代数幾何学シンポジウム記録
1977年度　pp.144-157

局所 Torelli の問題について。

臼井三平

0. 序.

Griffiths による周期写像の研究に端を発して、周期写像の単射性（Torelli 型の問題）・全射性の問題がいろいろな代数多様体に対して研究されている（K3 曲面については [11], [6]; Enriques 曲面については [7]; 一般曲面については [2] の II, [10], [13], [14] etc）。

この小論の目的は、一般型曲面に対する Torelli 型の問題についての一つの実験である。ここで対象とするのは、非特異射影曲面 X' であってその $\mathbb{P}^3$ への生成射影 X の特異集合 D が非特異完全交叉の曲線となっているようなものである（(2.1) 参照）。$\mathbb{P}^3$ を D にそって blow-up したものを P' とすれば、X の proper transform として X' が得られる。$D = V_1 \cap V_2$ とし、n, n_1, n_2 を各々 $\mathbb{P}^3$ 中での X, V_1, V_2 の次数とすると、主要な結果は次の命題（定理 (3.6)）

0.2

である.

$n \geqq \max\{n_1+n_2+2,\ n_2+4\}$ でかつ, $n \neq 4,\ n_1+4,\ n_2+4$ のときには, X' の deformations のうち P' 中での X' の displacements から来る分に対しては, 局所 Torelli の定理が成立する.

ところで, X' の deformations は P' 中での X' の displacements と $\mathbb{P}^3$ 中での D の displacements から得られる ((2.4), (2.5) 参照) わけだが, 後者の関係してくるところは目下考察中である.

なお category は $\mathbb{C}$ 上である.

1. 局所 Torelli の問題.

この節では局所 Torelli の問題の定式化と、これまでに知られていることをまとめておく。詳しくは Griffiths ([2]) 参照.

(1.1) $f : X \to S$ を解析空間の smooth projective morphism of pure relative dimension d とし、S 上の射影空間への埋め込み

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times S \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd}$$

と基点 $o \in S$ を決めておく.

(1.2) $0 < r < d$ なる整数 r に対し、$X_0 = f^{-1}(o)$ 上の $\mathbb{C}$-係数の r-th primitive cohomology の Hodge 分解を

$$P^r(X_0, \mathbb{C}) = \bigoplus_{0 \leq i \leq r} P^{r-i,i}(X_0)$$

とする. 縮約 $T_{X_0} \otimes \Omega^{r-i}_{X_0} \longrightarrow \Omega^{r-i-1}_{X_0}$ から導かれた写像

(1.2.1) $$\varphi : H^1(T_{X_0}) \longrightarrow \bigoplus_{0 \leq i \leq [\frac{r-1}{2}]} \mathrm{Hom}(P^{r-i,i}(X_0), P^{r-i-1,i+1}(X_0))$$

2

を infinitesimal period map of weight r と呼ぶ.

問題 (1.3). (局所 Torelli の問題, Griffiths).
infinitesimal period map φ が injective か否かをしらべよ. 特に, 単連結な一般型の曲面に対して φ の injectivity をしらべよ.

(1.4) 問題 (1.3) についてこれまでにしらべられていることを列挙しておく.

(1.4.1) 局所 Torelli の定理が成立している例: 超曲面 ([2]のII), $\mathbb{P}^2$ あるいは $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ の巡回分岐被覆 ([10]), complete intersections ([13]), weighted complete intersections ([14]).

(1.4.2) 局所 Torelli の定理が成立していない例: $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 中の超曲面 $X_0^6+X_1^6+X_2^6+X_3^6=0$ に $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ を $(X_0, X_1, X_2, X_3)\longmapsto(X_0, \varepsilon X_1, \varepsilon^2 X_2, -X_3)$ (ε は 1 の 3 乗根) で作用させて得られる商空間の非特異極小 model ([8]).

(1.5) (1.4.2) の例によって問題 (1.3) は否定的となるが, canonical divisor が ample という条件

（(1.4.2)の例はこの条件をみたさない）をつけ加えてみれば，肯定的に解けるかもしれない（open problem）.

2. 対象.

この節では，この小論で対象とする曲面の定義とその deformations について小平（[9]），堀川（[5]），坪井（[12]）の結果を要約しておく.

(2.1)　非特異射影曲面 X' を $\mathbb{P}^3$ へ生成射影して得られる超曲面 X は ordinary singularities のみをもつ. 今特に X の特異集合が $\mathbb{P}^3$ 中の非特異な完全交叉の曲線となっているとき，つまり X の定義式が

(2.1.1)　$F = af^2 + 2bfg + cg^2$

となっている場合がこの小論の対象である.

ここで f, g, a, b, c は斉次多項式でかつ F も斉次多項式である.

(2.2)　(2.1)の曲面の deformations, moduli 数は既にしらべられているが，特に小平（[9]）において，曲面 X は effectively parametrized maximal family of surfaces with ordinary singularities in $\mathbb{P}^3$ whose characteristic system on each memter is complete に属することが示されている。

(2.3) 以後次の記号を決めておく。

$P = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

X : $F = af^2 + 2bfg + cg^2 = 0$ in P.

$n = \deg F$, $n_1 = \deg f$, $n_2 = \deg g$.

$n_1 \geqq n_2$ としておく。

$D = \mathrm{Sing}(X)$: $f = g = 0$ in P. Dは非特異。

C : $f = g = b^2 - ac = 0$ in P.

p : $P' \to P$ PのDにそっての blowing-up.

q : $X' \to X$ Xの proper transform. Xの正規化になっている。

r : $D' = q^{-1}(D) \to D$.

$C' = r^{-1}(C)$. reduced structure を入れておく。2重被覆 r の分岐集合になっている。

$\tilde{r}$: $E' \to D$ 例外因子. $\mathbb{P}^1$-bundle となっている。

以上は次の図式を構成している。

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & P' \supset X' \supset D' \supset C' & & P' \supset E' \supset D' \\
(2.3.1) & p\downarrow \quad q\downarrow \quad r\downarrow \qquad \downarrow & & p\downarrow \quad \tilde{r}\downarrow \swarrow r \\
 & P \supset X \supset D \supset C\ , & & P \supset D\ .
\end{array}
$$

$\mathcal{O}_X(l-mD) = \mathrm{Im}\,(\mathcal{O}_X(l)\otimes(\mathcal{I}_D/\mathcal{I}_X)^m \to \mathcal{O}_X(l))\quad (m>0).$

$T_{(P,D)} = \mathrm{Ker}\,(T_P \to N_{D/P})$: P 上の vector 場で D にそったもの のなす層.

$T_{(P,D),X} = \mathrm{Im}\,(T_{(P,D)}\otimes\mathcal{O}_X \longrightarrow T_P\otimes\mathcal{O}_X).$

$T_{(P,D),X}(l-mD) = \mathrm{Im}\,(T_{(P,D),X}\otimes\mathcal{O}_X(l-mD)\to T_P\otimes\mathcal{O}_X(l)).$

$T_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X).$

$n_{X/P} = \mathrm{Coker}\,(T_X \to T_P|_X)$: 小平 ([9]) で導入された層.

$R = \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$: P の斉次座標環.

$I = (f, g)$: D の斉次 R-ideal.

R_l, I_l, $(I^2)_l$: 各々次数 l 次の斉次部分.

補題 (2.4). $n > n_1 + n_2 + 1$ でかつ $n \neq 4$, $n_1 \neq 4$, $n_2 \neq 4$ ならば, 次の可換な完全な図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \dfrac{H^0(N_{X'/P'})}{\mathrm{Im}\, H^0(T_{P'}|_{X'})} \arrow[r] & H^1(T_{X'}) \arrow[r] & H^1(T_{P'}|_{X'}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dfrac{H^0(\mathcal{O}_X(n-2D))}{\mathrm{Im}\, H^0(T_{(P,D),X})} \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & H^1(T_X) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & H^1(T_{(P,D),X}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dfrac{H^0(\mathcal{O}_X(n-2D))}{\mathrm{Im}\, H^0(T_{(P,D),X})} \arrow[r] \arrow[u, equal] & \dfrac{H^0(N_{X/P})}{\mathrm{Im}\, H^0(T_P|_X)} \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \dfrac{H^0(N_{D/P})}{\mathrm{Im}\, H^0(T_P|_X)} \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & 0.
\end{tikzcd}
$$

証明は [12] と同じようにできる。

(2.5) (2.4) は X' の deformations が X' の displacements in P' と D の displacements in P とから得られることを示す。これはまた、X の定義式 (2.1.1) において、a, b, c ないし f, g の perturbations である。

3. 主要な結果。

(3.1) $P^{2,0}(X') = H^0(K_{X'})$ であるから、曲面 X' に対する問題 (1.3) は次の φ' が第1項に対して非退化であるかということと同

値である。

(3.1.1) $\varphi' : H^1(T_{X'}) \otimes H^0(K_{X'}) \longrightarrow H^1(\Omega^1_{X'})$.

(3.2) $H^1(T_{X'})$ のうち X' の displacements in P' から来る分については (2.4) と $f_* K_{X'} \simeq \mathcal{O}_X((n-4)-D)$ により次の可換図式を得る。

$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{H^0(N_{X'/P'})}{\mathrm{Im}\, H^0(T_{P'}|_{X'})} \otimes H^0(K_{X'}) & \xrightarrow{\varphi_1'} & \dfrac{H^0(N_{X'/P'} \otimes K_{X'})}{\mathrm{Im}\, H^0(T_{P'}|_{X'} \otimes K_{X'})} \\
\uparrow\wr \qquad\qquad \uparrow\wr & & \uparrow \alpha_1 \\
\dfrac{H^0(\mathcal{O}_X(n-2D))}{\mathrm{Im}\, H^0(T_{(P,D),X})} \otimes H^0(\mathcal{O}_X((n-4)-D)) & \xrightarrow{\varphi_1} & \dfrac{H^0(\mathcal{O}_X((2n-4)-3D))}{\mathrm{Im}\, H^0(T_{(P,D),X}((n-4)-D))}
\end{array} \tag{3.2.1}
$$

α_1 の kernel をしらべることによって，φ_1' が第1項に対して非退化であるということは次のように多項式環の言葉に換言できる。詳細は [15] 参照。

定式化 (3.3). (φ_1' に対する局所 Torelli の問題). 与えられた $G \in (I^2)_n$ に対して次の条件がみたされていると仮定する。$\forall A \in I_{n-4}$ に対して，$\exists B_i = B_i' f + B_i'' g \in I_{n-3}$ $(0 \leq i \leq 3)$, $\exists S \in R_{n-4}$, $\exists T \in R_{n_1+n_2-4}$ であって

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_0} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial X_3} \\ \frac{\partial g}{\partial X_0} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial X_3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} B_0' & B_0'' \\ \vdots & \vdots \\ B_3' & B_3'' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} bT+S & cT \\ aT & bT-S \end{bmatrix} \mod I$$

であり かつ

$$AG = \sum_{0 \leqq i \leqq 3} B_i \frac{\partial F}{\partial X_i}$$

となっている。（以上が条件）。しからば、

$\exists\, C_i \in R_1$ $(0 \leqq i \leqq 3)$ であって

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_0} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial X_3} \\ \frac{\partial g}{\partial X_0} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mod I$$

であり かつ

$$G = \sum_{0 \leqq i \leqq 3} C_i \frac{\partial F}{\partial X_i}$$

となっているか？

補題 (3.4). $\alpha_1 \circ \varphi_1$ は単射である。従って (3.3) 中の S と T とは 0 と 1 でよい。

証明は (3.3) 中の AG を初等環論的にしらべることによる。

補題 (3.5). $n > n_1 + n_2 + 1$ ならば

$$H^0(T_X((n-4)-D)) \otimes \mathcal{O}_X(l)) = 0 \qquad (l \leqq 1).$$

証明は, $T_X((n-4)-D) \hookrightarrow g_* \Omega^1_{X'}$ を示し $H^0(g_* \Omega^1_{X'} \otimes \mathcal{O}_X(1)) = 0$ を示す.

定理 (3.6). $n > n_1 + n_2 + 1$ でかつ $n \neq 4$, $n_1 + 4$, $n_2 + 4$ ならば (3.2.1) の φ_1' は第1項に対して非退化である.

証明. (3.3) を初等環論的に示す. R の斉次 ideals

$$\mathfrak{a} = \left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial X_3} \right),$$

$$\mathfrak{b} = \left\{ \sum_i B_i \frac{\partial F}{\partial X_i} \in \mathfrak{a} \;\middle|\; \begin{array}{l} B_i = B_i' f + B_i'' g \in I, \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_0} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial X_3} \\ \frac{\partial g}{\partial X_0} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0' & B_0'' \\ \vdots & \vdots \\ B_3' & B_3'' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bmod I \end{array} \right\}$$

を考える. 証明は次の3段階に分かれる.

第1段階. $A = A'f + A''g \in I_{n-4}$ でかつ $A'fG$, $A''gG \in \mathfrak{b}$ ならば, fG, $gG \in \mathfrak{a}$.

第2段階. $A'fG,\ A''gG \in \mathfrak{b}$ でかつ $fG,\ gG \in \mathfrak{a}$ ならば, $fG,\ gG \in \mathfrak{b}$.

第3段階. $fG,\ gG \in \mathfrak{b}$ ならば(3.3)の結論がいえる.

なお第1段階で(3.5)を使う. Q.E.D.

[1] Deligne, P., Travaux de Griffiths, Sem. Bourbaki 376(1969/70) 213-237.

[2] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds I,II,III, Amer. J. Math. 90(1968) 568-626; 805-865; Publ. Math. I.H.E.S. 38(1970).

[3] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open questions, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1970) 228-296.

[4] Griffiths, P. A. and Schmid, W., Recent developments in Hodge theory, Proc. Symp. at Bombey in 1973, Oxford Univ. Press (1975).

[5] Horikawa, E., On the number of moduli of certain algebraic surfaces of general type, J. Fac. sci. Univ. Tokyo (1974) 67-78.

[6] Horikawa, E., Surjectivity of the period map of K3 surfaces of degree 2, Math. Ann. 228(1977) 113-146.

[7] Horikawa, E., On the periods of Enriques surfaces I,II, Proc. Jap. Acad. 53-3 (1977) 124-127; 53-A-2(1977) 53-55.

[8] Kǐnef, F. I., A simply connected surface of general type for which the local Torelli theorem does not hold (Russian), Cont. Ren. Acad. Bulgare des Sci. 30-3 (1977) 323-325.

[9] Kodaira, K., On the characteristic systems of families of surfaces with ordinary singularities in a projective space, Amer. J. Math. 87(1965) 227-255.

[10] Peters, C., The local Torelli theorem of some cyclic branched coverings,

[11] Pjateckiǐ-Šapiro, I. I. and Šafarevič, I. R., A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Izv. Acad. Nauk. 35(1971) 530-572.

[12] Tsuboi, S., On the sheaves of holomolphic vector fields on surfaces with ordinary singularities in a projective space I,II, Sci. Rep. Kagoshima Univ. 25(1976) 1-26; II is to appear.

[13] Usui, S., Local Torelli theorem for non-singular complete intersections, Jap. J. Math. 2-2(1976) 411-418.

[14] Usui, S., Local Torelli theorem for some non-singular weghted complete intersections, to appear in Proc. Internat. Symp. Alg. Geom. 1977 Kyoto.

[15] Usui, S., Local Torelli theorem for certain surfaces of general type, to be prepared.