代数幾何学シンポジウム記録
1977年度 pp.243-252

On the cubics defining abelian varieties

関口 力（中央大理工）

0．標数 p の代数閉体 k 上定義された abelian variety を X とし，その上の ample な invertible sheaf を L とする。整数 a $(\geqq 3)$ に対し，$\Psi_a : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(L^a))$ を標準的な埋め込みとし，$\mathcal{K} = \mathrm{Ker}\left(S^3(\Gamma(L^3)) \longrightarrow \Gamma(L^9)\right)$ (但し，S^3 は 3 次の symmetric product を意味する) とおく。本講の目的は，以上の設定の下に，次の定理を証明することにある。

<u>定理</u>．$p \neq 2, 3$ の時，$\Psi_3(X) = \bigcap_{F \in \mathcal{K}} F$ ideal-theoretically。
但し，"ideal-theoretically" の意味は，Mumford [5] の意によるものとする。

一般的な偏極 abelian variety については，標数に関する制限なしで，Morikawa [4] により，この事実が与えられている。4 以上の a に対しては，Mumford [5] により，$\Psi_a(X)$ が ideal-theoretically に，2 次曲面の交わりとして表わされることが示されている。我々は，この Mumford の定理を用いて，上記の定理を導く。

1. Mumford の定理

$a \geq 4$ とし，2以上の整数 p, q を $p+q=a$ とし任意に固定する。$\mathcal{P}$ を $X \times \hat{X}$ 上の Poincaré invertible sheaf とし，$\alpha \in \hat{X}$ に対し，$\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}|_{X \times \{\alpha\}}$ とおく。更に，$\alpha \in \hat{X}$，$u_1, u_2 \in \Gamma(L^p \otimes \mathcal{P}_\alpha)$，$v_1, v_2 \in \Gamma(L^q \otimes \mathcal{P}_{-\alpha})$ に対し，$Q^{(\alpha)}_{u_1,u_2,v_1,v_2} = u_1 t_1 \odot u_2 t_2 - u_1 t_2 \odot u_2 t_1 \in S^2(\Gamma(L^a))$ とおく。但し，記号 $\odot$ は，$S(\Gamma(L^a))$ における積を意味する。

定理 (Mumford [5]). Ideal-theoretically,

$$\mathfrak{P}_n(X) = \bigcap_{\alpha \in \hat{X}} \bigcap_{\substack{u_1,u_2 \in \Gamma(L^p \otimes \mathcal{P}_\alpha) \\ v_1,v_2 \in \Gamma(L^q \otimes \mathcal{P}_{-\alpha})}} Q^{(\alpha)}_{u_1,u_2,v_1,v_2} .$$

この定理は容易に、次の形に変えることが出来る。

系　U を $\hat{X}$ の任意の空でない開集合とするならば,

$$\mathfrak{P}_n(X) = \bigcap_{\alpha \in U} \bigcap_{\substack{u_1,u_2 \in \Gamma(L^p \otimes \mathcal{P}_\alpha) \\ v_1,v_2 \in \Gamma(L^q \otimes \mathcal{P}_{-\alpha})}} Q^{(\alpha)}_{u_1,u_2,v_1,v_2}$$

ideal-theoretically。

2. 正規生成性について

定理 2.1. 標数 $p \neq 2$ とし，α, β を $\hat{X}$ の任意の点とする。このとき，点 γ を $\hat{X}$ の一般的な

位置にとれば、積写像

$$\Gamma(L^2\otimes P_{\alpha+\gamma})\otimes\Gamma(L^2\otimes P_{\beta-\gamma})\longrightarrow\Gamma(L^4\otimes P_{\alpha+\beta})$$

は、全射となる。

証明は、テータ関数の加法公式を用いて、上記の写像を行列表示をし、行列式を計算することにより容易に示されるのであるが、簡単な割には有用で、我々の議論の鍵になるものであり、標数 $p=2$ の場合にも証明されることが望まれる。

次の定理は $a,b\geq 4$ に対しては Mumford [5] で与えられ、Koizumi [3] により標数 0 の場合に、$a\geq 2$, $b\geq 3$ まで拡張された。更に任意標数については、Sekiguchi [7], [8] に与えられている。

<u>定理</u> 2.2. $a\geq 2$, $b\geq 3$ の時、任意の 2 点 $\alpha,\beta\in\hat{X}$ に対し、$\Gamma(L^a\otimes P_\alpha)\otimes\Gamma(L^b\otimes P_\beta)\longrightarrow\Gamma(L^{a+b}\otimes P_{\alpha+\beta})$ は全射である。

特に、標数 $p\neq 2$ の場合には、定理 2.1 より簡単にこの定理が導かれる。実際、Mumford の補題 ([5], §3)

<u>補題</u> 2.3. L, M を X 上の ample な invertible

sheaf とし，U を $\hat{X}$ の任意の空でない開集合とすれば，

$$\sum_{\alpha\in U}\Gamma(L\otimes P_\alpha)\otimes\Gamma(M\otimes P_{-\alpha})\longrightarrow\Gamma(L\otimes M)$$

は全射。

を用いれば，$a=2,\ b=3$ の場合を示せばよいことがわかる。ここで定理 2.1 により，$\hat{X}$ の開集合 U を，$\alpha\in U$ に対し，$\Gamma(L^2)\otimes\Gamma(L^2\otimes P_\alpha)\longrightarrow\Gamma(L^4\otimes P_\alpha)$ が全射となるように選ぶ。このとき，図形

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(L^2)\otimes\Gamma(L^3) & \longrightarrow & \Gamma(L^5)\\
\uparrow & & \uparrow\\
\Gamma(L^2)\otimes\left\{\sum_{\alpha\in U}\Gamma(L^2\otimes P_\alpha)\otimes\Gamma(L\otimes P_{-\alpha})\right\} & \longrightarrow & \sum_{\alpha\in U}\Gamma(L^4\otimes P_\alpha)\otimes\Gamma(L\otimes P_{-\alpha})
\end{array}$$

の下段の写像は，U の選び方から全射であり，右端の写像は補題 2.3 により全射である。従って上段の写像の全射を得る。

更に，簡単な計算により，次の補題を得る。

<u>補題</u> 2.4. 標数 $p\neq 3$ のとき，

$$\sum_{\alpha\in\hat{X}_3}\Gamma(L^2\otimes P_\alpha)\otimes\Gamma(L\otimes P_{-\alpha})\longrightarrow\Gamma(L^3)$$

は全射。但し，$\hat{X}_3$ は $\hat{X}$ の 3 分点のなす部分群を意味する。

3. 主定理の証明.

命題 3.1. 次の図形は可換である。

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{P}(\Gamma(L^3))\times\mathbb{P}(\Gamma(L^4)) \arrow[dr, hook, "\varsigma"] & \\ X \arrow[ur, hook, "(\Psi_3,\Psi_4)"] \arrow[dr, hook, "\Psi_7"'] & & \mathbb{P}(\Gamma(L^3)\otimes\Gamma(L^4)) \\ & \mathbb{P}(\Gamma(L^7)) \arrow[ur, hook, "\mathbb{P}(\tau)"'] & \end{tikzcd}$$

但し，ς は Segre embedding であり，$\tau : \Gamma(L^3)\otimes\Gamma(L^4)\longrightarrow\Gamma(L^7)$ は積写像である。更に，

$$\varsigma^{-1}(\mathrm{Im}(\mathbb{P}(\tau)))\cap\{\mathbb{P}(\Gamma(L^3))\times\Psi_4(X)\} = \mathrm{Im}(\Psi_3,\Psi_4)$$

が成り立つ。

証明　$\hat{X}$ の点 α と，$u_1,u_2\in\Gamma(L^2\otimes P_\alpha)$，$v_1,v_2\in\Gamma(L^2\otimes P_{-\alpha})$ $u,v\in\Gamma(L^3)$ に対し，$F^{(\alpha)}_{u,v,u_1,u_2,v_1,v_2} = (u\otimes u_1v_1)\odot(v\otimes u_2v_2)-(u\otimes u_1v_2)\odot(v\otimes u_2v_1)\in S^2(\Gamma(L^3)\otimes\Gamma(L^4))$ とおくとき，明らかに，

$$\varsigma(\mathbb{P}(\Gamma(L^3))\times\Psi_4(X))\subset F^{(\alpha)}_{u,v,u_1,u_2,v_1,v_2}.$$

一方，$S^2(\tau)(F^{(\alpha)}_{u,v,u_1,u_2,v_1,v_2}) = Q^{(\alpha)}_{uu_1,vu_2,v_1,v_2}$ であり，定理 2.2 と Mumford の定理に注意すれば，

$$\mathbb{P}(\tau)^{-1}\Bigl(\bigcap_{\alpha}\bigcap_{\substack{u,v\\u_1,u_2\\v_1,v_2}} F^{(\alpha)}_{u,v,u_1,u_2,v_1,v_2}\Bigr) = \Psi_7(X)$$

がわかる。従って，$\mathbb{P}(\tau)^{-1}(\varsigma(\mathbb{P}(\Gamma(L^3))\times\Psi_4(X)))\subset\Psi_7(X)$ となり，逆の包含関係は明白であるから，

$$\varsigma(\mathbb{P}(\Gamma(L^3))\times\Psi_4(X))\cap\mathrm{Im}(\mathbb{P}(\tau)) = \mathbb{P}(\tau)(\Psi_7(X))$$

を得，我々の結果を得る。

non-trivial な線型写像 $l:\Gamma(L^3)\longrightarrow k$ に対し決まる $\mathbb{P}(\Gamma(L^3))$ の点を $[l]$ と書くことする。任意の点 $\alpha\in\hat{X}$ に対し、$\mathcal{Q}_\alpha=\{Q^{(\alpha)}_{u_1,u_2,v_1,v_2}\mid u_1,u_2\in\Gamma(L^2\otimes P_\alpha),\ v_1,v_2\in\Gamma(L\otimes P_{-\alpha})\}$ とおく。このとき、簡単な計算で次の事実がわかる。

<u>補題</u> 3.2. $[l]\in\mathbb{P}(\Gamma(L^3))$ に対し、

$[l]\in V(\mathcal{K})$ $\Longleftrightarrow$ 任意の $\alpha\in\hat{X}$ に対し、$[l]\in V(\mathcal{Q}_\alpha)$

$\Longleftrightarrow$ 各 α に対し、次の図形を可換にする線型写像 $m_\alpha:\Gamma(L^2\otimes P_\alpha)\longrightarrow k$, $n_{-\alpha}:\Gamma(L\otimes P_{-\alpha})\longrightarrow k$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(L^2\otimes P_\alpha)\otimes\Gamma(L\otimes P_{-\alpha}) \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[dr, "m_\alpha\otimes n_{-\alpha}"'] & \Gamma(L^3) \arrow[d, "l"] \\
 & k
\end{tikzcd}$$

更に、$l|_{\mathrm{Im}(\tau_\alpha)}\neq 0$ ならば、$m_\alpha, n_{-\alpha}$ は定数倍を除いて一意的に定まる。

以下、$[l]\in V(\mathcal{K})$ とする。このとき、$\mathcal{K}$ の定義より、図形

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(L^3)\otimes\Gamma(L^3)\otimes\Gamma(L^3) \arrow[r] \arrow[dr, "l\otimes l\otimes l"'] & \Gamma(L^9) \arrow[d, "x"] \\
 & k
\end{tikzcd}$$

を可換にする x が存在する。更に、α を $\hat{X}$ の

一般的な位置にとれば，次のような可換図形を得る。

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma(L^3)\otimes\{\Gamma(L\otimes P_\alpha)\otimes\Gamma(L^2\otimes P_{-\alpha})\}\otimes\{\Gamma(L\otimes P_{-\alpha})\otimes\Gamma(L^2\otimes P_\alpha)\} \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] \arrow[ddr, "\ell\otimes(n_\alpha\otimes m_{-\alpha})\otimes(n_{-\alpha}\otimes m_\alpha)"'] & & \Gamma(L\otimes P_\alpha)\otimes\Gamma(L\otimes P_{-\alpha})\otimes\Gamma(L^3)\otimes\Gamma(L^4) \arrow[d] \\
 & & \Gamma(L\otimes P_\alpha)\otimes\Gamma(L\otimes P_{-\alpha})\otimes\Gamma(L^7) \arrow[d] \\
 & \Gamma(L^3)\otimes\Gamma(L^3)\otimes\Gamma(L^3) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\ell\otimes\ell\otimes\ell"'] & \Gamma(L^9) \arrow[dl, "x"] \\
 & k &
\end{tikzcd}
$$

αのとり方より，$\ell|_{Im(\tau_\alpha)} \neq 0$ かつ $\ell|_{Im(\tau_{-\alpha})} \neq 0$ となることから，この図形より，次の図形を可換にする y_α, z_α が一意的に定まる。

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma(L^2\otimes P_\alpha)\otimes\Gamma(L^2\otimes P_{-\alpha}) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "m_\alpha\otimes m_{-\alpha}"'] & & \Gamma(L^4) \arrow[dl, "z_\alpha"] \\
 & k &
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
\Gamma(L^3)\otimes\Gamma(L^4) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "\ell\otimes z_\alpha"'] & & \Gamma(L^7) \arrow[dl, "y_\alpha"] \\
 & k &
\end{tikzcd}
$$

ここで，点 $[z_\alpha]$ は方程式 $Q^{(\alpha)}_{u_1,u_2,v_1,v_2}=0$ $(u_1,u_2\in\Gamma(L^2\otimes P_\alpha),$ $v_1,v_2\in\Gamma(L^2\otimes P_{-\alpha}))$ を満たすことを注意する。従って，一般的な位置にあるかってな $\alpha\in\hat{X}$ に対し，点 $[z_\alpha]$ が α に無関係な点 z を定めるならば，Mumfordの定理により，$z\in\Sigma_4(X)$ がわかり，更に，$[y_\alpha]$ も α に無関係な点 $y\in\mathbb{P}(\Gamma(L^7))$ を定め，命題3.1によ

り，$[\ell]\in\Psi_3(X)$ がわかる。従って，α,β を $\hat{X}$ の一般的な位置にある点として，$[z_\alpha]=[z_\beta]$ を示せばよい。ここで，$\Phi_L(x)\in\hat{X}_3$ となるような点 $x\in X$ をとれば，$T_x : X\longrightarrow X$ $(y\longmapsto y+x)$ は定数倍を除いて一意的に $\Gamma(L^3)$ の自己同型 U_x を定める。更に，これは自然に図形

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\Psi_3"] \arrow[d, "T_x"'] & \mathbb{P}(\Gamma(L^3)) \arrow[d, "\mathbb{P}(U_x)"] \\
X \arrow[r, hook, "\Psi_3"] & \mathbb{P}(\Gamma(L^3))
\end{tikzcd}$$

を可換にし，$\mathcal{K}=S^3(U_x)(\mathcal{K})$ がわかる。従って，補題 2.4 により，ℓ のかわりに適当な x に対し，$\ell\circ U_x$ を考えれば，ℓ は $\mathrm{Im}\big(\Gamma(L)\otimes\Gamma(L^2)\longrightarrow\Gamma(L^3)\big)$ 上 non-trivial であると仮定してよいことがわかる。ここで，可換な図形

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma(L^2\otimes P_{\xi})\otimes\Gamma(L\otimes P_{-\xi}) \arrow[dr] & \\
\Gamma(L)\otimes\Gamma(L\otimes P_{\xi})\otimes\Gamma(L\otimes P_{-\xi}) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \Gamma(L)\otimes\Gamma(L^2) \arrow[r] & \Gamma(L^3) \\
 & \Gamma(L\otimes P_{\xi})\otimes\Gamma(L^2\otimes P_{-\xi}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

を考えれば，一般的な位置にある点 $\alpha,\beta\in\hat{X}$ に対し，$\ell(\theta\theta^{(\alpha)}\theta^{(-\alpha)})=m_\alpha(\theta\theta^{(\alpha)})n_{-\alpha}(\theta^{(-\alpha)})=m_{-\alpha}(\theta\theta^{(-\alpha)})n_\alpha(\theta^{(\alpha)})\neq 0$ かつ，$\ell(\theta\theta^{(\beta)}\theta^{(-\beta)})=m_\beta(\theta\theta^{(\beta)})n_{-\beta}(\theta^{(-\beta)})=m_{-\beta}(\theta\theta^{(-\beta)})n_\beta(\theta^{(\beta)})\neq 0$ な

る元 $\theta \in \Gamma(L)$, $\theta^{(\alpha)} \in \Gamma(L \otimes P_\alpha)$, $\theta^{(-\alpha)} \in \Gamma(L \otimes P_{-\alpha})$, $\theta^{(\beta)} \in \Gamma(L \otimes P_\beta)$, $\theta^{(-\beta)} \in \Gamma(L \otimes P_{-\beta})$ が存在することがわかる。ω を $\Gamma(L^4)$ の任意の元すると、写像 $\Gamma(L^2 \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L^2 \otimes P_{-\alpha}) \twoheadrightarrow \Gamma(L^4)$, $\Gamma(L^2 \otimes P_\beta) \otimes \Gamma(L^2 \otimes P_{-\beta}) \twoheadrightarrow \Gamma(L^4)$ で ω に写ってされる元 $\sum_i u_i \otimes u_i' \in \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L^2 \otimes P_{-\alpha})$, $\sum_j v_j \otimes v_j' \in \Gamma(L^2 \otimes P_\beta) \otimes \Gamma(L^2 \otimes P_{-\beta})$ が存在する。ここで、

$$F = \theta\theta^{(\beta)}\theta^{(-\beta)} \odot \left\{ \sum_i (\theta^{(-\alpha)} u_i) \odot (\theta^{(\alpha)} u_i') \right\} - \theta\theta^{(\alpha)}\theta^{(-\alpha)} \odot \left\{ \sum_j (\theta^{(-\beta)} v_j) \odot (\theta^{(\beta)} v_j') \right\}$$

$\in S^3(\Gamma(L^3))$ とおくならば、F は $\mathcal{K}$ の元となる。従って、

$$\ell(\theta\theta^{(\beta)}\theta^{(-\beta)})\, \eta_{-\alpha}(\theta^{(-\alpha)})\, \eta_\alpha(\theta^{(\alpha)})\, z_\alpha(\omega) = \ell(\theta\theta^{(\alpha)}\theta^{(-\alpha)})\, \eta_{-\beta}(\theta^{(-\beta)})\, \eta_\beta(\theta^{(\beta)})\, z_\beta(\omega)$$

が成り立ち、$[z_\alpha] = [z_\beta]$ がわかる。以上の議論は、k-valued point のかわりに、$(k[x]/(x^2))$-valued point に対しても成り立つ。これで証明が完了した。

文献

[1] S. Koizumi, On the structure of the graded $\mathbb{C}$-algebra of theta functions, Proc. Japan Acad. 51, (1975), 1-5.

[2] S. Koizumi, Theta relations and projective normality of abelian varieties, Amer. J. Math., 98. (1975), 865-889.

[3] S. Koizumi, The rank theorem on matrices of theta functions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 24. (1977), 115-122.

[4] H. Morikawa, On the defining equations of abelian varieties, Nagoya Math. J., 30, (1967), 143–162.

[5] D. Mumford, Varieties defined by quadratic equations, Questioni sulle varieta algebriche, Corsi dal C.I.M.E., Edizioni Cremonese, Roma, (1969).

[6] D. Mumford, Abelian varieties, Tata Inst. Studies in Math., Oxford Univ. Press, London and New York, 1970.

[7] T. Sekiguchi, On projective normality of abelian varieties, J. Math. Soc. Japan, 28, (1976), 307–322.

[8] T. Sekiguchi, On projective normality of abelian varieties II, J. Math. Soc. Japan, 29, No. 4, (1977), 1–18.