代数幾何学シンポジウム記録
1977年度　pp.220-234

弱1完備多様体について

京大数理研　大沢健夫

Xをn次元複素多様体とし，$\pi: B \longrightarrow X$をX上の正則ベクトル束とする。XとBが与えられたとき、C^∞級(p,q)型B値∂閉形式の空間をC^∞級(p,q)型B値∂完全形式でわった空間を考え、それを$H^{p,q}(X, B)$と書く。Xがコンパクトでない場合、$H^{p,q}(X, B)$がどのような場合に有限次元ベクトル空間になるか調べることは興味深い問題である。筆者は中野によって予想されていた次の命題を証明した。'Xが弱1完備でBがXのあるコンパクト部分集合を除いて正であるような直線束ならば$q \geq 1$なるqに対し，$H^{n,q}(X, B)$は有限次元である。'

講演の目的は上の命題の証明の概要を述べることであった。

§1．記号

Xを連結でパラコンパクトなn次元複素多

様体，$\pi : B \longrightarrow X$ をX上の(正則)直線束とし，$\{U_i\}$を $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$ なるXの座標近傍による被覆とする。$\{U_i\}$に関するBの変換関数系を$\{e_{ij}\}$としたとき、X上のB値微分型式とはU_i上の微分型式の系$\{\varphi_i\}$であって$U_i \cap U_j$上で $\varphi_i = e_{ij}\varphi_j$ をみたすものをいう。我々は$C^{p,q}(X, B)$で(p, q)型のC^∞級B値微分型式の空間をあらわし、$C_0^{p,q}(X, B)$で台がコンパクトな$C^{p,q}(X, B)$の元全体をあらわすことにする。

Xのエルミート計量ds^2及び、Bのファイバーに沿うエルミート計量$\{a_i\}$が与えられたとき、$\varphi, \psi \in C^{p,q}(X, B)$に対して

$$a_i \varphi_i \wedge \overline{* \psi_i} = \langle \varphi, \psi \rangle dv$$

によって$\langle \varphi, \psi \rangle$を定義する。ただし$*$，$dv$はそれぞれ$ds^2$に関する星印作用素及び体積要素を示すものとする。このとき$\langle \varphi, \psi \rangle$は$i$によらず、従って$X$上の関数であり、とくに$\varphi = \psi$のとき $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ が成立する。等号は$\varphi = 0$のときに限る。

$C^{p,q}(X,B)$ から $C^{p,q+1}(X,B)$ への作用素 $\bar{\partial}$ を，$(\bar{\partial}\varphi)_i = \bar{\partial}\varphi_i$ で定義する。X 上の C^∞ 級実数値関数 Ψ に関し，$L^{p,q}(X,B,\Psi)$ を

$$\int_X \langle\varphi,\varphi\rangle e^{-\Psi} dv < \infty \qquad (1)$$

なる可測な (p,q) 型 B 値形式 φ の空間とする。(1)の左辺を $(\varphi,\varphi)_\Psi$ と書く。$(\varphi,\psi)_\Psi$ も同様に定義する。

一般に，二つのヒルベルト空間 H_1，H_2 及び稠密な定義域をもつ閉線型作用素 $T: H_1 \longrightarrow H_2$ に対し，T の定義域，値域，核をそれぞれ D_T，R_T，N_T で示し，T の共役作用素を T^* で示す。とくに，$H_1 = L^{p,q-1}(X,B,\Psi)$，$H_2 = L^{p,q}(X,B,\Psi)$ かつ T が $\bar{\partial}$ の閉拡張であるとき，$D_{\bar{\partial}} = D_{\bar{\partial}}^{p,q-1}$，$R_{\bar{\partial}} = R_{\bar{\partial}}^{p,q}$，$N_{\bar{\partial}} = N_{\bar{\partial}}^{p,q-1}$ と書く。$R_{\bar{\partial}}^{p,0}$ は 0 とする。$D_{\bar{\partial}^*}^{p,q}$，$R_{\bar{\partial}^*}^{p,q-1}$，$N_{\bar{\partial}^*}^{p,q}$ も同様に定義する。

定義 (1.1)

$$'H^{p,q}(X,B,\Psi) = N_{\bar{\partial}}^{p,q} / \overline{R_{\bar{\partial}}^{p,q}}$$

ただし $\overline{R_\delta^{p,q}}$ は $R_\delta^{p,q}$ の $L^{p,q}(X, B, \Psi)$ 内での閉包をあらわす。$L^{p,q}(X,B,0)$, ${}'H^{p,q}(X,B,0)$ を簡単に $L^{p,q}(X, B)$, ${}'H^{p,q}(X, B)$ で示す。

§2. 弱い意味の有限性定理

本節では弱1完備多様体 X と X 上の直線束 B で、あるコンパクト部分集合の外で正になるものに対し、X 上のエルミート計量 ds^2 と B のファイバーに沿う(エルミート)計量 $\{a_i\}$ を適当にえらべば $p+q>n$ なる p, q に対し、${}'H^{p,q}(X, B)$ が有限次元ベクトル空間になることを示す。

定義(2.1) 複素多様体 X が弱1完備であるとは、X 上の実数値 C^∞ 級関数 Ψ で次の二条件を満足するものが存在することとする。

1. (多重劣調和)、任意の点のまわりの局所座標 $(z_i^1, \dots, z_i^n)$ に関して
$$\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z_i^\alpha \partial \bar{z}_i^\beta}\right)_{1\leq\alpha,\beta\leq n} \geq 0$$
2. (汲み尽し)、任意の実数 c に対し

$$X_c = \{x;\ \Phi(x) < c\} \Subset X.$$

ただし $X_c \Subset X$ は X_c の X 内での閉包がコンパクトであることとする。1、2、の性質を持つ関数を（X の）汲み尽し関数と言うことにする。次の命題の証明は容易である。

命題（2．2）　X が弱1完備ならば X の任意のコンパクト部分集合 K に対して次のような汲み尽し関数 Φ が存在する，すなわち

$$\mathrm{Int}\{x;\ \Phi(x) = 0\} \Supset K$$

かつ

$\partial\{x;\ \Phi(x) = 0\}$ はなめらかな実 $2n-1$ 次元多様体。

ただし，$\mathrm{Int}\{\ \}$ は $\{\ \}$ の内点を示し，$\partial\{\ \}$ は $\{\ \}$ の X における境界を示すものとする。

定義（2．3）　直線束 $\pi: B \longrightarrow X$ が X の部分集合 Y 上で正であるとは，X の座標近傍による開被覆 $\{U_i\}$ と B のファイバーに沿う計量 $\{a_i\}$ で，各 $U_i \cap Y$ 内の点で

$$\left(\frac{\partial^2 \log a_i^{-1}}{\partial z_i^\alpha\, \partial \bar{z}_i^\beta}\right)_{1\le\alpha,\beta\le n} > 0$$

をみたすようなものが存在することとする。

以後、Xは常に弱1完備とし、$\pi: B \to X$はXのコンパクト部分集合Kの外で正であるとする。また、Xの汲み尽し関数Φで$K \subset\subset \mathrm{Int}\{x; \Phi(x)=0\}$、かつ$\partial\{x; \Phi(x)=0\}$がなめらかになるものを固定する。便宜上、$\mathrm{Int}\{x; \Phi(x)=0\}$を$X_0$と書くことにする。

補題（2、4）　$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$を有限個の可測で局所二乗可積分な$B$値形式とする。このとき$X$上のエルミート計量$ds^2$，$B$のファイバーに沿う計量$\{a_i\}$及び$X_0$のコンパクト部分集合$K_1$で次の1)，2)，3)をみたすものが存在する。

1)　ds^2は完備である。

2)　$X-K_1$上で

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \log a_i^{-1}}{\partial z_i^\alpha \partial \bar{z}_i^\beta}(dz_i^\alpha, d\bar{z}_i^\beta)$$

3)　$(\varphi_\iota, \varphi_\iota)_0 < \infty$，$1 \leq \iota \leq k$．

証明）　Bに対する仮定より，2)をみた

す ds_0^2, $\{a_i^0\}$, K_1 が存在する。そこで、正値単調増大凸関数 λ に対して

$$a_i = a_i^0 e^{-\lambda(\Psi)}$$

$X-K_1$ 上で

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \log a_i^{-1}}{\partial z_i^\alpha \partial \bar{z}_i^\beta}(dz_i^\alpha, d\bar{z}_i^\beta)$$

K_1 上で

$$ds^2 = ds_0^2$$

とおく。[4]と同様にして λ を適当にとれば ds^2, $\{a_i\}$, K_1 が 1), 2), 3) をみたすことがいえる。 q. e. d.

定理 (2、5)　ds^2, $\{a_i\}$, K_1 が補題(2、4)の条件 1), 2) をみたすとき $p+q>n$ なら

(a)　$R_\partial^{p,q}$ は閉.

(b)　$\dim_{\mathbb{C}} {}'H^{p,q}(X, B) < \infty$.

略証)　我々は次の補題([1], 定理1.1.3)を用いる。

補題 (2、6)　H_i, $i=1, 2, 3$ を三つのヒルベルト空間とし、$T: H_1 \longrightarrow H_2$

及び $S : H_2 \longrightarrow H_3$ を稠密な定義域をもつ閉線型作用素で $ST=0$ をみたすものとする。このとき次の条件をみたす任意の列 $\{\varphi_\nu\}$ が収束部分列をもつならば R_T は閉であり N_S / R_T は有限次元ベクトル空間になる。

$\varphi_\nu \in H_2 \cap D_S \cap D_{T^*}$,

$\|\varphi_\nu\|_{H_2} \leq 1$,

$\lim_{\nu\to\infty} \|S\varphi_\nu\|_{H_3} = 0$,

$\lim_{\nu\to\infty} \|T^*\varphi_\nu\|_{H_1} = 0$.

この補題をあてはめるには次の評価式が成り立つことを使う。すなわち $p+q>n$ ならば $D_{\bar\partial}^{p,q} \cap D_{\bar\partial^*}^{p,q}$ 内の任意の φ に対し

$$\int_{X-K_2} \langle\varphi,\varphi\rangle dv \leq C\left\{\|\bar\partial\varphi\|^2 + \|\bar\partial^*\varphi\|^2 + \int_{K_2}\langle\varphi,\varphi\rangle dv\right\}$$

ただし C は定数であり、$K_2 \subset\subset X_0$ とする。

§3、 基本不等式

以後、ds^2 と $\{a_i\}$ は補題(2、4) の条件 1), 2) をみたすものとする。記号を用意しよう。

$\varphi, \psi \in L^{p,q}(X, B, \nu\Phi)$ に対して,

$$(\varphi, \psi)_\nu = (\varphi, \psi)_{\nu\Phi}\ , \text{及び}$$

$$\|\varphi\|_\nu = (\varphi, \varphi)_\nu^{\frac{1}{2}}$$

とおく。(νは0以上の自然数)。$(\ ,\ )_\nu$ に関する $\bar\partial$ の形式的共役を ϑ_ν と書き,

$$\Box_\nu = \bar\partial\vartheta_\nu + \vartheta_\nu\bar\partial$$

とおく。ds^2 が完備だから ϑ_ν の閉拡張は $\bar\partial$ の共役に等しい。([5], 定理1.1) 微分幾何のよく知られた公式を次の形で用いる。

補題(3.1) $X - K_1$ 上で,

$$\Box_\nu - *^{-1}\Box_\nu * = e(\chi_\nu)\wedge - \wedge e(\chi_\nu)$$

ただし, $\chi_\nu = L + \nu\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\Phi$.

補題(3.1)を用いることにより次の基本不等式を得る。(c.f. [3])

補題(3.2) ある定数 C とコンパクト集合 K_2 で $K_1 \Subset K_2 \Subset X_0$ をみたすものがあって,

a) $\varphi \in D_{\bar\partial}^{p,q} \cap D_{\vartheta_0}^{p,q}$, $p+q \geq n$

ならば,

$$\int_{X-K_2}\langle\varphi,\varphi\rangle dv$$

$$\leq C\left(\|\bar\partial\varphi\|^2+\|\vartheta_0\varphi\|^2+\int_{K_2}\langle\varphi,\varphi\rangle dv\right)$$

b) 自然数 ν に対し，$\varphi\in D_{\bar\partial}^{n,q}\cap D_{\vartheta_\nu}^{n,q}$，$q\geq 1$ ならば，

$$\int_{X-K_2}\langle\varphi,\varphi\rangle e^{\nu\Psi}dv$$

$$\leq C\left(\|\bar\partial\varphi\|_\nu^2+\|\vartheta_\nu\varphi\|_\nu^2+\int_{K_2}\langle\varphi,\varphi\rangle dv\right).$$

§4. 主定理の証明

ds^2，$\{a_i\}$ は §3 の通りとし、これらを X_0 に制限することにより $L^{p,q}(X_0, B)$ を定義する。$\bar\partial$ を $L^{p,q-1}(X_0, B)$ から $L^{p,q}(X_0, B)$ への作用素とみたときの共役を $\bar\partial^*$ とし，

$$\mathcal{H}^{p,q}(X_0,B)=\left\{\psi\ ;\ \psi\in L^{p,q}(X_0,B),\ \bar\partial\psi=\bar\partial^*\psi=0\right\}$$

とおく。

命題(4. 1) 自然数 ν_0 及び定数 C_0

が存在して，$\nu \geq \nu_0$ なる自然数 ν に対し，

$$\|\varphi\|_\nu^2 \leq C_0\left(\|\bar\partial\varphi\|_\nu^2 + \|\vartheta_\nu\varphi\|_\nu^2\right)$$

ただし，$\varphi \in D_{\bar\partial}^{n,q} \cap D_{\vartheta_\nu}^{n,q}$，$q \geq 1$，かつ $h \in \mathcal{H}^{n,q}(X_0, B)$ なる任意の h に対し

$$\int_{X_0} \langle \varphi, h \rangle dv = 0$$ なるものとする。

定義（4．2）　可測かつ任意のコンパクト集合上で可積分なB値(p,q)形式の空間を $L_{loc}^{p,q}(X, B)$ とし，

$$H_{loc}^{p,q}(X, B) = \{f ; f \in L_{loc}^{p,q}(X, B), \bar\partial f = 0\} \Big/ L_{loc}^{p,q}(X, B) \cap \{\bar\partial f ; f \in L_{loc}^{p,q-1}(X, B)\}$$

とおく．

ドルボーの定理より，自然な同型

$$H^{p,q}(X, B) \xrightarrow{\sim} H_{loc}^{p,q}(X, B)$$

が存在する。命題(4．1)により次のことがいえる。

命題（4．3）　$q \geq 1$ ならば，自然な準同型

$$\rho \ : \ H_{loc}^{n,q}(X, B) \longrightarrow {}'H^{n,q}(X_0, B)$$

は単射である。

定理（4、4）　$q \geq 1$ ならば

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{n,q}(X, B) < \infty$$

証明）　次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
H_{loc}^{n,q}(X, B) \arrow[drr, "\rho"] & & \\
H^{n,q}(X, B) \arrow[u, "\xi", "\wr"'] \arrow[rr, "\rho'"] \arrow[d, "r"] & & {}'H^{n,q}(X_0, B|_{X_0}) \\
{}'H^{n,q}(X_c, B|_{X_c}) \arrow[urr, "r'"'] & &
\end{tikzcd}$$

ただし、写像 ρ, ρ', r', r は制限写像によりみちびかれるものとし，c は正数，かつ，${}'H^{n,q}(X_c, B)$ を定義する X_c 上の計量 $d\sigma^2$ 及び $B|_{X_c}$（B の X_c 上への制限）のファイバーに沿う計量 $\{h_i\}$ は補題（2、4）の 1)，2) をみたし，$C^\infty(\overline{X_c})$ 加群としての $C^{p,q}(\overline{X_c}, B)$ の生成元（有限個！）に対して（2、4）の 3) をみた

すようにとる。($C^\infty(\overline{X}_c)$は境界でもなめらかな関数全体。$C^{p,q}(\overline{X}_c, B)$も同様)。
よってρが単射だからρ'も単射、従ってγも単射である。$'H^{n,q}(X_c, B)$は有限次元だから$H^{n,q}(X, B)$も有限次元である。q.e.d.

定理(4.5)　$\psi \in L^{n,q}(X_0, B)$かつ$\bar{\partial}\psi = 0$ならば、任意の正数εに対し、$\bar{\partial}\varphi = 0$なる$\varphi \in L^{n,q}_{loc}(X, B)$で

$$\int_{X_0} \langle \varphi - \psi, \varphi - \psi \rangle dv < \varepsilon$$

なるものが存在する。

定理(4.6)　自然な準同型

$$\rho_d : H^{n,q}(X, B) \longrightarrow H^{n,q}(X_d, B)$$

は同型である。ただし$q \geq 1$かつ$d > 0$.

証明)　次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd} H^{n,q}(X, B) \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "\rho_d"] & 'H^{n,q}(X_0, B|X_0) \\ H^{n,q}(X_d, B|X_d) \arrow[ur, "\rho''"] & \end{tikzcd}$$

定理(4、5)より $\mathrm{Im}\,\rho'$ は $\mathrm{Im}\,\rho''$ 内で稠密であるが、$H^{n,q}(X_d, B|X_d)$ は有限次元だから $\mathrm{Im}\,\rho' = \mathrm{Im}\,\rho''$. ρ_d は単射だからこれは ρ_d が全射であることを意味する。よって ρ_d は同型である。 q.e.d.

§5 応用

定理(5、1) 弱1完備多様体 X がコンパクト部分集合の補集合で正な直線束 $\pi : B \longrightarrow X$ をもつならば、任意の $c>0$ に対して自然数 N 及び有理型写像

$$\tau : X_c \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

で、X_c に真に含まれるあるコンパクト解析的集合 A をとれば

$$\tau|_{X_c - A} : X_c - A \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

が中へのうめこみであるようなものが存在する。

証明) 小平のうめこみ定理と同様.([2])

他に所謂 'contraction problem' への応用などがあるが割愛する。 以上。

文献

[1] Hörmander, L.
L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator. Acta Math. 113, 89-152 (1965)

[2] Kodaira, K.
On kähler varieties of restricted type. Ann. Math. 60, 28-48 (1954)

[3] Nakano, S.
On the inverse of monoidal transformation. Publ. RIMS Kyoto Univ. 6, 483-502 (1970/71)

[4] ————
Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds, II. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10, 101-110 (1974)

[5] Vesentini, E.
Lectures on Levi convexity of complex manifolds and cohomology vanishing theorems, Tata Inst. (1967)