代数幾何学シンポジウム記録
1977年度　pp.158-168

中間次元サイクルに伴う abelian variety

名大・理　斉藤　博

以下では，kは断わらない限り任意標数の代数閉体を，varietyは，k上定義された，non-singular projective varietyを，各々意味する。Variety X の codimension p の cycles のつくる Chow group を $CH^p(X)$ その中で，零と代数的同値な cycles のつくる subgroup を $A^p(X)$ で表わす。Lieberman は，次のような"intermediate Jacobian の公理"を導入した：

各 variety X と各 p $(1 \le p \le \dim X)$ に対して，

(i) $A^p(X)$ の subgroup $K^p(X)$

(ii) abelian variety $J^p(X)$

が対応し，これについて，

(iii) $J^p(X)$ は，$p = \dim X$ の時，X の Albanese variety であり，$p=1$ の時，X の Picard variety と一致，

(iv) 群の同型 $A^p(X)/K^p(X) \xrightarrow{\sim} J^p(X)$ が存在，

(v) 次の意味で functorial：任意の varieties X, Y と，$Z \in CH^{p+q}(X \times Y)$ に対し，abelian variety homomorphism

?

$$[z]: J^{m-q}(X) \longrightarrow J^p(Y) \qquad (m = \dim X)$$

が定まり

$$\begin{tikzcd} A^{m-q}(X) \arrow[r, "z(?)"] \arrow[d] & A^p(Y) \arrow[d] \\ J^{m-q}(X) \arrow[r, "{[z]}"] & J^p(Y) \end{tikzcd}$$

が可換となる。縦の maps は, (iv) の同型から定まるもの, 上の横の矢は, $A^{m-q}(X) \ni x \mapsto \pi_Y(x \times Y \cdot Z) \in A^p(Y)$ ($\pi_Y : X \times Y \to Y$ は射影)。この時 $J^p(X)$ (及び $K^p(X)$) は intermediate Jacobien の理論を定めるという。

彼は, 更に $k = \mathbb{C}$ のとき Weil (or Griffiths) intermediate Jacobian $T^p(X)$ ($\cong H^{2p-1}(X; \mathbb{R})/H^{2p-1}(X, \mathbb{Z})$: real torus として) から次の様にして intermediate Jacobian の理論をつくれることを示した。Weil homomorphism

$$w: \{\text{cycles of codim. } p, \text{ homologically equivalent to zero}\} \longrightarrow T^p(X)$$

が "積分" により定まるが, この image は $T^p(X)$ の abelian subvariety $J_a^p(X)$ となる ($T^p(X)$ が Griffiths intermediate Jacobian でも)。w の制限により $v: A^p(X) \longrightarrow J_a^p(X)$ を定義し, この kernel を $K^p(X)$ とすれば, (i) ～(v) を充す (, というより, 上の公理はこの一般化)。

Picard variety の dual は Albanese variety であり, さ

らに $(J^p(X))^\wedge \cong J^{n-p+1}(X)$ が, $k=\mathbb{C}$ の時に成立する。これより $J^p(X)$ について duality $(J^p(X))^\wedge \cong J^{n-p+1}(X)$ が成立するか、が問題となる。Lieberman は Grothendieck の idea に基づいて $k=\mathbb{C}$ の時に, $J^p_a(X)$ を使って duality が up to isogeny で成立する理論がつくれること, 一般の k に対しても同様の性質をもつ abelian variety が isogeny class の意味で定まることを示した。その方法をよく見ることにより一般の k に対して, duality が up to isogeny で成立する intermediate Jacobian の理論があることがいえる。さらに, それに対して (v) より定まる

$$B : CH^{p+q}(X\times Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(J^{m-q}(X), J^p(Y))$$

について, $B\otimes\mathbb{Q}$ は surjection である。

X, T を varieties として map $f: T\to CH^p(X)$ は, $z\in CH^p(T\times X)$ があり, $f: T\ni t\longmapsto z(t)\in CH^p(X)$ と書ける時 algebraic family という。特に一点 $t_0\in T$ で $f(t_0)=0$ ならば $f: T\to A^p(X)\subset CH^p(X)$ と考えられる。一般の algebraic family f の代りに, $f-f(t_0)$ を考えれば, 値は $A^p(X)$ にあるとしてよい。

A を abelian variety として, group homomorphism $h: A^p(X)\to A$ は, 任意の algebraic family $f: T\to A^p(X)$ に対して,

$$h \circ f : T \longrightarrow A^p(X) \longrightarrow A$$

が，morphism of varieties である時，regular であると言われる。

<u>例</u> $p=1$：$\mathbb{P}$ を X の Picard variety とし $\mathcal{P} \in CH^1(\mathbb{P} \times X)$ を Poincaré divisor とすると，

$$\mathbb{P} \ni x \longmapsto \mathcal{P}((x)-(0)) \in A^1(X)$$

は，同型でその逆写像 $\theta^{(1)} : A^1(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}$ は regular であり，任意の abelian variety A に対して，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{abl}}(\mathbb{P}, A) & \longrightarrow & \{\text{regular homomorphisms } A^1(X) \to A\} \\ \Psi & & \Psi \\ f & \longmapsto & f \circ \theta^{(1)} \end{array}$$

は bijection。

$p = \dim X = m$：$\theta^{(m)} : A^m(X) \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$ を自然な homomorphism とする。これは regular homomorphism である。任意の abelian variety A に対して，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathrm{Alb}(X), A) & \longrightarrow & \{\text{regular homomorphisms } A^m(X) \to A\} \\ \Psi & & \\ f & \longmapsto & f \circ \theta^{(m)} \end{array}$$

は bijective. $m=2$ の時，$k=\mathbb{C}$，$p_g > 0$ ならば，$\theta^{(m)}$ は同型ではなく，kernel が大きいことが，又 $p_g = 0$ で X が general type でないならば，$\theta^{(m)}$ は同型であることが知られている。

regular homomorphisms全体より小さいclassのhomomorphismsを考える。Homomorphism $h: A^p(X) \longrightarrow A$ は，適当なvariety Y と $z \in CH^{m-p+1}(X \times Y)$ $(m = \dim X)$ があり，$A \hookrightarrow \mathrm{Pic}\, Y$ (Y のPicard variety) となっていて (i.e. A は $\mathrm{Pic}\, Y$ のabelian subvariety)，

$$\begin{tikzcd} A^p(X) \arrow[rr, "z(?)"] \arrow[dr, "h"'] & & \mathrm{Pic}\, Y\ (\cong A^1(Y)) \\ & A \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

が可換となるとき，Picard homomorphismという。

Picard homomorphismは，regular homomorphismである。

例。$p=1, X=Y, z=\Delta_X \in CH^m(X \times X)$: diagonal ととり，$A = P$ を X のPicard varietyとすと，上の例の $\theta^{(1)}: A^1(X) \longrightarrow P$ は，Picard homomorphism. $p = m = \dim X$ について，P は上のとおりとし，$\mathfrak{p} \in CH^1(P \times X)$ とPoincare divisorとする時，$\mathfrak{p}$ は，$\theta^{(m)}: A^m(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(P) \cong \mathrm{Alb}\, X$ を導びく。従って $\theta^{(m)}$ もPicard homomorphismとなる。

Variety X と，整数 p を固定し，

$$K^p(X) = \bigcap \mathrm{Ker}\,(A^p(X) \xrightarrow{h} A)$$

(Abelian variety A と Picard homomorphism h を動かす) と置き，$K^{\cdot}(X) = \coprod_p K^p(X)$ を考える。$K^{\cdot}(X)$ は X 上のcycles全体に adequate equivalence relation を定義する。

$K^1(X) = 0$ であり，$A^m(X)/K^m(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alb}(X)$ ($\theta^{(m)}$ から導びか

れた同型，$n=\dim X$）が成立する。Picard homomorphisms $h: A^p(X)\longrightarrow A$，$k: A^p(X)\longrightarrow B$ に対して，

$$(h,k): A^p(X)\ni x\longmapsto (h(x),k(x))\in A\times B$$

も Picard homomorphism である。$h: A^p(X)\longrightarrow A$ が Picard homomorphism で $B\subset A$ が abelian subvariety，更に map $k: A^p(X)\longrightarrow B$ があり，$h: A^p(X)\xrightarrow{k} B\subset A$ と分解される時，k もまた Picard homomorphism である。

<u>Prop</u> X と p を固定した時 abelian variety P と Picard homomorphism $\theta^{(p)}: A^p(X)\to P$ で，任意の abelian variety A に対して

(☆)
$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}(P,A) & \longrightarrow & \{\text{Picard homomorphisms } A^p(X)\to A \text{ 全体}\}\\ \psi & & \psi \\ \varphi & \longmapsto & \theta^{(p)}\circ\varphi\end{array}$$

が全単射となるものが存在する。この P（及び $\theta^{(p)}$）は，同型を除いて一意的である。

自然数 k と，algebraic family $f: P\longrightarrow A^p(X)$ があって

$$k_P: P\xrightarrow{f} A^p(X)\xrightarrow{\theta^{(p)}} P$$

は，"k倍"となる。$\theta^{(p)}$ は同型 $A^p(X)/K^p(X)\xrightarrow{\sim} P$ を導びく。$K^p(X)$ は $CH^p(X)$ の中で incidence-equivalent to zero である codimension p の cycles 全体に等しい。

Cor 上のPを$J^p(X)$と書くと、$J^p(X)$と$K^p(X)$は intermediate Jacobian の公理を充す。

$h: A^p(Y)\to A$ が Picard homomorphism で $z\in CH^{p+q}(X\times Y)$ ($m=\dim X$) の時、$A^{m-q}(X)\xrightarrow{z(?)} A^p(Y)\xrightarrow{h} A$ は Picard homomorphism であることに注意する。$A=J^p(Y)$, $h=\theta^{(p)}$ として Prop. より $[z]: J^{m-q}(X)\to J^p(Y)$ で $[z]\circ\theta^{(m-q)}=\theta^{(p)}\circ z(?)$ となるものが一意的に存在することが分る; よって"公理"の(v)がいえる。他は明白。従って Cor は Prop. より導びかれる。

任意の regular homomorphism $h: A^p(X)\to A$ に対して、
(i) $\mathrm{Im}(h)$ は A の abelian subvariety B であり、
(ii) $u\in CH^p(B\times X)$ と自然数 k があり

$$B\xrightarrow{u(?)} A^p(X)\xrightarrow{h} A$$

は k倍の写像 $B\xrightarrow{\times k} B\subset A$ であることに注意する。

Lemma (Groth) 任意の Picard homomorphism $h: A^p(X)\to A$ に対して、$\dim \mathrm{Im}(h)\leq\frac{1}{2}\dim H^{2m-2p+1}(X)$, $m=\dim X$, $H^\cdot(X)$ は l-adic etale cohomology. ($l\neq \mathrm{char}\,k$)

T, X が varieties の時、$z\in CH^1(T\times X)$ で $z(?): T\to CH^1(X)$ が零の時 z の induce する $H^\cdot(X)\to H^\cdot(T)$ が zero になることに注意する。hは surjection としてよく variety Y

と $u \in CH^{m-p+1}(X \times Y)$ があり，$i: A \hookrightarrow \operatorname{Pic} Y$ となっていて，$\operatorname{Pic} Y = A^1(Y)$ とみる時，$i \circ h = u(?)$. Lemma の前の注意から自然数 r と $z \in CH^p(A \times X)$ があり，$u \circ z = p \circ i \circ r_A$. 但し $r_A: A \xrightarrow{\times r} A$，$i$ は morphism の graph を cycle と考えたもので等号は，maps $A \to A^1(Y)$ の意味である。更に $p \in CH^1(\operatorname{Pic} Y \times Y)$ は Poincaré divisor。上の注意より $H^\cdot(Y) \to H^\cdot(A)$ として ${}^t z \circ {}^t u = r_A^* \circ i^* \circ {}^t p$. $n = \dim Y$ として $H^{2n-1}(Y) \to H^1(A)$ を考えると r_A^*, ${}^t p$ は同型，i^* は surjection 故 ${}^t z$ も surjection: ${}^t z: H^{2n-2p+1}(X) \to H^1(A)$ で $\dim H^1(A) = 2 \dim A$.

Surjective Picard homomorphism $h: A^p(X) \to A$ の中で $\dim A$ ($\leq \frac{1}{2} \dim H^{2n-2p+1}(X)$) が最大のものを一つ選び，$h: A^p(X) \to A$ とする。自然数 N があり，任意の surjective Picard homomorphism $k: A^p(X) \to B$ と $\pi: B \to A$ で，$\pi \circ k = h$ であるものに対して，

$$\deg \pi \leq N.$$

$u \in CH^p(A \times X)$ で $r_A: A \xrightarrow{u(?)} A^p(X) \xrightarrow{h} A$ なるものが存在する，但し r は自然数。すると，

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k \circ u(?)"] \arrow[dr, "r_A"'] & B \arrow[d, "\pi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

は可換である。A と h のとり方より π は isogeny であり，r_A，従って $k\circ u(?)$ もそうで，

$$N := \deg(r_A) = \deg(\pi\circ(k\circ u(?))) = \deg\pi\cdot\deg(k\circ u(?)) \geq \deg\pi$$

$\deg\pi$ が最大となる B と k をとり，それを P と $\theta^{(p)}$ とすると，$(P, \theta^{(p)})$ は Prop. の条件を充す，i.e.(☆)は全単射。Prop.の他は容易に解る。

注意　このような P の存在は $k=\mathbb{C}$ の時 Lieberman が $J^p_a(X)$ を使って示した。

Prop. の中の $\deg>0$ を最小にする $f\in CH^p(P\times X)$ をとる。${}^t f\in CH^p(X\times P)$ を，順序の入れ替え $X\times P \Rightarrow P\times X$ による像とすると，${}^t f$ は

$$\lambda = [{}^t f] : J^{m-p+1}(X) \longrightarrow J^1(J^p(X)) = (J^p(X))^\wedge$$

を定義する。f は一意的に決まらないが，λ は一意的に決まる。更に λ は isogeny (Lieberman; $k=\mathbb{C}$ の時に示しているが一般の時も同じ)。

(V) によって，X, Y を varieties，$m=\dim X$ とする時，

$$B : CH^{p+q}(X\times Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(J^{m-q}(X), J^p(Y))$$
$$z \longmapsto [z]$$

が定義されて，group homomorphism となる。

Prop　$B\otimes\mathbb{Q}$ は surjection であり，従って，B の cokernel は有限群。

一般には X, Y, p, q に関係した自然数 N と

$$T : \mathrm{Hom}(J^{m-q}(X), J^{p}(Y)) \longrightarrow CH^{p+q}(X \times Y)$$

があり $B \circ T = N$ (N倍) となることを示せばよい。

$X = Y$ が abelian variety で $p = m, q = m-1$ の場合に帰着させる。この時には，$c \in CH^{m-1}(X)$ で

$$\hat{X} \simeq A^{1}(X) \ni x \longmapsto c \cdot x \in A^{m}(X) \xrightarrow{\text{標準的}} J^{m}X = X$$

が isogeny となるものが存在することより，T 及び N の存在が分る。

<u>注意</u> B は X, Y について functorial である。

$k = \mathbb{C}$ の時を考える。$J^{p}_{a}(X)$ から $J^{p}(X)$ (Prop 1 のようにして定めた) への homomorphism π^{p}_{X} が自然に定まる。

$$\pi^{p}_{X} : J^{p}_{a}(X) \longrightarrow J^{p}(X)$$

は，$p = 1, \dim X$ の時，同型であるが，X が abelian variety ならば任意の p について π^{p}_{X} が isogeny であることが知られている。さらに，

<u>Prop.</u> (i) X が dimension d の abelian variety を complete intersection として含む variety ならば，$2p-1 \leq d$ なる p に対して，π^{p}_{X} は isogeny.

(ii) 固定した p について，π^{p}_{X} が $\dim X = 2p-1$ なる任意の variety について isogeny ならば，

π_X^p は任意の $q \leq p$, 任意の variety X について isogeny となる。

<u>注意</u> (ii)によって、π_X^p が isogeny かどうかは $\dim X = 2p-1$ なる X について (p は固定して), 調べればよい。Griffiths はこれが肯定的であるという announce をしている。

<u>例</u>. 余り多くのことは知られていない。任意の k について、X が $\mathbb{P}^N$ の complete intersection で $\dim = m$ の時 m が偶数であるか、m が奇数で $m \neq 2p-1$ であるならば

$$J^p(X) = 0.$$

char $k \neq 2$ の時 X が cubic 3-fold ならば $A^2(X) \xrightarrow{\sim} J^2(X)$ (Murre) さらに、一般に X が fibre が $\mathbb{P}^{2n}$ の中の quadric と同型な morphism $X \twoheadrightarrow \mathbb{P}^2$ を持つ時 $A^{n+1}(X) \simeq J^{n+1}(X)$ (Beauville) であり、これらは Prym variety になる。

$k = \mathbb{C}$ のとき general abelian variety X に対し $J^p X$ と X は isogeny である。

Lieberman, D. I; Intermediate Jacobian, Algebraic Geometry Oslo 1970

——— ; Higher Picard varieties, Am. J. Math 90, p.1066.