

長距離相互作用のある一次元フェルミオン模型 のダイナミクス*

京都大学基礎物理学研究所
太田 卓見†

概要

端に Majorana ゼロモードを持った系における長距離相互作用の効果とダイナミクスを調べるために、次近接相互作用を加えた Kitaev 模型を数值的に解析する。具体的には、厳密対角化と infinite time evolving block decimation (iTEBD) の方法を用い、エンタングルメントスペクトル、エンタングルメントエントロピー、そして相関関数の時間依存性と距離依存性を計算する。まず、トポロジカルな寄与を与える相互作用が存在するときの相図を決定し、それらの相をエンタングルメントスペクトルとトポロジカル不変量で特徴づける。次に、臨界点を通過するように系の相互作用を時間的に変化 (スウィープ) させ、系の時間発展を調べる。スウィープの速度を変えると、エンタングルメントスペクトルと、トポロジカル相を特徴付ける非局所的なストリング相関関数の時間及び距離依存性が変化する。比較的ゆっくりとしたスウィープを行うと、ストリング相関関数とエンタングルメントエントロピーの距離依存性に周期的な構造が現れる。これは臨界点近傍で励起された低エネルギーの Bogoliubov 準粒子に起因することが分かった。また、エンタングルメントスペクトルの時間発展に注目する。相互作用をスウィープすることにより、Majorana ゼロモードはバルクのモードと結合し、コヒーレンスを失うことが予想される。臨界点近傍で励起された Bogoliubov 準粒子により、エンタングルメントスペクトルの縮退数が時間的に変化することが分かった。

* 当該論文は、修士論文の一部を修正したものである。

† E-mail: takumi@yukawa.kyoto-u.ac.jp

目次

1	導入	3
1.1	背景	3
1.2	エンタングルメント	4
2	準備	10
2.1	フェルミオン模型	10
2.2	厳密対角化	15
2.3	Infinite time evolving block decimation	21
3	相図	28
3.1	エネルギー分散	28
3.2	擬スピンとトポロジカル不変量	30
3.3	エンタングルメントと秩序パラメータ	33
4	ダイナミクス	37
4.1	Bogoliubov 準粒子励起	37
4.2	相互作用スウィープ	39
5	まとめ	45
付録 A	Schmidt 分解	46
付録 B	AKLT 模型	47
付録 C	Majorana ゼロモード	48
付録 D	双対性	49
付録 E	Bogoliubov 基底状態	50

1 導入

1.1 背景

この三十年の間、量子 Hall 系やスピン液体に代表されるような、トポロジカル相と呼ばれる相が発見され、勢力的に研究が行われている。その相は Landau 流の局所的な秩序パラメータによっては特徴付けられず、非局所的なストリング秩序パラメータや、系の端に現れる励起によって特徴付けられることが分かってきた [1–8]。近年、エンタングルメントという非局所的な相関がトポロジカル相を特徴付けることが分かってきた [9–12]。エンタングルメントの指標としてトポロジカルエンタングルメントエントロピーが使われてきたが、Li と Haldane [13] によって提案されたエンタングルメントスペクトルは、トポロジカルエンタングルメントエントロピーよりも多くの情報を含んでいるので、エンタングルメントの指標として使われるようになった。彼らは、分数量子 Hall 系のエンタングルメントスペクトルは系の端に現れる低エネルギー励起のスペクトルと対応していることを発見した。それ以降、エンタングルメントスペクトルはトポロジカル相の研究に使われるようになってきた [14–24]。一例として、エンタングルメントを用いた量子スピン系における相転移について紹介する。スピン 1 の反強磁性スピン鎖はトポロジカル相を示し、エンタングルメントスペクトルは系を分割したときに現れるエッジモードを表しているという報告がある [14]。また、二次元正方格子及び蜂の巣格子上に定義された Valence Bond Solid (VBS) 状態を鏡映対称軸で分割した場合のエンタングルメントスペクトルが、一次元量子スピン系のエネルギースペクトルと対応付けられることが知られている [16, 17]。更に、梯子格子上の量子格子気体模型においても、これと同様の関係が知られている [20]。また、エンタングルメントの観点から AdS/CFT の諸分野が開拓されている (広範囲な分野を取り扱った日本語文献として、[25] がある。英語版は [26])。

一次元フェルミオン模型で量子相転移を示す最も簡単な模型は、最近接相互作用のあるスピンレス p 波超伝導体の Kitaev 模型である [27]。この模型の基底状態はトポロジカル相を示す。開放端条件の下で、トポロジカル相では系の各端にゼロエネルギーの Majorana フェルミオンが一個ずつ存在することができ、基底状態は二重に縮退する。その Majorana フェルミオンの数は系のギャップが閉じるまで一定であり、トポロジカル相を特徴付ける。この Kitaev 模型は超伝導体の近接効果 [28, 29] によって実現できるが、実際の量子細線の実験では、電子の波動関数や Cooper 対の混成の距離は有限であるため、長距離相互作用の効果を考慮した模型の検討は重要な課題である。その効果を考えると、系の端に存在する Majorana フェルミオンの数が変化し、新しいトポロジカル相が出現しうる。そのため、長距離相互作用を考えることは理論的な観点からも興味深い。

次近接相互作用のある Kitaev 模型をスピンを用いて表現すると、クラスター模型と呼ばれるスピン模型になる [30]。次近接相互作用が支配的であるとき、その系の基底状態はトポロジカル相に属し、クラスター状態と呼ばれている。クラスター状態は非局所的なストリング秩序パラメータで特徴づけることができる。開放端条件の下で系がクラスター状態のとき、系の各端には二個の Majorana フェルミオンが存在し、基底状態は四重に縮退する。クラスター模型は統計物理学や物

性物理学だけではなく、量子情報の観点からも重要である。クラスター状態は高くエンタングルしており、測定型量子計算におけるリソース状態として用いられる [31–33]。更に、クラスター状態は Localizable entanglement [34] の距離が発散することでも特徴づけられ、それはストリング秩序パラメータが有限であることを意味している。更に、一次元クラスターモデルは、光学格子上の冷却原子系での実現に関する議論がある [35, 36]。三角梯子格子に三スピン相互作用を導入するという提案である。

量子多体系の非平衡的な性質が関心を集めている。特に、臨界点を通過するように系の相互作用を時間的に変化 (スウィープ) させたときのダイナミクスは活発に研究されている [37–39]。臨界点で緩和時間が発散するために、状態は断熱的に変化することができず、終状態には有限の確率で欠陥が存在する。スウィープの時間とその密度の間には Kibble–Zurek スケーリング関係式が成り立つ [40]。しかし、トポロジカル相に現れるエッジモードのダイナミクスはトポロジカルな性質に依存し、Kibble–Zurek の物理と異なることが指摘された [41–43]。

この論文では、長距離相互作用のある一次元フェルミオンモデルのトポロジカルな性質に注目する。具体的には、Majorana フェルミオンの結合の仕方が異なる様々な相互作用を加えたときの相図を決定する。更に、臨界点を通過するように相互作用パラメータをスウィープし、系のダイナミクスを調べる。その際、励起状態のストリング相関関数とエンタングルメントエントロピーの距離依存性や、エンタングルメントスペクトルの時間発展に注目する。

この論文の構成は以下の通りである：この章の残りは、一次元量子系を例に挙げ、エンタングルメントの説明を行う。2章では、長距離相互作用のあるフェルミオンモデルを導入する。まず、Jordan–Wigner 変換を用いて Majorana フェルミオンのモデルに書き換えることでエッジモードの存在を示し、様々な相関関数の数値的な計算方法 (厳密対角化) を説明する。さらに、無限系での数値計算に用いる infinite time evolving block decimation (iTEBD) の方法を紹介する。3章では相互作用を加えたときの相図を決定し、各相をトポロジカル不変量とエンタングルメントスペクトルで特徴づける。4章では相互作用のスウィープを行い、ダイナミクスを調べる。相関関数の距離依存性とエンタングルメントスペクトルの時間依存性に注目し、それらを準粒子励起を用いて物理的に理解することを試みる。5章ではまとめと将来の展望を述べる。必要な計算の詳細などは付録にまとめた。

1.2 エンタングルメント

エンタングルメントとは量子力学における非局所的な相関である (最近の日本語レビュー文献としては [44, 45] などがある)。統計物理学、物性物理学、量子情報理論、量子場の理論などの広い分野にわたる研究でエンタングルメントが用いられている。エンタングルメントを通じて、量子的な情報を得ることができる。例えば、統計物理学ではエンタングルメントを通じて量子相転移を調べることができる [46]。特に、量子 Hall 状態やスピン液体のように、Landau 流の局所的な秩序パラメータでは記述できない相の特徴付けにエンタングルメントが有効であることが分かっている。また、量子多体系の数値計算にもエンタングルメントは有用である。波動関数をテンソルの積で表

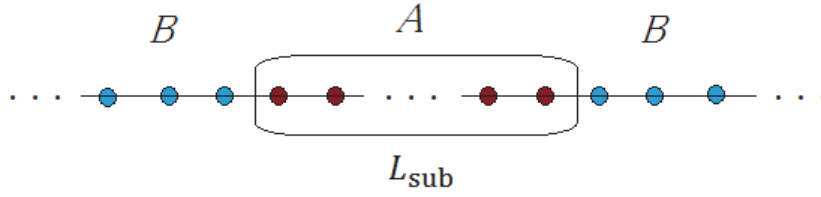


図 1.1 系の分割: 全系を二つの部分系 A, B に分割し, 部分系 A の長さを L_{sub} とする.

し, そのテンソルを最適化することで数値的に基底状態を得ることを考える. 量子情報との関わりから, その最適化問題はエンタングルメントを最大化することで解けることが分かった [47]. その事実を用いたのが infinite time evolving block decimation (iTEBD) [48] や密度行列繰り込み群 [49] などの方法であり, それらの方法は一次元量子系の基底状態を得るための効率の良い数値計算方法として認識されている.

エンタングルメントを定量化するために, エンタングルメントエントロピーを導入する. 全系を二つの部分系 A, B に分割し, それらの間のエンタングルメントを計算しよう (図 1.1). 部分系 A の長さを L_{sub} とする. この計算には, Schmidt 分解 (付録 A) を使って, 全系の規格化された波動関数 $|\Psi_{AB}\rangle$ を A の波動関数と B の波動関数の積で書くと便利である:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{\chi} \lambda_i |\phi_i\rangle_A |\psi_i\rangle_B. \quad (1.1)$$

ここで, $\{|\phi_i\rangle_A\}$ と $\{|\psi_i\rangle_B\}$ はそれぞれ A と B の正規直交系であり, 非負の実数 $\{\lambda_i\}$ は $\sum_{i=1}^{\chi} \lambda_i^2 = 1$ を満たす. この χ は Schmidt 数と呼ばれ, $\dim H_{\alpha}$ ($\alpha = A, B$) を部分系 α の Hilbert 空間の次元とすると, $\chi \leq \min\{\dim H_A, \dim H_B\}$ を満たす. 全系の波動関数をこのように表現すると, 部分系 A の縮約密度行列 ρ_A は容易に計算でき,

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}| \quad (1.2)$$

$$= \sum_{i=1}^{\chi} \lambda_i^2 |\phi_i\rangle_A \langle \phi_i|_A \quad (1.3)$$

となる. ここで, 部分系 B に関するトレースは, 部分系 B の自由度を隠すことを表している. 観測する部分系 A と, 隠された部分系 B の間のエンタングルメントを定量化するために, 縮約密度行列 ρ_A に対する von Neumann エントロピーとして, エンタングルメントエントロピーを定義する:

$$S_A = - \sum_{i=1}^{\chi} \lambda_i^2 \ln \lambda_i^2. \quad (1.4)$$

容易に分かるように, S_A は B の縮約密度行列 ρ_B に対するエンタングルメントエントロピー S_B と一致する. つまり, エンタングルメントエントロピーは部分系 A, B ではなく, むしろそれらの境界に関係した量であることが分かる. 簡単な例として, 二個のスピンの直積状態とシングレット状態を見てみよう. 一個目のスピンの部分系 A , 二個目のスピンの部分系 B に属するとす

る. 直積状態

$$|\Psi\rangle = |\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle \quad (1.5)$$

では $\chi = 1$ であり, $\lambda_1 = 1$ なので, エンタングルメントエントロピーは 0 である. 一方, シングレット状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle) \quad (1.6)$$

では $\chi = 2$ であり, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ なので, エンタングルメントエントロピーは $\ln 2$ である. この例から, 確かにエンタングルメントエントロピーは系の量子力学的な相関を定量化していることが分かる.

一次元量子系における相転移の研究においてエンタングルメントが用いられている [46]. 系にエネルギーギャップがあるとき, 全系を分割してできた二個の部分系は境界の周辺でしか相関しない. そのため, 部分系の長さ L_{sub} を長くしても, 系の残りの部分とのエンタングルメントは変化しないと期待される. 実際, 熱力学極限でエンタングルメントエントロピーは定数になる. この事実が背景にあるため, エネルギーギャップがある系の場合には, iTEBD や密度行列繰り込み群のような数値計算を効率よく行うことができる. 一方, 系が臨界的であるとき, エンタングルメントエントロピーの部分系の長さ依存性は対数的になる [46, 50]. このことは次のように説明できる: 臨界点ではエネルギーギャップがゼロになり, 相関長は発散し, 系はスケール対称性を得る. そして, 一次元量子系ではこのスケール対称性が共形対称性に格上げされることにより, エンタングルメントエントロピーに対数依存性として現れる. 例えば, 量子相転移を示す最も簡単なスピン模型である横磁場 Ising 模型

$$H_{\text{TFIM}} = - \sum_{i=1}^N \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - h \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \quad (1.7)$$

は, 臨界点 $h = 1$ においてエンタングルメントエントロピーが対数的に振る舞う (図 1.2). 一般に, (1+1) 次元共形場理論では, エンタングルメントエントロピーは, 部分系 A の長さを L_{sub} としたときに

$$S_A(L_{\text{sub}}) \sim \frac{c}{3} \ln L_{\text{sub}} \quad (1.8)$$

のように振る舞う [51]. ここに現れる c はセントラルチャージと呼ばれ, 共形場理論を分類する普遍的な量である. 例えば, 自由ボソンは $c = 1$, 自由フェルミオンは $c = \frac{1}{2}$ である. また, 横磁場 Ising 模型の臨界点は $c = \frac{1}{2}$ で特徴づけられ, 自由フェルミオンに分類される.

エンタングルメントエントロピー以外のエンタングルメントの指標としてエンタングルメントスペクトルが挙げられる [13]. 縮約密度行列 ρ_A は

$$\rho_A = \sum_{i=1}^{\chi} \lambda_i^2 |\phi_i\rangle_A \langle \phi_i|_A \quad (1.9)$$

$$= \exp(-H_E) \quad (1.10)$$

と表すことにより, エンタングルメントエントロピーは温度が 1, 「ハミルトニアン」が H_E で与えられる系の熱力学的なエントロピーとみなすことができる. その「ハミルトニアン」の固有値と

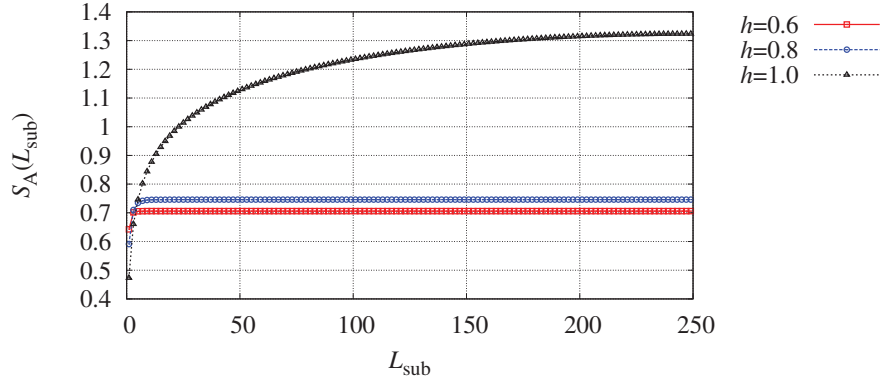


図 1.2 開放端条件での横磁場 Ising 模型に対するエンタングルメントエントロピーの部分系の長さ依存性 [46]: $h = 0.6, 0.8$ はエネルギーギャップが開いており, エンタングルメントエントロピーは定数になる. 一方, 臨界点 $h = 1$ においてエンタングルメントエントロピーの部分系の長さ依存性に対数的な振る舞いが見られる. サイト数は 503, 部分系の長さは 249.

してエンタングルメントスペクトルを定義する:

$$\xi_i = -\ln \lambda_i^2. \quad (1.11)$$

この量は「ハミルトニアン」のエネルギー構造を表し, $\{\lambda_i\}$ の和によって表されるエンタングルメントエントロピーよりも多くの情報を含むと期待される. 実際に, 量子 Hall 効果の研究において, Li と Haldane はエンタングルメントスペクトルと低エネルギーのエッジの励起モードとの対応を見出した [13]. その論文では, エンタングルメントスペクトルの準位構造が, 量子 Hall 系のエッジに現れる共形場理論の指標と対応していることが示された. それ以降, エンタングルメントスペクトルの観点から, 様々な量子系の相転移の研究が盛んに行われるようになった [14–24].

一次元量子系において, エンタングルメントスペクトルとエッジモードとの関係を見てみよう. 系を二分割 (図 1.3) したときの切断した箇所に注目する. 相互作用のパターンによっては, 系を切断した箇所にエッジモードと呼ばれる特徴的なモードが現れる. スピン 1 の反強磁性スピン鎖に現れる Haldane 相 [52, 53] の場合, エッジモードとして仮想的なスピン $\frac{1}{2}$ が現れる (付録 B). この自由度は, エンタングルメントスペクトルの最低準位の縮退数に対応する [14]. 図 1.4 に基底状態が Haldane 相を示すスピン 1 の等方的な反強磁性スピン鎖

$$H = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} \quad (1.12)$$

のエンタングルメントスペクトルを示す. また, 2.1.1 節で導入する Kitaev 模型の場合, エッジモードとして Majorana フェルミオンが現れる. この自由度もエンタングルメントスペクトルの最低準位の縮退数として現れる (3.3 節).

一次元のトポロジカル相は非局所的な秩序パラメータで特徴づけられる. Haldane 相を特徴付ける量はストリング秩序パラメータ [1] と呼ばれ, ストリング相関関数 $O_\alpha(L)$ の極限として定義

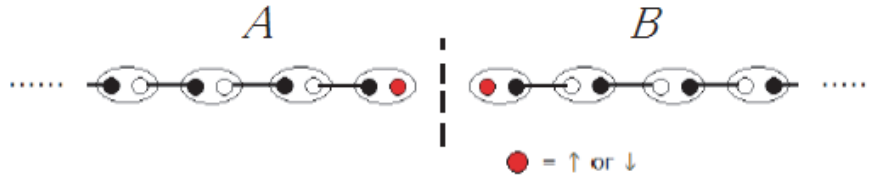


図 1.3 系の分割: 全系 (無限系) を一カ所で切断し, 二つの部分系 A, B (半無限系) に分割する. スピン 1 の等方的反強磁性 Heisenberg 模型 (1.12) に現れる Haldane 相において, 切断した箇所に仮想的なスピンの自由度が現れる.

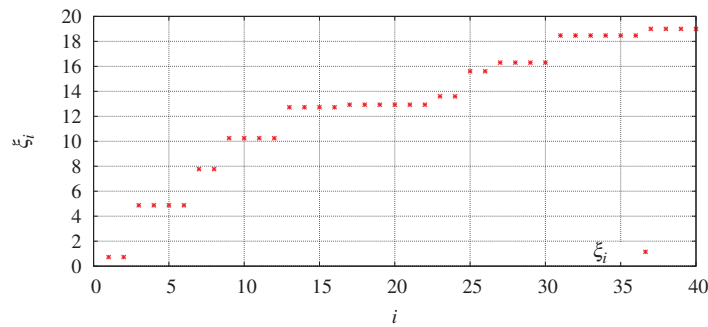


図 1.4 エンタングルメントスペクトル: Haldane 相を示すスピン 1 の等方的反強磁性 Heisenberg 模型の基底状態に対し, iTEBD を用いた無限系の計算を行った. ボンド次元 (2.3.1 節) χ_b を 40 とした. 各準位が偶数重に縮退している. 最低準位の二重縮退は, 図 1.3 に示した仮想的なスピンの自由度に対応している.

される.

$$O_\alpha = \lim_{L \rightarrow \infty} O_\alpha(L), \tag{1.13}$$

$$O_\alpha(L) = \left\langle S_1^\alpha \prod_{k=2}^{L-1} \exp(i\pi S_k^\alpha) S_L^\alpha \right\rangle, \quad \text{for } \alpha = x, y, z. \tag{1.14}$$

スピン 1 の等方的反強磁性 Heisenberg 模型の基底状態に対し, ストリング相関関数を iTEBD で計算すると, 確かに長距離で有限の値に収束していることが分かる (図 1.5). 開放端条件のとき, この秩序パラメータは非局所的なユニタリ変換のもとで, 局所的な強磁性秩序パラメータに変換される [3]. また, ハミルトニアンは大域的な離散的対称性 $Z_2 \times Z_2$ を持つハミルトニアンに変換される. このハミルトニアンの基底状態は四重に縮退するが, これは変換する前のハミルトニアンの基底状態が示すエッジモードに対応する.

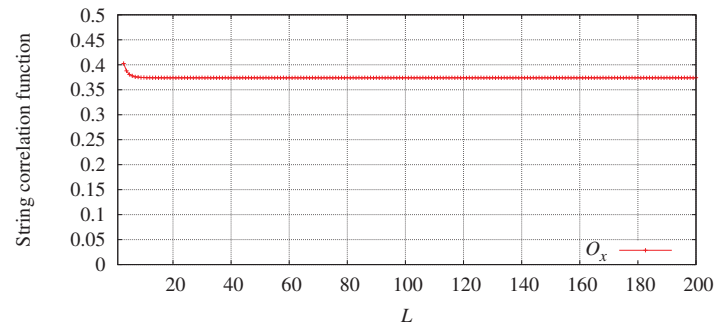


図 1.5 スtring相関関数: Haldane 相を示すスピン 1 の等方的反強磁性 Heisenberg 模型 (1.12) の基底状態に対し, iTEBD を用いて計算した ($\chi_b = 40$). 長距離で有限の値に収束している.

2 準備

2.1 フェルミオン模型

この論文で扱うハミルトニアンを紹介する. 2.1.1 節ではトポロジカル相を示す模型である Kitaev 模型とクラスター模型の説明をした後, 2.1.2 節でそれらを Majorana フェルミオン表示し, 系の端にゼロエネルギーのエッジモードが現れることを示す. 2.1.3 節ではトポロジカル相を特徴付ける非局所的な相関関数を定義する. 以下では, サイト数を N とし, 周期境界条件のとき, Pauli 行列は $\sigma_{N+1}^\alpha = \sigma_1^\alpha$, $\sigma_{N+2}^\alpha = \sigma_2^\alpha$ ($\alpha = x, y, z$), 開放端条件のとき, $\sigma_{N+1}^\alpha = \sigma_{N+2}^\alpha = 0$ ($\alpha = x, y, z$) とする.

2.1.1 長距離相互作用のあるフェルミオン模型

一次元横磁場 Ising 模型 H_{TFIM} は, Jordan–Wigner 変換

$$c_i = \prod_{j=1}^{i-1} (-\sigma_j^z) \sigma_i^-, \quad c_i^\dagger = \prod_{j=1}^{i-1} (-\sigma_j^z) \sigma_i^+ \quad (2.1)$$

により, Kitaev 模型 (スピinless p 波超伝導体) H_{Kitaev} に変換される [27]:

$$H_{\text{TFIM}} = - \sum_{i=1}^N (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \lambda \sigma_i^z) \quad (2.2)$$

$$= - \sum_{i=1}^N \left[(c_i^\dagger - c_i)(c_{i+1}^\dagger + c_{i+1}) + 2\lambda c_i^\dagger c_i \right] \quad (2.3)$$

$$= H_{\text{Kitaev}}. \quad (2.4)$$

ここで, $c_i c_{i+1}^\dagger$ ($c_i^\dagger c_{i+1}$) の項はホッピング項, $c_i c_{i+1}$ ($c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger$) の項は超伝導ペアリング項, $c_i^\dagger c_i$ の項は化学ポテンシャル項と呼ばれる. Kitaev 模型はトポロジカル相を示す模型である. 2.1.2 節で説明するように, このトポロジカル相では系の端にゼロエネルギーの Majorana フェルミオンが局在する. 結合定数 λ の大小により, 二個の異なった相が現れる. $\lambda < 1$ の弱結合領域はトポロジカルに非自明な相 (トポロジカル相) であり, 横磁場 Ising 模型の強磁性相に対応する. このとき, 系の端にゼロエネルギーの Majorana フェルミオンが局在し, 基底状態は二重に縮退する. 一方, $\lambda > 1$ の強結合領域はトポロジカルに自明であり, 横磁場 Ising 模型の無秩序相に対応する. このとき, 系の端にゼロエネルギーの Majorana フェルミオンが局在せず, 基底状態は縮退しない.

次に, 三スピン相互作用を含むクラスター模型 H_{C}

$$H_{\text{C}} = - \sum_{i=1}^N J^{XZZ} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x \quad (2.5)$$

を考えよう [30, 54]. Kitaev 模型と同様に, Jordan–Wigner 変換により, クラスター模型は自由な

フェルミオン模型に変換される:

$$H_C = - \sum_{i=1}^N J^{XZX} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x \quad (2.6)$$

$$= \sum_{i=1}^N J^{XZX} (c_i^\dagger - c_i)(c_{i+2}^\dagger + c_{i+2}). \quad (2.7)$$

この模型の相互作用 (クラスター相互作用) をフェルミオン化すると長距離の相互作用になる. つまり, クラスター相互作用を Kitaev 模型に加えることで, 長距離のホッピング項と超伝導ペアリング項を持った p 波超伝導体が得られる. 長距離相互作用がある場合, 系の端に存在するゼロエネルギーの Majorana フェルミオン数が変化するため, クラスター相互作用はトポロジカルに非自明な効果を与える.

2.1.2 Majorana フェルミオン表示

Kitaev 模型を Majorana フェルミオンを用いて特徴付けよう. Majorana フェルミオンは

$$\bar{c}_{2i-1} = c_i^\dagger + c_i, \quad \bar{c}_{2i} = i(c_i - c_i^\dagger), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

のように定義され, この \bar{c} はエルミート演算子で, 次の反交換関係を満たす:

$$\bar{c}_i = \bar{c}_i^\dagger, \quad \{\bar{c}_i, \bar{c}_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (2.9)$$

i 番目のサイト上の Jordan–Wigner フェルミオン c_i を二個の Majorana フェルミオン \bar{c}_{2i-1} , \bar{c}_{2i} に分解する様子を図 2.1 に表す. Majorana フェルミオンで Kitaev 模型のハミルトニアンを表すと

$$H_{\text{Kitaev}} = - \sum_{i=1}^N \left[(c_i^\dagger - c_i)(c_{i+1}^\dagger + c_{i+1}) + 2\lambda c_i^\dagger c_i \right] \quad (2.10)$$

$$= -i \sum_{i=1}^N (\bar{c}_{2i} \bar{c}_{2i+1} - \lambda \bar{c}_{2i-1} \bar{c}_{2i}) \quad (2.11)$$

となる. 開放端条件の下で, Majorana フェルミオンが相互作用する様子を図 2.2 に表す. 赤色の線がオンサイト相互作用 ($\bar{c}_{2i-1} \bar{c}_{2i}$), 青色の線が最近接相互作用 ($\bar{c}_{2i} \bar{c}_{2i+1}$) に対応している. $\lambda = 0$ のとき, ハミルトニアンに \bar{c}_1 と \bar{c}_{2N} が現れないため, エネルギーに影響を与えない. そのため, 系の端にゼロエネルギーの Majorana フェルミオンが局在する. $\lambda < 1$ の弱結合領域 (トポロジカル相) では, 図 2.2 の青色の線で表される相互作用が支配的になり, 系の端にゼロエネルギーの Majorana フェルミオンが指数関数的に局在する (付録 C). このゼロモードが存在するために, この相の基底状態は二重に縮退する. 一方, $\lambda > 1$ の強結合領域 (非トポロジカル相) では, 図 2.2 の赤色の線で表される相互作用が支配的になり, 系の端にゼロエネルギーの Majorana フェルミオンが局在しない.

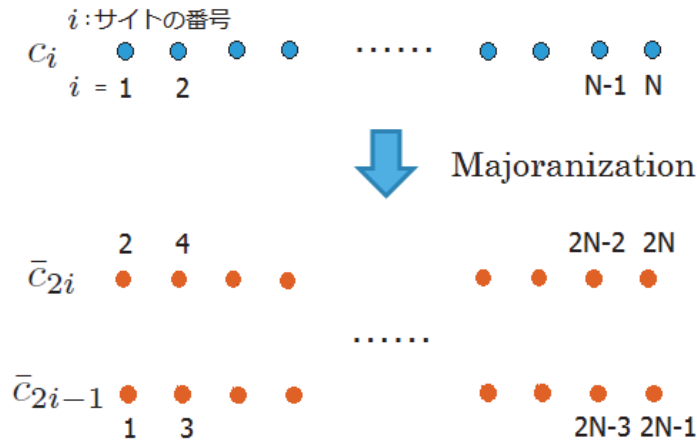


図 2.1 Majorana フェルミオン表示: Jordan-Wigner フェルミオン c_i を Majorana フェルミオン $\bar{c}_{2i-1}, \bar{c}_{2i}$ に分解する.

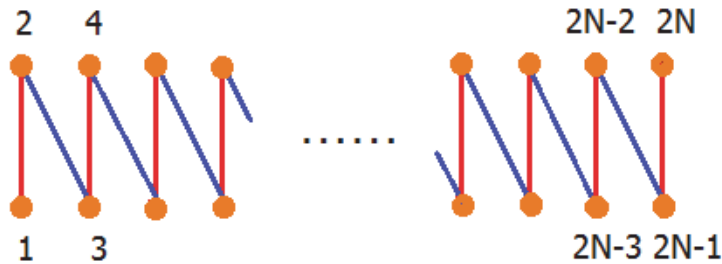


図 2.2 Kitaev 模型の Majorana フェルミオン表示: 線で結ばれた Majorana フェルミオンが相互作用している. 赤色の線がオンサイト相互作用 ($\bar{c}_{2i-1}\bar{c}_{2i}$), 青色の線が最近接相互作用 ($\bar{c}_{2i}\bar{c}_{2i+1}$) に対応している. 青色の相互作用が支配的であるとき (λ が小さいとき), 系の端に局在したゼロモードが存在する.

次に, クラスタモデルを考える. 式 (2.5) で与えられるクラスタモデルのハミルトニアンを Majorana フェルミオン $\{\bar{c}_i\}$ 表示すると

$$H_C = i \sum_{i=1}^N J^{XZX} \bar{c}_{2i} \bar{c}_{2i+3} \tag{2.12}$$

のように書ける. これを図 2.3 に図示する. 図中の斜めの線は Majorana フェルミオンの相互作用を表している. 周期境界条件のとき, $2N$ 個の全ての Majorana フェルミオンが二個隣のサイトの Majorana フェルミオンとペアを組んで相互作用している. 一方, 図から分かるように, 開放端条件のときは系の両端に相互作用していない (ハミルトニアンに現れない) Majorana フェルミオンが二個ずつ存在する. この四個の自由な Majorana フェルミオンがクラスタモデルの基底状態 (クラスタ相) の四重縮退の原因である. 2.2.1 節で述べる方法を用いると, Majorana フェルミオンの振幅が分かる. 例として, ゼロエネルギーの二個の Majorana フェルミオンの振幅を図 2.4 に示

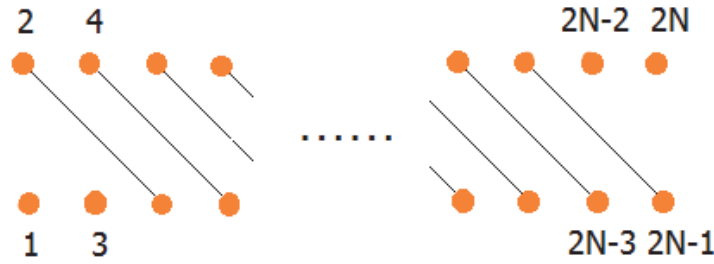


図 2.3 クラスター模型の Majorana フェルミオン表示: 線で結ばれた Majorana フェルミオンが相互作用している. 開放端条件のとき, 系の両端に相互作用していない Majorana フェルミオンが存在する.

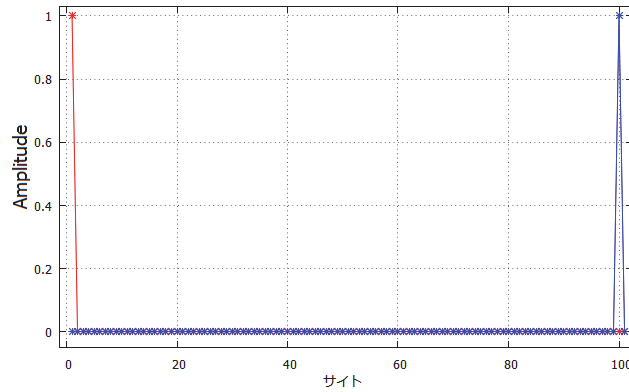


図 2.4 ゼロエネルギーを持つ Majorana フェルミオンの振幅: Majorana フェルミオン \bar{c}_1 (赤線), \bar{c}_{2N-2} (青線) は系の片端に局在している ($N = 101$).

す. 確かに系の端に Majorana フェルミオンが局在していることが分かる.

3 章では Kitaev 模型とクラスター模型に相互作用を加え, トポロジカル相の安定性や量子相転移を議論する. それらの相互作用として Ising 相互作用とクラスター相互作用を用いると, 考えるハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^N (-h\sigma_i^z + J^{XX}\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x - J^{XZX}\sigma_i^x\sigma_{i+1}^z\sigma_{i+2}^x + J^{YY}\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + J^{YZY}\sigma_i^y\sigma_{i+1}^z\sigma_{i+2}^y) \quad (2.13)$$

となる. これらの相互作用を Majorana フェルミオンで書くと, ハミルトニアンは次のようになる:

$$H = i \sum_{i=1}^N (h\bar{c}_{2i-1}\bar{c}_{2i} + J^{XX}\bar{c}_{2i}\bar{c}_{2i+1} + J^{XZX}\bar{c}_{2i}\bar{c}_{2i+3} - J^{YY}\bar{c}_{2i-1}\bar{c}_{2i+2} + J^{YZY}\bar{c}_{2i-1}\bar{c}_{2i+4}). \quad (2.14)$$

相互作用の様子を Majorana フェルミオンを用いて図示すると, 図 2.5 となる.

ゼロエネルギーの Majorana フェルミオン (ゼロモード) を調べるのに適した形に変形しよう.

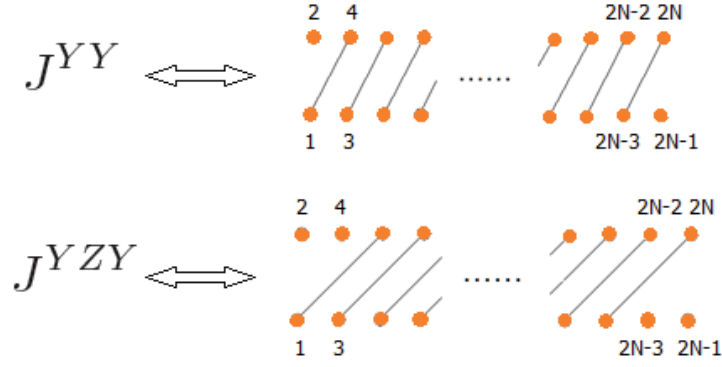


図 2.5 様々な相互作用の Majorana 表示: 左の結合定数に対応する Majorana フェルミオンの相互作用を右に書いた. 線で結んだ Majorana フェルミオンが相互作用している.

$\Psi = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_{2N-1}, \bar{c}_{2N})^T$ という基底を用いると, ハミルトニアンは

$$H = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & -J^{YY} & 0 & J^{YZY} & \dots \\ -h & 0 & J^{XX} & 0 & J^{XZX} & 0 & \dots \\ 0 & -J^{XX} & 0 & h & \ddots & & \\ J^{YY} & 0 & -h & 0 & & \ddots & \\ 0 & -J^{XZX} & \ddots & & \ddots & & \\ -J^{YZY} & 0 & & \ddots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & & & \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

という $2N$ 次の交代行列になる. ゼロモードは, 行列 (2.15) のゼロ固有値をもつ固有ベクトルである (付録 C). 例えば, $J^{YY} = J^{YZY} = 0$ のとき, ゼロモードの満たすべき方程式は離散時間の減衰調和振動子の方程式になる [59]. 従って, その方程式に規格化可能な解が存在するとき, ゼロモードは系の端に局在していることが分かる.

2.1.3 スtring 相関関数

2.1.2 節では, クラスタモデルの基底状態は Majorana ゼロモードによって特徴付けられることを見た. 一方, そのトポロジカルな性質は非局所的な String 相関関数を用いても特徴付けられる. クラスタモデルに対して String 相関関数を定義する.

クラスタ相では, 距離 L だけ離れた二点間の非局所的な String 相関関数

$$O_{XZX}(L) = (-1)^L \left\langle \sigma_1^x \sigma_2^y \left(\prod_{j=3}^{L-2} \sigma_j^z \right) \sigma_{L-1}^y \sigma_L^x \right\rangle \quad (2.16)$$

が長距離において有限の値に収束する [54]. その極限值

$$O_{XZX} = \lim_{L \rightarrow \infty} O_{XZX}(L) \quad (2.17)$$

をストリング秩序パラメータと定義する.

開放端条件のとき, クラスタール Ising 模型

$$H(\lambda) = \sum_{i=1}^N (-\sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x + \lambda \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) \quad (2.18)$$

は双対変換

$$\mu_i^z = \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x, \quad \mu_i^x = \prod_{j=1}^i \sigma_j^z, \quad \sigma_{N+1}^x = 1 \quad (2.19)$$

により自己双対である (付録 D). この変換により, ストリング相関関数は μ を用いて

$$O_{XZX}(L) = (-1)^L \langle \mu_1^y \mu_{L-1}^y \rangle \quad (2.20)$$

と書ける. Haldane 相のストリング相関関数と同様に, 非局所的な変換によって, 非局所的な相関関数 (2.16) が, 局所的な相関関数 (2.20) になった.

クラスタール模型を z 軸周りに π 回転させた模型

$$H_{C^*} = \sum_{i=1}^N \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y \quad (2.21)$$

を双対なクラスタール模型と呼ぶ. この模型の基底状態 (双対なクラスタール相) は四重に縮退する. クラスタール模型と同様に, ストリング相関関数を

$$O_{YZY}(L) = \left\langle \sigma_1^y \sigma_2^x \left(\prod_{j=3}^{L-2} \sigma_j^z \right) \sigma_{L-1}^x \sigma_L^y \right\rangle \quad (2.22)$$

と定義することにより, 双対なクラスタール相を検出することができる.

2.2 厳密対角化

2.2.1 節では, Lieb–Schultz–Mattis [55] の議論に従い, スピン系をフェルミオン模型に変換し, 厳密対角化の方法を示す. そして, この方法を用い, エンタングルメントを計算する方法を示す. 2.2.2 節で相関関数を計算する. 2.2.3 節では, 時間依存した Bogoliubov 変換の方法を説明し, 系のダイナミクスを調べる準備を行う.

2.2.1 自由フェルミオン模型のエンタングルメント

一次元量子スピン模型の中には, Jordan–Wigner 変換により自由フェルミオン模型に移されるものがある. それらの模型を一般に扱う方法を紹介し, 基底状態のエンタングルメントエントロピーとエンタングルメントスペクトルの数値計算方法 [46, 55] を示す. スピン系をフェルミオン表現に変換するために, Jordan–Wigner 変換を施す:

$$c_i = \prod_{j=1}^{i-1} (-\sigma_j^z) \sigma_i^-, \quad c_i^\dagger = \prod_{j=1}^{i-1} (-\sigma_j^z) \sigma_i^+. \quad (2.23)$$

この変換により, 例えば

$$\sigma_i^z = 2c_i^\dagger c_i - 1, \quad (2.24)$$

$$\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x = (c_i^\dagger - c_i)(c_{i+1}^\dagger + c_{i+1}), \quad (2.25)$$

$$\sigma_i^y \sigma_{i+1}^y = -(c_i^\dagger + c_i)(c_{i+1}^\dagger - c_{i+1}), \quad (2.26)$$

$$\sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x = -(c_i^\dagger - c_i)(c_{i+2}^\dagger + c_{i+2}), \quad (2.27)$$

$$\sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y = (c_i^\dagger + c_i)(c_{i+2}^\dagger - c_{i+2}) \quad (2.28)$$

となるので, 横磁場 Ising 模型

$$H_{\text{TFIM}} = - \sum_{i=1}^N (J\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + h\sigma_i^z) \quad (2.29)$$

や XY 模型

$$H_{\text{XY}} = \sum_{i=1}^N (J^{XX} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J^{YY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) \quad (2.30)$$

やクラスター模型

$$H_{\text{C}} = - \sum_{i=1}^N J^{XZX} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x \quad (2.31)$$

や双対なクラスター模型

$$H_{\text{C}^*} = \sum_{i=1}^N J^{YZY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y \quad (2.32)$$

などは全てフェルミオンの二次形式で書ける. 以下では, 次の形をした N サイトの一般的なハミルトニアンを扱う:

$$H = \sum_{i,j=1}^N \left[c_i^\dagger A_{ij} c_j + \frac{1}{2} \left(c_i^\dagger B_{ij} c_j^\dagger + c_i B_{ji}^* c_j \right) \right]. \quad (2.33)$$

ここで, A は N 次の実対称行列, B は N 次の実交代行列と仮定する. もちろん, 結合定数がサイトに依存するような場合でもよい. この形のハミルトニアンは Bogoliubov 変換

$$\eta_j = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\phi_{ij} + \psi_{ij}}{2} c_i + \frac{\phi_{ij} - \psi_{ij}}{2} c_i^\dagger \right] \quad (2.34)$$

により対角化できる:

$$H = \sum_{\mu=1}^N E_\mu (\eta_\mu^\dagger \eta_\mu - \frac{1}{2}), \quad E_\mu \geq 0. \quad (2.35)$$

ただし, ϕ_μ, ψ_μ はそれぞれ N 次行列 ϕ, ψ の第 μ 列成分で, 次の連立方程式の解である:

$$\begin{cases} E_\mu \psi_i = (A + B)\phi_\mu, \\ E_\mu \phi_i = (A - B)\psi_\mu. \end{cases} \quad (2.36a)$$

$$(2.36b)$$

以上により, 基底状態 $|\text{GS}\rangle$ は Bogoliubov 真空

$$\eta_\mu |\text{GS}\rangle = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, N \quad (2.37)$$

で与えられる.

次に, Majorana フェルミオンに変換する:

$$\bar{c}_{2i-1} = c_i^\dagger + c_i, \quad \bar{c}_{2i} = i(c_i - c_i^\dagger), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.38)$$

これを用いると, Bogoliubov 演算子 η_μ は

$$\eta_\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\phi_{i\mu} \bar{c}_{2i-1} - i\psi_{i\mu} \bar{c}_{2i}) \quad (2.39)$$

のように書け, i 番目のサイトにおける μ 番目の励起に対する Majorana フェルミオンの振幅は $\phi_{i\mu}$ と $\psi_{i\mu}$ である. \bar{c} は

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_{2i-1} = \sum_{\mu=1}^N \phi_{i\mu} (\eta_\mu + \eta_\mu^\dagger), \\ \bar{c}_{2i} = i \sum_{\mu=1}^N \psi_{i\mu} (\eta_\mu - \eta_\mu^\dagger) \end{array} \right. \quad (2.40a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_{2i-1} = \sum_{\mu=1}^N \phi_{i\mu} (\eta_\mu + \eta_\mu^\dagger), \\ \bar{c}_{2i} = i \sum_{\mu=1}^N \psi_{i\mu} (\eta_\mu - \eta_\mu^\dagger) \end{array} \right. \quad (2.40b)$$

と書ける. 基底状態は Bogoliubov 真空なので, $\eta_\mu |\text{GS}\rangle = 0$ ($\forall \mu$) であることから, Majorana フェルミオンの相関関数は

$$\langle \bar{c}_{2i-1} \bar{c}_{2j-1} \rangle = \sum_{\mu=1}^N \phi_{i\mu} \phi_{j\mu} = \delta_{ij}, \quad (2.41)$$

$$\langle \bar{c}_{2i} \bar{c}_{2j} \rangle = \sum_{\mu=1}^N \psi_{i\mu} \psi_{j\mu} = \delta_{ij}, \quad (2.42)$$

$$\langle \bar{c}_{2i} \bar{c}_{2j-1} \rangle = -\langle \bar{c}_{2j-1} \bar{c}_{2i} \rangle = i \sum_{\mu=1}^N \psi_{i\mu} \phi_{j\mu} \quad (2.43)$$

となる. この Majorana フェルミオンの相関関数は次の形に書くと, エンタングルメントを調べる際に便利である:

$$\langle \bar{c}_i \bar{c}_j \rangle = \delta_{ij} + i\Gamma_{ij}^A. \quad (2.44)$$

この行列 Γ^A は $2N$ 次の交代行列である. Wick の定理を適用することにより, この行列から物理量の計算が可能である. 一般に, 可逆な $2N$ 次交代行列 A は, $2N$ 次の特殊直交行列 W を用いて, 次の形のブロック行列にできる:

$$W^\dagger A W = \bigoplus_{i=1}^N \nu_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

このことを用いて, Γ^A をブロック対角化する:

$$W^\dagger \Gamma^A W = \bigoplus_{i=1}^N \nu_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma^C. \quad (2.46)$$

Γ^C の構造は, フェルミオン $\tilde{c}_{2i-1} = \sum_{j=1}^N W_{2i-1,j} \bar{c}_j$ はフェルミオン $\tilde{c}_{2i} = \sum_{j=1}^N W_{2i,j} \bar{c}_j$ としか相関しないことを意味する. この事実を用いて, 新しいフェルミオン (Dirac フェルミオン) を導入する:

$$d_i = \frac{1}{2}(\tilde{c}_{2i-1} + i\tilde{c}_{2i}). \quad (2.47)$$

以上の変換により得られたフェルミオン d の相関関数は

$$\langle d_i^\dagger d_j \rangle = \delta_{ij} \frac{1 - \nu_i}{2} \quad (2.48)$$

である. このことは, N 個のフェルミオンが相関していないことを意味する. つまり, 全系の密度行列は各サイトの密度行列の直積である. 長さ L_{sub} の部分系のエンタングルメント構造は単純であり, 縮約密度行列 ρ は単なる直積

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_{L_{\text{sub}}} \quad (2.49)$$

となり, エンタングルメントエントロピーは

$$S(L_{\text{sub}}) = \sum_{i=1}^{L_{\text{sub}}} [-p_i \ln p_i - (1 - p_i) \ln (1 - p_i)], \quad p_i = \frac{1 - \nu_i}{2} \quad (2.50)$$

で与えられる. 縮約密度行列の固有値 $\{\lambda_i(L_{\text{sub}})\}$ は $2^{L_{\text{sub}}}$ 個あり, $[p_1 + (1 - p_1)] \cdots [p_{L_{\text{sub}}} + (1 - p_{L_{\text{sub}}})]$ の展開に現れる項である. つまり

$$\lambda_j(L_{\text{sub}}) = \prod_{i=1}^{L_{\text{sub}}} p_i^{1-s_i} (1 - p_i)^{s_i}, \quad s_i = 0, 1 \quad (2.51)$$

という形をしている. 以上の手順をまとめると図 2.6 のようになる.

2.2.2 相関関数

量子状態を特徴付けるためにエンタングルメントを用いる方法があるが, 一方, 伝統的に用いられてきた相関関数を用いる方法がある. 相関関数の決定には相関関数を計算する必要がある. 各相を特徴付けるのは局所的な相関関数であったり, ときには非局所的な相関関数であったりする. ここでは自由フェルミオン模型の基底状態に関する相関関数の計算方法を紹介する [55].

例として, クラスタ相を特徴付ける相関関数を計算してみよう. それはストリング相関関数という非局所的な相関関数であり,

$$O_{XZX}(L) = (-1)^L \left\langle \sigma_1^x \sigma_2^y \left(\prod_{k=3}^{L-2} \sigma_k^z \right) \sigma_{L-1}^y \sigma_L^x \right\rangle \quad (2.52)$$

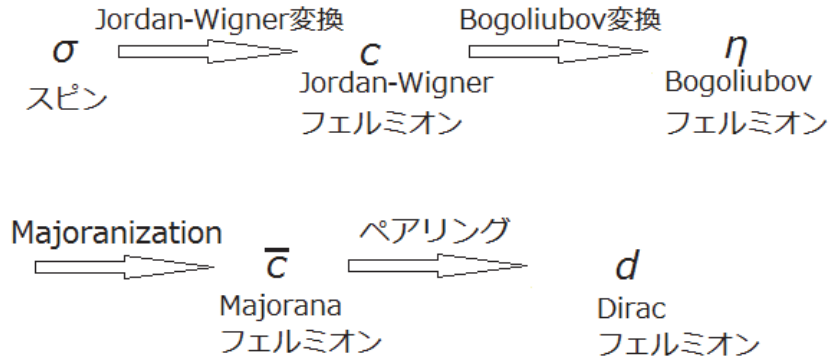


図 2.6 自由フェルミオン模型に移されるスピン模型に対してエンタングルメントを求める手順.

で与えられる [54]. これ以降の計算の便宜のため, \mathcal{A} と \mathcal{B} という演算子を定義しておく:

$$\mathcal{A}_i = c_i + c_i^\dagger = \bar{c}_{2i-1}, \tag{2.53}$$

$$\mathcal{B}_i = c_i - c_i^\dagger = -i\bar{c}_{2i}. \tag{2.54}$$

Wick の定理により, 相関関数の計算に必要な縮約は

$$\langle \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \rangle = \delta_{ij}, \tag{2.55}$$

$$\langle \mathcal{B}_i \mathcal{B}_j \rangle = -\delta_{ij}, \tag{2.56}$$

$$\langle \mathcal{B}_i \mathcal{A}_j \rangle = \sum_{\mu=1}^N \psi_{i\mu} \phi_{j\mu} = D(i, j) \tag{2.57}$$

である. \mathcal{A} と \mathcal{B} を使うと, スtring相関関数は

$$O_{XZX}(L) = (-1)^{L+1} \langle \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_3 \cdots \mathcal{A}_{L-2} \mathcal{B}_{L-2} \mathcal{A}_{L-1} \mathcal{A}_L \rangle \tag{2.58}$$

となる. Wick の定理を用いてこれを展開すると, 上記の縮約が成分となる交代行列の Pfaffian で与えられることが分かる. 今の場合, String相関関数には添え字が同じ \mathcal{A} (\mathcal{B}) は現れないので, 交代行列の構造が単純化される. そのため, Pfaffian の計算は行列式

$$O_{XZX}(L) = \begin{vmatrix} D(1, L) & D(1, 3) & \cdots & D(1, L-1) \\ D(2, L) & D(2, 3) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(L-2, L) & \cdots & \cdots & D(L-2, L-1) \end{vmatrix} \tag{2.59}$$

の計算に帰着される.

横磁場 Ising 模型の強磁性相を特徴付ける相関関数の計算も同様に可能である. Jordan-Wigner 変換の非局所的な性質のために, ニスピンの局所的な相関は非局所的なものになる. 例えば, 距離 L だけ離れたニスピン相関関数

$$O_{XX}(L) = \langle \sigma_1^x \sigma_L^x \rangle \tag{2.60}$$

を調べよう. 同様に計算すると

$$O_{XX}(L) = \langle \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 \cdots \mathcal{B}_{L-1} \mathcal{A}_{L-1} \mathcal{A}_L \rangle \quad (2.61)$$

$$= \begin{vmatrix} D(1,2) & D(1,3) & \cdots & D(1,L) \\ D(2,2) & D(2,3) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(L-1,2) & \cdots & \cdots & D(L-1,L) \end{vmatrix} \quad (2.62)$$

となる. ニスピン of 局所的な相関関数は $L-1$ 次の行列の行列式で与えられることが分かる.

2.2.3 時間依存 Bogoliubov 変換

系の相互作用を変化させた後の時間発展に注目し, 量子多体系の非平衡ダイナミクスを調べる. ここでは Jordan–Wigner フェルミオン c の二次形式で書かれた, 時間依存したハミルトニアンを扱う. すなわち

$$H(t) = \sum_{i,j=1}^N \left[c_i^\dagger A_{ij}(t) c_j + \frac{1}{2} \left(c_i^\dagger B_{ij}(t) c_j^\dagger + c_i B_{ji}^*(t) c_j \right) \right] \quad (2.63)$$

を考える. ただし, 結合定数は時間依存を持っている. このような形を仮定する理由は, Heisenberg 表示の Jordan–Wigner フェルミオン $\{c_{i,H}(t)\}$ が従う Heisenberg 運動方程式が線形となるからである:

$$i \frac{d}{dt} c_{i,H}(t) = \sum_{j=1}^N \left(A_{ij}(t) c_{j,H}(t) + B_{ij}(t) c_{j,H}^\dagger(t) \right). \quad (2.64)$$

初期の時刻 t^{in} で $H(t^{\text{in}})$ を対角化する Bogoliubov 演算子を η_μ^{in} , 対応する固有ベクトルを ϕ_μ^{in} , ψ_μ^{in} とし,

$$u_\mu^{\text{in}} = \frac{\phi_\mu^{\text{in}} + \psi_\mu^{\text{in}}}{2}, \quad v_\mu^{\text{in}} = \frac{\phi_\mu^{\text{in}} - \psi_\mu^{\text{in}}}{2} \quad (2.65)$$

を定義する. この Heisenberg 運動方程式は $c_H(t)$ の形を

$$c_{i,H}(t) = \sum_{\mu=1}^N \left(u_{i,\mu}(t) \eta_\mu^{\text{in}} + v_{i,\mu}^*(t) \eta_\mu^{\text{in}\dagger} \right) \quad (2.66)$$

と仮定して, $u_\mu(t)$, $v_\mu(t)$ が初期条件

$$u_\mu(t_{\text{in}}) = u_\mu^{\text{in}}, \quad v_\mu(t_{\text{in}}) = v_\mu^{\text{in}} \quad (2.67)$$

のもとで連立一次微分方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{d}{dt} u_{i,\mu}(t) = \sum_{j=1}^N \left(A_{ij}(t) u_{j,\mu}(t) + B_{ij}(t) v_{j,\mu}(t) \right), \\ i \frac{d}{dt} v_{i,\mu}(t) = - \sum_{j=1}^N \left(A_{ij}(t) v_{j,\mu}(t) + B_{ij}(t) u_{j,\mu}(t) \right) \end{array} \right. \quad (2.68a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{d}{dt} u_{i,\mu}(t) = \sum_{j=1}^N \left(A_{ij}(t) u_{j,\mu}(t) + B_{ij}(t) v_{j,\mu}(t) \right), \\ i \frac{d}{dt} v_{i,\mu}(t) = - \sum_{j=1}^N \left(A_{ij}(t) v_{j,\mu}(t) + B_{ij}(t) u_{j,\mu}(t) \right) \end{array} \right. \quad (2.68b)$$

を満たすと解ける [56].

時刻 t での物理量の計算をしよう. ここで, Schrödinger 表示と Heisenberg 表示の関係

$$\langle \Psi(t) | O(c_i, c_i^\dagger) | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t_{\text{in}}) | O(c_{i,H}(t), c_{i,H}^\dagger(t)) | \Psi(t_{\text{in}}) \rangle \quad (2.69)$$

を思い出そう. 初期状態 $|\Psi(t_{\text{in}})\rangle$ として Bogoliubov 真空を用いたので, 期待値は Wick の定理を用いて容易に計算できる. 時間依存性は $u_\mu(t)$, $v_\mu(t)$ だけに入っているため, 物理量の時間発展は, $u_\mu(t)$, $v_\mu(t)$ の時間発展に帰着される.

時間依存したエンタングルメントの解析方法は, 自由フェルミオン模型に対する方法と同様である. 各時刻 t で Dirac フェルミオンを構成し, 時間依存したエンタングルメントエントロピー $S(L_{\text{sub}}, t)$ とエンタングルメントスペクトル $\{\lambda_i(L_{\text{sub}}, t)\}$ が得られる.

2.3 Infinite time evolving block decimation

今までは厳密対角化の方法を用いて量子スピン系を解析してきたが, その方法では有限サイズ効果が問題となるので, infinite time evolving block decimation (iTEBD) を用いてこの問題を回避する. この方法はエンタングルメントを利用し, 系のサイズが無限である一次元量子系の基底状態を効率的に計算することを可能にする. まず, iTEBD の基礎となる行列積状態を導入し, iTEBD のアルゴリズムを紹介する.

2.3.1 行列積状態

量子系の波動関数 $|\psi\rangle$ は, 考えている系の Hilbert 空間の基底 $\{|i\rangle\}$ を用いて

$$|\Psi\rangle = \sum_i C_i |i\rangle \quad (2.70)$$

のように与えられる. 和の上限 (Hilbert 空間の次元) は考えている系に依存し, 量子系では系のサイズに関して指数的に大きくなる. このため, 量子系の数値計算では計算コストに問題が生じる.

この問題を解決するために様々な方法が提案されてきた. iTEBD や密度行列繰り込み群は一次元量子系の数値計算において成功を収めてきた. これらの方法では波動関数を行列の積

$$|\Psi\rangle_{\alpha_L \beta_R} = \sum_{\{m_i\}, \{\alpha\}, \{\beta\}} A_{\alpha_L, \beta_1}(m_1) \cdots A_{\alpha_i, \beta_i}(m_i) \cdots A_{\alpha_N, \beta_R}(m_N) |m_1\rangle \cdots |m_i\rangle \cdots |m_N\rangle \quad (2.71)$$

で表す. ただし, $|m_i\rangle$ は i で指定された Hilbert 空間 (物理空間) の基底であり, その次元を物理次元と呼び, d_i で表す. また, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ は補助的な空間に対応し, その次元をボンド次元と呼び, $\chi_{b,i}$ で表す. d_i と $\chi_{b,i}$ は i に依存する量であるが, 以下では簡単のために, 物理次元とボンド次元を i に依存しないと仮定し, それらの値をそれぞれ d , χ_b とする. ボンド次元の χ_b の大きさは模型のエンタングルメントの程度に依存し, 十分大きければ, この波動関数は真の波動関数に対する良い近似となる. この波動関数を図で表すと図 2.7 になる. このように書かれた波動関数を行列積状態 (Matrix Product State, MPS) と呼ぶ.

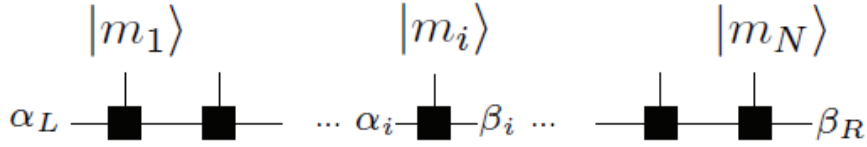


図 2.7 行列積状態: 四角形の箱がテンソル A である. 上向きの足が物理空間, 横向き足が補助的な空間に対応している.

波動関数を行列積で表す利点はエンタングルメントにある. 行列積状態がエンタングルメントを巧みに利用していることを見るために, スピン $\frac{1}{2}$ のシングレット状態を例として考える. シングレット状態は最大エンタングル状態である:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle) \quad (2.72)$$

この状態は二個の状態の直積状態には分解できない. すなわち,

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j=\uparrow,\downarrow} C_{1,i}|i_1\rangle C_{2,j}|j_2\rangle \quad (2.73)$$

を満たす係数 $\{C\}$ は存在しない. 一方, テンソルを

$$A(\uparrow_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0\right), \quad A(\downarrow_1) = \left(0 \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (2.74)$$

$$A(\uparrow_2) = \left(0 \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \quad A(\downarrow_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0\right)^T \quad (2.75)$$

とすれば, シングレット状態を行列積波動関数で表すことができる. つまり, 行列の積という操作に非局所的な相関効果を取り入れることができている. また, このような行列積で表すことの数学的な利点は, Schmidt 分解 (付録 A)

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle |\phi_{\alpha}\rangle \quad (2.76)$$

を通じて, 系のエンタングルメントの構造が明快になることである. このことを以下で説明する.

Schmidt 分解を用いて行列積状態を書き換える [57]. まず, $r-1$ 番目のサイトと r 番目のサイトの間で Schmidt 分解する (図 2.8):

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^{\chi_b} \lambda_{\alpha}^{[r-1]} |\psi_{\alpha}^{[r-1]}\rangle |\psi_{\alpha}^{[r]}\rangle. \quad (2.77)$$

ここで, $r-1$ 番目より左の波動関数を $|\psi_{\alpha}^{[r-1]}\rangle$, r 番目より右の波動関数を $|\psi_{\alpha}^{[r]}\rangle$ とした. $\lambda_{\alpha}^{[r-1]}$ は対角行列であり, 対角成分は非負の実数である. この $|\psi_{\alpha}^{[r]}\rangle$ を更に r 番目のサイトと $r+1$ 番

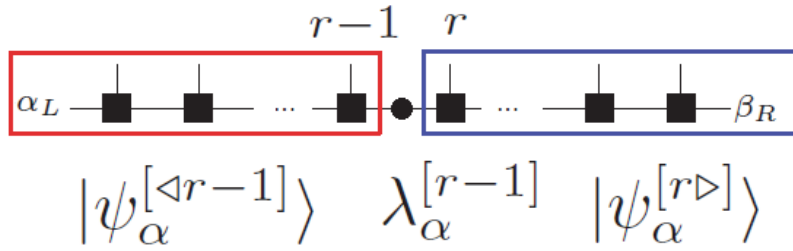


図 2.8 Schmidt 分解: 波動関数 $|\Psi\rangle$ を $r-1$ 番目のサイトと r 番目のサイトの間で Schmidt 分解する.

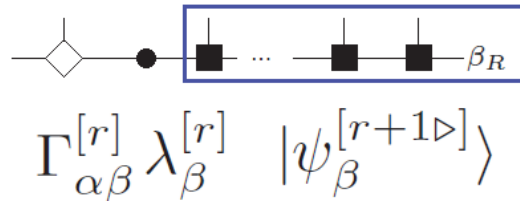


図 2.9 Schmidt 分解: テンソル $\Gamma^{[r]}$ を導入した.

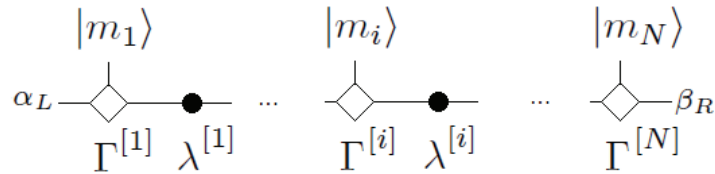


図 2.10 行列積状態: 波動関数が $\{\Gamma\}$ と $\{\lambda\}$ により表される.

目のサイトの間で Schmidt 分解する:

$$|\psi_\alpha^{[r\triangleright]}\rangle = \sum_{\beta=1}^{\chi_b} \sum_{m_r=1}^d \Gamma_{\alpha\beta}^{[r]}(m_r) |m_r\rangle \lambda_\beta^{[r]} |\psi_\beta^{[r+1\triangleright]}\rangle. \quad (2.78)$$

ただし, r 番目の波動関数を r 番目の Hilbert 空間の基底で展開し, その展開係数を $\Gamma^{[r]}$ というテンソルで表した (図 2.9). この操作を左右の波動関数すべてに対して行えば, 最終的な波動関数は

$$|\Psi\rangle_{\alpha_L\beta_R} = \sum_{\{m_i\},\{\alpha\},\{\beta\}} \Gamma_{\alpha_L\beta_1}^{[1]}(m_1) \lambda_{\beta_1\alpha_2}^{[1]} \cdots \Gamma_{\alpha_i\beta_i}^{[i]}(m_i) \lambda_{\beta_i\alpha_{i+1}}^{[i]} \cdots \Gamma_{\alpha_N\beta_R}^{[N]}(m_N) |m_1\rangle \cdots |m_i\rangle \cdots |m_N\rangle \quad (2.79)$$

となり, 図で表すと図 2.10 となる. 先ほどの形と違い, $\{A\}$ ではなく $\{\Gamma\}$ と $\{\lambda\}$ により波動関数が表された. この $\{\lambda\}$ が縮約密度行列の固有値, つまりエンタングルメントの情報を持っており, その値が大きいほど波動関数に大きな寄与をする.

2.3.2 虚時間発展

この行列積状態を使って iTEBD のアルゴリズムを紹介する. iTEBD ではハミルトニアン H の並進対称性を仮定する. 相互作用の長さが n サイトのときは n サイトを単位とする. iTEBD は

無限系を扱う計算手法であるため、有限サイズ効果を考えなくてもよい。必要なテンソルは n 個の $\{\Gamma\}$ と $\{\lambda\}$ である。これらをまとめて **iMPS** (infinite matrix product state) と呼ぶ。まずは iMPS の成分の値をランダムに与え、初期状態 $|\Psi_0\rangle$ を作る。そしてこの状態を虚時間発展させることで、基底状態 $|\Psi\rangle$ を得ることができる:

$$|\Psi\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\exp(-H\tau)|\Psi_0\rangle}{|\exp(-H\tau)|\Psi_0\rangle|}. \quad (2.80)$$

虚時間発展させるという操作は iMPS の更新に他ならない。相互作用が n サイトに及ぶとき、時間 dt の虚時間発展演算子

$$U = \exp(-Hd\tau), \quad d\tau \ll 1 \quad (2.81)$$

の作用は、鈴木–Trotter 分解 [30] を用いると簡略化される。ここでは説明の都合上、相互作用が最近接であるハミルトニアンのみを考え、二サイトを単位とする。iMPS は $\Gamma^{[A]}, \lambda^{[A]}, \Gamma^{[B]}, \lambda^{[B]}$ である。ハミルトニアンが二個の部分

$$H = H_A + H_B = \sum_{\text{even } i} H^{i,i+1} + \sum_{\text{odd } i} H^{i,i+1} \quad (2.82)$$

に分けられる場合を考えよう。このとき、一次の鈴木–Trotter 分解

$$\exp H = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{1}{n}H_A\right) \exp\left(\frac{1}{n}H_B\right) \right)^n \quad (2.83)$$

を用いて、iMPS に $U_A = \exp(-H_A d\tau)$ と $U_B = \exp(-H_B d\tau)$ を順に作用させる (図 2.11)。これで虚時間 $d\tau$ だけ進んだ状態が得られる。更新の詳細は後に述べるが、この操作をエネルギーが収束するまで繰り返せば、基底状態が得られる。もちろん、iMPS の更新の際に、対称的な二次の鈴木–Trotter 分解

$$\exp H = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{1}{2n}H_A\right) \exp\left(\frac{1}{n}H_B\right) \exp\left(\frac{1}{2n}H_A\right) \right)^n \quad (2.84)$$

を用いてもよい。数値計算の際には、 n を有限の値とする。そのため、一次の鈴木–Trotter 分解の誤差は $\frac{1}{n}$ 程度、二次の鈴木–Trotter 分解の誤差は $\frac{1}{n^2}$ 程度になる。

iMPS の更新の詳細を述べる。まず、 U_A を作用させたときを考える。このときの更新は次の四ステップを踏む必要がある。この手順を図にまとめたのが図 2.12 である。

step1

U_A を作用させる。 U_A は $\Gamma^{[A]}, \Gamma^{[B]}$ の物理空間の足に作用する。

step2

$\Gamma^{[A]}, \lambda^{[A]}, \Gamma^{[B]}, \lambda^{[B]}, U_A$ の足を縮約し、テンソル M を作る:

$$M_{\alpha ij\beta} = \sum_{k,l=1}^d \sum_{\gamma,\delta,\epsilon,\zeta=1}^{\chi_b} \lambda_{\alpha\gamma}^{[B]} \Gamma_{\gamma\delta}^{[A]}(k) \lambda_{\delta\epsilon}^{[A]} \Gamma_{\epsilon\zeta}^{[B]}(l) \lambda_{\zeta\beta}^{[B]} U_{ij;kl}^{[A]}. \quad (2.85)$$

和は縮約された全ての足の対して行う。

step3

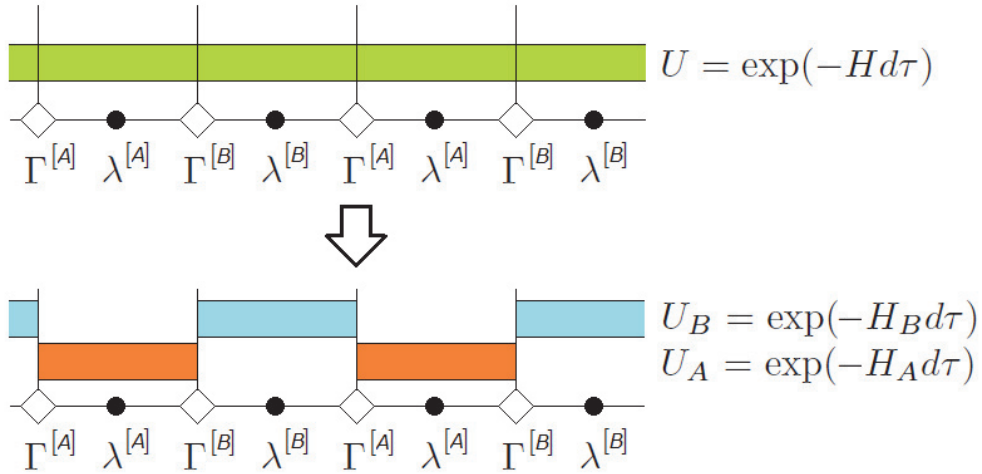


図 2.11 鈴木-Trotter 分解: 全ハミルトニアン H による虚時間発展演算子 U を, 二個のハミルトニアン H_A, H_B による虚時間発展演算子 U_A, U_B に分解する

物理空間と補助的な空間のテンソル積をとり, M を $d_{\chi_b} \times d_{\chi_b}$ 次元の行列とみなし, 特異値分解を行う:

$$M_{\alpha i; \beta j} = \sum_{\gamma, \delta=1}^{d_{\chi_b}} M_{\alpha i; \gamma} \Lambda_{\gamma \delta} M_{\delta; \beta j}. \tag{2.86}$$

行列 Λ は対角成分が非負の d_{χ_b} 次元の対角行列である. 元々の行列の大きさに戻すために, d_{χ_b} 個の特異値から大きい特異値を χ_b 個だけ選ぶ. 行列 Λ からそれらの特異値に対応する行列成分を取り出し, その行列を $\tilde{\lambda}^{[A]}$ とする. また, その特異値に対応する行 (列) を d_{χ_b} 次行列 $M^{[A]}$ ($M^{[B]}$) から取り出し, テンソル空間を物理空間と補助的な空間に戻す. こうして得られたテンソルを X (Y) とする.

step4

X の左から $1 = \lambda^{[B]} \lambda^{[B]-1}$, Y の右から $1 = \lambda^{[B]-1} \lambda^{[B]}$ をかけ,

$$\tilde{\lambda}^{[A]} = \lambda^{[B]-1} X, \quad \tilde{\lambda}^{[B]} = Y \lambda^{[B]-1} \tag{2.87}$$

とすることで元々の iMPS と同型な iMPS $\{\tilde{\Gamma}^{[A]}, \tilde{\lambda}^{[A]}, \tilde{\Gamma}^{[B]}, \tilde{\lambda}^{[B]}\}$ を得る.

以上により U_A が作用したときの iMPS の更新が終わる. 同様に U_B の更新を行う. また, 次近接相互作用のあるハミルトニアンを扱うときは三サイトと単位とするが, iMPS の更新の手順は全く同じである.

2.3.3 実時間発展

虚時間発展により基底状態 $|\Psi(0)\rangle$ が求まった. 初期状態をその基底状態とし, 実時間方向の時間発展を行う. 時刻 t での波動関数は

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|\Psi(0)\rangle \tag{2.88}$$

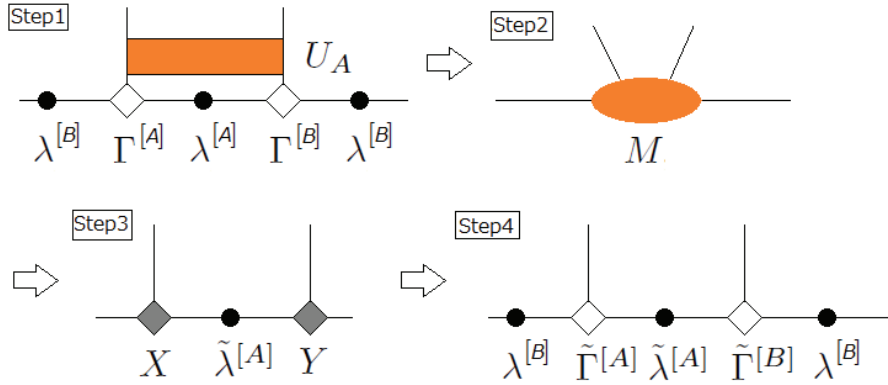


図 2.12 iMPS の更新: 虚時間発展演算子を作用させた後の iMPS の形が元の iMPS の形と同じになるように変形する.

で与えられる. この状態を求めるためには, 虚時間発展のときと同様に iMPS を更新していけばよい. もちろん, このハミルトニアンは時間に依存していてもよく, 時刻 t での波動関数は

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-i \int_0^t H(t)dt\right) |\Psi(0)\rangle \quad (2.89)$$

で与えられる.

2.3.4 物理量の計算

得られた基底状態の波動関数または時間発展した波動関数を使い, 様々な物理量を計算する. もっとも簡単なのがエンタングルメントエントロピー S とエンタングルメントスペクトル $\{\xi_i\}$ で, iMPS から直ちに分かる:

$$S = - \sum_{i=1}^{\chi_b} \lambda_i^2 \ln \lambda_i^2, \quad (2.90)$$

$$\xi_i = - \ln \lambda_i^2. \quad (2.91)$$

次に, 相関関数を考える. i 番目のサイトにだけ作用する演算子 $O^{[i]}$ を計算する. これは, Schmidt 基底の直交性から

$$\langle \Psi | O^{[i]} | \Psi \rangle = \sum_{\alpha, \beta, j, k} (\lambda_\alpha)^2 \Gamma_{\alpha, \beta}^{[j]} O_{j, k}^{[i]} (\Gamma_{\alpha, \beta}^{[k]})^* (\lambda_\beta)^2 \quad (2.92)$$

と求めることができる (図 2.13). i 番目のサイトに演算子 $O^{[i]}$ があり, それを iMPS のテンソルで挟んだような構造をしている. 同様に, i 番目と j 番目のサイト間の相関関数も同様に計算できる (図 2.14). 実際の計算では, iMPS から必要なテンソルを $|i - j|$ 個程度並べ, それらのテンソルの縮約を行うだけでよい.

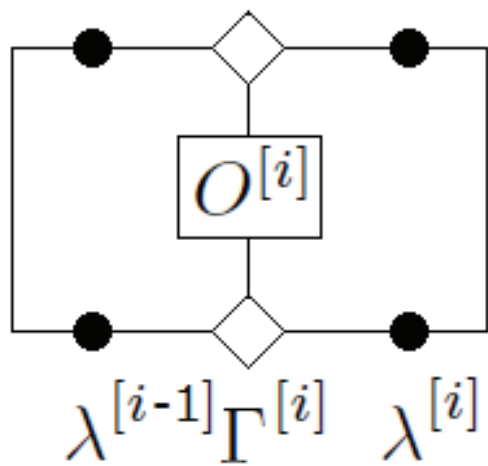


図 2.13 i 番目だけに作用する演算子の期待値.

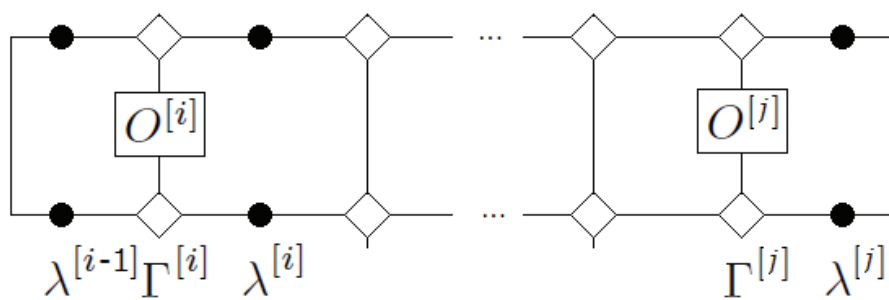


図 2.14 i 番目と j 番目のサイト間の相関関数.

3 相図

2.1 節では, Kitaev 模型に次近接相互作用 (クラスター相互作用) を入れることで, Majorana ゼロモードの数を変えることができるを見た. この章では, エンタングルメントスペクトルに注目し, 一般化されたクラスター模型

$$H_{\text{GC}} = \sum_{i=1}^N (-J^{XZX} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x + J^{YY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J^{YZY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y) \quad (3.1)$$

の基底状態に関する相図を調べる. 3.1 節で, 周期境界条件のときのエネルギー分散からギャップレス励起が存在する領域を決定し, 3.2 節で, その領域で分かたれた領域 (相) でトポロジカル不変量を計算する. 3.3 節では, 各相を秩序変数とエンタングルメントスペクトルで特徴づける.

3.1 エネルギー分散

Lieb–Schultz–Mattis [55] の方法により, 一般の自由フェルミオンは対角化することができた. ここでは系が一様, すなわち結合定数がサイトに依らずに一定の場合を考え, 周期的境界条件の下で Fourier 変換と Bogoliubov 変換を用いてエネルギー分散を決定する.

クラスター模型と XY 模型を同時に扱うために, 次の一般的なハミルトニアンを考える:

$$H = \sum_{i=1}^N (-h\sigma_i^z + J^{XX} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - J^{XZX} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x + J^{YY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J^{YZY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y). \quad (3.2)$$

周期的境界条件を課し, このハミルトニアンに Jordan–Wigner 変換を施した後, Fourier 変換すると

$$H = 2 \sum_{0 \leq k \leq \pi} \left[\epsilon_k (c_k^\dagger c_k + c_{-k}^\dagger c_{-k}) + i\delta_k (c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + c_k c_{-k}) \right] \quad (3.3)$$

となる. ただし

$$\epsilon_k = (J^{XZX} - J^{YZY}) \cos 2k + (J^{XX} + J^{YY}) \cos k - h, \quad (3.4)$$

$$\delta_k = (J^{XZX} + J^{YZY}) \sin 2k + (J^{XX} - J^{YY}) \sin k \quad (3.5)$$

である. この形のハミルトニアンは Bogoliubov 変換により対角化できる. すなわち

$$\eta_k = \cos \frac{\theta_k}{2} c_k - i \sin \frac{\theta_k}{2} c_{-k}^\dagger, \quad (3.6)$$

$$\{\eta_k, \eta_{k'}^\dagger\} = \delta_{kk'}, \quad (3.7)$$

$$\tan \theta_k = -\frac{\delta_k}{\epsilon_k} \quad (3.8)$$

を用いてハミルトニアンを

$$H = \sum_{0 \leq k \leq \pi} \Delta_k (\eta_k^\dagger \eta_k + \eta_{-k}^\dagger \eta_{-k}), \quad (3.9)$$

$$\Delta_k = 2\sqrt{\epsilon_k^2 + \delta_k^2} \quad (3.10)$$

のように対角行列で表すことができる (付録 E). 基底状態 $|\text{GS}\rangle$ は Bogoliubov 真空

$$\eta_k |\text{GS}\rangle = 0, \quad \forall k \quad (3.11)$$

で与えられ, 励起状態は基底状態に Bogoliubov 準粒子 (ボゴロン) η_k^\dagger を加えたものである. この Δ_k がエネルギーギャップに対応し, $\Delta_k = 0$ となる k が存在するとき, 系の励起はギャップレスになる. 以下に, 式 (3.2) のあるパラメータ領域において, ギャップレスな点を求める方法を説明する.

例 1: XY 模型

$$H_{XY} = \sum_{i=1}^N (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J^{YY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) \quad (3.12)$$

の励起がギャップレスになる条件を求めよう. これは式 (3.2) で $h = 0, J^{XX} = 1, J^{XZX} = 0, J^{YZY} = 0$ の場合に対応する. このとき,

$$\epsilon_k = (1 + J^{YY}) \cos k, \quad (3.13)$$

$$\delta_k = (1 - J^{YY}) \sin k \quad (3.14)$$

であるので

1. $k = 0, \pi$ のとき

$$\delta_k = 0 \text{ なので, } \Delta_k = 0 \text{ となるのは } J^{YY} = -1$$

2. $k = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\epsilon_k = 0 \text{ なので, } \Delta_k = 0 \text{ となるのは } J^{YY} = 1$$

3. $k \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ のとき

$$\Delta_k = 0 \text{ となる } k \text{ は存在しない.}$$

よって $J^{YY} = \pm 1$ のときのみ励起エネルギーはギャップレス (線形分散) になる.

例 2: 一般化されたクラスター模型

$$H_{GC} = \sum_{i=1}^N (-J^{XZX} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x + J^{YY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J^{YZY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y) \quad (3.15)$$

の励起エネルギーがギャップレスになる条件を求めよう. これは式 (3.2) で $h = 0, J^{XX} = 0$ の場合に対応する. 例 1 と同様の方法を使う. $J^{XZX} = 1$ のとき, 励起がギャップレスになるパラメータ領域を図示すると図 3.1 のようになる. 特に, (a) $J^{YY}/J^{XZX} = 0, J^{YZY}/J^{XZX} = 1$ と (b) $J^{YY}/J^{XZX} = -1, J^{YZY}/J^{XZX} = 0$ の臨界点でのエネルギー分散を図 3.2 に示す. エネルギーがゼロの波数の周りでエネルギー分散は線形である.

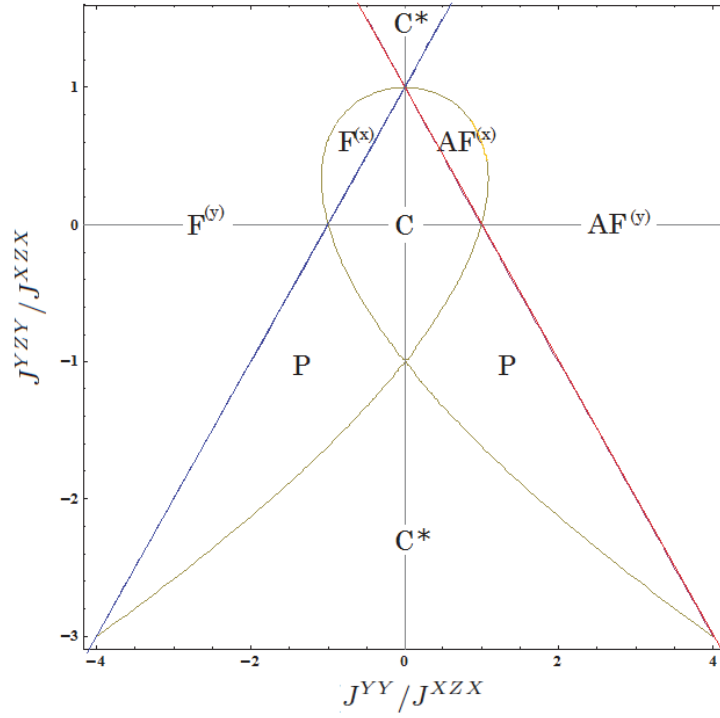


図 3.1 一般化されたクラスター模型 (3.15) の相図: 曲線上で励起がギャップレスになる. 各相は 3.3 節で計算する秩序パラメータを用いて決定した. C はクラスター相, C* は双対なクラスター相, AF は反強磁性相, F は強磁性相, P はパラ相を表している. 括弧の中のアルファベットはスピンの揃う向きを表している.

3.2 擬スピントポロジカル不変量

Fourier 変換したハミルトニアンは式 (3.3) で与えられるが, この形は Bogoliubov–de Gennes ハミルトニアン $H_{\text{BdG}}(k)$ である:

$$H_{\text{BdG}}(k) = \begin{pmatrix} \epsilon_k & i\delta_k \\ -i\delta_k & -\epsilon_k \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

ただし

$$\epsilon_k = (J^{XZX} - J^{YZY}) \cos 2k + (J^{XX} + J^{YY}) \cos k - h, \quad (3.17)$$

$$\delta_k = (J^{XZX} + J^{YZY}) \sin 2k + (J^{XX} - J^{YY}) \sin k \quad (3.18)$$

である. この場合, 時間反転対称性は破れていない.

ハミルトニアン (3.16) に対してトポロジカル不変量を定義しよう. Anderson [58] の擬スピン (pseudospin) $\mathbf{d}(k)$

$$\mathbf{d}(k) = \epsilon_k \hat{e}_z + \delta_k \hat{e}_y \quad (3.19)$$

を用いると, ハミルトニアンは

$$H_{\text{BdG}}(k) = \mathbf{d}(k) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3.20)$$

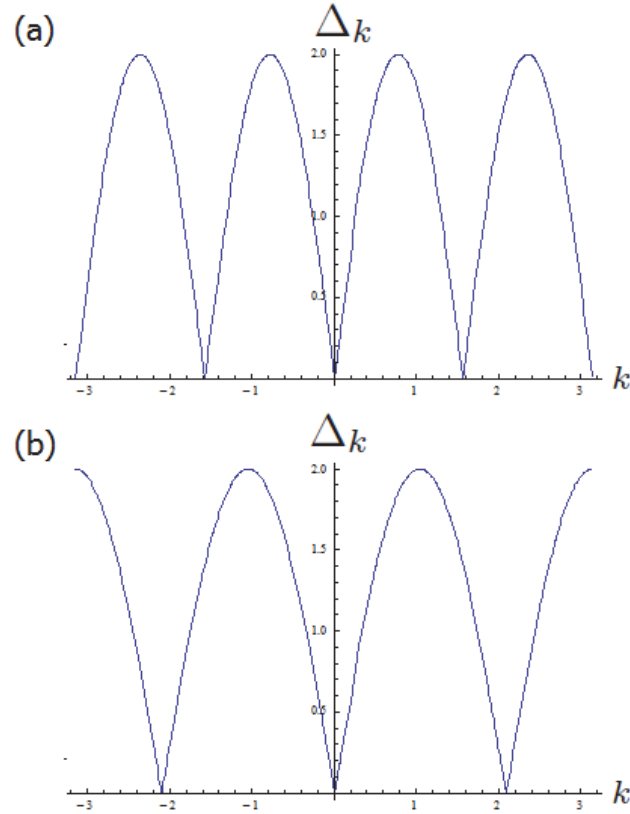


図 3.2 臨界点でのエネルギー分散: (a) は $J^{YY}/J^{XZX} = 0$, $J^{YZY}/J^{XZX} = 1$, (b) は $J^{YY}/J^{XZX} = -1$, $J^{YZY}/J^{XZX} = 0$ でのエネルギー分散を表している.

のように書ける. ここで, \hat{e}_y, \hat{e}_z は y, z 方向の単位ベクトル, τ は南部空間に作用する Pauli 行列である. トポロジカル不変量の定義には, Anderson の擬スピンを規格化したベクトル

$$\hat{\mathbf{d}}(k) = \frac{\mathbf{d}(k)}{|\mathbf{d}(k)|} = \cos \theta_k \hat{e}_z + \sin \theta_k \hat{e}_y \quad (3.21)$$

を用いる. 波数 k は Brillouin ゾーン (円) の値を持ち, $\hat{\mathbf{d}}(k)$ は yz 平面内の単位円周上に値を持つ. すなわち, 円から円への写像である. トポロジカル不変量はこの写像の基本群である巻きつき数 W

$$W = \int_{\text{B.Z.}} \frac{d\theta_k}{2\pi} \quad (3.22)$$

となる. 巻きつき数とは, 波数 k を Brillouin ゾーンの端から端まで変化させる間に $\mathbf{d}(k)$ が yz 平面の単位円周に巻きつく回数であり, 整数値である. エネルギーギャップがゼロ, すなわち $\epsilon_k = \delta_k = 0$ のとき, 巻きつき数は定義できない.

巻きつき数で相を特徴づけよう. 相互作用パラメータを変化させ, 一度エネルギーギャップが閉じて異なる相に移るときのみ, 巻きつき数は変化する. 従って, 相図の各領域において巻きつき数は一定である. ある相での巻きつき数は, その相に存在する Majorana ゼロモードの数と対応がある [59]. 例として図 3.1 の各領域で巻きつき数を計算してみよう. yz 平面内の擬スピンの向き

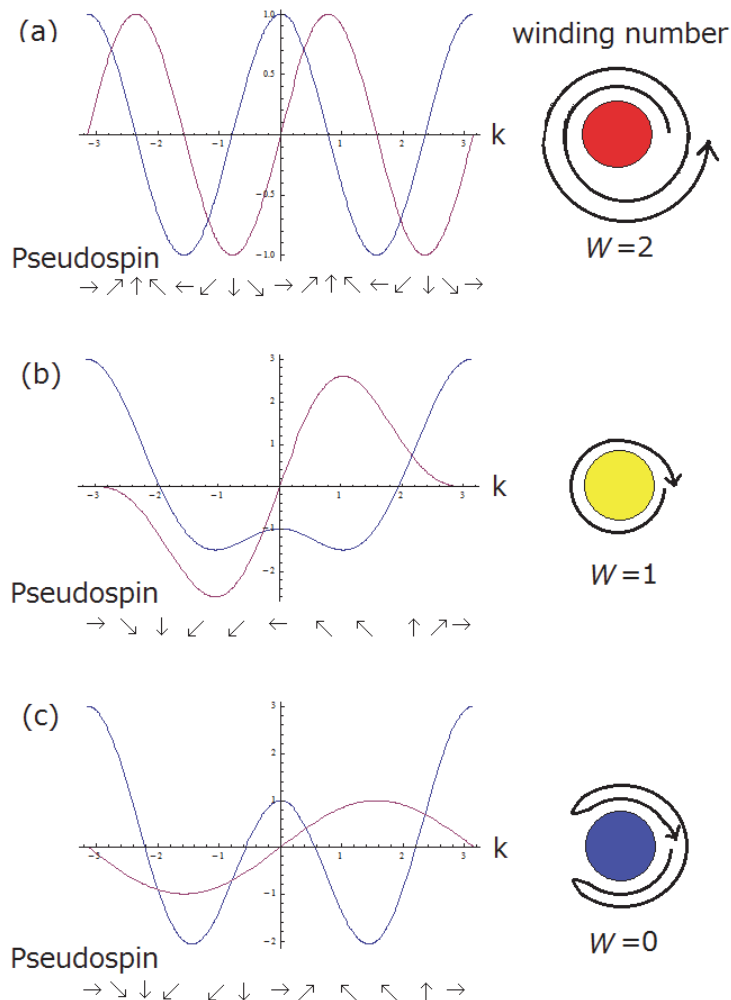


図 3.3 巻きつき数: 青色の線が ϵ_k , 赤色の線が δ_k の値である. 擬スピンの向きを矢印で示した. 巻きつき数 W は擬スピンの先端が単位円周を周る回数である. 図はそれぞれ図 3.1 の (a) $J^{YY}/J^{XZX} = 0, J^{YZY}/J^{XZX} = 0$ (クラスター相), (b) $JJ^{YY}/J^{XZX} = -2.0, J^{YZY}/J^{XZX} = 0$ (強磁性相), (c) $J^{YY}/J^{XZX} = -1, J^{YZY}/J^{XZX} = -1$ (パラ相) という点に対応している.

を図 3.3 の左側に表す. 波数 k を $-\pi$ から π まで変化させたときに, 擬スピンの向きがどのように変化するかを図 3.3 の右側に表す. (a) は二回, (b) は一回巻きつき, (c) は巻きついていないことが分かる.

3.3 エンタングルメントと秩序パラメータ

3.1 節では励起エネルギーがギャップレスになるパラメータ領域を曲線で示した。曲線で隔られた各領域はある秩序パラメータで特徴付けられる相である。一般化されたクラスター模型

$$H_{GC} = \sum_{i=1}^N (-J^{XZX} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x + J^{YY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J^{ZY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y) \quad (3.23)$$

の基底状態の相図を図 3.4 に示す ($J^{XZX} = 1$)。この相図の各領域を調べよう。そのために、厳密対角化と iTEBD の方法を用いる。例えば、図 3.4 の赤色の破線の領域 ($J^{YY}/J^{XZX} \in [-1.5, 0]$, $J^{ZY}/J^{XZX} = 0.5$) で秩序パラメータを計算する。ボンド次元 χ_b を 60 としてストリング相関関数と二スピン相関関数

$$O_{XZX} = \lim_{L \rightarrow \infty} (-1)^L \left\langle \sigma_1^x \sigma_2^y \left(\prod_{j=3}^{L-2} \sigma_j^z \right) \sigma_{L-1}^y \sigma_L^x \right\rangle, \quad (3.24)$$

$$O_{XX} = \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \sigma_1^x \sigma_L^x \rangle, \quad (3.25)$$

$$O_{YY} = \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \sigma_1^y \sigma_L^y \rangle \quad (3.26)$$

を計算する。その結果を図 3.5 に示す。臨界点を境に秩序パラメータが有限の値になり、各相を特徴付けていることが分かる。ここで、実際の秩序パラメータの計算では $L = 200$ としたが、十分に収束していることは確認した。

この相図をエンタングルメントの観点から見てみよう。エンタングルメントの計算には厳密対角化の方法を用い、開放端条件を用いた。まず、図 3.4 の青色の破線の領域上でパラメータを変化させる。 $J^{YY}/J^{XZX} = 0$, $J^{ZY}/J^{XZX} = -0.5$ のとき、エンタングルメントスペクトルの最低準位は四重縮退している。 J^{YY}/J^{XZX} を 0 から大きくしていったとき、エンタングルメントスペクトルの縮退数は $J^{YY}/J^{XZX} = 0.6$ 付近で変化する (図 3.6)。相図を見ると、その点の近くに臨界点がある。つまり、臨界点でエネルギーギャップと同様にエンタングルメントスペクトルのギャップが閉じる。この臨界点でエンタングルメントスペクトルの縮退構造はなくなり、縮退数が変化する。この臨界点を境に、基底状態はクラスター相 (C 相) からパラ相 (P 相) に変化する。このパラ相ではエンタングルメントスペクトルの最低準位は縮退していない。更に J^{YY}/J^{XZX} を大きくすると $J^{YY}/J^{XZX} = 1.5$ 付近で再びエネルギーギャップが閉じ、準位の組み換えが起きている。エンタングルメントスペクトルの最低準位に二重縮退の構造が現れるが、これは (y 方向の) 反強磁性相 ($AF^{(y)}$ 相) である。

次に、図 3.4 の紫色の点線に注目する。クラスター相と双対なクラスター相 (C*) において、エンタングルメントスペクトルの最低準位は共に四重縮退することが分かる (図 3.7)。これらの相で縮退数は同じであるが、臨界点 $J^{ZY}/J^{XZX} = 1$ で一度エンタングルメントスペクトルのギャップがゼロになり、準位の再構築が行われる。

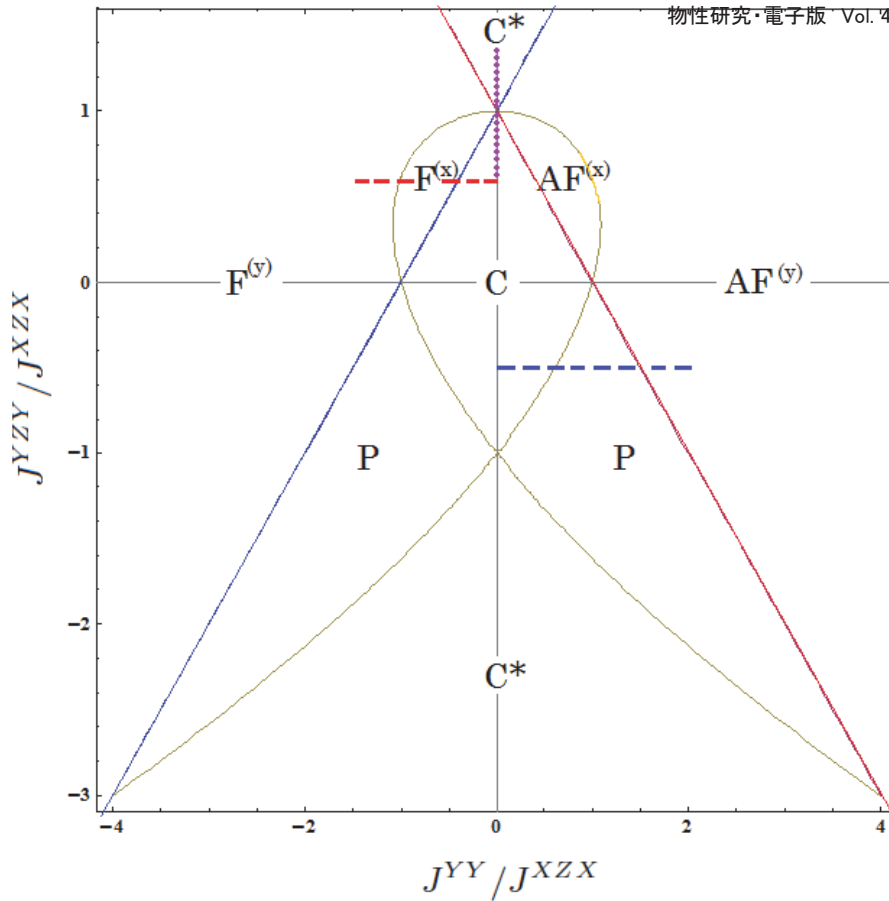


図 3.4 一般化されたクラスター模型 (3.23) の基底状態の相図: $J^{XZX} = 1$ と固定した. C はクラスター相, C* は双対なクラスター相, AF は反強磁性相, F は強磁性相, P はパラ相を表している. 括弧の中のアルファベットはスピンの揃う向きを表している. 赤色の破線上で iTEBD の方法で相関関数を計算した (図 3.5). 青色の破線と紫色の点線上で厳密対角化の方法でエンタングルメントを調べた (図 3.6, 3.7).

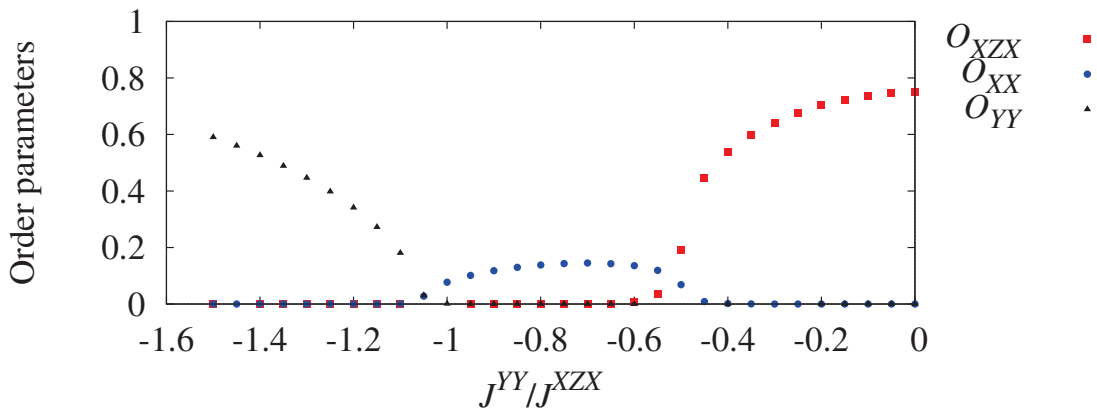


図 3.5 秩序パラメータ: iTEBD の方法を用い, 図 3.4 の赤色の破線 ($J^{YY}/J^{XZX} \in [-1.5, 0]$, $J^{YZY}/J^{XZX} = 0.5$) の上で様々な秩序パラメータを計算した ($\chi_b = 60$). 赤色の点がストリング相関関数 O_{XZX} , 青色の点が X 方向の強磁性秩序パラメータ O_{XX} , 黒色の点が Y 方向の強磁性秩序パラメータ O_{YY} を表す.

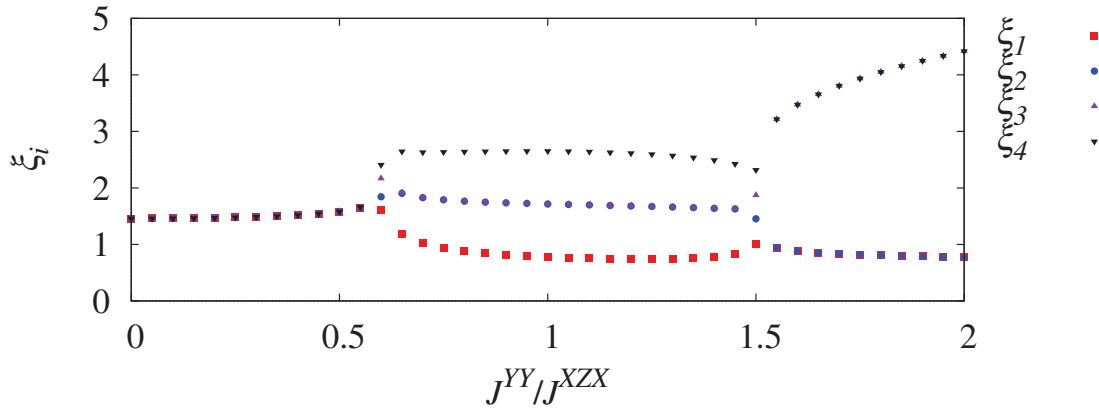


図 3.6 エンタングルメントスペクトル: 図 3.4 の青色の破線上で計算を行った. 臨界点を境に縮退数が変化している. ($N = 503$ の厳密対角化)

結局, 各相はエンタングルメントスペクトルの最低準位の縮退数で特徴づけることができることが分かった. つまり, クラスター相では四重縮退, 強磁性相と反強磁性相では二重縮退, パラ相では縮退しない. 各相でその縮退構造は変わらず, 臨界点において縮退構造がなくなり, 準位の組み換えが起こる. しかし, 縮退構造だけでは強磁性相と反強磁性相を区別できず, 更にはどの向きにスピンの揃っているかすら分からない. 従って, 相関関数の計算も必要である.

エンタングルメントスペクトルの最低準位の縮退数は基底状態の縮退数と関係がある. すなわち, 各相において, エンタングルメントスペクトルの最低準位の縮退数は基底状態の縮退数と一致する. このことは図 2.2, 2.3, 2.5 の相互作用のパターンから理解できる. 例えば, クラスター相互作用 J^{XZX} が支配的であるときを考える. 開放端条件のとき, 系の端に四個の局在したゼロモードが現れ, 基底状態が四重に縮退する (図 2.3). 系を部分系 A と B に分割すると, その境界には局在したゼロモードが四個存在する. これがエンタングルメントスペクトルの最低準位の縮退に現れている.

更に, エンタングルメントスペクトルの最低準位の縮退数は巻きつき数とも関係がある. 図 3.3 に示すように, 巻きつき数は, クラスター相では 2, 強磁性 (反強磁性) 相では 1, パラ相では 0 である. つまり, エンタングルメントスペクトルの最低準位の縮退数はトポロジカル不変量である巻きつき数と一致する.

相図の臨界点を調べる. 図 3.4 の青い直線 ($J^{YZY}/J^{XZX} = J^{YY}/J^{XZX} + 1$) 上の領域では波数 $k = 0$ で, 赤い直線 ($J^{YZY} = -J^{YY} + 1$) 上の領域では波数 $k = \pm\pi$ で, 黄色い曲線 ($J^{YY^2} - (1 - J^{YZY^2})(1 + J^{YZY}) = 0$) 上の領域では波数 $k = \arccos \frac{J^{YY}}{2(1+J^{YZY})}$ でエネルギーギャップが閉じる. ただし, $(J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX}) = (0, -1)$ の点では波数 $k = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$ でエネルギーギャップが閉じる. それらの臨界点ではエンタングルメントエントロピーの部分系の長さ依存性は対数的になる. 特に興味深いのは $J^{YY}/J^{XZX} = 0, J^{YZY}/J^{XZX} = 1$ の臨界点である. 実際にエンタングルメントエントロピーの部分系の長さ依存性 (図 3.8) を見ると,

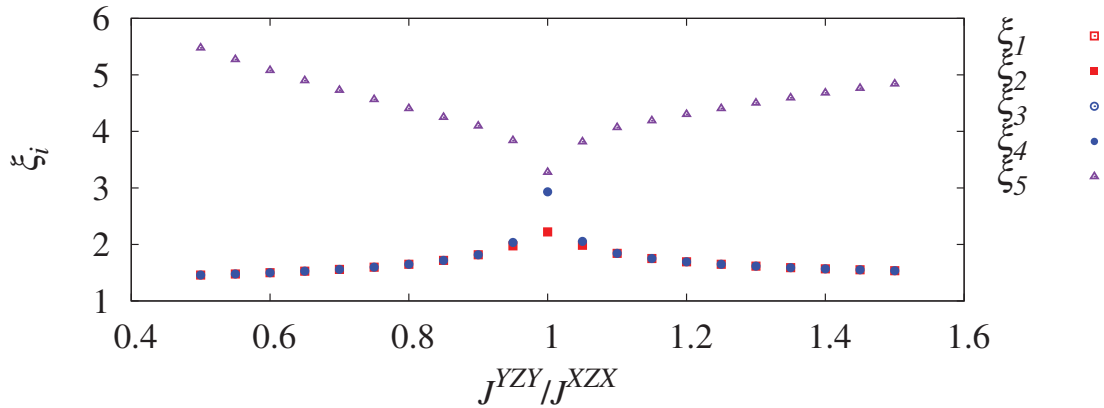


図 3.7 エンタングルメントスペクトル: 図 3.4 の紫色の点線上で計算を行った. $(J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX}) = (0, 1)$ の臨界点の両側で四重縮退している. ($N = 503$ の厳密対角化)

対数的な振る舞いが現れ, セントラルチャージは 2 であることが分かる. このことは, 図 3.2(a) に示すように, エネルギー分散に四本の Ising 分散があることから理解できる ($4 \times \frac{1}{2}$). また, $(J^{YY}/J^{XZX} = 1, J^{YZY}/J^{XZX} = 0)$ の臨界点は文献 [54] で調べられており, セントラルチャージは $\frac{3}{2}$ である. このことはエネルギー分散に三本の Ising 分散があることから理解できる ($3 \times \frac{1}{2}$).

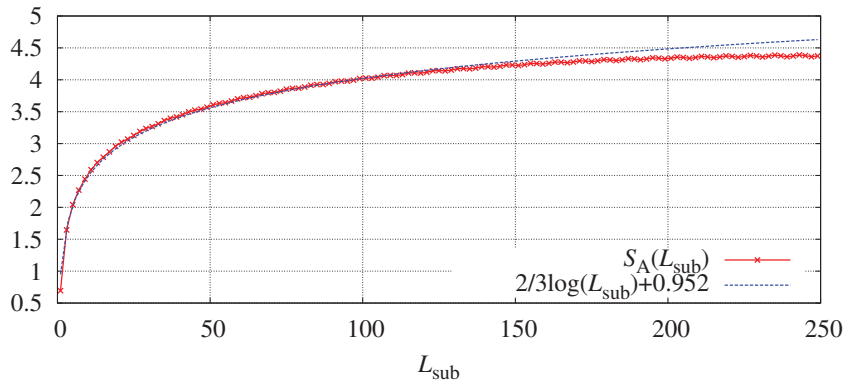


図 3.8 $(J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX}) = (0, 1)$ の臨界点でのエンタングルメントエントロピーの部分系の長さ依存性: 対数的な振る舞いをし, セントラルチャージは 2 であることが分かる. ($N = 503, L_{\text{sub}} = 249$ の厳密対角化)

4 ダイナミクス

この章では、一般化されたクラスター模型

$$H_{GC} = \sum_{i=1}^N (-J^{XZX} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x + J^{YY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J^{YZY} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y) \quad (4.1)$$

のダイナミクスを調べる。まず、4.1節でボゴロンを加えたときの相関関数の計算を行う。4.2節では相互作用を有限の時間をかけて変化させたときのダイナミクスを調べる。その際、相関関数とエンタングルメントエントロピーの部分系の長さ依存性、エンタングルメントスペクトルの時間変化に注目する。

4.1 Bogoliubov 準粒子励起

これまで考えてきたハミルトニアン基底状態は Bogoliubov 準粒子 (ボゴロン) の真空、つまり、一個もボゴロンが存在しない状態であった。相関関数はこの真空に関して期待値をとることで計算されていた。励起状態はこの真空にボゴロンを加えた状態である。相互作用を時間的に変化させたときのダイナミクスでは、基底状態から励起状態の遷移が起こるので、低エネルギーのボゴロン励起を考えなくてはならない。ここでは一個のボゴロンが励起された状態における様々な相関関数の計算方法を紹介する。尚、複数のボゴロン励起に対する拡張は容易にできる。

求めたい物理量の演算子が $2L$ 個のフェルミオン場の積からなっているとす。この演算子の基底状態での期待値

$$P_{2L} = \langle \Psi_1 \Psi_2 \cdots \Psi_{2L-1} \Psi_{2L} \rangle \quad (4.2)$$

は Pfaffian で与えられることが知られている。この場合の Pfaffian は二個の場の演算子の縮約

$$P_{ij} = \langle \Psi_i \Psi_j \rangle \quad (4.3)$$

が成分で、次のような三角の形で表示される:

$$P_{2L} = \sum_{\pi \in S_{2L}^<} (-1)^\pi P_{\pi(1)\pi(2)} P_{\pi(3)\pi(4)} \cdots P_{\pi(2L-1)\pi(2L)} \quad (4.4)$$

$$= \begin{vmatrix} P_{1,2} & P_{1,3} & \cdots & P_{1,L} & P_{1,L+1} & P_{1,L+2} & \cdots & P_{1,2L} \\ & P_{2,3} & \cdots & \cdots & P_{2,L+1} & \cdots & \cdots & P_{2,2L} \\ & & \ddots & & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & & & P_{L,L+1} & P_{L,L+2} & \cdots & P_{L,2L} \\ & & & & & P_{L+1,L+2} & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & P_{2L-1,2L} \end{vmatrix} \cdot \quad (4.5)$$

ここで, $S_{2L}^<$ は $2L$ 次の対称群 S_{2L} の要素からなる, 次のように順序づけられた部分集合である:

$$\pi(2i-1) < \pi(2i) \text{ かつ } \pi(2i-1) < \pi(2j-1), \quad 1 \leq i < j \leq L. \quad (4.6)$$

この Pfaffian の重要な性質に次のものがある: (4.5) の三角の部分に非対角成分を持った $2L$ 次の交代行列 A に対し

$$\det A = (P_{2L})^2 \quad (4.7)$$

が成り立つ. この事実は数値計算の際にも有用である.

では実際に μ 番目のボゴロン η_μ を一個加えた状態

$$|k\rangle = \eta_\mu^\dagger |0\rangle \quad (\mu = 1, 2, \dots, N) \quad (4.8)$$

での相関関数を計算してみよう. 演算子は \mathcal{A} と \mathcal{B} からなり, 合計偶数個の積となっている (2.2.2 節). 例えば, クラスタ相のストリング相関関数は $(2L-2)$ 個の演算子 \mathcal{A}, \mathcal{B} の積で

$$\langle \eta_k \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_3 \cdots \mathcal{A}_{L-2} \mathcal{B}_{L-2} \mathcal{A}_{L-1} \mathcal{A}_L \eta_k^\dagger \rangle \quad (4.9)$$

と書ける. これを $(2L-2)$ 次の交代行列にする. そのために必要な縮約は

$$\langle \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \rangle = -\langle \mathcal{B}_i \mathcal{B}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (4.10)$$

$$\langle \mathcal{A}_i \mathcal{B}_j \rangle = -\sum_{\nu=1}^N \phi_{i\nu} \psi_{j\nu}, \quad (4.11)$$

$$\langle \mathcal{B}_i \mathcal{A}_j \rangle = \sum_{\nu=1}^N \psi_{i\nu} \phi_{j\nu}, \quad (4.12)$$

$$\langle \eta_\mu \mathcal{A}_i \rangle = \langle \mathcal{A}_i \eta_\mu^\dagger \rangle = \phi_{i\mu}, \quad (4.13)$$

$$\langle \eta_\mu \mathcal{B}_i \rangle = -\langle \mathcal{B}_i \eta_\mu^\dagger \rangle = -\psi_{i\mu}, \quad (4.14)$$

$$\langle \eta_\mu \eta_\nu^\dagger \rangle = \delta_{\mu\nu} \quad (4.15)$$

である. η を含む縮約がボゴロン励起による補正項である. 本章では, 開放端条件を用い, 物理量の長さ依存性を計算する際, 図 4.1 のように中心から測る. ハミルトニアン (4.1) のパラメータを $(J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX}) = (0, 0.5)$ としたとき, 基底状態と励起状態に対してストリング相関関数を計算した (図 4.2, 図 4.3). このパラメータにおける基底状態はクラスタ相に属し, 基底状態は四重縮退するが, これは一番目と二番目のボゴロン (η_1, η_2) のエネルギーが 0 であることに由来する. すなわち, 四個の状態 $|0\rangle, \eta_1^\dagger |0\rangle, \eta_2^\dagger |0\rangle, \eta_1^\dagger \eta_2^\dagger |0\rangle$ は基底状態である. もちろん, このゼロエネルギーのボゴロンを励起させたときのストリング相関関数は, Bogoliubov 真空のものと一致する (図 4.3 の赤線). 図 4.3 に三番目 (青線) のボゴロンが存在する場合のストリング相関関数の距離依存性を示す. 有限のエネルギーを持ったボゴロンを加えたとき, ストリング相関関数の距離依存性に四サイトを周期とした構造が現れることが分かる. これは, 有限の波数を持ったボゴロンにより, 非局所的な物理量に周期性が現れたことを示唆する.

実際に, 周期的境界条件の下でのエネルギー分散を見てみよう. 図 4.4 に, ハミルトニアン (4.1) のパラメータが $(J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX}) = (0, 0.5)$ のときのエネルギー分散を示す. エネル

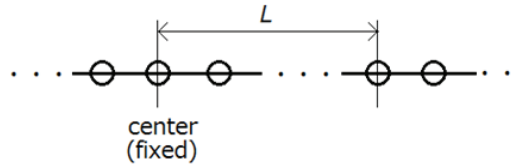


図 4.1 物理量の長さ依存性の計算方法: 系の中心から測る.

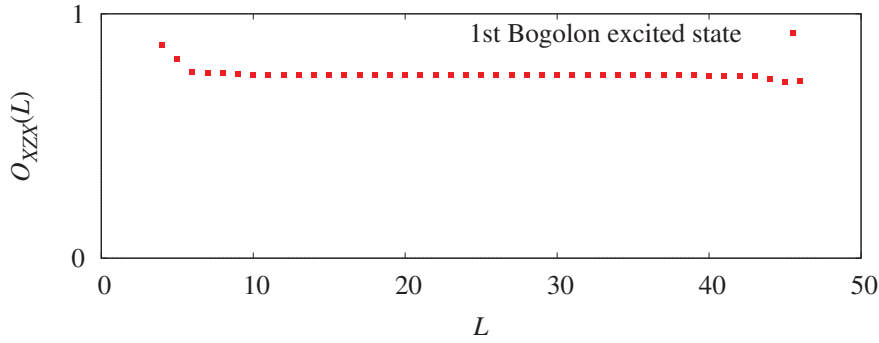


図 4.2 Bogoliubov 真空に対するストリング相関関数の距離依存性: 開放端条件での C 相 ($J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX} = (0, 0.5)$) において計算した. $N = 101$.

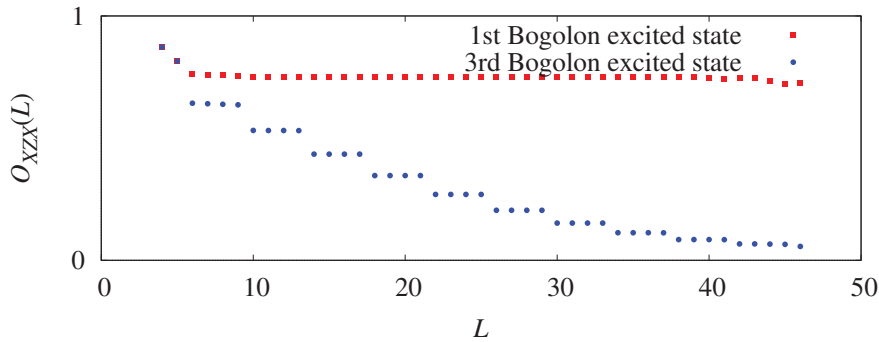


図 4.3 励起状態のストリング相関関数の距離依存性: 開放端条件での C 相 ($J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX} = (0, 0.5)$) において計算した. 一番目のボゴロン (エネルギーゼロ) を励起させた状態のストリング相関関数は Bogoliubov 真空のもの (図 4.2) と一致する. 有限のエネルギーを持った三番目のボゴロンを励起させると, 距離に関して四倍周期の構造が見える. $N = 101$.

ギーが最小となる波数は $k = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi$ である. つまり, これらの波数を持った励起は, 空間的に四サイトを周期とした構造を持っている.

4.2 相互作用スウィープ

この節では相互作用を有限の時間をかけて変化させ, 臨界点を通過させた後のダイナミクスを調べる. 臨界点近傍で緩和時間が大きくなり, 状態は断熱的に変化できず, 励起状態が生成される.

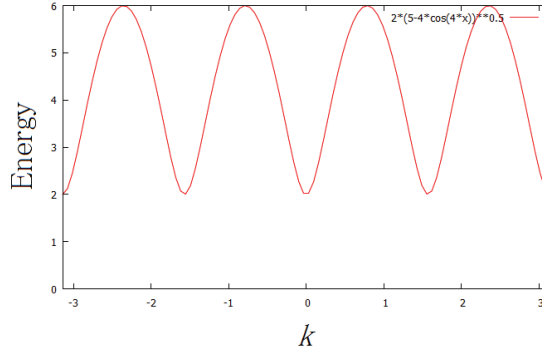


図 4.4 周期的境界条件でのパラメータ $(J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX}) = (0, 0.5)$ におけるエネルギー分散: 波数 $k = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi$ において最小値を持つ.

その結果, 終状態には有限の欠陥が含まれる. それらの励起がエンタングルメントスペクトル, エンタングルメントエントロピー, そしてストリング相関関数の時間または距離依存性に与える効果を調べる.

ここではクラスター相 (C 相) の基底状態を時間依存したハミルトニアンで時間発展させる. 具体的には,

$$H_1(t) = -J^{XZX} \sum_{i=1}^N \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x + J(t) \sum_{i=1}^N \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y, \quad (4.16a)$$

$$J(t)/J^{XZX} = 2t/\tau, \quad t \in [0, \tau] \quad (4.16b)$$

のようにクラスター相互作用の係数を有限の速度で変化させる. $\tau = 0$ がクエンチに相当する. 初期状態として, 時刻 $t = 0$ での Bogoliubov 真空を用いる. 相互作用パラメータは, C 相と双対なクラスター相 (C* 相) の間の臨界点 $(J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX}) = (0, 1)$ を時刻 $t = 0.5\tau$ に通過する (図 4.5, 4.6). エンタングルメントスペクトル, エンタングルメントエントロピー, そしてストリング相関関数を計算し, スウィープ速度を変えたときのそれらの時間または空間依存性の違いを調べる. 相互作用スウィープの計算では $N = 101$ サイトとし, 開放端条件を用いる.

まず, エンタングルメントスペクトルの時間発展を調べる. 時刻 $t \ll 0.5\tau$ のとき, 初期に系の端に局在していた Majorana フェルミオンは系の端に局在したままであり, 従って, エンタングルメントスペクトルの最低準位は四重に縮退している (図 4.7). 相互作用パラメータが臨界点を通過するとき, この Majorana フェルミオンはバルクのモードと結合し, 系全体に広がり始める. 時間発展した状態には臨界点で生じた励起状態が有限の確率で含まれるため, エンタングルメントスペクトルは振動することが分かる.

臨界点で生じた励起状態のために, 物理量に空間的な構造が現れる. 例として, スウィープ時間が 25, 200 のときのストリング相関関数の距離依存性を見てみよう. まず, $\tau = 25$ のとき, 臨界点を通過した後のストリング相関関数を計算する (図 4.8). 相互作用パラメータが大きくなるに従い, 双対なストリング相関関数は大きな値を持つことが分かる. その相関関数は距離に関してべき的に減衰することが分かる.

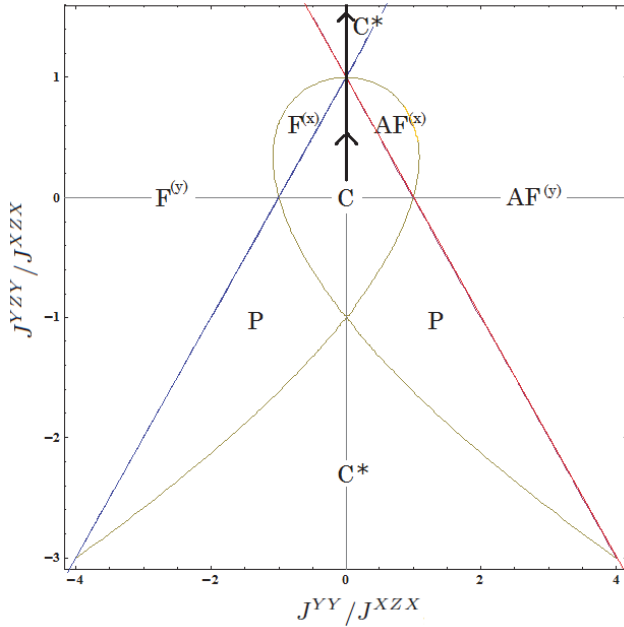


図 4.5 一般化されたクラスター模型 (4.16) の相図: 黒色の矢印に沿って相互作用パラメータをスイープさせる。

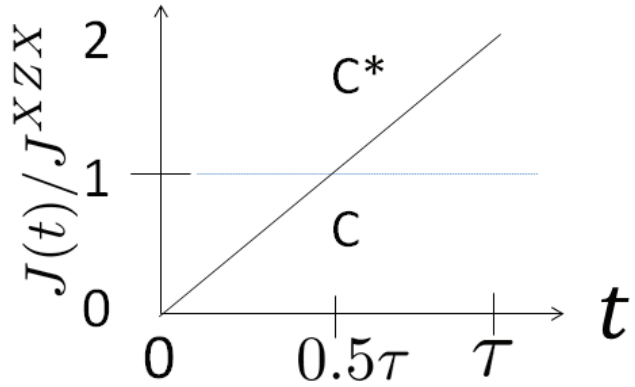


図 4.6 相互作用パラメータの時間変化: 時刻 $t = 0.5\tau$ において, C 相と C* 相の境界点を通る。

次に, $\tau = 200$ のときを調べる (図 4.9). 相互作用パラメータが大きくなるに従い, スtring 相関関数は距離に関して四倍周期の構造を持つことが分かる. この二つの場合の違いはスイープの速さだが, その違いは臨界点近傍で顕著になる. スウィープの速さが速いほど高エネルギー励起が多く, スウィープの速さが遅いほど低エネルギー励起のみが支配的になるので, $\tau = 25$ の方がより低エネルギーの励起が励起されている. ところで, $\tau = 200$ の場合の四倍周期構造は図 4.3 で見られたものと同じである. つまり, 時刻 τ での状態は低エネルギーのボゴロンを加えた状態に近いことが分かる. 一方, $\tau = 25$ の場合もボゴロンは励起されているが, スウィープが速いために, 複数のボゴロンが励起され, はっきりとした四倍周期構造が現れない.

以上より, String 相関関数の周期構造はボゴロンによるものと分かった. 面白いことに, この周期構造はエンタングルメントエントロピーにも現れる. 図 4.10 にあるように, スウィープ速度を遅くしていくにつれてエンタングルメントエントロピーの距離依存性に周期的な構造が形成されている. このことは励起状態におけるエンタングルメントエントロピーとString 相関関数の間の関係を示唆する.

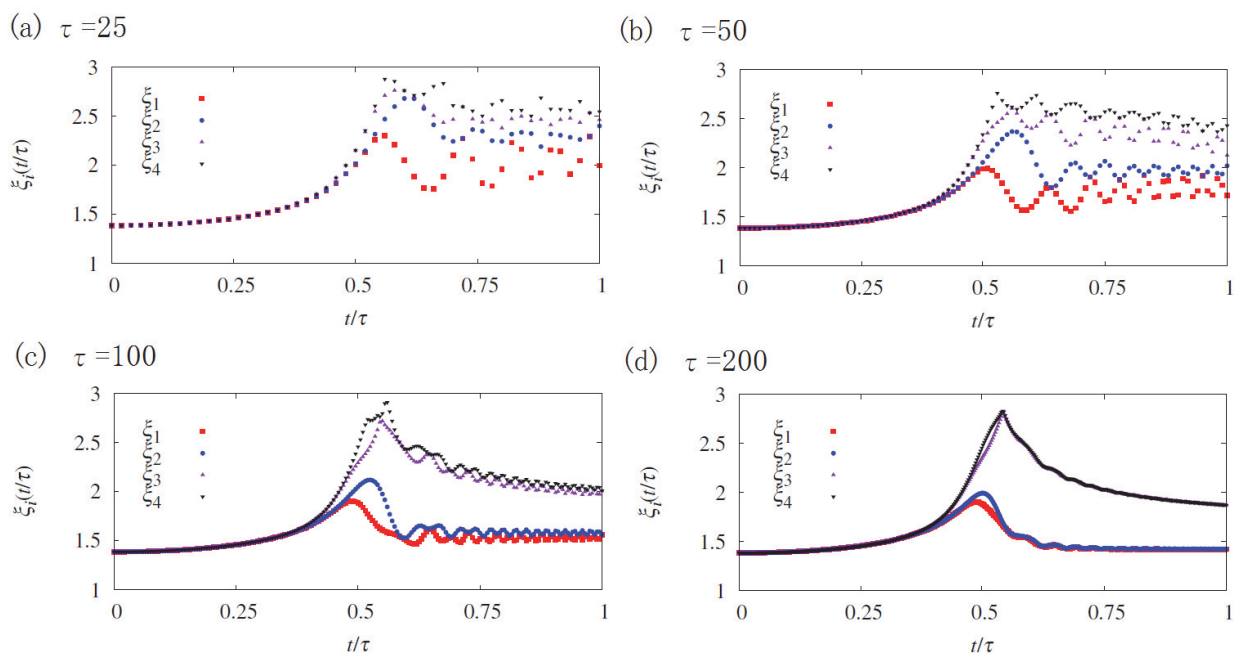


図 4.7 (a)-(d) $\tau = 25, 50, 100, 200$ のときのエンタングルメントスペクトルの時間発展. 臨界点を過ぎるまでは四重縮退が保たれている. 臨界点を通過すると縮退が解け, 時間的に振動する.

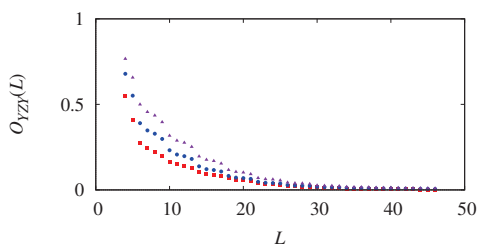


図 4.8 $\tau = 25$ のときの, 時刻 t での双対なストリング相関関数の距離依存性のスナップショット: 臨界点を通過後, 相互作用パラメータが大きくなるに従い, 双対なストリング相関関数は大きな値を持つ. 長さ依存性にはっきりとした四倍周期構造が現れない.

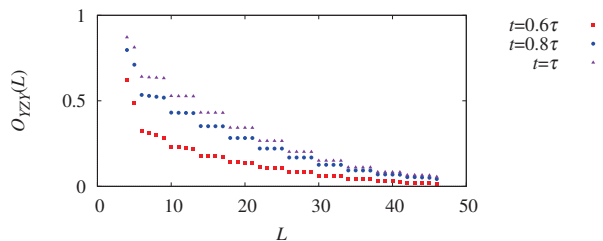


図 4.9 $\tau = 200$ のときの, 時刻 t での双対なストリング相関関数の距離依存性のスナップショット: 臨界点を通過後, 長さ依存性に四倍周期構造が現れる.

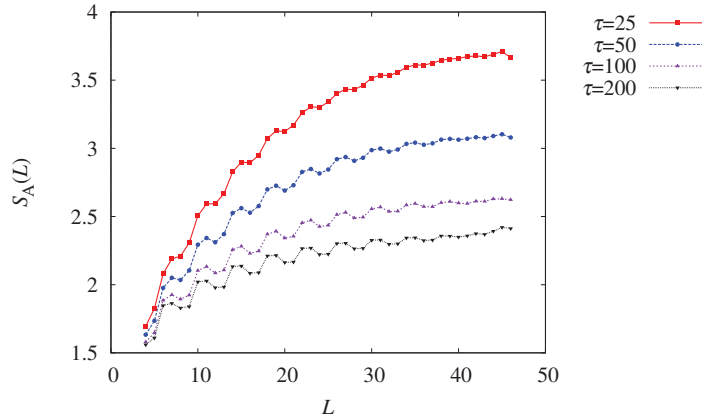


図 4.10 異なるスイープ速度に対する終状態 ($t = \tau$) でのエンタングルメントエントロピーの距離依存性: スウィープ速度を遅くするとエンタングルメントエントロピーの距離依存性に四倍周期構造が現れる.

スウィープ中のエンタングルメントエントロピーの値を図 4.11 に示す. スウィープの初めの時刻ではエンタングルメントエントロピーは単調に増加している. 時刻 $t = 0.5\tau$ に臨界点を通過し, それ以降の時刻では時間的な振動が見える. これは, 臨界点で励起されたボゴロン励起によるものである. スウィープの速度を遅くするに従い, 状態の時間発展は断熱的に変化したものと近くなる. 実際に, エンタングルメントエントロピーの各時刻での値は, その時刻に対応する相互作用パラメータでのエンタングルメントエントロピーの値に近づく (図 4.12).

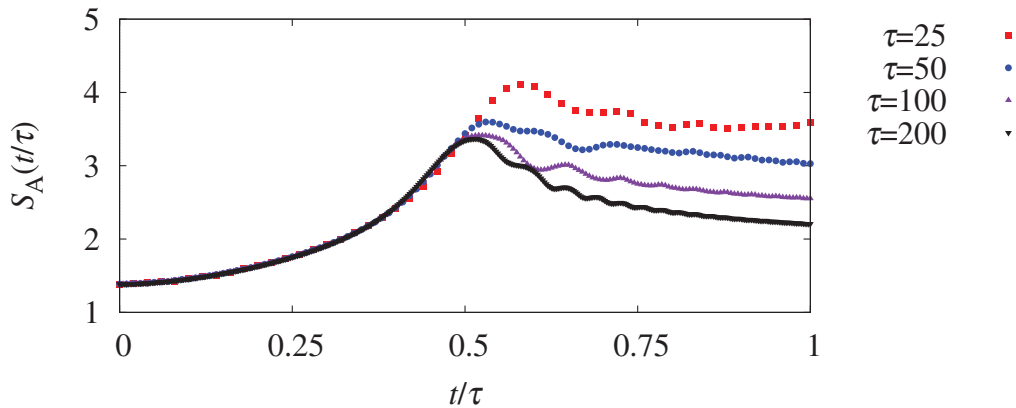


図 4.11 エンタングルメントエントロピーの時間依存性: $t = 0$ が $(J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX}) = (0, 0)$, $t = \tau$ が $(J^{YY}/J^{XZX}, J^{YZY}/J^{XZX}) = (0, 2)$ に対応している.

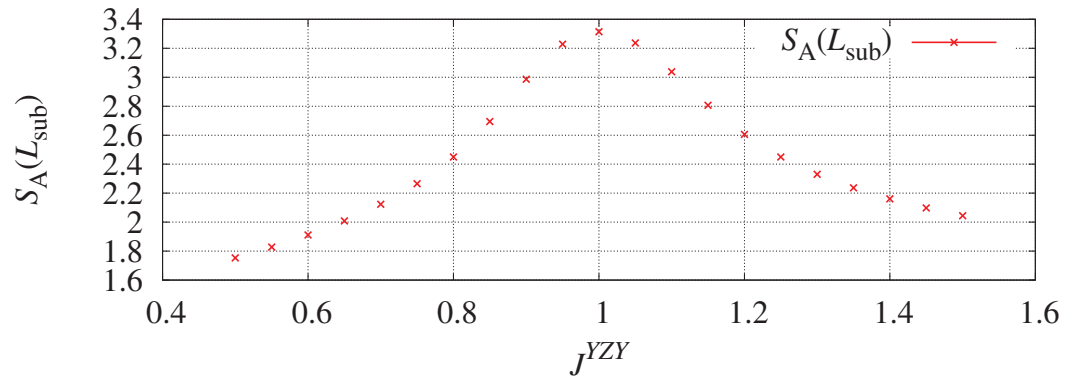


図 4.12 各相互作用パラメータでのエンタングルメントエントロピー: 断熱極限のスweepに対応する. $N = 103, L_{\text{sub}} = 49$.

5 まとめ

本論文では、トポロジカルなエッジモードのダイナミクスを調べるために、一次元スピンレス p 波超伝導体の Kitaev 模型を一般化した、長距離相互作用のある一次元フェルミオン模型を数値的に解析した。まず、厳密対角化の方法と iTEBD の方法を用いて、近接相互作用と次近接相互作用があるときの相図を決定した。次に、臨界点を通過するように相互作用をスウィープし、系のダイナミクスを調べた。エンタングルメントスペクトルの時間的な振動は臨界点で励起されたボゴロンによるものであることが分かった。更に、臨界点での時間スケールよりゆっくりとしたスウィープ速度のとき、ストリング相関関数の距離依存性に周期的な構造が現れた。これは臨界点において励起されたボゴロンに起因することが分かった。同様の構造はエンタングルメントエントロピーの長さ依存性にも現れた。

本研究ではトポロジカル相を示す簡単な模型を用いたが、励起状態に対するストリング相関関数とエンタングルメント構造の関係を明らかにするために、トポロジカル相を示す様々な模型を扱い、それらの関係を明らかにすることが今後の課題として挙げられる。

付録 A Schmidt 分解

全系の規格化された波動関数 $|\Psi\rangle$ が与えられたとき, 全系を二個の部分系 A, B (その Hilbert 空間は $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$) に分割する. このとき, $|\Psi\rangle$ は A, B の正規直交基底を用いて

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^{\chi} \lambda_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle_A |\psi_{\alpha}\rangle_B \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (\text{A.1})$$

と書ける. この λ_{α} は Schmidt 係数と呼ばれ, 非負の実数であり,

$$\sum_{\alpha=1}^{\chi} \lambda_{\alpha}^2 = 1, \quad \chi \leq \min(\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B) \quad (\text{A.2})$$

を満たす. この分解を Schmidt 分解という.

例 1

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|00\rangle + \sqrt{3}|01\rangle + \sqrt{3}|10\rangle + |11\rangle) \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} |\phi_1\rangle_A |\psi_1\rangle_B + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} |\phi_2\rangle_A |\psi_2\rangle_B. \quad (\text{A.4})$$

ただし

$$|\phi_1\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A + |1\rangle_A), \quad |\phi_2\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A - |1\rangle_A) \quad (\text{A.5})$$

は部分系 A の正規直交系であり,

$$|\psi_1\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_B + |1\rangle_B), \quad |\psi_2\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|0\rangle_B + |1\rangle_B) \quad (\text{A.6})$$

は部分系 B の正規直交系である.

例 2

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |01\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}} |10\rangle - \frac{i}{\sqrt{6}} |11\rangle \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} (|0\rangle_A - i|1\rangle_A) (\sqrt{2}|0\rangle_B + |1\rangle_B) \quad (\text{A.8})$$

は直積状態である.

この $\{\lambda_{\alpha}\}$ は部分系間のエンタングルメントを表す. その一つの指標としてエンタングルメントエントロピー S があり,

$$S = - \sum_{\alpha=1}^{\chi} \lambda_{\alpha}^2 \ln \lambda_{\alpha}^2 \quad (\text{A.9})$$

で与えられる. S は直積状態に対して 0 である. 最大エンタングル状態 (maximally entangled state), つまり全 Schmidt 係数が等しい状態に対して最大値をとり, その値は $\ln \chi$ である.

付録 B AKLT 模型

スピン 1 の反強磁性スピン鎖は Haldane 相と呼ばれるトポロジカル相が出現する. この相を解析的に調べるために, 次の AKLT (Affleck, Kennedy, Lieb, and Tasaki) 模型 [52, 53] を調べる:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} + \frac{1}{3} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1})^2 + \frac{2}{3} \right]. \quad (\text{B.1})$$

この模型は, i サイトと $i+1$ サイトの隣り合ったスピン 1 を合成スピン $S_{\text{tot}} = 2$ に射影する演算子 $P_{i,i+1}^2$ の和で書けるので, AKLT 模型の基底状態は Valence Bond Solid (VBS) 状態である.

AKLT 模型の基底状態はボンド次元 2 の行列積状態で書くことができる. まず, 2 個のスピン $\frac{1}{2}$ を各サイト上に置く. 次に, 隣り合うスピンのシングレットを組ませる. すなわち, スピン $|\alpha\rangle$ と共役なスピンを $|\tilde{\alpha}\rangle$ とし,

$$\sum_{\alpha=1}^2 |\alpha\rangle |\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha\beta} |\alpha\rangle |\beta\rangle \quad (\text{B.2})$$

がシングレットとなるように行列 R を決める. 次に, 2 個のスピン $\frac{1}{2}$ から $S = 1$ への射影を考える. その演算子は

$$\hat{A}(i_L, i_R) = \sum_{\alpha,\beta,m_i} B_{\alpha\beta}(m_i) |m_i\rangle \langle \alpha\beta| \quad (\text{B.3})$$

$$= \sum_{\beta,\gamma,m_i} \hat{A}_{\beta\gamma}(m_i) |m_i\rangle \langle \tilde{\gamma}\beta|, \quad (\text{B.4})$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}|1\rangle & |0\rangle \\ |0\rangle & \sqrt{2}|-1\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

となる. 従って, VBS 状態の行列積表現は

$$\hat{A}_{\alpha\beta}(i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |0\rangle & \sqrt{2}|-1\rangle \\ -\sqrt{2}|1\rangle & -|0\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

となる. iMPS (2.3.1 節) は

$$\Gamma(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

$$\Gamma(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

である. この基底状態に対して, エンタングルメントエントロピーは $\ln 2$ であり, 最大エンタングル状態である.

付録 C Majorana ゼロモード

Kitaev 模型 (横磁場 Ising 模型) [27]

$$H = \sum_{i=1}^N \left[-(c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i) - (c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + c_{i+1} c_i) - 2hc_i^\dagger c_i \right] \quad (\text{C.1})$$

のゼロモードを考えよう. まず, Bogoliubov 変換

$$\eta_\mu = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\phi_{i\mu} + \psi_{i\mu}}{2} c_i + \frac{\phi_{i\mu} - \psi_{i\mu}}{2} c_i^\dagger \right) \quad (\text{C.2})$$

を行う. ここで, N 次の列ベクトル ϕ_μ, ψ_μ はそれぞれ N 次行列 ϕ, ψ の第 μ 列成分 ($\mu = 1, 2, \dots, N$) であり, 次の連立方程式 (Heisenberg の運動方程式) の解である:

$$\begin{cases} E_\mu \psi_\mu = (A + B)\phi_\mu, & (\text{C.3a}) \\ E_\mu \phi_\mu = (A - B)\psi_\mu. & (\text{C.3b}) \end{cases}$$

ただし, A と B は N 次行列

$$A = \begin{pmatrix} -2h & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -2h & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & -2h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

で与えられる. 正準交換関係より, 行列 ϕ と ψ は直交する:

$$\phi^T \phi = I_N, \quad \psi^T \psi = I_N. \quad (\text{C.5})$$

次に, ゼロモードの解を求めよう. ある m に対し $E_m = 0$ となるとき, 連立方程式 (C.3) は二個の独立した方程式になる:

$$\begin{cases} 0 = (A + B)\phi_m, & (\text{C.6a}) \\ 0 = (A - B)\psi_m. & (\text{C.6b}) \end{cases}$$

これらは, $0 \leq h < 1$ のときに解

$$\phi_m = (1, -h, (-h)^2, \dots)^T, \quad \psi_m = (\dots, (-h)^2, -h, 1)^T \quad (\text{C.7})$$

をもち, 系の端に指数関数的に局在していることが分かる.

付録 D 双対性

開放端条件のとき, クラスタール Ising 模型

$$H(\lambda) = \sum_{i=1}^N (-\sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x + \lambda \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) \quad (\text{D.1})$$

は横磁場 Ising 模型と同様の双対性をもつ (Kramers–Wannier 双対性). すなわち,

$$\mu_i^z = \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x, \quad \mu_i^x = \prod_{j=1}^i \sigma_j^z, \quad \sigma_{N+1}^x = 1 \quad (\text{D.2})$$

という双対変換により

$$-\sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x = \mu_i^y \mu_{i+1}^y, \quad \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y = -\mu_{i-1}^x \mu_i^z \mu_{i+1}^x, \quad \mu_0^x = 1 \quad (\text{D.3})$$

となる. そのため, ハミルトニアンは双対性

$$H^{\text{dual}}(\lambda) = \lambda H\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\text{D.4})$$

を持つ [54]. 臨界点 $\lambda = 1$ は自己双対な点である.

同様に, クラスタール相互作用 (XZX) を z 軸周りに π 回転した相互作用 (YZY) をクラスタール模型に加えたハミルトニアン

$$H(\lambda) = \sum_{i=1}^N (-\sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x + \lambda \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y) \quad (\text{D.5})$$

は z 軸周りの π 回転に対し, 明らかに自己双対である.

付録 E Bogoliubov 基底状態

横磁場 Ising 模型を Jordan–Wigner 変換すると

$$H_{\text{TFIM}} = - \sum_{i=1}^N (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \lambda \sigma_i^z) \quad (\text{E.1})$$

$$= - \sum_{i=1}^N \left[(c_i^\dagger - c_i)(c_{i+1}^\dagger + c_{i+1}) + \lambda(2c_i^\dagger c_i - 1) \right] \quad (\text{E.2})$$

$$= - \sum_{i=1}^N \left[(c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i) + (c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + c_{i+1} c_i) + 2\lambda(c_i^\dagger c_i - \frac{1}{2}) \right] \quad (\text{E.3})$$

となり、以下で与えられるスピinless p 波超伝導の Kitaev 模型である:

$$H_{\text{Kitaev}} = \sum_{i=1}^N \left[-t(c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i) - (\Delta c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + \Delta^* c_{i+1} c_i) - \mu c_i^\dagger c_i \right], \quad (\text{E.4})$$

$$t = \Delta = \Delta^* = 1, \quad \mu = 2\lambda. \quad (\text{E.5})$$

このハミルトニアンはパリティ演算子

$$P = (-1)^{\sum_{i=1}^N c_i^\dagger c_i} \quad (\text{E.6})$$

と可換である。 $P^2 = 1$ より $P = \pm 1$ である。パリティが偶 (奇) のとき境界条件は反周期的 (周期的) である。

周期的境界条件のときに横磁場 Ising 模型を解こう。まず, Fourier 変換

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk e^{ikj} c_k \quad (\text{E.7})$$

を行うと、ハミルトニアンは

$$H_{\text{TFIM}} = 2 \int_{-\pi}^{\pi} dk (-\cos k - \lambda) c_k^\dagger c_k - 2i \int_{-\pi}^{\pi} dk (\sin k c_k c_{-k} - \sin k c_{-k}^\dagger c_k^\dagger) \quad (\text{E.8})$$

となる。次に、Bogoliubov 変換

$$\begin{cases} \eta_k = c_k \cos \theta_k - i c_{-k}^\dagger \sin \theta_k, \\ \eta_{-k}^\dagger = -i c_k \sin \theta_k + c_{-k}^\dagger \cos \theta_k \end{cases} \quad (\text{E.9a})$$

$$\quad (\text{E.9b})$$

を施す。ただし

$$\{\eta_k, \eta_{k'}^\dagger\} = \delta_{kk'}, \quad \tan 2\theta_k = -\frac{\delta_k}{\epsilon_k} \quad (\text{E.10})$$

である。以上でハミルトニアンは対角化でき、エネルギー分散は

$$\epsilon(k) = 2\sqrt{(\cos k + \lambda)^2 + \sin^2 k} \quad (-\pi < k \leq \pi) \quad (\text{E.11})$$

となり, 基底状態 $|\Psi_0\rangle$ は η -真空で, BCS 型の波動関数となる:

$$|\Psi_0\rangle = \prod_{k>0} (\cos \theta_k + \sin \theta_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) |0\rangle_c. \quad (\text{E.12})$$

この $|0\rangle_c$ は c -真空である.

一般の Bogoliubov 変換を考える. 波数空間表示の Bogoliubov 変換 U_B は

$$U_B = \exp \left[-i \sum_{k>0} \theta_k (c_{-k} c_k - c_{-k}^\dagger c_k^\dagger) \right] \quad (\text{E.13})$$

で与えられる. Baker–Campbell–Hausdorff の公式

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (\text{E.14})$$

と交換関係と反交換関係の関係式

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \quad (\text{E.15})$$

を用いると, 実際に U_B は Bogoliubov 変換を与えることが分かる:

$$U_B^{-1} \eta_k U_B = c_k. \quad (\text{E.16})$$

基底状態 $|\text{GS}\rangle$ は Bogoliubov 真空であり, フェルミオン c の真空 $|0\rangle_c$ を用いて

$$|\text{GS}\rangle = U_B |0\rangle_c \quad (\text{E.17})$$

となる.

実空間表示の Bogoliubov 変換 W_B を具体的に書こう. そのために, 直交行列 ϕ と ψ の生成子 W_\pm を用いる. W_\pm は交代行列であり,

$$\phi = \exp W_+, \quad \psi = \exp W_- \quad (\text{E.18})$$

である. これにより, Bogoliubov 変換 W_B は

$$W_B = \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{W_+ - W_-}{2} \right)_{ij} (c_i c_j + c_i^\dagger c_j^\dagger) + \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{W_+ + W_-}{2} \right)_{ij} c_i^\dagger c_j \right] \quad (\text{E.19})$$

と書ける:

$$W_B^{-1} \eta_i W_B = c_i. \quad (\text{E.20})$$

基底状態 $|\text{GS}\rangle$ は Bogoliubov 真空であり, フェルミオン c の真空 $|0\rangle_c$ を用いて

$$|\text{GS}\rangle = W_B |0\rangle_c \quad (\text{E.21})$$

となる.

謝辞

本研究は京都大学物性基礎論凝縮系研究室において、戸塚圭介准教授の指導の下で行われました。論文の執筆にあたり、議論を通じて数多くの指導を拝受しましたことに深く感謝を申し上げます。また、段下一平助教、田中宗様には、頻繁に研究の議論をして頂き、非常にためになる意見やアドバイスを賜ったことに多大なる感謝をしています。並びに、日頃からゼミやセミナーなどの研究室の生活において、大変お世話になりました物性基礎論凝縮系グループの杉本高大様、新城一矢様、谷本和彦様には感謝します。皆様にはこの場を借りてお礼申し上げます。

最後になりましたが、二十四年間もの間、温かい目で見守ってくださった家族の皆様は心より感謝します。

参考文献

- [1] M. den Nijs and K. Rommels, *Phys. Rev. B* **40**, 4709 (1989).
- [2] Y. Hatsugai and M. Kohmoto, *Phys. Rev. B* **44**, 11789 (1991).
- [3] T. Kennedy and H. Tasaki, *Phys. Rev. B* **45**, 304 (1992).
- [4] K. Hida, *Phys. Rev. B* **45**, 2207 (1992).
- [5] M. Kohmoto and H. Tasaki, *Phys. Rev. B* **46**, 3486 (1992).
- [6] M. Oshikawa, *J. Phys.: Condens. Matter* **4**, 7469 (1992).
- [7] S. Yamamoto and S. Miyashita, *Phys. Rev. B* **48**, 9528 (1993).
- [8] K. Totsuka and M. Suzuki, *J. Phys.: Condens. Matter* **7**, 1639 (1995).
- [9] A. Kitaev and J. Preskill, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 110404 (2006).
- [10] M. Levin and X. G. Wen, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 110405 (2006).
- [11] S. Furukawa and G. Misguich, *Phys. Rev. B* **75**, 214407 (2007).
- [12] H.-C. Jiang, Z. Wang, and L. Balents, *Nature Physics* **8**, 902 (2012).
- [13] H. Li and M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 010504 (2008).
- [14] F. Pollmann, A. M. Turner, E. Berg, and M. Oshikawa, *Phys. Rev. B* **81**, 064439 (2010).
- [15] K. Hasebe and K. Totsuka, *Phys. Rev. B* **84**, 104426 (2011).
- [16] J. I. Cirac, D. Poilblanc, N. Schuch, and F. Verstraete, *Phys. Rev. B* **83**, 245134 (2011).
- [17] J. Lou, S. Tanaka, H. Katsura, and N. Kawashima, *Phys. Rev. B* **84**, 245128 (2011).
- [18] M. Fagotti, P. Calabrese, and J. E. Moore, *Phys. Rev. B* **83**, 045110 (2011).
- [19] A. Sterdyniak, A. Chandran, N. Regnault, B. A. Bernevig, and P. Bonderson, *Phys. Rev. B* **85**, 125308 (2012).
- [20] S. Tanaka, R. Tamura, and H. Katsura, *Phys. Rev. A* **86**, 032326 (2012).
- [21] X.-L. Qi, H. Katsura, and A. W. W. Ludwig, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 196402 (2012).
- [22] H. Nonne, M. Moliner, S. Capponi, P. Lecheminant, and K. Totsuka, *Europhys. Lett.* **102**, 37008 (2013).
- [23] L. Cincio and G. Vidal, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 067208 (2013).
- [24] K. Shinjo, S. Sota, and T. Tohyama, *Phys. Rev. B* **91**, 054401 (2015).
- [25] 夏梅誠, 超弦理論の応用: 物理諸分野での AdS/CFT 双対性の使い方, (サイエンス社, 2012).
- [26] M. Natsuume, arXiv:1409.3575.
- [27] A. Y. Kitaev, *Physics-Usp.* **44**, 131 (2001).
- [28] M. Leijnse and K. Flensberg, *Semicond. Sci. Technol.* **27**, 124003 (2012).
- [29] V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven, *Science*, **336**, 1003 (2012).
- [30] M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **46**, 1337 (1971).
- [31] R. Raussendorf and H. J. Briegel, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5188 (2001).

- [32] R. Raussendorf, D. E. Browne, and H. J. Briegel, *Phys. Rev. A* **68**, 022312 (2003).
- [33] K. Fujii, Y. Nakata, M. Ohzeki, and M. Muraio, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 120502 (2013).
- [34] S. O. Skrøvseth and S. D. Bartlett, *Phys. Rev. A* **80**, 022316 (2009).
- [35] J. K. Pachos and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 056402 (2004).
- [36] C. Becker, P. Soltan-Panahi, J. Kronjäger, S. Dörscher, K. Bongs, and K. Sengstock, *New J. Phys.* **12**, 065025 (2010).
- [37] A. Polkovnikov, K. Sengupta, A. Silva, and M. Vengalattore, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 863 (2011).
- [38] J. Dziarmaga, *Adv. Phys.* **59**, 1063 (2010).
- [39] E. Canovi, E. Ercolessi, P. Naldesi, L. Taddia, and D. Vodola, *Phys. Rev. B* **89**, 104303 (2014).
- [40] W. H. Zurek, U. Dorner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 105701 (2005).
- [41] A. Bermudez, L. Amico, and M. A. Martin-Delgado, *New J. Phys.* **12**, 055014 (2010).
- [42] G. Kells, D. Sen, J. K. Slingerland, and S. Vishveshwara, *Phys. Rev. B* **89**, 235130 (2014).
- [43] S. Hegde, V. Shivamoggi, S. Vishveshwara, and D. Sen, arXiv:1412.5255.
- [44] 堀田昌寛, 量子情報と時空の物理: 量子情報物理学入門, (サイエンス社, 2014).
- [45] 高柳匡, ホログラフィー原理と量子エンタングルメント, (サイエンス社, 2014).
- [46] J. I. Latorre, E. Rico, and G. Vidal, *Quant. Inf. Comput.* **4**, (2004) 48-92.
- [47] 夏目雄平, 小川建吾, 鈴木敏彦, 計算物理 III: 数値磁性体物性入門, (朝倉書店, 2002).
- [48] R. Orús and G. Vidal, *Phys. Rev. B* **78**, 155117 (2008).
- [49] R. White, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2863 (1992).
- [50] C. Holzhey, F. Larsen, and F. Wilczek, *Nucl. Phys. B* **424**, (1994) 443.
- [51] P. Calabrese and J. Cardy, *J. Stat. Mech.* (2004) P06002.
- [52] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 799 (1987).
- [53] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, *Commun. Math. Phys.* **115**, 583 (1988).
- [54] P. Smacchia, L. Amico, P. Facchi, R. Fazio, G. Florio, S. Pascazio, and V. Vedral, *Phys. Rev. A* **84**, 022304 (2011).
- [55] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Ann. Phys. (N.Y.)* **16**, 407 (1961).
- [56] T. Caneva, R. Fazio, and E. Santoro, *Phys. Rev. B* **76**, 144427 (2007).
- [57] G. Vidal, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 070201 (2007).
- [58] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **110**, 827 (1958).
- [59] Y. Niu, S. B. Chung, C.-H. Hsu, I. Mandal, S. Raghu, and S. Chakravarty, *Phys. Rev. B* **85**, 035110 (2012).