代数幾何学シンポジウム記録
1977年度 pp.198-206

On infinitely extendable vector bundles on G/P

九大教養 佐藤栄一

n 次元射影空間上のベクトル束が'infinitely extendable'なる性質をもつ時，それは直線束の直和であることが知られている。((2) (3))．今 G を $SL(n, C)$, $O(2n+1, C)$, $Sp(2n, C)$ 又は $O(2n, C)$ とし，P を G の maximal parabolic subgroup とする。G/P 上のベクトル束が'infinitely extendable'(定義 1.5)の時，homogeneous であることを示す(定理3.11)

§1. まず complete homogeneous variety G/P とそれらの間のうめ込み写像について記号を定義する．

$$\overline{P}_{u,v} \overset{\text{定義}}{=} \left\{ (m_{ij})_{1\le i,j\le u+1} \in GL(u+1, C) \;\middle|\; m_{ij} = 0 \quad \begin{matrix} v+1 \le i \le u+1 \\ 1 \le j \le v \end{matrix} \right\}$$

イ) A型： $G_n(A) = SL(n+1, C)$, $P_{n,d}(A) = G_n(A) \cap \overline{P}_{n,d}$, $X_{n,d}(A) = G_n(A)/P_{n,d+1}(A)$ とおく。(これはグラスマン多様体)．$j_n(A): G_n(A) \hookrightarrow G_{n+1}(A)$ を次のように定義する； $j_n(A)(M) = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$。その時うめ込み $i_{n,d}(A): X_{n,d}(A) \hookrightarrow X_{n+1,d}(A)$ が定義される。(これを A に関するタイプIの写像と呼ぶ)

ロ) B型． $G_n(B) = SO(2n+1, C) = \{ M \in SL(2n+1, C) \mid {}^tMJM = J \}$

但し $J = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$, $P_{n,d}(B) = \overline{P}_{2n,d} \cap G_n(B)$, $X_{n,d}(B) = G_n(B)/P_{n,d+1}(B)$ とおく。

$J_n(B): G_n(B) \hookrightarrow G_{n+1}(B)$ を次のように約束する

$$J_n(B)\left[\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & A_2 \\ \hline C_2 & D & C_4 \\ \hline A_3 & C_3 & A_4 \end{array}\right)\right] = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & 0 & C_1 & 0 & A_2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_2 & 0 & D & 0 & C_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline A_3 & 0 & C_3 & 0 & A_4 \end{array}\right)$$

(但し $A_i \in M(n.C)$, $C_1, C_3 \in M(n,1,C)$, $C_2, C_4 \in M(1,n,C)$, $D \in M(1.C)$)

その時うめ込み $i_n(B)$; $X_{n.d}(B) \hookrightarrow X_{n+1.d}(B)$ が定義される(これをBに関するタイプIの写像とよぶ)

ハ) C型: $G_n(C) = Sp(2n.C) = \{ M \in GL(2n.C) \mid ML^tM = L \}$

(但し $L = (t_{ij})_{1 \le i,j \le 2n}$ は $1 \le i \le n$ に対し $t_{i,2n-i} = 1$, $n+1 \le i \le 2n$ に対し, $t_{i,2n-i} = -1$, 他は0), $P_{n.d}(C) = \overline{P}_{2n-1.d} \cap G_n(C)$,

$X_{n.d}(C) = G_n(C)/P_{n.d+1}(C)$ とおく。$J_n(C): G_n(C) \hookrightarrow G_{n+1}(C)$ を

$$j_n(C)\left(\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & 0 & A_2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline A_3 & 0 & 0 & A_4 \end{array}\right)$$

とする。($A_i \in M(n.C)$). これよりうめ込み $i_{n.d}(C): X_{n.d}(C) \hookrightarrow X_{n+1,d}(C)$ が定義される。(Cに関するタイプIの写像という)

ニ) D型; $G_n(D) = SO(2n.C) = \{ M \in SL(2n.C) \mid ML^tM = L \}$

($L = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$) とすると, $P_{n.d}(D)$, $j_n(D)$ $X_{n.d}(D)$, $i_{n.d}(D)$ はC型と同様に定義できる。

注意 1.1. 今 $*$ (= A, B, C, D) に対し $G_n(*)$ の中で対角行列全体の集合を $H_n(*)$, 上半三角行列全体の集合を $B_n(*)$ とおくとき, それらは, maximal torus, Borel subgroup になる。$H_n(*)$ に関するルート系 Δ を固定し, Δ_+ を $B_n(*)$ に関する正ルートの集合とし, Π を単純ルート

の集合とする（ $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ ）（ $G_n(*)$, $P_n(*)$, $B_n(*)$, $H_n(*)$ をしばしば $*$ を省略して使う）

<u>命題 1.2</u>　$X_{n.d}(*)$ の Picard group は $\mathbb{Z}$ に同型。
（その generator で ample line bundle を $\mathcal{O}_{X_{n.d}(*)}(1)$ と書く）

次に $P_{n.d.d-1}(*) = P_{n.d}(*) \cap P_{n.d-1}(*)$ とし，$X_{n.d.d-1}(*) = G_n(*)/P_{n.d+1,d}(*)$ とする。この時 次の図式がある。

$$
(1-3) \qquad
\begin{tikzcd}
 & X_{n.d.d-1}(*) \arrow[dl, "p_{n.d}(*)"'] \arrow[dr, "q_{n.d-1}(*)"] & \\
X_{n.d}(*) & & X_{n.d-1}(*)
\end{tikzcd}
$$

<u>命題 1.4</u>　x, y を $X_{n.d}(*)$, $X_{n.d-1}(*)$ の closed point とする。

$*$	$p_{n.d}(*)$ の fiber($=F_1$)	$q_{n.d-1}(*)\mathcal{O}_{X_{n.d-1}(*)}(1)\|_{F_1}$	$q_{n.d-1}(*)$ の fiber($=F_2$)	$p_{n.d}(*)\mathcal{O}_{X_{n.d}(*)}(1)\|_{F_2}$
A	P^d (d次元射影空間)	$\mathcal{O}_{P^d}(1)$	P^{n-d}	$\mathcal{O}_{P^{n-d}}(1)$
B	P^d	$\mathcal{O}_{P^d}(1)$	$P^{2(n-d)}$ の二次曲面(S)	$\mathcal{O}_S(1)$
C	P^d	$\mathcal{O}_{P^d}(1)$	$P^{2(n-d)-1}$	$\mathcal{O}_{P^{2(n-d)-1}}(1)$
D	P^d	$\mathcal{O}_{P^d}(1)$	$P^{2(n-d)+1}$ の二次曲面(S)	$\mathcal{O}_S(1)$

但し $\mathcal{O}_{P^d}(1)$ は P^d の超平面に対応する直線束とする。S を P^m の二次曲面とする時 $\mathcal{O}_S(1)$ は S の hyperplane section に対応する直線束とする。

<u>定義 1.5</u>　$*$ ($=A, B, C, D$) に対し E を $X_{n.d}(*)$ 上のベクトル束とする。n以上の任意の整数 m に対し，$X_{m.d}(*)$ 上のベクトル束 E_m ($E_n = E$) とタイプⅠの写像 $i_{m.d}(*) : X_{m.d}(*) \hookrightarrow X_{m+1.d}(*)$ があって $i_{m.d}(*)^* E_{m+1} \cong E_m$ のとき E を'タイプ<u>Ⅰ</u>の <u>i</u>nfinitely <u>e</u>xtendable'という（'IE-Ⅰ'と略記する。）

注) イ) $*=A$ で $d=0$ のとき ($X_{n,0}(A)\cong P^n$) infinitely extendable の定義はすでにされているが ((2)を見よ) 上の定義は、それよりも強い。

ロ) $X_{n,d}(*)$ 間に'タイプIIの写像'が定義され、IE-II ベクトル束が定義されるがここでは触れない。

§ 2 IE-I ベクトル束の性質

<u>定理 2.1</u> . $X_\infty(\subset P_\infty)$ を非特異 infinitely extendable variety とし E を X_∞ 上のベクトル束とする。その時 E は直線束の直和である。
([2] [3])

<u>命題 2.2</u> S を P^n の二次曲面とする。その時 $H^i(P^n, \mathbb{Z})\simeq H^i(S, \mathbb{Z})$ $(i=0,\cdots,n-2)$. さらに $n\geqq 4$ なら $\mathrm{Pic}\,S\cong\mathbb{Z}$.

<u>命題 2.3</u> $*$ を A か C とし、E を $X_{n,d}(*)$ 上の IE-I ベクトル束とする。その時 $X_{n,d-1}(*)$ のすべての点 y に対し $p_{n,d}(*)^*E|_{q_{n,d-1}(*)^{-1}(y)}\cong\bigoplus_{i=1}^{\alpha}\mathcal{O}_{P^{n(*)}}(a_i)^{\oplus r_i}$ ($a_1>a_2>\cdots>a_\alpha$, $r_i>0$), $n(A)=n-d$, $n(C)=2(n-d)-1$. さらに $a_1,\cdots,a_\alpha$, $r_1,\cdots,r_\alpha$ は y に無関係に定まる。 ($p_{n,d}$, $q_{n,d}$ は図式 1-3 を見よ)

(証) 定理 2.1 を使って示される。

さらに定理 2.1 と命題 2.3 を使うと

<u>命題 2.4</u> $*$ を B か D とし、E を $X_{n,d}(*)$ 上の IE-I ベクトル束とする。その時 $X_{n,d-1}(*)$ のすべての点 y に対し、 $p_{n,d}(*)^*E|_{q_{n,d-1}(*)^{-1}(y)}\cong\bigoplus_{i=1}^{\alpha}\mathcal{O}_S(a_i)^{\oplus r_i}$

$(a_1 > \cdots > a_\alpha,\ r_i > 0,\ )$ さらに $a_1, \cdots, a_\alpha,\ r_1, \cdots r_\alpha$ は y に無関係に定まる。

注意） $m \geq n$ なる E_m に対し 命題 2.3, 2.4 に対応する結果が得られ，その $a_1, \cdots, a_\alpha,\ r_1, \cdots, r_\alpha$ は m に無関係に定まる。

以後 A, B, C, D に対して共通の性質をのべるので $*$ を省略し $X_{n.d}$, $P_{n.d}$, $q_{n.d-1}$ と表わす。

命題 2.3, 2.4 より $p_{n.d}^*(E \otimes \mathcal{O}_{X_{n.d}}(-a_1))|_{q_{n.d-1}^{-1}(y)} \cong \mathcal{O}_{q_{n.d-1}^{-1}(y)}^{\oplus r_1} \oplus \left(\bigoplus_{i \geq 2} \mathcal{O}_{q_{n.d-1}^{-1}(y)}(a_i - a_1)\right)^{\oplus r_i}$ となる。ここで $p_{n.d}^*(E \otimes \mathcal{O}_{X_{n.d}}(-a_1))$ に対して $q_{n.d-1}^*$ に関する base change theorem を使って次の定理をえる。

<u>定理 2.5</u> E を $X_{n.d}$ 上の IE-I ベクトル束とする。その時，$X_{n.d-1}$ 上のベクトル束 $E_1, E_2, \cdots, E_\alpha$ があって次の完全列を満す

$$0 \longrightarrow q^*E_1\, p^*\mathcal{O}(a_1) \longrightarrow p^*E \longrightarrow F_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow q^*E_2\, p^*\mathcal{O}(a_2) \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$0 \longrightarrow q^*E_{\alpha-1}\, p^*\mathcal{O}(a_{\alpha-1}) \longrightarrow F_{\alpha-1} \longrightarrow q^*E_\alpha\, p^*\mathcal{O}(a_\alpha) \to 0$$

ここで $F_2, \cdots, F_{\alpha-1}$ は $X_{n.d,d-1}$ 上ベクトル束，$\mathcal{O}(a) = \mathcal{O}_{X_{n.d}}(1)^{\otimes a}$

$p = p_{n.d}$ $q = q_{n.d-1}$ ($a_1, \cdots, a_\alpha$ は命題 2.3, 2.4 の意味である)

さらに $E_1, E_2, \cdots, E_\alpha$ は $X_{n.d-1}$ 上 IE-I ベクトル束である。

§3 定理の証明

§1で定義された G, P, B, H に対応するリー代数を $\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h}$ で表わす。以下でてくる記号 $(\ ,\ )$, $\bigcirc^0$, $\Delta(\ )$ 等は Kostant の論文 (1) の §5 を参照せよ。

今 Z を $\mathfrak{h}$ 上の整形式の集合とするなら, $\mu \in Z$ である必要十分条件は Δ の任意の root ϕ に対し, $2(\mu,\phi)/(\phi,\phi) \in \mathbb{Z}$ なることである。(Δ の代りに π で置きかえてもよいことは知られている)。そこで $\mu\,(\in Z)$ に対し $\left(2(\mu,\alpha_1)/(\alpha_1,\alpha_1), \cdots, 2(\mu,\alpha_i)/(\alpha_i,\alpha_i), \cdots 2(\mu,\alpha_n)/(\alpha_n,\alpha_n) \right)$ を対応させる $(=\sigma$ とおく)

<u>命題 3.1</u> $\quad D_1 \underset{\sigma}{\cong} N_0^{d-1} \times \mathbb{Z} \times N_0^{n-d}$

($N_0 = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \}$, $\quad D_1 = \{ \mu \in Z \mid (\mu,\phi) \geq 0,\ \forall \phi \in \Delta(\mathfrak{m}_1)$

但し $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{b}^0$, $\mathfrak{g}_1$ は $\mathfrak{p}$ の reductive part)

<u>注意 3.2</u> イ) $G_n(B)$, $G_n(D)$ は単連結でないので, $G_n(*)$ の単連結被覆 $\overline{G_n(*)}$ を考え, この上で議論する。

ロ) 命題 3.1 より D_1 の元は $X_{n,d}$ 上の既約 homogeneous ベクトル束と一対一対応なので ([1] の §5 を見よ), $c_{i-1} = 2(\mu,\alpha_i)/(\alpha_i,\alpha_i)$ とおいて, $(c_0, \cdots, c_{n-1})$ に対応するベクトル束を $P_n(d\,;\, c_0, \cdots, c_{n-1})$ とかく。

これから $X_{n,d}$ 上の homogeneous ベクトル束が $P_n(d\,;\, c_0, \cdots, c_d, 0 \cdots 0)$ の直和の形で表わされる条件を調べる。($P_n(d\,;\, c_0, \cdots, c_d, 0, \cdots, 0)$ は

7

IE-I ベクトル束である。)

命題 3.3　E を $X_{n,d}$ 上の階数 r の既約な homogeneous ベクトル束とし，$n-d>r$ と仮定する。そのとき $E \cong P_n(d; c_0, \cdots, c_d, 0, \cdots 0)$.

(証明) リー群 P の既約表現を対応するリー環 $\mathfrak{p}$ の表現で考える (下の注意を参照せよ)

注意 3.4　$\mathfrak{g}$ を単純リー環とする ($sl(n+1)$, $O(2n+1)$, $Sp(2n)$, $O(2n)$)　ϕ を $\mathfrak{g} \longrightarrow gl(V)$ の表現とする。$\dim V < n$ と仮定するなら ϕ は trivial である。

命題 3.5　E を $X_{n,d}$ 上の階数 r の homogeneous ベクトル束とする。$n-d>r$ と仮定する。その時 E は $P_n(d; c_0 \cdots, c_d, 0 \cdots 0)$ 型のベクトル束の直和である。

命題 3.6　$E_i = P_n(d; c_0^i, \cdots, c_d^i, 0, \cdots, 0)$ とする。その時 $E_1 \otimes E_2$ $(E_1 \otimes \check{E}_2)$ は $P_n(d; b_0, \cdots, b_d, 0, \cdots, 0)$ 型のベクトル束の直和である。

次に $P_n(d; c_0, \cdots, c_d, 0, \cdots 0)$ を別の視点から調べる。

今 $(d+1)$ 個の整数 $a_0, \cdots, a_d$ (但し $a_i \geq 0$ for $0 \leq i \leq d-1$) に対して $X_{n,d}$ 上の coherent sheaf $P_n(a_0, \cdots, a_d)$ を帰納的に定義する。(図式 3-1). $d=0$ に対して $P_n(a_0) = \mathcal{O}_{X_{n,d}}(a_0)$ とおく。もし $P_n(a_0, \cdots, a_j)$ $(0 \leq j \leq d-1)$ が定義されれば，$P_n(a_0, \cdots, a_j)$ $= P_{j*} q_{j-1}^* P_d(c_0, \cdots, c_{j-1}) \otimes \mathcal{O}_{X_{n,j}}(c_j)$ とおく。その時次の重要な結果をえる。

定理 3.7. $P_n(d; c_0, \cdots, c_d, 0, \cdots 0) \simeq P_n(c_0, \cdots, c_d)$

（証明）$X_{n,d,d-1}$ 上の homogeneous ベクトル束の完全列；

$$0 \to F \to p_{n,d}^{*} P_n(d, c_0, \cdots, c_{d-1}, 0 \cdots 0) \to q^{*}_{-1} P_n(d-1, c_0, \cdots, c_{d-1}, 0 \cdots 0) \to 0$$

を示し，direct image $R^i p_{d*}$ をとることにより示される。

命題 3.8 $d \leq n-2$ なら $H^1(X_{n,d}, P_n(d; c_0, \cdots, c_d, 0, \cdots, 0)) = 0$ であり，$c_{n-1} \geqq 0$ なら $H^1(X_{n,}, P_n(n-1, c_0, \cdots, c_{n-1})) = 0$。

（証明）Bott の定理より明らか。

さらに 2つの命題を示すと主定理が示される。

命題 3.9 E を次の完全列をみたす $X_{n,d}$ 上のベクトル束とする；

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i P_n(d, a_0^i, \cdots, a_d^i, 0 \cdots 0) \to E \to \bigoplus_j P_n(d; b_0^j, \cdots, b_d^j, 0 \cdots 0) \to 0。$$

その時 $E \cong \bigoplus_i P_n(d; a_0^i, \cdots, a_d^i, 0, \cdots 0) \oplus (\bigoplus_j P_n(d; b_0^j, \cdots, b_d^j, 0, \cdots 0))$

命題 3.10 E を $X_{n,d}$ のベクトル束とし $E \otimes (\bigoplus_j P_n(d, a_0^i, \cdots a_d^i, 0, \cdots 0)) \cong \bigoplus_j P_n(d; b_0^j, \cdots, b_d^j, 0, \cdots 0)$ とする。そのとき E は $P_n(d; c_0, \cdots, c_d, 0 \cdots 0)$ 型の直和である。

（証明）命題 3.6 と Krull-Schmidt Theorem より明らか

主定理 3.11. E を $X_{n,d}$ 上の I E-I ベクトル束とする。その時 E は $\bigoplus_i P_n(d; c_0^i, \cdots, c_d^i, 0, \cdots 0)$ である。

（証明）d に関する帰納法を用いる。定理 2.1, 2.5, 3.7 と命題 3.9, 3.10 を用いると容易。

Reference

1. B. Kostant, Lie algebra cohomology and the generalized Borel–Weil Theorem Ann of Math. Vol. 74, No. 2 (1961

2. E. Sato The decomposability of an infinitely extendable vector bundle on the projective spaces and Grassmann varieties J. Math. Kyoto Univ Vol. 17, No. 1, 1977

3. Tjurin, Vector bundles of finite rank over infinite varieties Izvestija Akad. Nauk, Ser. Matem. 40 (1976) pp. 1248–1268,