_d \in \mathbf{Z}$ の中で w_d を y_d , $-1 < y_d < 1$ に連続的に動かすことができる. 特に,

$$w_1 + \cdots + w_{d-1} = d - 2\lambda - y_d \in (-d + 1, d - 1)$$

となるような y_d 全体は $(-1, 1)$ の开区間 (塊) である. そのような y_d に対し, $d-1$ のときの仮定を用いると, 集合 $\{(w_1, \dots, w_{d-1}) ; w_1 + \cdots + w_{d-1} = d - 2\lambda - y_d\}$ は, ある $\mathbf{D}_{\rho_1} \times \cdots \times \mathbf{D}_{\rho_{d-1}}$ において $\{(y_1, \dots, y_{d-1}) \in \mathbf{R}^{d-1} ; -1 < y_j < 1, j = 1, \dots, d-1\}$ に連結であり, かつ共通部分は実 $(d-2)$ 次元集合である. w_d と合わせると, \mathbf{R}^d との共通部分に連結であり, それは実 $(d-1)$ 次元集合であることが分かる. \square

Remark. $d = 2, \lambda = 1$ の場合は Lemma 4.2 は成り立つが, $\text{reg } M_\lambda^{\mathbf{C}}$ は連結ではない. 実際, この場合には $M_\lambda^{\mathbf{C}} = A_+ \cup A_-$ と分割され,

$$\begin{aligned} A_+ &= \{z \in \mathbf{T}_{\mathbf{C}}^2 ; z_2 \equiv z_1 + \pi \pmod{2\pi}\}, \\ A_- &= \{z \in \mathbf{T}_{\mathbf{C}}^2 ; z_2 \equiv -z_1 + \pi \pmod{2\pi}\}, \end{aligned}$$

であり, さらに $A_+ \cap A_- = \text{sng } M_\lambda^{\mathbf{C}}$ である.

このことは, 上の証明の議論では, 集合 $\{w_1 + w_2 = 0\}$ が, リーマン面の特異点となっている $\{-1, 1\}$ で連結部分集合に分かれていることに対応する. (粗く言えば, あるリーマン面 $\mathbf{D}_{\rho_1} \times \mathbf{D}_{\rho_2}$ から出発した w_1, w_2 が, $w_1 + w_2 = 0$ を満たしながら連続的に動くことでは乗り換えられないリーマン面が存在する.)

5 主定理の証明の概略

主定理の証明には, 多変数複素解析と代数幾何の基礎的な内容が重要な役割を果たす. Lemma 5.1 を証明した後は, Shaban-Vainberg [13] によって行われた議論を適用する.

\hat{u} が (1.1), (1.2) を満たすとする. \hat{u} を 0 として $|n| \leq R_0$ にも延長すると, 次のような Helmholtz 方程式を得る:

$$(5.1) \quad (\hat{H}_0 - \lambda)\hat{u} = \hat{f}, \quad \text{supp } \hat{f} \subset \{n \in \mathbf{Z}^d ; |n| \leq R_0\}.$$

Lemma 5.1. $\lambda \in (0, d)$ とし, \hat{u} は (1.1), (1.2) を満たすとする. このとき, $u = \mathcal{U}\hat{u} \in C^\infty(\mathbf{T}^d \setminus (\text{sng } M_\lambda^C))$ であり, 特に

$$f(x) = (\mathcal{U}\hat{f})(x) = 0 \quad \text{on } M_\lambda.$$

Proof. \mathcal{U} により, (1.2) は

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{\mathbf{T}^d} |\chi(|\sqrt{-\Delta}| < R)u(x)|^2 dx = 0$$

と同値である. さらに, \mathbf{T}^d の Fourier 変換により,

$$(5.2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{|\xi| < R} |\widehat{\chi_j u}(\xi)|^2 d\xi = 0$$

を得る. $\{\chi_j\}$ は \mathbf{T}^d 上の 1 の分解であり,

$$\widehat{\chi_j u}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} \chi_j(x) u(x) dx$$

である.

(5.1) により, u は

$$(5.3) \quad (h(x) - \lambda)u = f \quad \text{on } \mathbf{T}^d$$

を満たす. 仮定より f は e^{ix_j} , $j = 1, \dots, d$ の多項式である. 点 $x^{(0)} \in M_\lambda \setminus (\text{sng } M_\lambda^C)$ を任意に取り, $\chi \in C^\infty(\mathbf{T}^d)$ を, $\chi(x^{(0)}) = 1$ であり, その台が十分小さく, $\text{supp } \chi \cap (\text{sng } M_\lambda^C) = \emptyset$ となるように取る. $v = \chi u$, $g = \chi f$ とおく. 変数変換 $x \mapsto y$ を $y_1 = h(x) - \lambda$ となるように取ると, (5.3) は $y_1 v(y) = g(y)$ となる. \mathbf{T}^d の Fourier 変換により,

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} \tilde{v}(\eta) = -i \tilde{g}(\eta)$$

を得る. これを積分すれば,

$$\tilde{v}(\eta) = -i \int_0^{\eta_1} \tilde{g}(s, \eta') ds + \tilde{v}(0, \eta')$$

となる. ここで, $\eta' = (\eta_2, \dots, \eta_d)$. \tilde{g} は急減少関数であるから, 極限

$$\lim_{\eta_1 \rightarrow \infty} \tilde{v}(\eta) = -i \int_0^\infty \tilde{g}(s, \eta') ds + \tilde{v}(0, \eta')$$

は存在する.

この極限は 0 であることを示そう. $\delta, R > 0$ に対し

$$D_R = \left\{ \eta; |\eta'| < \delta R, \frac{R}{3} < \eta_1 < \frac{2R}{3} \right\}$$

とおく. 十分小さな $\delta > 0$ に対して $D_R \subset \{|\eta| < R\}$ である. よって, 次のように評価できる:

$$\frac{1}{R} \int_{D_R} |\tilde{v}(\eta)|^2 d\eta = \frac{1}{R} \int_{|\eta'| < \delta R} \int_{R/3}^{2R/3} |\tilde{v}(s, \eta')|^2 ds d\eta' \leq \frac{1}{R} \int_{|\eta| < R} |\tilde{v}(\eta)|^2 d\eta.$$

これと (1.2), (5.2) より, $\lim_{\eta_1 \rightarrow \infty} \tilde{v}(\eta) = 0$ が分かる.

以上のことから,

$$\tilde{v}(\eta) = i \int_{\eta_1}^{\infty} \tilde{g}(s, \eta') ds$$

であり, $v = \chi u \in C^\infty(\mathbf{T}^d \setminus (\text{sng } M_\lambda^{\mathbf{C}}))$.

一方, $u \in C^\infty(\mathbf{T}^d \setminus M_\lambda)$ はただちに分かる. 従って, $u \in C^\infty(\mathbf{T}^d \setminus (\text{sng } M_\lambda^{\mathbf{C}}))$ である. 特に, (5.3) により,

$$f(x) = 0 \quad \text{on } M_\lambda \setminus (\text{sng } M_\lambda^{\mathbf{C}})$$

であることが分かる. f は解析的な関数であり, $\text{sng } M_\lambda^{\mathbf{C}}$ は離散的な集合であるから, $f|_{M_\lambda} = 0$ が分かる. \square

f を複素変数に拡張すると, $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^d$ 上の解析的な関数となる. 一致の定理, Lemma 4.2, 5.1 により, f の零点を M_λ から $M_\lambda^{\mathbf{C}}$ に延長できる. 証明は, [8] の Corollary 7 にある.

Lemma 5.2. $\lambda \in (0, d)$ とする. Lemma 5.1 で与えられた $f = \mathcal{U}\hat{f}$ を複素変数に延長したものを $f(z)$ と書く. $M_\lambda^{\mathbf{C}}$ 上で $f(z) = 0$ である.

Lemma 5.2 と, [2] の §1.5, Proposition 3 により, $f(z)$ は正則関数として $h(z) - \lambda$ は割り切れることが分かる. すなわち, $u(z) = f(z)/(h(z) - \lambda)$ は $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^d$ 上正則関数である.

次に, 多項式としての”割り算”の考察に移る. 変数変換として $w_j = e^{iz_j}$. $j = 1, \dots, d$ とする. 写像

$$\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^d \ni z \mapsto w \in \mathbf{C}^d \setminus \bigcup_{j=1}^d A_j, \quad A_j = \{w \in \mathbf{C}^d; w_j = 0\}$$

は biholomorphic である. $f(z)$ は e^{iz_j} の多項式であったから,

$$f(z) = F(w) \prod_{j=1}^d w_j^{-\alpha_j}, \quad F(w) \text{ は } w_j \text{ の多項式}$$

となるような正整数 α_j が存在する. 同様にして,

$$h(z) - \lambda = \frac{d}{2} - \lambda - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^d (w_j + w_j^{-1}) = H_\lambda(w) \prod_{j=1}^d w_j^{-1}$$

と表せる. ここで

$$H_\lambda(w) = \left(\frac{d}{2} - \lambda\right) \prod_{j=1}^d w_j - \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^d w_j\right) \prod_{j=1}^d w_j - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^d \left(\prod_{i \neq j} w_i\right).$$

よって,

$$\frac{f(z)}{h(z) - \lambda} = \frac{F(w)}{H_\lambda(w)} \prod_{j=1}^d w_j^{1-\alpha_j}.$$

$f(z)/(h(z) - \lambda)$ が正則関数であるから, $F(w)/H_\lambda(w)$ も A_j を除外集合として正則関数である. しかしながら, $H_\lambda(w)$ の定義により, $V_j = \{(w_1, \dots, w_{j-1}, 0, w_{j+1}, \dots, w_d); w_i \neq 0, i \neq j\}$ として,

$$H_\lambda(w) \neq 0, \quad w \in \bigcup_{j=1}^d V_j$$

である. よって, $F(w)/H_\lambda(w)$ は高々 $(d-2)$ 次元の集合を除いて正則であり, 除外集合は除去可能特異点であるから $F(w)/H_\lambda(w)$ は \mathbf{C}^d で正則である. 特に,

$$F(w) = 0 \quad \text{on} \quad \{w \in \mathbf{C}^d; H_\lambda(w) = 0\}.$$

以上により, Hilbert Nullstellensatz が使える ([14], Appendix 6 など).

Lemma 5.3. $f, g \in \mathbf{C}[w_1, \dots, w_d]$, かつ f は既約であるとする. f の全ての零点において $g = 0$ であるならば, ある $h \in \mathbf{C}[w_1, \dots, w_d]$ が存在して, $g = fh$ と表せる.

Lemma 5.3 を $F(w)$ と $H_\lambda(w)$ に適用することで, これが w の多項式として割り切れることが分かる. 従って, 変数を元に戻せば, $f(z)/(h(z) - \lambda)$ は e^{iz_j} の多項式である. U^* により \mathbf{Z}^d 上に戻すことで, \hat{u} が有限個の台を持つことが分かる.

6 おわりに

本稿で述べた内容については, 正方格子に限らず, 六角格子, カゴメ格子などの他の格子でも成立することが期待される. Rellich 型定理は, スペクトル, 散乱理論に広く応用可能であり, 今後の離散 Laplace 作用素の研究に有用であると思われる.

本研究は, 日本学術振興会特別研究員奨励費の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] S. Agmon and L. Hörmander, *Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics*, J. d'Anal. Math., **30** (1976), 1-38.
- [2] E. M. Chirka, "Complex Analytic Sets", Mathematics and Its applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [3] F. Hiroshima, I. Sasaki, T. Shirai and A. Suzuki, *Note on the spectrum of discrete Schrödinger operators*, J. Math-for-Industry, **4** (2012), 105-108.

- [4] L. Hörmander, *Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constant coefficients*, Israel J. Math. **16** (1973), 103-116.
- [5] H. Isozaki and E. Korotyaev, *Inverse problems, trace formulae for discrete Schrödinger operators*, Ann. Henri Poincaré, **13** (2012), 751-788.
- [6] H. Isozaki and H. Morioka, *Inverse scattering at a fixed energy for discrete Schrödinger operators on the square lattice*, submitted (2012). arXiv:1208.4483
- [7] H. Isozaki and H. Morioka, *A Rellich type theorem for discrete Schrödinger operators*, submitted (2012). arXiv:1208.4428
- [8] P. Kuchment and B. Vainberg, *On absence of embedded eigenvalues for Schrödinger operators with perturbed periodic potentials*, Comm. PDE, **25** (2000), 1809-1826.
- [9] W. Littman, *Decay at infinity of solutions to partial differential equations with constant coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **123** (1966), 449-459.
- [10] W. Littman, *Decay at infinity of solutions to partial differential equations*, Israel J. Math., **8** (1970), 403-407.
- [11] M. Murata, *Asymptotic behaviors at infinity of solutions to certain partial differential equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, **23** (1976), 107-148.
- [12] F. Rellich, *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten*, Jahresber. Deitch. Math. Verein., **53** (1943), 57-65.
- [13] W. Shaban and B. Vainberg, *Radiation conditions for the difference Schrödinger operators*, Applicable Analysis, **80** (2001), 525-556.
- [14] I. R. Shafarevich, "Basic Algebraic Geometry 1", 2nd edition, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
- [15] F. Trèves, *Differential polynomials and decay at infinity*, Bull. Amer. Math. Soc., **66** (1960), 184-186.