代数幾何学シンポジウム記録
1977年度　pp.99-127

無限遠に 2個の素点を持つ、平面代数曲線について。

杉江　徹　（阪大理）
宮西　正宜（阪大理）

以下、kは標数0の代数的閉体とする。fを、k係数の、二変数X, Yの多項式とすると Abhyankar-Moh [1] によって次の定理が証明された。

<u>定理</u>　<u>$f=0$によって定義される</u>、$\mathbb{A}^2_k = \mathrm{Spec}\, k[X,Y]$ <u>上の curve が、$\mathbb{A}^1_k$ に同型であれば、$\mathbb{A}^2_k$ の座標を適当にとりかえて、$C=\{f=0\}$ を、x軸に選ぶことができる。</u>

さて、ここでは、$f=0$によって定義される $\mathbb{A}^2_k$ 上の curve が、$G_m = \mathrm{Spec}\, k[X, X^{-1}]$ に同型になる場合を考える。すなわち次の定理を証明するのが目標である。

<u>定理</u>　<u>fを、X, Y二変数の、k係数の多項式とし、$\forall\alpha \in k$に対し、C_αを$f=\alpha$によって定義される、$\mathbb{A}^2_k$上の curve とする。</u>

<u>$\mathbb{A}^2_k$の座標を適当にとりかえて、fが、</u>

$$f = c(X^d Y^e - 1) \qquad (d, e) = 1, \quad c \in k^*$$

と表わせるためには　次の２条件が成り立つことが必要十分である。

1）$\mathbb{A}^2$上の pencil $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の general member は G_m に同型。特に curve $\{f=0\}$ は G_m に同型。

2）$\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の　すべての member は　connected.

一般に　$f=0$ が G_m に同型でも　$\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の general member は　G_m に同型になるとは限らない。（例　$f = X^2Y^2 + 2XY^2 + Y^2 + 2XY + 1$）

また　$\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の general member が　G_m に同型であっても　$\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の　すべての member が連結であるとは限らない。

（例　$f = Y(XY + 1) + 1$　）

$\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ が　連結でない member を含む場合，及び定理の解析的な証明について　H. Saitô [4] を参照。

§1. pencil についての補題.

この§で, 以下に必要な pencil についての補題を, いくつか示しておく。

V を k 上定義されている non-singular な proj. surface, Λ を V の上の既約な linear pencil で general member は rational curve とし, B を Λ の ordinary base pt. 全体とする。即ち infinitely near base pt. は含めない。また B の各点は Λ の general member の one place pt. とする。

Δ を Λ の red. member とし, Δ が $\Delta = \sum_{i=0}^{r} n_i D_i$ と表わされているとする。

"定義". 次の条件がみたされる時, Λ の red. member Δ を linear と定義する。

(i) $D_i \simeq \mathbb{P}^1_k$

(ii). 相異なる i, j に対し $(D_i \cdot D_j)$ は 0 か 1。

(iii) i, j, k が互いに相異なるとき, D_i, D_j, D_k は一点で交わらない。

(iv) Δ の weighted graph は linear chain である。(cyclic chain を含まない。)

以上の仮定の下に、次の補題が成り立つ。

"Lemma 1"

Δ を Λ の red member とする。もし $D_i \cap B \neq \phi$ となる Δ の任意の component D_i に対し、$(D_i^2) \leq -1$ であれば、Δ は $D_j \cap B = \phi$ となる exceptional component（第一種例外曲線）を含む。

"Lemma 2"

$\not{D}_\Delta$ を Λ の linear red. member とし、Δ は $\Delta = \sum_{i=0}^{r} n_i D_i \ (n_i > 0)$ と表わされているとする。ここで次の三つの条件を仮定する。

(i) $D_0 \cap B = \{P\}$, P は $D_i \ (i \neq 0)$ に含まれない。

(ii) $(D_0^2) = p > 0$.

D_0 は Δ の terminal component ではない。(i.e. $Supp(\Delta)$ の二本以上の component が D_0 と交わる。)

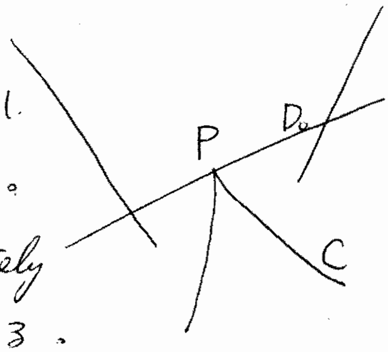
(iii) $(D_i^2) < 0 \quad (1 \leq i \leq r)$

特に $D_i \cap B = \phi$ であれば $(D_i^2) < -1$。

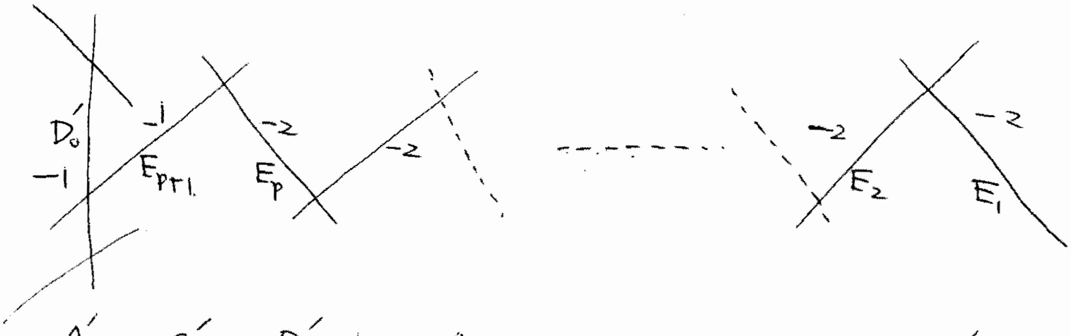
以上のことを仮定すると Δ における D_0 の

multiplicity $n_0 = 1$. $(C, D_0) = p+1$. "

Proof)



CをΛのgeneral memberとし
$e = (C \cdot D_0) = i(C \cdot D_0 ; P)$ とおく。
$P_0 = P$, P_1, $\cdots$, P_p を Pのinfinitely near pt で D_0の上の点とする。
但し P_iはP_{i-1}のinfinitely near pt of order one である。 $\sigma : V' \to V$ を $P_0, P_1, \cdots P_p$ を center とする blowing up の composition とすると、$\sigma^{-1}(\mathrm{Supp}\,\Delta)$ の configuration は次の図のようになる。



Λ', C', D_0' は Λ, C, D_0 の proper transform Δ'はΔに対応するΛ'のmemberとし、E_i $(1 \leq i \leq p+1)$ は P_{i-1}をblowing upした時に出てくるexcep. curveのproper transformとする。

もし、C'がE_{p+1}と交わらなければ E_{p+1}は明ら

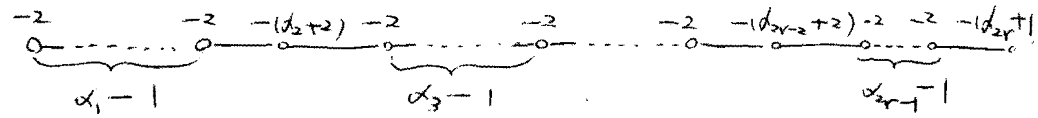
かに Δ' の component になる。そこで D_0' を contract すれば Δ' の三本の component が一点で交わることになって矛盾である。よって C' は E_{P+1} と交わる。同様に Lemma 1 を使って E_{P+1} は Δ', C' いずれの component でもないことがわかり、E_{P+1} は Λ' の quasi-section になる。Λ の base pt P は Λ の general member の one place pt であると仮定しているから $n_0 = (D_0', E_{P+1}) = 1$

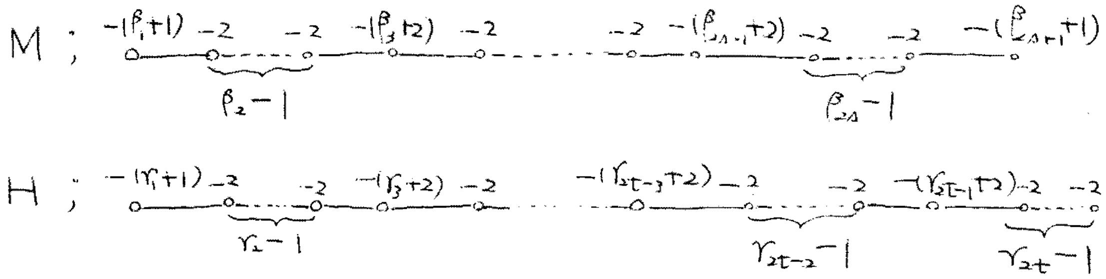
Q. E. D.

以下 Δ を Λ の linear reducible member で w.g が次のように与えられていると仮定する。

$$G \overset{p}{\underset{D_1}{\text{———}\circ\text{———}}} M \overset{q}{\underset{D_2}{\text{———}\circ\text{———}}} H$$

但し $p = (D_1^2)$, $q = (D_2^2)$, D_1, D_2 の Δ における multiplicity を n_1, n_2 とする。また G, M, H の w.g は次のようになるとする。

G : 



Lemma 2 を使って、次の二つの補題を証明できる。

"Lemma 3"

$B=\{P_1, P_2\}$　$P_i \in D_i$ $(i=1,2)$, かつ P_i は Δ の D_i 以外の component には含まれていないとする。また $n_1 \neq 1$, $n_2 \neq 1$, かつ $p \leq 0$ か $q \leq 0$ のいずれかが成り立つと仮定する。すると次の事が成り立つ。

(1) $p \geq 0$ かまたは $q \geq 0$

以下 $q \geq 0$, $p \leq 0$ と仮定する。

(2) $p < 0$ かつ $q \geq 0$ とすると $H = \phi$

(3) $p = 0$, $q \geq 0$ とすると $G = \phi$ or $H = \phi$."

"Lemma 4"

$B=\{P_2\}$, $P_2 \in D_2$, P_2 は Δ の D_2 以外の component には含まれていないとし、$n_2 \neq 1$ と仮定する。すると次の事が成り立つ。

(1) $p < 0$

(2) $p \leq -2$ とすると $q \geq 0$, $H = \phi$

(3) $p = -1$ とすると $H = \phi$ か、又は V から non-singular projective surface W への contraction $\rho : V \to W$ が存在し、$\rho_* \Lambda$ は $\rho_*(C)$ と $\rho_*(\Delta)$ によって張られる。但し $\rho_*(\Delta)$ は次のような w.g をもつ。

H は上と同じ w.g とし、$q' = q+1$、又は $q' = q+\alpha_1+1$。

§2. Change of embedding $\mathbb{A}^2_k \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$

以後定理の条件を仮定する。即ち f を k 係数の二変数の多項式，$\forall \alpha \in k$ に対し C_α を $f = \alpha$ によって定義される $\mathbb{A}^2_k$ 上の curve とすると次の二条件が成り立っていると仮定する。

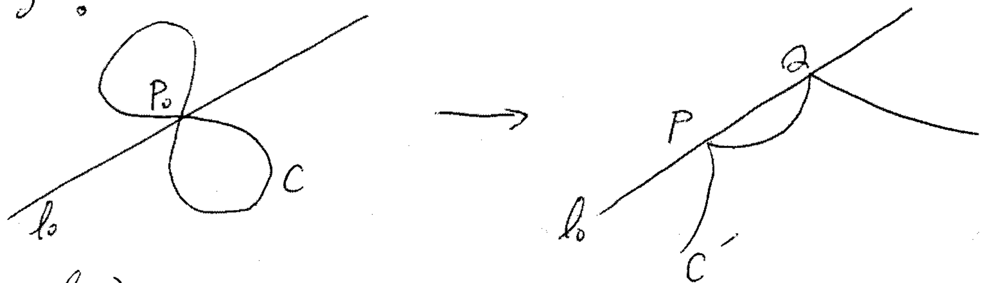
1) $\mathbb{A}^2$ 上の pencil $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の general member は G_m に同型。

2) $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ のすべての member は連結。

$\mathbb{A}^2$の$\mathbb{P}^2$への embedding $\iota : \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$を一つ fix し，$\mathbb{A}^2$を$\mathbb{P}^2$の subset と identify して考える。$l_0 = \mathbb{P}^2 - \mathbb{A}^2$とおく。$C_0$を$\{C_\alpha\}_{\alpha\in k}$の general member とし，$C_0$の$\mathbb{P}^2$における closure を$C$とする。

"Lemma 5"

いま もし $C \cap l_0 = \{$一点 $P_0\}$（集合として）とすると ある$\mathbb{P}^2$の birational transformation ρ が存在して ρの$\mathbb{A}^2$への restriction は $\mathbb{A}^2$の automorphism を induce し，$C' = \rho'(C)$をCの proper transform とすると $C' \cap l_0 = \{$二点$\}$ となる。



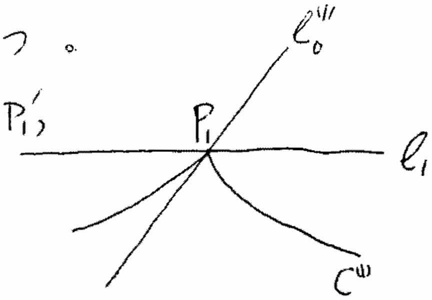
Proof）

$d = (C, l_0)$，$\mu = \mathrm{mult}_{P_0} C$．$\Lambda = \langle C, dl_0 \rangle$を$C$と$dl_0$によって張られる．$\mathbb{P}^2$上の linear pencil，$V_0 = \mathbb{P}^2$，$\sigma_1 ; V_1 \to V$を$P_0$の blowing up，$l_0^{(1)} = \sigma_1'(l_0)$ $l_1 = \sigma_1^{-1}(P_0)$，$C^{(1)} = \sigma'(C)$，$\Lambda^{(1)}$をΛの σ_1による

proper transform とおく。

まず $d > \mu$ が成り立つ。

(I). $C^{(1)} \cap \ell_1 = \{P_1, P_1'\}$, $P_1 \neq P_1'$



$P_1 = \ell_0^{(1)} \cap \ell_1$ とするか、

又は $\beta \in Bir(\mathbb{P}^2)$ が存在して、$\beta|_{\mathbb{A}^2} \in Aut(\mathbb{A}^2)$, かつ $C' = \beta(C)$ とおくと $(C', \ell_0) = d' < d$ が成り立つ。

(I)の略証)

$C^{(1)} \cap \ell_1 = \{P_1\}$ と仮定すると、まず $d > \mu$ より、$P_1 = \ell_0^{(1)} \cap \ell_1$。ここで、$\sigma ; V_s \to V_1$ を点 $P_1, P_2, \cdots P_{s-1}$ を center とする blowing up の composition と定義する。但し、P_i は P_{i-1} の infinitely near pt で、ℓ_1 の~~点~~上の点 $(2 \leq i \leq s)$, s は $C^{(s)} = \sigma'(C) \not\ni P_s$ となる最小の自然数とする。

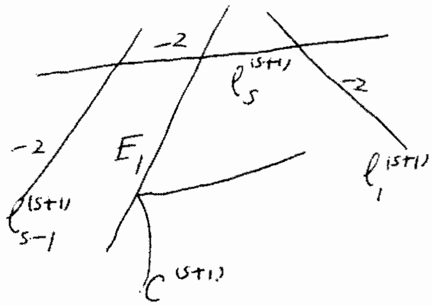
$\sigma^{-1}(\ell_0^{(1)} \cup \ell_1)$ は、次のような configulation をもつ。

δの求め方とLemma 1を使って、次のことがわかる。

- $C^{(s)} \cap l_i^{(s)} = \phi \quad (0 \le i \le \delta - 1)$
- $\mathrm{mult}_{P_i} C^{(i)} = \mu_i$ とおくと、$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{s-1}$,
  $\mu = (s-1)\mu_1$ 。
- $C^{(s)} \cap l_s = \{一点\ Q_0\}$（集合として。）

次に、$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{\delta-1}$ なる blowing up の列を次のように定義する。

まず、τ_1 を Q_0 の blowing up とし、$C^{(s+1)} = \tau_1'(C^{(s)})$, $E_1 = \tau_1^{-1}(Q_0)$ 等とおくと、次の事が、成り立つ。



- $C^{(s+1)} \cap l_s^{(s+1)} = \phi$, $C^{(s+1)} \cap E_1 = \{一点\ Q_1\}$
- $(C^{(s+1)}, E_1) = \mathrm{mult}_{Q_0} C^{(s)} = (l_s \cdot C^{(s)}) = \mu_1$

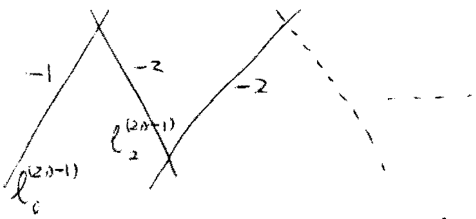
以下、τ_i $(1 \le i \le s-2)$ までが定義されているとすると、やはり次の事が成り立つ。

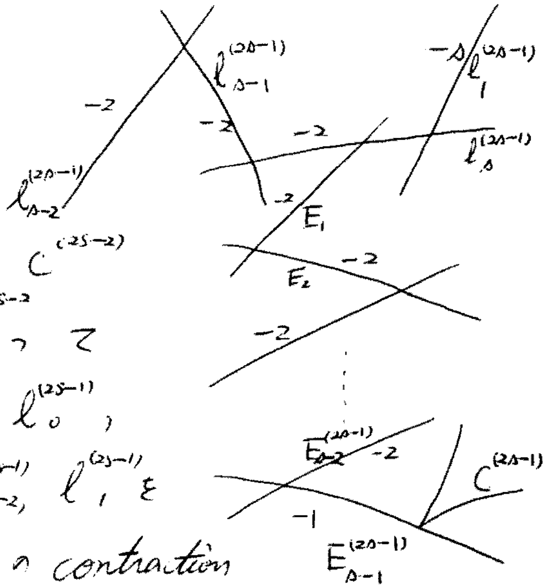
- $C^{(s+i)} \cap E_{i-1}^{(s+i)} = \phi$, $C^{(s+i)} \cap E_i = \{一点\ Q_i\}$
- $(C^{(s+i)}, E_i) = \mathrm{mult}_{Q_{i-1}} C^{(s+i-1)} = (C^{(s+i-1)}, E_{i-1}) = \mu_1$

そこで、τ_{i+1} を Q_i の blowing up とする。

$\tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \cdots \circ \tau_{s-1}$ とおくと、$(\sigma_0 \tau)^{-1}(l_0 \cup C)$ の

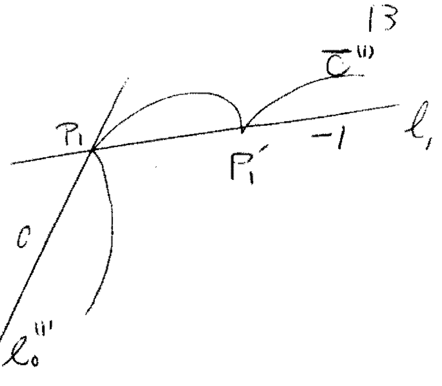
configuration は次のようにする。





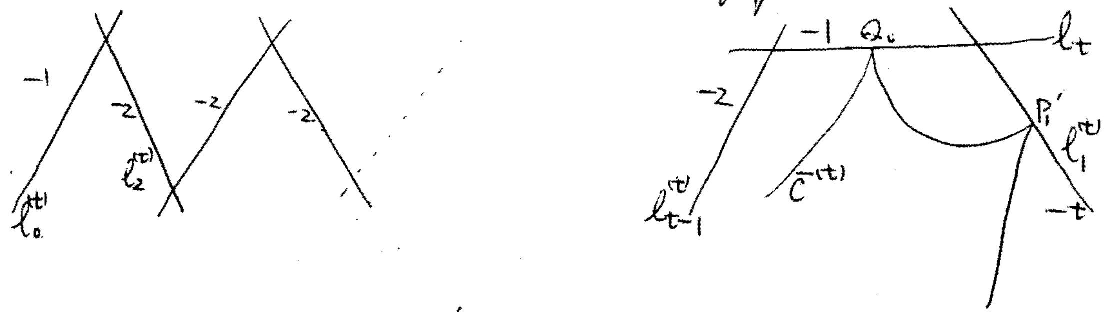
また，$(C^{(2s-1)}, E^{(2s-1)}_{s-1}) = \mathrm{mult}_{Q_{s-2}} C^{(2s-2)} = (C^{(2s-2)}, E^{(2s-2)}_{s-2}) = \mu_1$ が成り立っている。そこで，ここで $l_0^{(2s-1)}$, $l_2^{(2s-1)}, \dots, l_s^{(2s-1)}, E_1^{(2s-1)}, \dots, E_{s-2}^{(2s-1)}, l_1^{(2s-1)}$ をこの順に contract し，この contraction を $\alpha: V^{(2s-1)} \longrightarrow W$; $\beta = \alpha \cdot \tau^{-1} \sigma^{-1}$ とおく。β の A^2 への restriction は A^2 の automorphism を induce する。また $W - \alpha(E^{(2s-1)}_{s-1}) = A^2$, $(\alpha(E^{(2s-1)}_{s-1}))^2 = 1$ だから $W = \mathbb{P}^2$ になる。即ち $\beta \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$。$C' = \beta'(C)$ とおくと，$(C, l_0) = \mu_1 = \frac{\mu}{s-1} < d$ となり ~~事~~ (I) が証明された。そこで $(C, l_0) = d$ に関する induction によると結局ある $\mathbb{P}^2$ の birational transformation ρ_1 が存在し，$\rho_1|_{A^2} \in \mathrm{Aut}(A^2)$ となり，$\rho_1'(C) = \overline{C}$ とおいて $\overline{C}$ に対して上と同様に $\overline{C}''$ を考えると $\overline{C}''$ は l_1 と相異なる2点 P_1, P_1' で交わることがわかった。($P_1 = l_0'' \cap l_1$ とおく。)

$P_1, \cdots, P_{t-1}$ を P_1 の infinitely near pt で l_1 の上の点、但し P_i は P_{i-1} の infinitely near pt of order one ($2 \leq i \leq t-1$)



とする。σ_i を P_{i-1} の blowing up とし、σ を σ_2, σ_3, $\cdots$, σ_t の合成 $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \cdots \circ \sigma_t$ とおく。また t は $C^{(t)} = \sigma'(\bar{C}^{(1)}) \ni P_t = l_1^{(t)} \cap l_t$ とする最小の整数とする。

$\sigma^{-1}(l_0^{(1)} \cup l_1 \cup \bar{C}^{(1)})$ は次の configuration をもつ。



t の選び方と、Lemma 1 及び $\bar{C}^{(t)}$ が $\sigma^{-1}(l_0^{(1)} \cup l_1)$ の上に two place を持つことから次の事が成り立つ。

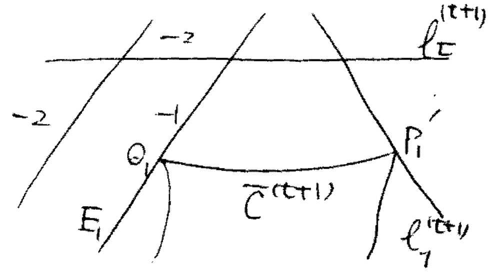
(1) $\bar{C}^{(t)} \cap l_t = \{$一点$\}$。これを Q_0 とおく。

(2) $Q_0 \notin l_{t-1}^{(t)}, l_1^{(t)}$

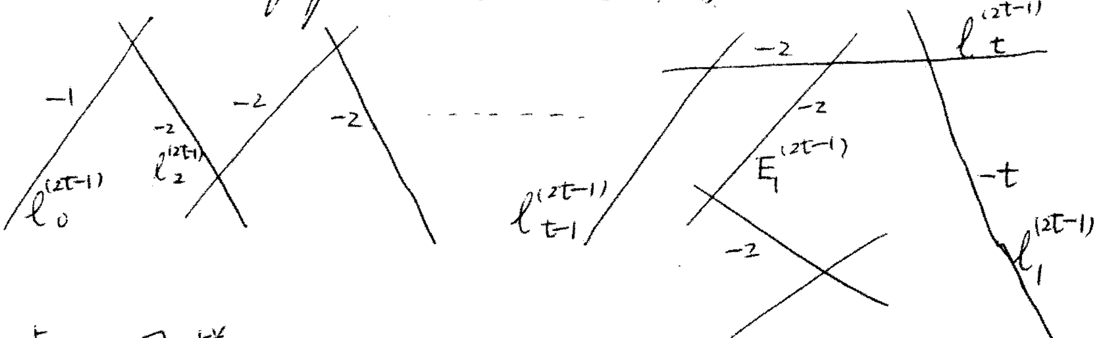
ここで再び blowing up の sequence $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{\alpha-1}$ を次のように定義する。まず、

$\tau_1 : V_{t+1} \to V_t$ を Q_0 の blowing up とすると Lemma 1 を使って $Q_1 = E_1 \cap \overline{C}^{(t+1)} \neq l_t^{(t+1)} \cap E_1$ がわかる。

$\tau_2 : V_{t+2} \to V_{t+1}$ を Q_1 の blowing up と定義する。



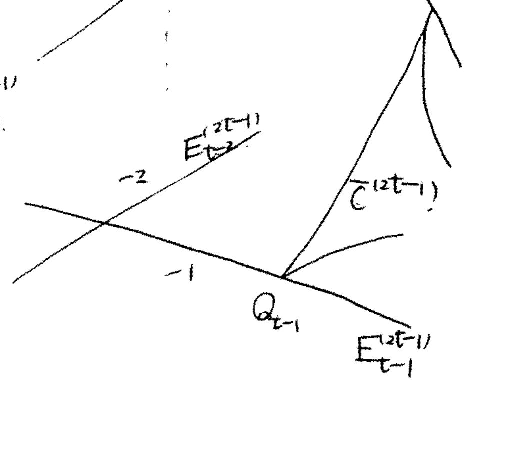
以下同様にして $\tau_i : V_{t+i} \to V_{t+i-1}$ $(1 \leq i \leq t-2)$ まで定義されたとするとやはり Lemma 1 を使って $Q_i = E_i \cap \overline{C}^{(t+i)} \neq E_{i-1}^{(t+i)} \cap E_i$ がわかる。そこで $\tau_{i+1} : V_{t+i+1} \to V_{t+i}$ を Q_i の blowing up と定義する。$\tau = \tau_1 \circ \cdots\cdots \circ \tau_{t-1}$ とおくと $(\sigma_1 \circ \sigma \circ \tau)^{-1}(l \cup C)$ は次の configulation をもつ。



上と同様にして、

$Q_{t-1} = \overline{C}^{(2t-1)} \cap E_{t-1}^{(2t-1)} \neq E_{t-2} \cap E_{t-1}$

がわかる。



ここで $l_0^{(2t-1)}, l_2^{(2t-1)}, \ldots, l_t^{(2t-1)}$, $E_1^{(2t-1)}, E_2^{(2t-1)}, \ldots, E_{t-2}, l_1^{(2t-1)}$ を

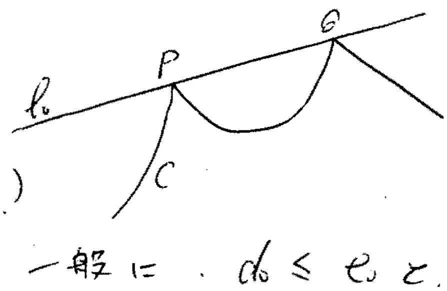
この順に contract し、このcontraction を $r: V_{2t-1} \to Z$ とする。$Z - r(E^{(2t-1)}_{t-1}) = \mathbb{A}^2$ 故、$Z \cong \mathbb{P}^2$ になる。従って $\rho_1 = r\cdot\sigma^{-1}\cdot\sigma_1^{-1}$ とおくと $\rho_1 \in Bir(\mathbb{P}^2)$ で、$\rho_1|_{\mathbb{A}^2}$ は $\mathbb{A}^2$ の automorphism になり $\rho_1'(\bar{C}) = C'$ とすると $C' \cap l_0 = \{$two distinct pt$\}$ となる。よって $\rho = \rho_1\circ\rho_2$ とおけばよい。

Q.E.D

§3 定理の証明

Lemma5によって、Cと無限遠直線 l_0 が相異なる2点で交わるような embedding $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ が存在することが証明された。以後、そのような embedding を一つ固定して考える。但し、ここで C は $\{C_\alpha\}_{\alpha\in k}$ の general member C_α の $\mathbb{P}^2$ における closure である。

$C\cap l_0 = \{P, Q\}$



$d_0 = i(C, l_0; P)$, $e_0 = i(C, l_0; Q)$

$\Lambda = \langle C, (d_0+e_0)l_0\rangle$ とおく。一般に、$d_0 \le e_0$ と仮定しておいてよい。

"Lemma 6"

$d_0 = \mathrm{mult}_P C$, $e_0 = \mathrm{mult}_Q C$ が成り立つ。

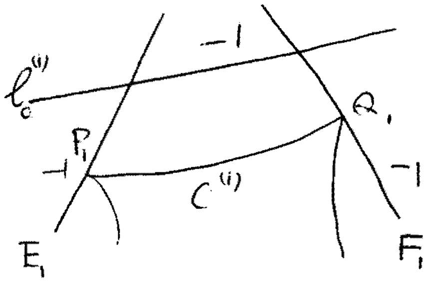
Proof)

$\mathrm{mult}_P C = \mu$, $\mathrm{mult}_Q C = \nu$ とおく。P, Q を blowing up し, C, l_0 の proper transform を, $C^{(1)}, l_0^{(1)}$ を, exceptional curve を E_1, F_1 とする。すると,

$$C^{(1)} \sim (d_0+e_0)\, l_0^{(1)} + (d_0+e_0-\mu) E_1 + (d_0+e_0-\nu) F_1$$

従って, E_1, F_1 は linear pencil Λ の proper transform の $l_0^{(1)}$ を含む member の component になる。Lemma 1 から, $d_0=\mu$, $e_0=\nu$ でなければならない。

Q.E.D



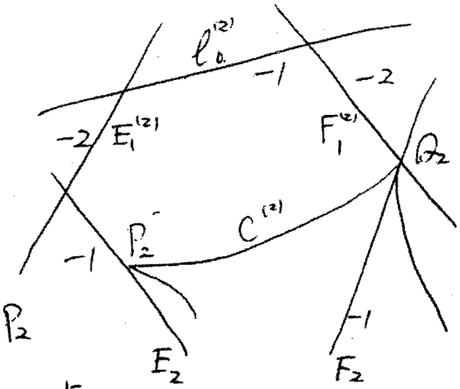
そこで, $P_1 = C^{(1)} \cap E_1$, $Q_1 = C^{(1)} \cap F_1$, $\mu_1 = \mathrm{mult}_{P_1} C^{(1)}$, $\nu_1 = \mathrm{mult}_{Q_1} C^{(1)}$ とおく。同じようにして, 次の事がわかる。

"Lemma 7"

$d_0 = 1$, or $e_0 > d_0 = \mu_1 \geq \nu_1$ が成り立つ。"

以下, $d_0 = 1$ の case は同様にしてより簡

単に証明できるので，$e_0 > d_0 = \mu_1 \geqq \nu_1$，$d_0 \neq 1$ の case を考える。



まず，P_1, Q_1 を blowing up すると右のような configuration を得る。

そこで，$P_2, P_3, \cdots, P_{t+1}$ を P_2 の infinitely near pt で $C^{(2)}$ の上の点，

但し P_i は P_{i-1} の order 1 の infinitely near pt とし，t は次のように選ぶ。即ち $\mathrm{mult}_{P_i} C^{(i)} = \mu_i$ としたとき，$d_0 = \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_t > \mu_{t+1}$ をみたす。

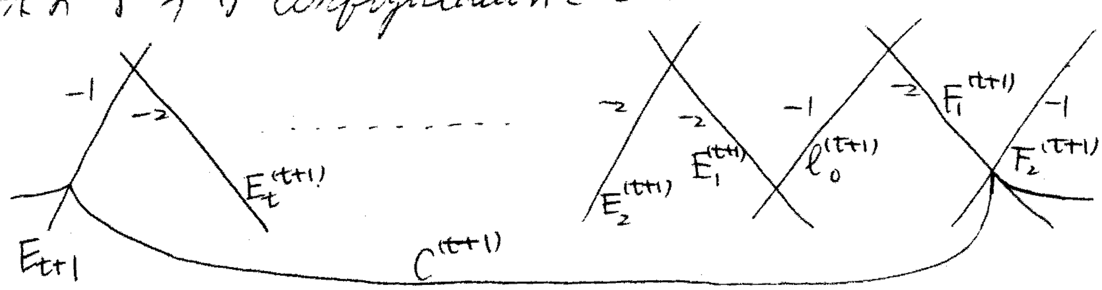
すると次の Lemma が成り立つ。

"Lemma 8"

$e_0 - t d_0 > 0$

Proof.)

$P_2, P_3, \cdots, P_t$ と順に blowing up していくと次のような configulation をもつことがわかる。



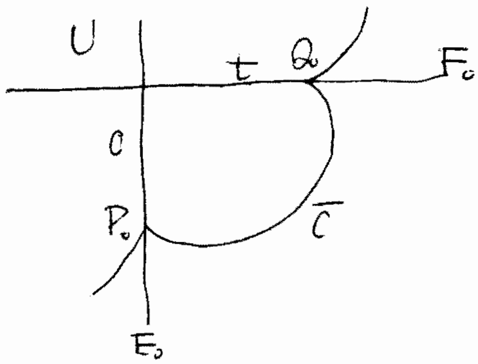
しかも、

$$C^{(t+1)} \sim (d_0+e_0)\, l_0^{(t+1)} + d_0 F_1^{(t+1)} + (d_0-\nu_1) F_2^{(t+1)} + \sum_{i=1}^{t+1} (e_0-i+1) E_i^{(t+1)}$$

C は Λ の general member としているから、$e_0 - td_0 \geq 0$ であるが、いま $e_0 - td_0 = 0$ と仮定する。Λ′ を linear pencil Λ の proper transform とすると、E_{t+1} は Λ′ の quasi-section になるが、Λ′ の general member が E_{t+1} の上に one place pt をもつことから、$(C^{(t+1)}, E_{t+1}) = 1 = \mu_t = d_0 = 1$ となって $d_0 > 1$ と仮定していることに矛盾する。よって $e_0 - td_0 > 0$ である。

Q.E.D

Lemma 8 の configuration で $F_2^{(t+1)}, l_0^{(t+1)}, E_1^{(t+1)}, E_2^{(t+1)}, \cdots, E_t^{(t+1)}$ をこの順に contract する。得られた surface を U, Λ の proper transform を $\bar{\Lambda}$ とおくと次の事が成り立っている。



(1) $\bar{\Lambda} = \langle \bar{C},\ d_0F_0 + (e_0 - td_0)E_0 \rangle$

$e_0 - td_0 > 0$

(2) $(E_0)^2 = 0$, $(F_0^2) = t$, $(E_0, F_0) = 1$

(3) $(\bar{C}, E_0) = d_0 P_0$, $(\bar{C}, F_0) = e_0 Q_0$

$P_0 \notin F_0$, $Q_0 \notin E_0$

(4) $d_1 = \mathrm{mult}_{P_0} \bar{C} = \mu_{t+1} < d_0$

$e_1 = \mathrm{mult}_{Q_0} \bar{C} = \nu_1 < e_0$

$e_0 > d_0 \geqq e_1$.

そこで (d_0, d_1), (e_0, e_1) のそれぞれの pair について、ユークリッド互除法を行なう。

$$d_0 = p_1 d_1 + d_2 \qquad 0 < d_2 < d_1$$
$$d_1 = p_2 d_2 + d_3 \qquad 0 < d_3 < d_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$d_{m-2} = p_{m-1} d_{m-1} + d_m \qquad 0 < d_m < d_{m-1}$$
$$d_{m-1} = p_m d_m \qquad 1 < p_m$$

$$e_0 = q_1 e_1 + e_2 \qquad 0 < e_2 < e_1$$
$$e_1 = q_2 e_2 + e_3 \qquad 0 < e_3 < e_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$e_{n-2} = q_{n-1} e_{n-1} + e_n \qquad 0 < e_n < e_{n-1}$$
$$e_{n-1} = q_n e_n \qquad 1 < q_n$$

次に、a_0, $a(i,j)$, b_0, $b(i,j)$ を inductive に次のように定義する。

$$a_0 = e_0 - t d_0$$

$$a(1, j) = j(a_0 - d_1) \qquad (1 \leq j \leq p_1)$$

$$a(2, j) = a_0 + j(a(1, p_1) - d_2) \qquad (1 \leq j \leq p_2)$$

$$\cdots\cdots$$

$$a(i, j) = a(i-2, p_{i-2}) + j(a(i-1, p_{i-1}) - d_i) \quad (1 \leq j \leq p_i)$$

$$b_0 = d_0$$

$$b(1, j) = j(b_0 - e_1) \qquad (1 \leq j \leq q_1)$$

$$b(2, j) = b_0 + j(b(1, q_1) - e_2) \qquad (1 \leq j \leq q_2)$$

$$\cdots\cdots$$

$$b(i, j) = b(i-2, q_{i-2}) + j(b(i-1, q_{i-1}) - e_i) \qquad (1 \leq j \leq q_i)$$

そこで、まず P_0 の infinitely near pt で $\bar{C}$ の上の点を $p_1 + p_2 + \cdots + p_m$ 回 blowing up する。次いで Q_0 の infinitely near pt で $\bar{C}$ の上にある点を $q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ 回 blowing up する。得られた blowing up の composition を $\rho : W \longrightarrow U$ とすると、$\rho^{-1}(E_0 \cup F_0)$ の w.g は次のようになる。但し E_0, F_0 の proper transform を同じ記号 E_0, F_0 で表わしてある。

$$\mathcal{E} \;—\; \overset{\alpha}{\underset{E_0}{\circ}} \;—\; \overset{\beta}{\underset{F_0}{\circ}} \;—\; \mathcal{F}$$

$\mathcal{E}$の w.g は 次ページのようにする。$\mathcal{F}$ の w.g も同様である。また α, β は

$\alpha = -(p_1+1)$ if $m>1$

$\alpha = -p_1$ if $m=1$

$\beta = t-(q_1+1)$ if $n>1$

$\beta = t-q_1$ if $n=1$

Λ の ρ による proper transform を $\tilde{\Lambda}$ とする。
単純な計算によって W の上で、

$$C \sim a_0 E_0 + b_0 F_0 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i} a(i,j)\, E(i,j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i} b(i,j)\, F(i,j)$$

が成り立つことがわかる。

$\tilde{C}$ は $\tilde{\Lambda}$ の general member 故、$a(i,j) \geqq 0$, $b(i,j) \geqq 0$。
上の式の右辺を $\tilde{\Delta}$ とおく。また、一般に上のような blowing up の composition を Eucledean transformation と呼ぶが、これについては Miyanishi [3] を参照。

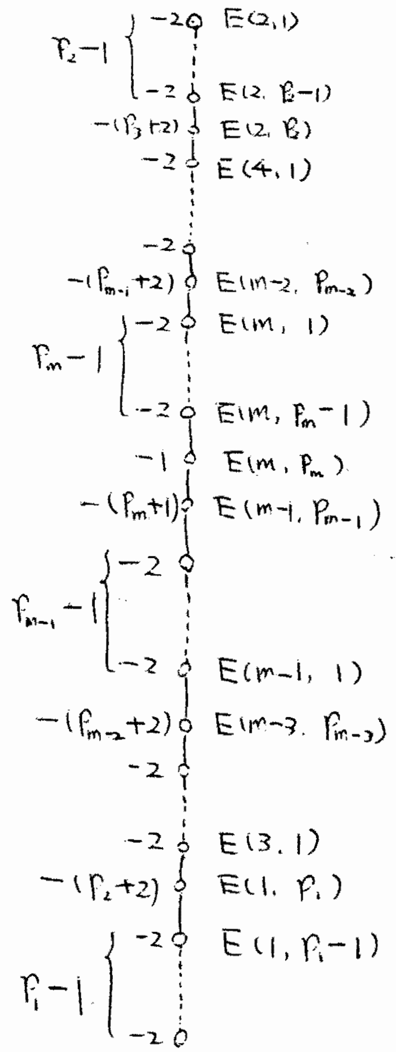
"Lemma 9"

$a(m,p_m)\,d_m = d_0 \cdot a(1,1)$, $\quad b(n,q_n)\,e_n = e_0 \cdot b(1,1)$

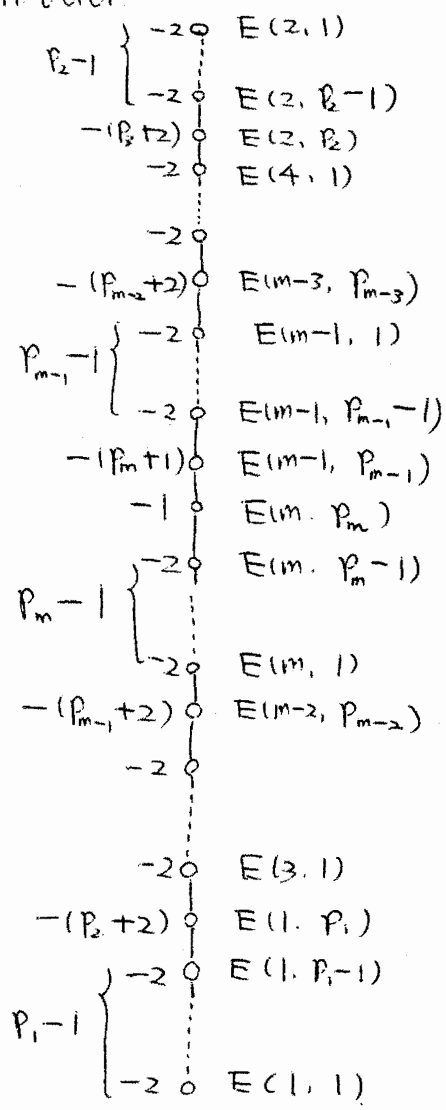
$a(m,p_m) \neq 1$, $\quad b(n,q_n) \neq 1$

The weighted graph of $\mathcal{E}$

(1) m: even



(2) n odd



E(2,1) が E_0 と結ばれる。

C' は E(m, p_m) と交わるが、他の component とは交わらない。 $(C', E(m, p_m)) = d_m$

"Lemma 10"

$a(1,1)=0,\quad b(1,1)=0$

従って，$a(m,p_m)=0$，$b(n,q_n)=0$ となり，

$E(m,p_m)$，$F(n,q_n)$ は $\widetilde{\Lambda}$ の quasi-section になる。

Proof)

$a(1,1)>0$，$b(1,1)>0$ と仮定する。まず次のことがわかる。

(1) $a(i,j)>0$, $\forall(i,j)$ $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq p_i$

$b(i,j)>0$, $\forall(i,j)$ $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq q_i$

(2) $a(m,p_m)\neq 1$, $b(n,q_n)\neq 1$

(3) B を $\widetilde{\Lambda}$ の base pt の集合とすると

$B=\{\widetilde{P},\widetilde{Q}\}$ 但し $\widetilde{P}=\widetilde{C}\cap E(m,p_m)$, $\widetilde{Q}=\widetilde{C}\cap F(n,q_n)$

で $\widetilde{P}$，$\widetilde{Q}$ は それぞれ $E(m,p_m)$, $F(n,q_n)$ 以外の $\widetilde{\Delta}$ の component に属さない。

Lemma 1 より F_0 は exceptional component でなければならない。F_0, $F(2,1)$, $\cdots$, $F(2,q_2-1)$ と contract し contraction を τ_1 とする。$(\tau_1(E_0))^2=t-(p_1+1)$ $\tau_1(F(2,q_2))^2=-(q_2+1)$.. よって $\tau_1(E_0)$ が exceptional component でなければならない。$\tau_1(E_0)$, $\tau_1(E(2,1))$ $\tau_1(E(2,2))$, $\cdots$, $\tau_1(E(2,p_2-1))$ と contract する。

contractionを τ_2とすると $(\tau_2\cdot\tau_1(F(2,q_2)))^2 = p_2-(q_2+1)$ $(\tau_2\cdot\tau_1(E(2,p_2))^2=-(p_3+1)$。よって $\tau_2\cdot\tau_1(F(2,q_2))$ が exceptional compでなければならない。以下contractionを続けて $E(m,p_m)$ と $F(n,q_n)$ の間にあるcurveで $E(m,p_m)$, $F(n,q_n)$ 以外のexceptional compをcontractできる限りcontractする。このcontractionのcompositionを $\tau: W\to Z$ とする。$\tau(\triangle)$の w.g は次のようになる。

$$G \;\underset{E(m,\,p_m)}{\overset{p}{\text{———}\circ\text{———}}}\; M \;\underset{F(n,\,q_n)}{\overset{q}{\text{———}\circ\text{———}}}\; H$$

ここで $p\leq 0$ または $q\leq 0$。何故ならもし $p>0$, $q>0$ とすると $M=\phi$ でなければならない。ところがcontractionでたとえば m,n evenの時 $E(m,p_{m-1})$, $F(n,q_{n-1})$ のいずれか一方が最後にcontractされている。$F(n,q_{n-1})$ が最後にcontractされていれば $q=0$ となって矛盾を生じる。よって $p\leq 0$ または $q\leq 0$。以上で、Lemma 3の条件をみたすsituationを得た。よってLemma 3により $G=\phi$ または $H=\phi$ でなければいけない。これは明らかに

矛盾。よって $a(1,1)=0$ または $b(1,1)=0$；以下 たとえば $a(1,1)=0$, $b(1,1)>0$ とすると、Lemma 3, 4 を使って、矛盾を得る。従って結局 $a(1,1)=0$, $b(1,1)=0$ となることがわかった。

Q.E.D

以上で、linear pencil $\tilde{\Lambda}$ は、base pt をもっていないこと、および $\tilde{\Lambda}$ の general member が $E(m, p_m)$, $F(n, q_n)$ の上に one place pt をもつ事から $E(m, p_m)$, $F(n, q_n)$ が $\tilde{\Lambda}$ の section になっていることがわかった。

φ を linear pencil $\tilde{\Lambda}$ に associate する morphism $\varphi: W \longrightarrow \mathbb{P}^1$ とする。今までの construction から

$$W - (E_0 \cup F_0 \cup (\cup E(i, j)) \cup (\cup F(i, j))) = X \simeq \mathbb{A}^2_k$$

は明らかである。

"Lemma 11".

上に定義した fibration φ は、$\varphi^{-1}(Q) \cap X$ が reducible になる fibre を唯一つもつ。しかも $\varphi^{-1}(Q) \cap X$ は 2 本の irreducible component からなる。

Proof)

$Q_1, \cdots, Q_s \in \mathbb{P}^1_k$ を，$\varphi^{-1}(Q_i) \cap X$ が reducible になる点全体とし，$\varphi^{-1}(Q_i) \cap X$ の irreducible component の数を n_i とする。$Q_{s+1}, \cdots, Q_t \in \mathbb{P}^1$ を，$\varphi^{-1}(Q_i)$ が reducible になるが，$\varphi^{-1}(Q_i) \cap U$ が irred になる点全体，$Q_\infty = \varphi(\tilde{\Delta})$ とおく。$\varphi^{-1}(Q_1), \cdots, \varphi^{-1}(Q_\infty)$ が φ の reducible fibre 全体である。$X - (\bigcup_{i=1}^{t} \varphi^{-1}(Q_i) \cap X) = \operatorname{Spec} B$ とおくと，B^*/k^* は rank が $n_1 + \cdots\cdots + n_s + (t-s)$ の free $\mathbb{Z}$ module になる。他方

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(\mathbb{P}^1_k - (Q_1, \cdots, Q_t, Q_\infty))} ; \varphi^{-1}(\mathbb{P}^1_k - (Q_1, \cdots, Q_t, Q_\infty)) \to \mathbb{P}^1_k - \{Q_1, \cdots, Q_\infty\}$$

は $\mathbb{P}^1$ bundle で，

$$\operatorname{Spec} B = \varphi^{-1}(\mathbb{P}^1_k - \{Q_1, \cdots, Q_t, Q_\infty\}) - (E(m, p_m) \cup F(n, q_n))$$
$$= \mathbb{A}^1_* \times \{\mathbb{P}^1_k - (Q_1, \cdots, Q_t, Q_\infty)\}$$

よって B^*/k^* は rank が $1+t$ の free $\mathbb{Z}$ module になる。よって $n_1 + n_2 + \cdots + n_s + (t-s) = 1+t$ だが $n_i \geq 2$ だから $s = 1$，$n_1 = 2$

Q.E.D

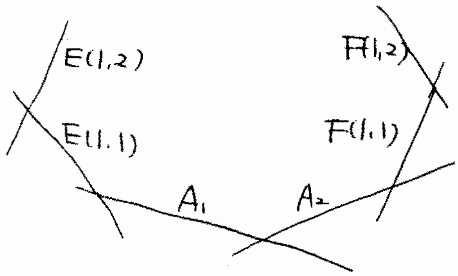
そこで，$E(1,1)$, $E(1,2)$ $\cdots\cdots$ を含む $\hat{\Lambda}$ の member を Γ_1，$F(1,1)$, $F(1,2)$, $\cdots\cdots$ を含む $\hat{\Lambda}$ の member を Γ_2 とする。

$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ とすると Γ_1, Γ_2 のいずれか一方は $(\mathrm{Supp}\,\Gamma_i) \cap X$ が irreducible になる。いま $(\mathrm{Supp}\,\Gamma_1) \cap X$ が irred であるとし X と交わる Γ_1 の component を A とする。A は section $F(n, q_n)$ と交わるから Γ_1 の component としての multiplicity $= 1$。すると $\mathrm{Supp}\,\Gamma_1$ は A 以外に exceptional curve of the first を含まねばならないが、これは矛盾である。よって $\Gamma_1 = \Gamma_2$。

$\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ とおくと $(\mathrm{Supp}\,\Gamma) \cap X$ は reducible である。何故なら もし $(\mathrm{Supp}\,\Gamma) \cap X$ が irred. とすると Lemma 11 によって $\exists\, Q \in \mathbb{P}$ が存在し $\varphi^{-1}(Q) = L_1 \cup L_2$ となる。L_1, L_2 は無限遠に one place pt をもつ irred non-singular rat curve で、一点で transversal に交わっているから L_1, L_2 をそれぞれ X 軸、Y 軸に選ぶことができる。(Miyanishi [2] を参照。) しかも、L_1, L_2 は section と交わるから multiplicity は 1 である。よって $\varphi^{-1}(Q) \cap X$ は $XY = 0$ によって定義される。Γ の component で X と交わるものを A とすると $A \cap X$ は $XY - c = 0$, $c \in k$

によって定義されることになり、pencil Λ の member Γ の component としての A の multiplicity が 1 になってしまい これは前と同様矛盾である。よって $(\mathrm{Supp}\,\Gamma)\cap X$ は reducible。

$(\mathrm{Supp}\,\Gamma)\cap X = A_1 \cup A_2$ とおくと、A_1, A_2 は最初の仮定(2)を使うと結局 $E(1,1)$, $F(1,1)$ と交わり、しかも $(A_1\cdot A_2)=1$ であることがわかる。



よって A_1, A_2 を y 軸, x 軸に選ぶことができて A_1, A_2 の multiplicity をそれぞれ d, e とすると $\Gamma\cap X$ は $x^d y^e=0$ によって定義される。$\Gamma\cap X$ は最初に考えた $X=A^2_k$ 上の pencil $\{C_\alpha\}_{\alpha\in k}$ の一 member であるから その member $\{f=0\}$ は $f=c(x^d y^e-1)=0$ によって定義されることがわかった。但 $c\in k$ とする。$(d,e)=1$ は明らか。

定理の証明了

Remark. 実は 上の d, e は最初の intersection multiplicity d_0, e_0 と一致することがわかる。

References

[1] S. S. Abhyankar and T. T. Moh ; Embeddings of the line in the plane, Journal für die reine und angewandte Mathematik. 276 (1975)

[2] M. Miyanishi ; An algebraic characterization of the affine plane, Journal of Mathematics of Kyoto University Vol. 15. No. 1, 1975.

[3] M. Miyanishi ; Analytic irreducibility of certain curves on a non-singular affine rational surfaces, Proc. Internat. Sympos. on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977

[4] H. Saito ; Fonctions entières qui se réduisent à certains polynomes (I), Osaka Journal of Math. 1972.