代数幾何学シンポジウム記録
1977年度　pp.262-277

Hirzebruch の比例原理について.

対馬龍司（学習院大）

I，<u>定義 1</u>，$\overline{X}$ を compact complex manifold，D をその normal crossing な divisor，$X=\overline{X}-D$ とする。この時，$\Theta_{\overline{X}}$ の subsheaf $\Theta_{\overline{X}}(\log D)$ を次の様に定義する。$p\in\overline{X}$ のまわりの局所座標 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ $(n=\dim X)$ によって，$D=\{z_1\cdot\cdots\cdot z_r=0\}$ と書かれる時，$\Theta_{\overline{X}}(\log D)_p$ は $z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, z_r\frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial z_{r+1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ によって生成されるものとする。$\Theta_{\overline{X}}(\log D)$ は勿論［2］で定義された $\Omega^1_{\overline{X}}(\log D)$ の dual である。そして，$\overline{c}_i(X)=c_i(\Theta_{\overline{X}}(\log D))$ とおき，X の logarithmic chern class と呼ぶ。

第一の目標は Hirzebruch の比例原理を次の様に拡張することである。

<u>定理 1</u>，$\mathcal{D}$ を bounded symmetric domain，$\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ をその biholomorphic isomorphism のなす group，$\Gamma\subset\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ を torsion free な discrete arithmetic subgroup，$\widetilde{\mathcal{D}/\Gamma}$ を［1］で構成された，$D=\widetilde{\mathcal{D}/\Gamma}-\mathcal{D}/\Gamma$ が normal crossing であ

る様な $\widetilde{\mathcal{D}/\Gamma}$ の non-singular な compact 化，$\overline{C_i} = \overline{C_i}(\mathcal{D}/\Gamma)$ とする。また $n = \dim \mathcal{D}$ とし，$H^{2n}(\widetilde{\mathcal{D}/\Gamma}, \mathbb{Z})$ を $\mathbb{Z}$ と同一視する。この時，

$$\overline{C}_{i_1}^{n_1} \cdot \cdots \cdot \overline{C}_{i_k}^{n_k} = a_{i_1 \cdots i_k}^{n_1 \cdots n_k} \cdot v(\mathcal{D}/\Gamma).$$

ただし $n_1 \cdot i_1 + \cdots + n_k \cdot i_k = n$ で，v は $\mathcal{D}$ の不変測度，$a_{i_1 \cdots i_k}^{n_1 \cdots n_k}$ は $\mathcal{D}$ のみに依存する（Γ によらない）定数である。

筆者はこの定理を $\mathcal{D} = \mathfrak{S}_g$（degree g の Siegel 上半平面），D^n（n 次元 disk）等の場合に確認していたが，一般には出来ていなかった。最近［7］によって，一般の bounded symmetric domain に対して証明された。

証明の方針は簡単の為，$\mathcal{D} = \{z \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ として説明すると，$\mathcal{D}$ の Bergman metric $\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle = \frac{1}{(\mathrm{Im}\, z)^2}$ によって $\Theta_{\mathcal{D}}$ に $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ 不変な Hermitian metric が入るが，不変性により $\Theta_{\mathcal{D}/\Gamma}$ の Hermitian metric を与える。$\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\Gamma$ を projection，$p = \pi(i\infty) \in \widetilde{\mathcal{D}/\Gamma} - \mathcal{D}/\Gamma$ を cusp とすると，l を $z \to z + l$ が Γ に含まれる最小の正数として，$\widetilde{\mathcal{D}/\Gamma}$ の p での局所座標は $\zeta = \exp(2\pi i \frac{z}{l})$ で与えられるから，

$\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{2\pi i}{l}\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}$ により，

$$\left\langle \frac{2\pi i}{l}\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta},\ \frac{2\pi i}{l}\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle = \frac{4\pi^2}{(\log|\zeta|)^2}$$

として，$\Theta_{\tilde{\mathfrak{H}}/\Gamma}(\log D)$ に metric が入ると言ってよい。ところがこの右辺は $\zeta \to 0$ の時，0 になるので，この "metric" は cusp で退化している。従って，$\omega_1 = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\left\{\frac{4\pi^2}{(\log|\zeta|)^2}\right\}$ が "chern class $\bar{c}_1$ を表わす" とは直ちには結論できない。そこでこの ω_1 と $\bar{c}_1$ との比較をしてみる。

ω_1' を $\Theta_{\tilde{\mathfrak{H}}/\Gamma}(\log D)$ の（退化していない本当の）Hermitian metric から作った，$\bar{c}_1$ を表わす 2-form とすると，chern class が connection のとり方によらないということによって，

$$\omega_1 - \omega_1' = d\alpha, \quad (\alpha \text{ は } 1\text{-form})$$

と表わせる。ここで ω_1 が cusp で C^∞ でないことにより，α も cusp で C^∞ ではない。従って Stokes の定理で $\int d\alpha = 0$ とは言えないのであるが，α の cusp のまわりでの特異性を調べてみると，

$$\alpha = \frac{i\,d\zeta}{4\pi\zeta\log|\zeta|} + (C^\infty \text{ term})$$

となり，

$$\int\omega_1 - \int\omega_1'$$

$$= \lim_{r\to 0} \sum_{\text{cusp}} \int_{|\zeta|=r} \frac{-i\,d\zeta}{4\pi\zeta\log|\zeta|}$$
$$= 0$$

で,

$$\overline{c}_1 = \int \omega_1' = \int \omega_1$$

となり，この右辺が測度に比例するのは明らかであるから，($\pi^*\omega_1$ が $Hol(\mathcal{D})$ 不変な 2-form になるので，$\pi^*\omega_1$ は不変測度の定数倍である。) 定理が成立する。

一般の bounded symmetric domain に対しても，問題になるのは Bergman metric の boundary へ行く時の増大度を評価することである。筆者は先に挙げた場合について，具体的な Bergman metric の式を書き下すことによって，定理を証明したが，Mumford は Bergman metric の具体的な形は使わず，不変性だけから証明している。なお，Mumford は，もう少し一般の vector bundle に対して，定理を証明している。

この応用として直ちに次の定理を得る。

<u>定理 2</u>，S_k を $\mathcal{D}$ 上の Γ に関する weight k の cusp form のなす空間とし，$r = \max \dim \{\mathcal{D}$ の rational

boundary component $\mathfrak{F}$ とすると，$k \geq 2$ の時 $\dim S_k$ は k の多項式となるが，ある $\mathcal{D}$ に依存する多項式 $F(k)$ があって，（$\deg F(k) = \dim \mathcal{D}$）

$$\dim S_k = F(k)\, v(\mathcal{D}/\Gamma) + (\ k \text{ について } r \text{ 次以下の項}),$$

となる。

（証明）（Mumford の証明もほぼ同じである。）一般の場合も全く同様であるから，$\mathcal{D} = \mathfrak{S}_g$ として証明する。

<u>定義 2</u>，$\overline{X}, X, D$ を定義 1 と同様とする。D の irreducible component を $D_1, D_2, \cdots, D_r$ とする。この時，$D_1, \cdots, D_r$ の j 番目の基本対称式を Δ_j とする。ただし積は交わりである。

<u>補題 1</u>，$c_i = c_i(\overline{X})$，$\overline{c_i} = \overline{c_i}(X)$ とする時，

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} \overline{c}_j \cdot \Delta_{i-j} \quad .$$

これは次の二つの sheaf の exact sequence から，$\mathcal{O}_{D_i}(D_i)$ の chern character を二通りの方法で計算することによって証明される。

$$0 \longrightarrow \Theta_{\overline{X}}(\log \Delta_1) \longrightarrow \Theta_{\overline{X}} \longrightarrow \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{D_i}(D_i) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}}(D_i) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_i}(D_i) \longrightarrow 0$$

ただし、Δ_j とその cohomology class とを同一視した。

さて定理の証明にもどると、$\mathfrak{S}_g/\Gamma$ の佐武 compact 化を $\mathfrak{S}_g/\Gamma^*$ と書くと、$\mathfrak{S}_g/\Gamma^*$ 上には "weight" 1 の modular form の芽の sheaf L があり、これは invertible である。(weight に " " をつけたのは、前に書いた weight と少々異なるから区別する為である。) L の定義を述べると、それは $\mathfrak{S}_g/\Gamma$ 上では、$\mathfrak{S}_g$ 上の automorphic factor

$$\det(CZ+D), \quad Z\in\mathfrak{S}_g, \quad M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in Sp(g,\mathbb{R})$$

によって誘導されるものであり、$\mathfrak{S}_g/\Gamma^*$ の cusp では、これを Siegel の Φ-operator で延長したものである。

$\pi: \widetilde{\mathfrak{S}_g/\Gamma} \longrightarrow \mathfrak{S}_g/\Gamma^*$ という $\mathfrak{S}_g/\Gamma$ 上 identity である様な morphism が $\widetilde{\mathfrak{S}_g/\Gamma}$ の構成法により、存在するが、容易に $\pi^*((g+1)L) \cong K_{\widetilde{\mathfrak{S}_g/\Gamma}} + \Delta_1$ がわかる。ただし $K_{\widetilde{\mathfrak{S}_g/\Gamma}}$ は $\widetilde{\mathfrak{S}_g/\Gamma}$ の canonical bundle。(従って weight k = "weight" $k(g+1)$.) これより、

$$S_k \cong \Gamma\left(\widetilde{\mathfrak{S}_g/\Gamma}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathfrak{S}_g/\Gamma}}\left(k(K_{\widetilde{\mathfrak{S}_g/\Gamma}}+\Delta_1)-\Delta_1\right)\right)$$

であり、後者の次元は $k\geqq 2$ の時、vanishing

theorem [11] により

$$\chi\left(\widetilde{G_g/P},\ \mathcal{O}_{\widetilde{G_g/P}}\left(k\left(K_{\widetilde{G_g/P}}+\Delta_1\right)-\Delta_1\right)\right)$$

に等しく，これは Riemann-Roch の定理により，多項式 Q が存在し，

$$Q\left(c\left(k\left(K_{\widetilde{G_g/P}}+\Delta_1\right)-\Delta_1\right),\ c_1, c_2, \cdots, c_n\right)$$

に等しい，ただし $c(\ )$ は cohomology class，c_i は $c_i(\widetilde{G_g/P})$ である。$c(K_{\widetilde{G_g/P}}+\Delta_1) = -\overline{c}_1(G_g/P)$ であるから，$\overline{c}_i = \overline{c}_i(G_g/P)$ とおいて補題 1 を使って，上の多項式を $\overline{c}_i$ と Δ_j との式に展開する。即ち

$$\begin{aligned} \dim S_k &= \overline{c}_i \text{ と } \Delta_j \text{ との多項式} \\ &= (\overline{c}_i \text{ だけの項}) + (\Delta_j \text{ が入る項}) \end{aligned}$$

と書けるが，この前者は定理 1 により，ある多項式 $F(k)$ が存在して，$F(k)\chi(G_g/P)$ に等しい。従って定理の証明の為には，後者が k について r 次以下になることを証明すればよいが，それには $D \subset \widetilde{G_g/P} - G_g/P$ を irreducible な divisor，E を $2n-2r-4$ 次元の cohomology class とする時，

$$\overline{c}_1^{\,r+1} \cdot D \cdot E = 0$$

が証明されればよい。何故ならば，k は $\overline{c}_1$ にしかかかっていないからである。（ここでは，

$r=\frac{1}{2}g(g-1)$, $n=\frac{1}{2}g(g+1)$。)

ところで、$\mathfrak{S}_g/\Gamma^*$ の cusp は $\Gamma'=\mathfrak{S}_g$ のある boundary component $\mathfrak{S}_{g-1}$ を fix する Γ の subgroup, として $\mathfrak{S}_{g-1}/\Gamma'^*$ のいくつかの union となるが、$\widetilde{\mathfrak{S}_g/\Gamma}$ の構成法により、D はある $\mathfrak{S}_{g-1}/\Gamma'^*$ 上の fiber space の構造をもっている。即ち $\pi|_D : D \to \mathfrak{S}_{g-1}/\Gamma'^*$。

従って、

$$\overline{c}_1^{\,r+1}\cdot D\cdot E = (\overline{c}_1|_D)^{r+1}\cdot E|_D$$

$$= \left(-(g+1)\pi|_D^*(L|\mathfrak{S}_{g-1}/\Gamma'^*)\right)^{r+1}\cdot E|_D$$

であるが、$\mathfrak{S}_{g-1}$ が r 次元であることにより、これは 0 に等しい。

II, 以上により、$\dim S_k$ が k について漸近的に求まったわけであるが、今度は $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_3$ の場合に、これを定数項まで完全に求めることを目標とする。なお $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_2$ の場合は、[10] によって、Riemann-Roch の定理の井草氏の theta constant の理論を用いて計算され、また [6] によって Selberg の trace formular を用いて計算されたが、定理 1 を用いれば Riemann-Roch の定理だけから計算で

きる。$\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_3$ の場合には、交点数を50個ほど計算することが必要となるが、定理1により、そのうちの11個が計算され、定理2(の証明)により、そのうちの3個が0になることがわかる。ところが次の定理3により、この3個を含めて22個が0になることがわかり、従って計33個が自動的に計算され、残りは17個である。

以下 $\widetilde{\mathfrak{S}_3/\Gamma}$, $\widetilde{\mathfrak{S}_2/\Gamma'}$ として、[8], [9] で研究された $\mathfrak{S}_3/\Gamma$, $\mathfrak{S}_2/\Gamma'$ の Voronoi compact 化をとる。ただし、$\Gamma=\Gamma_3(\ell)$, $\Gamma'=\Gamma_2(\ell)$ $(\ell \geq 3)$ は、level ℓ の principal congruence group である。なお $\widetilde{\mathfrak{S}_3/\Gamma}$, $\widetilde{\mathfrak{S}_2/\Gamma'}$ は [3] で構成された、井草の desingularization というものに他ならない。

$D \subset \widetilde{\mathfrak{S}_3/\Gamma} - \mathfrak{S}_3/\Gamma$ を irreducible な divisor とすると、定理2の証明により D は $\mathfrak{S}_2/\Gamma'^{*}$ 上の fiber space の構造をもつが、ここで次の map φ を考える。

$C = \widetilde{\mathfrak{S}_2/\Gamma}$ とする。

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathfrak{S}_3/\Gamma} \arrow[d, "\pi"'] & \supset & D \arrow[d] \arrow[rr, "\varphi"] & & \widetilde{\mathfrak{S}_2/\Gamma'} = C \arrow[dll] \\
\mathfrak{S}_3/\Gamma^{*} & \supset & \mathfrak{S}_2/\Gamma'^{*} & &
\end{tikzcd}
$$

φ は equidimensional な morphism になることがわかるが、次が成立する。

定理3, C 上の $2i$ 次元の cohomology class e_i が存在して,

$$\overline{c_i}\,|\,D = \varphi^*(e_i)$$

が成りたつ。ただし $\overline{c_i} = \overline{c_i}(\mathfrak{S}_3/\Gamma)$ $1 \leqq i \leqq 6$。

まず adjunction formular により次が成りたつ。

補題2, $\widetilde{\mathfrak{S}_3/\Gamma} - \mathfrak{S}_3/\Gamma$ を irreducible component $D_1 = D$, $D_2, \cdots, D_r$ に分割し, $\Delta_1' = D_2 + \cdots + D_r$ とし, $\Delta_1'|D = \Delta_1' \cap D$ とする。この時

$$\overline{c_i}\,|\,D = \overline{c_i}\,(D - \Delta_1'|D).$$

定理の証明に入ると, $E = \widetilde{\mathfrak{S}_2/\Gamma'} - \mathfrak{S}_2/\Gamma$ として sheaf の exact sequence

$$0 \to \varphi^*\Omega^1_C(\log E) \to \Omega^1_D(\log \Delta_1'|D) \to \Omega^1_{D/C}(\log \Delta_1'|D) \to 0$$

がある。ここに $\varphi^*\Omega^1_C(\log E)$, $\Omega^1_{D/C}(\log \Delta_1'|D)$ は, locally free である。従って補題2より、定理の証明の為には、C 上に rank 2 の locally free sheaf F が存在して, $\Omega^1_{D/C}(\log \Delta_1'|D) \cong \varphi^*(F)$ となることを示せばよい。

証明の方針を例で説明しよう。$\mathbb{C}$ の不変

微分形式 dz を，$\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^*$ に落とすと，$\mathbb{C}^*$ の座標を w として，$\mathbb{C}^*$ 上の微分形式 $\frac{dw}{w}$ を与える。この $\frac{dw}{w}$ は $\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}^*$ を boundary とみて，そこで log pole をもっている。即ち最初の dz が $\mathbb{C}^*$ へ落ちて $\Theta_{\mathbb{P}^1}(\log D)$ の trivialization を与えている。これと似たことをやって，$\Omega^1_{D/C}(\log \Delta_1^{\prime}|_D)$ の縦方向の trivialization を構成するのである。

まず D の座標は symbolical に

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & w_1 \\ z_2 & z_3 & w_2 \\ w_1 & w_2 & \infty \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_2$$

と書ける。(3,3) 成分が ∞ というのが，この点が D 上に存在するということで，$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ が C の座標であり，(w_1, w_2) が φ の fiber の座標である。証明すべきことは，(dw_1, dw_2) が Γ で割った時に $\Omega^1_{D/C}(\log \Delta_1^{\prime}|_D)$ の section として D に落ちて，そこで縦方向の trivialization を与えるということである。正確に述べると，$p \in C$ の近傍 U があって $\varphi^{-1}(U)$ において，(dw_1, dw_2) が $\Omega^1_{D/C}(\log \Delta_1^{\prime}|_D)$ の section として落ちたものが，そこで一次独立であること，従ってそこで $\Omega^1_{D/C}(\log \Delta_1^{\prime}|_D)$ の trivialization

を与えるわけであるが、$\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{C}$ の時、$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \phi$ であれば、$\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ と $\varphi^{-1}(\mathcal{V})$ 上での $\Omega^1_{D/\mathbb{C}}(\log \Delta_i' | D)$ の trivialization の変換行列が $\varphi^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ 上で (w_1, w_2) に依らない、$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ だけの正則関数になっているということである。これらのことは具体的に (dw_1, dw_2) を計算することによって確かめられる。これで定理3は証明される。

定理2によって、$\overline{C}_1^5 \cdot D = 0$ 等が結論されるが、定理3によると、$\overline{C}_1 \cdot \overline{C}_2^2 \cdot D = 0$ 等も結論される。以上によって残りは17個の交点数である。

$\widetilde{G_3/\Gamma}$ は torus embedding の理論を応用して構成されるのであるが、torus embedding は rational partial polyhedral decomposition で分類される（[5]）。[5] の定理を使うことによって、torus embedding の boundary に関する交点数を、rational partial polyhedral decomposition の係数から直接計算する方法を見出すことができる。$\widetilde{G_3/\Gamma}$ は torus embedding を割ったものを張り合わせることによって構成されるのであるが、例えば $D_1, D_2, D_3 \subset \widetilde{G_3/\Gamma} - G_3/\Gamma$ が irreducible divisor である時、$\pi(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$ が 0 次元

であれば（πは G_3/P^* へのmap），$D_1\cap D_2\cap D_3$ は1つのtorus embeddingを割ったものの中に含まれている。従ってこの時、前に述べた方法で，$D_1^4D_2D_3$，$D_1^3D_2^2D_3$ 等の交点数が計算できる。

次は残った交点数に関する関係式を求めることである。$E_1\subset\widetilde{G_2/P'}-G_2/P'$ をirreducibleなdivisorとする時，$\widetilde{G_3/P}$ が3次元であることにより，前の様に $\varphi: D\longrightarrow\widetilde{G_2/P'}$ として，D上での交点数，$\varphi^*(E_1)^5$, $\varphi^*(E_1)^4\cdot D_{|D}$ は0になる。ただし，divisorとそれから誘導されるline bundle，及びそのcohomology class等を適当に同一視している。従って $\widetilde{G_3/P}$ 上の交点数 $\varphi^*(E_1)^5\cdot D$，$\varphi^*(E_1)^4\cdot D^2$ が0になり、これから関係式が導びかれる。また、$\varphi^*(E_1)^3\cdot D^3$，$\varphi^*(e_1)\cdot\varphi^*(E_1)^2\cdot D^3=\overline{C_1}\cdot\varphi^*(E_1)^2\cdot D^3$ 等は，0にはならないが，前に述べた方法で求めた交点数の結果から計算できる。

次も同様の方法であるが，$\varphi^{-1}(E_1)$ は l コの4次元多様体が2つずつ交わって，輪になったものであるが，その一つの4次元多様体，および一つの交わりとなる3次元多様体は，

irreducible divisor $D', D'' \subset \widetilde{\mathfrak{S}_3/\Gamma} - \mathfrak{S}_3/\Gamma$ があって，$D\cap D'$ および $D\cap D'\cap D''$ と表わされるのであるが，$\widetilde{\mathfrak{S}_2/\Gamma'}$ 上の cohomology class E_1^3 は E_1 の外の点にとれるので，D 上の cohomology class $\varphi^*(E_1)^3$ は $D\cap D'$, $D\cap D'\cap D''$ と交わらないようにとれる。従って，$\varphi^*(E_1)^3\cdot D\cdot D'\cdot D''$ $\varphi^*(E_1)^3\cdot D^2\cdot D'$ 等は 0 になる。また前と同様に，$\varphi^*(E_1)^2\cdot D^2\cdot D'\cdot D''$ 等は 0 にはならないが，前に求めた交点数の結果から計算できる。

以上の様にして，様々の関係式が導びかれるのであるが，これだけでは不十分である。何故なら以上の関係式には，D^6 という項は出て来ないからである。そこで次の結果を使う。

定理［4］ $\mathfrak{S}_3$ 上の $\Gamma_3(1)$ に関する "weight" 18 と 140 の cusp form が存在して，それらの共通零点は reducible point の集合である。ただし，reducible point というのは，$\Gamma_3(1)$ に関して $\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}$，$\tau_1 \in \mathfrak{S}_2$, $\tau_2 \in \mathfrak{S}_1$ という点と同値な点のことである。

これより，"weight" 18 の cusp form の $\mathfrak{S}_3/\Gamma$ 上の零点，"weight" 140 の cusp form の $\mathfrak{S}_3/\Gamma$ 上の零点を，それぞ

れ F，G とすると、$\overline{F}$，$\overline{G}$ をその $\widetilde{\mathfrak{S}_3/\Gamma}$ の中での閉包として，

$$-\frac{18}{4}\overline{C_1} = \overline{F} + 2\ell\Delta_1 ,$$
$$-\frac{140}{4}\overline{C_1} = \overline{G} + 15\ell\Delta_1 .$$

が成り立つ。ただし，Δ_1 の係数はおのおのの cusp form の定義式から直接求める。$\overline{F}\cap\overline{G}$ は幾何的に非常にわかり易いものである。何故なら $\begin{pmatrix}\tau_1 & 0\\ 0 & \tau_2\end{pmatrix}$，$\tau_1\in\mathfrak{S}_2$，$\tau_2\in\mathfrak{S}_1$ という点の集合の $\mathfrak{S}_3/\Gamma$ への image の $\widetilde{\mathfrak{S}_3/\Gamma}$ での閉包は，$\widetilde{\mathfrak{S}_2/\Gamma'}\times\widetilde{\mathfrak{S}_1/\Gamma''}$ に他ならないからである。ただし，$\Gamma''=\Gamma_1(\ell)$。従って，$D_1, D_2 \subset \widetilde{\mathfrak{S}_3/\Gamma}-\mathfrak{S}_3/\Gamma$ を irreducible な divisor とする時，$\overline{F}\cdot\overline{G}\cdot D_1^4=\overline{F}\cdot\overline{G}\cdot D_1^2\cdot D_2^2=0$ 等が容易にわかり，

$$\overline{F}\cdot\overline{G}\cdot D_1^4 = \left(-\frac{18}{4}\overline{C_1}-2\ell\Delta_1\right)\cdot\left(-\frac{140}{4}\overline{C_1}-15\ell\Delta_1\right)\cdot D_1^4 = 0$$
$$\overline{F}\cdot\overline{G}\cdot D_1^2\cdot D_2^2 = \left(-\frac{18}{4}\overline{C_1}-2\ell\Delta_1\right)\cdot\left(-\frac{140}{4}\overline{C_1}-15\ell\Delta_1\right)\cdot D_1^2\cdot D_2^2 = 0$$

等の関係式が導びかれる。

以上にして，必要な関係式は全て求まるので，それらを解くことによって交点数が全て求まるのであるが，これを解くと恐ろしいことに一部の交点数が，分数になってしまう。現在どこがまちがっているのか検討中である。

16.

References

[1] Ash,A. et al. : Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties. Math.Sci.Press,(1975)

[2] Deligne,P. : Theorie de Hodge II. Publ.Math.IHES,40,5-58,(1973)

[3] Igusa,J. : A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions. Math.Ann.168,228-260,(1967)

[4] Igusa,J. : Modular forms and projective invariants. Amer.J.Math. 89,817-855,(1967)

[5] Kempf,G. et al. : Toroidal Embeddings I. Springer Lect.Notes 339 (1973)

[6] Morita,Y. : An explicit formular for the dimension of spaces of Siegel modular forms of degree two. J.Fac.Sci.Univ.Tokyo

[7] Mumford,D. : Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case. Invent.Math.42,239-272,(1977)

[8] Nakamura,I. : On moduli of stable quasi-abelian varieties. Nagoya Math.J.58,149-214,(1975)

[9] Namikawa,Y. : A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties. I,II. Math.Ann.221,97-141,201-241,(1976)

[10] Yamazaki,T. : On Siegel modular forms of degree two. Amer.J.Math. 98,39-53,(1973)

[11] Mumford,D. : Pathogies III. Amer.J.Math.89,94-104,(1967)