代数幾何学シンポジウム記録
1988年度 pp.141-151

$c_1^2 = 3p_g - 7$を満たす一般型代数曲面

宮城高専 足利 正 (Tadashi Ashikaga)
東北大理 今野 一宏 (Kazuhiro Konno)

§1. 動機と出発点

ここでは、複素数体$\mathbb{C}$上定義された極小な一般型代数曲面Sであって、おもにその不正則数 q(S)が消えているものを扱う。

$p_g(S)$、$c_1^2(S)$をそれぞれSの幾何種数、チャーン数とする時、(p_g、c_1^2)の存在可能な領域は、Noetherおよび宮岡の不等式によって
{ $2p_g - 4 \leqq c_1^2 \leqq 9p_g + 9$、$p_g \geqq 0$、$c_1^2 > 0$ }となる。逆にこの領域内の任意の格子点(x, y)に対して、Sに特定の構造を定めて、
$p_g(S) = x$, $c_1^2(S) = y$となる曲面Sを構成するのが一般型曲面のgeographyの問題である。

これについて最近、Persson, XiaoたちはSが超楕円曲線束(とりわけ種数2の曲線束)を持つ場合を調べている。しかし、この方法では、2重被覆の理論が使えるという非常な利点はあるものの、”特殊な曲線”である超楕円曲線を使っている点から考えて”特殊な”一般型曲面しか作っていないという欠点があるように思われる。 実際、そのようなSについては、相対標準写像がすでに2対1になるので、標準写像は双有理的ではない。我々は曲線の場合から類推して、双有理標準写像を持つSこそ、最も”一般型曲面らしい”一般型曲面であると考えている。(しかし、現在の段階では、これはまだ”哲学”でしかないかもしれないけれど。) そこで次の事を問題にしたい。

(問) 双有理標準写像を持つ曲面Sを組織的に作り、且調べること。

これに対し、最も簡単で自然に思いつくことは、Sが種数3の非超楕円曲線の線形束を持つ場合を調べることであろう。

今、$f: S \to \mathbb{P}^1$ を一般ファイバーが種数3の非超楕円曲線であるファイバー空間とする。相対標準有理写像　$g: S \to S' \subset X = \mathbb{P}(f_* K_{S/\mathbb{P}^1})$ を考えると $S' \to \mathbb{P}^1$ の一般ファイバーは平面4次曲線であることから、$\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^2$ 束であるX内での因子 S' は $4T+nF$ に線形同値となる。（ここに T は tautological直線束、F はファイバー、n は整数である。）

以上のことを思って、逆に $\Sigma_{\ell,m} := \mathbb{P}(\mathcal{O}+\mathcal{O}(\ell)+\mathcal{O}(m))$ $(0 \leqq \ell \leqq m)$ なる $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^2$ 束上の完備線形系 $|4T+nF|$ を考えよう。ここでまず出発点として $n \geqq 0$ を仮定し、Bertiniの定理より、これの非特異なメンバーをとってくると、簡単な計算から、

$$p_g(S) = 4(\ell+m)+3n-3,\quad q(S)=0,$$
$$c_1^2(S) = 12(\ell+m)+9n-16 = 3p_g(S)-7$$

となり、さらにもし $\ell+m+n \geqq 2$ ならば S は双有理標準写像を持つことが確かめられる。

さて、今作った例の意味を問うてみよう。$c_1^2 = 3p_g - 7$ なる直線は非常に由緒あるものであることが知られる。則ち：

<u>定理</u>　（Castelnuovo一堀川［H3,II］の不等式）

極小な一般型曲面Sが双有理標準写像を持つとすると $c_1^2(S) \geqq 3p_g(S)-7$ となる。

従って、先の例はこの性質を満たす最下限の曲面を作っていることになる。

そこで今度は S を $c_1^2 = 3p_g - 7$ を満たす極小な一般型曲面としよう。次の補題は、堀川［H2］、Beauville［B］より容易に導かれる。

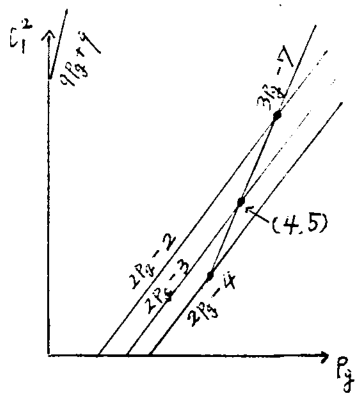
<u>定義一補題</u>　$c_1^2 = 3p_g - 7$ なる曲面 S の標準写像 Φ_K は次の2種類しかない。

（I）$|K|$ は底点がなく、Φ_K はその像の上への双有理正則写像を与える。こ

れを I型曲面と呼ぶ。

(II) Φ_K は(双有理的な意味で)線織面への2重被覆を与える。これを II型曲面と呼ぶ。

p_g が少ない場合の S については、すでに研究されていることに注意しよう。則ち、$(p_g、c_1^2)=(3、2)$ の時は Moishezon、(4、5)及び(5、8)の時は堀川 [H2] [H3,IV]、(7、14)の時は Miranda がそれぞれ研究している。特に注目すべきは(4、5)の時、則ち堀川が深く研究した(数値的)5次曲面がここにあることである。一般型曲面論の原点とでも言うべきこの理論を、$c_1^2= 3p_g-7$ なる直線にそって拡張したいというのが我々の出発点であった。



§2. I型曲面

まず前節で作った種数3の線形束を持つ曲面の中には $(p_g、c_1^2)=(4、5)$ であるものが含まれていることに注目して、5次曲面(則ちこの類のI型曲面)の中での、この例のしめる位置を問うてみる。

<u>定理</u>　S を5次曲面とする。この時 S が種数3の非超楕円曲線の線形束を持つことと、S が直線を含むことは同値である。そして、そのような S の moduli数は 38次元である。

5次曲面のmoduli数が 40次元であったことを思い出すと、この例は余次元2の族しかとり出していないわけである。$p_g= 5、7$ の時にも似たような事情にあることがわかるが(ここで $p_g= 3$ の時はII型曲面しかないので考察の必要はない)、ところが実に驚いたことにこれらの場合はすべて Castel-nouvo理論の立場から見れば例外的であることが知られる。則ち:

<u>Castelnuovoの定理の系</u>　Ｓを $c_1^2=3p_g-7$ であるＩ型曲面とする。もし $p_g\neq 4$、5、7 であれば、Ｓは常に種数３の非超楕円線形束を持つ。

さて、Castelnuovo [C] の定理の再構成は以下のようである。（なお、[C] では、現代の用語では、標準１次系が非常に豊富な場合のみを扱っており、以下の特異点に関する主張、および（ニ）の（ℓ、m、n）に関する条件等は述べられていないことをことわっておく。）

<u>定理</u>（Castelnuovo and [AK1]）　Ｓを $c_1^2=3p_g-7$ のＩ型曲面とすると、$q(S)=0$ である。さらにＳの標準像Ｓ’は有理２重点のみを持ち、最小次数の３次元有理多様体に含まれる。さらにＳ’は次のいずれかである。

（イ）$\mathbb{P}^3$内の５次曲面　：　$p_g=4$ の時のみおこる。

（ロ）$\mathbb{P}^4$ 内の２次と４次の超曲面の完全交差　：　$p_g=5$

（ハ）Veronese cone 上の因子 $\in |3T+F|$　：　$p_g=7$　（ここで、Veronese cone とは $\mathbb{P}^2$ 上の$\mathbb{P}^1$ 束 $\mathbb{P}(\mathcal{O}+\mathcal{O}(2))$ のtautological 線形系 $|T|$ による写像の像のことである。また、Ｆはファイバー。）

（ニ）rational normal scroll 上の因子 $\in |4T+nF|$　：　$p_g=4(\ell+m)+3n-3$。（この場合の rational normal scroll とは、§１の $\Sigma_{\ell,m}$ の $|T+(\ell+m+n-2)F|$ による写像の像のことである。）ただし、$\ell+m+n\geqq 2$、$4\ell+n\geqq 0$、$m+n\geqq 0$ が満たされる。

（ニ）の３条件はそれぞれ一般型曲面を与える条件、既約性の条件、Ｓ’が孤立特異点を持つ条件に対応している。（§１の例と比較すると、Bertini の定理が適用できないところにも既約メンバーが存在していることに注意されたい。）　さて証明の方針は、まずＳの標準線形系 $|K|$ の一般メンバーＣを (p_g-2) 次元射影空間内の曲線と思うと、空間曲線論におけるCastelnuo

-voの上限定理の等号を与える曲線になっていることがわかる。これより、標準像 S' を含む2次超曲面全体の底点集合 M を考えると、最小次数の3次元有理多様体となっていることがわかる。Harris [Ha] によるそのような多様体の分類定理を用いつつ、M の因子としての S' の方程式を具体的に書きながら証明を実行する。

もちろん(ニ)に対応する曲面が主要なクラスであって、以下これを <u>(ℓ 、m、n)型のCastelnuovo曲面</u> と呼ぶことにして、これの変形を考えよう。

まず最初に $p_g = 4(\ell + m) + 3n - 3$ だったので、異なる型のCastelnuovo曲面が同じ p_g を与えうることに注意する。実際、例えば $p_g = 6$ の時は(ℓ 、m, n)=(0、0、3)(1、2、-1)、 $p_g = 7$ なら(0、1、2)(1、3、-2)(2、2、-2)、$p_g = 8$ なら(0、2、1)(1、1、1)(1、4、-3)(2、3、-3)・・・・とどんどん増えてくる。そこで、

(問ホ) 同じ p_g を与えるCastelnuovo曲面どおしは、変形でつながるか?

(則ち、同じ変形型を持つか?)

という自然な問が生ずる。ここに"変形でつながる"とは、有限個の複素解析族を経由してつながるという意味である。この問は、実質的に次の2つの問に帰着する。

(へ) 入れ物 (ambient space) である $\Sigma_{\ell,m}$ のジャンプ現象を調べること。

(ト) 入れ物と中身の曲面の変形の関係を調べること。

(ト)の問は堀川 [H1] がまさにこのような問を解くために開発したといえる正則写像の変形論の応用問題である。(へ)の問はHirzebruch曲面 Σ_e のジャンプ現象の3次元版を考えよということである。Σ_e の時にはこの現象は mod 2 で生じ、e が偶数か奇数かで2種類の変形型にわかれたが、$\Sigma_{\ell,m}$ の時には mod 3 で生じ、次の3種類の変形型にわかれる。

<u>命題</u>　$\Sigma_{\ell,m}$ は、もし $\ell+m\equiv 0 \pmod 3$ なら $\Sigma_{0,0}=P^1\times P^2$ と、$\ell+m\equiv 1$ なら $\Sigma_{0,1}$ と、$\ell+m\equiv 2$ なら $\Sigma_{1,1}$ とそれぞれ同じ変形型を持つ。

さて、$n\geqq 0$ の時は（ト）もうまくいくが $n<0$ の時は微妙である。この時は一般の S' は必ず特異点を持ち、しかもそれはすべて（無限に近いものもこめて）トーリック多様体である $\Sigma_{\ell,m}$ の、トーラスの作用で不変な直線に沿ってのっていることがわかる。従って S' の特異点解消はトーリック多様体のカテゴリーで実行できるが（[O] 参照）、変形論的な統制はより難しくなる。現在のところ、以下の状況でのみ、入れ物である $\Sigma_{\ell,m}$ の変形に S 自身の変形がついていくことが [H1] の定理に帰着させることによって証明でき、（ホ）が肯定的に解ける。

<u>定理</u>　$\ell+n\geqq -1$ なるCastelnuovo曲面は互いに変形でつながっている。さらに $\ell+m+n>2$ ならば一般の S に対してmoduli数が定義され、それは $h^1(\Theta_S)=5p_g+18$ に等しい。

§3　<u>II型曲面</u>

II型曲面Sについては $q(S)=0$ が従うわけではないが、ここではそれを仮定する。ここの S について、堀川 [H3, I~IV] に見られるような双正則構造に着目した理論を展開するのは今のところ不可能のように思える。なぜなら、S の標準像 W は S が Noether line から遠ざかる程最小次数の曲面から遠ざかり、そのような形の有理曲面論は、現在もなお（少なくともextrinsicな形では）ないように思われるからである。むしろ [H4] [H3,V] ではそのような立場を捨てて、超楕円曲線の線形束 $S \dashrightarrow W \longrightarrow P^1$ を見るよう示唆していると思われる。そこで我々もその立場に立って考察する。

一般に S を $q=0$ である極小な一般型曲面であって超楕円曲線の線形束

を持つとする。次の２つの定理は基本的である。

<u>定理</u>（堀川［H3,V］）　Ｓ が種数 g の束を持つなら、$c_1^2(S) \geqq (4(g-1)/g)(p_g(S)-g)$ となる。

<u>定理</u>（Xiao［X］）　ある g があって $p_g(S) \geqq (2g-1)(g+1)$ 且 $c_1^2(S) < (4g/(g+1))(p_g(S)-g-1)$ を満たせば、Ｓ は種数 g 以下の束を持つ。

Xiaoの定理の系として次のことが従う。

<u>系</u>　Ｓ を $c_1^2=3p_g-7$、$q=0$ なるＩＩ型曲面であって、$p_g(S) \geqq 46$ と仮定すると、Ｓ は種数 ４ 以下の超楕円線形束を持つ。

一方、種数 ４ 以下の ＩＩ型曲面の存在に関しては次のことが言える。

<u>命題</u>　g を２または３または４とする。$y=3x-7$、$x \geqq 4$ を満たす任意の自然数 x、y に対し、$p_g(S)=x$，$q(S)=0$、$c_1^2(S)=y$ なる極小な曲面 Ｓ であって、種数 g の超楕円曲線の線形束を持つものがある。

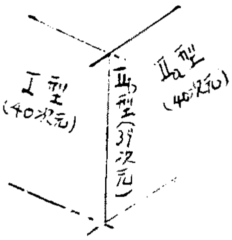
上の命題で $c_1^2=3p_g-7$ であることは実は何ら本質的なことではない。実際、$g=2$ の時 Persson［P］は c_1^2 が　$2p_g-4$ 〜 $4p_g$ くらいの領域で作っている。$g=3$ の時は、彼の方法にならい、c_1^2 が $(8/3)p_g-8$ 〜 $4p_g-4$ くらいまで作った。（$(8/3)p_g-8$ は堀川の定理における $g=3$ の下限である。）この方法は $\tilde{E}_8$ および $\tilde{E}_7$ 型の単純楕円型特異点（［S］）を特殊な位置にのせることにより作るものと言える。一方　$g=4$ の時には、Perssonの方法と異なり、あえて”一般の位置”にこの特異点をのせる方法を用いた。［AK1］では単純楕円型しか使う必要がなかったが、方法論的には、大域的な統制をとりつつ色々な２重点をGorenstein曲面上に

のせることが可能であるように思われる。

§ 4　Reid の問題

再び5次曲面論にたちかえって新しい問題を考えよう。堀川［H2］では

$(p_g, c_1^2) = (4, 5)$ のＩＩ型曲面を II_a 及び II_b の２つにわけ、II_b 曲面からみた倉西空間を右図のようにスケッチしている。このことから、存在定理にたよらず、



Ｉ型とＩＩ型をつなぐ具体的な複素解析族が存在するだろうと思われる。これを構成せよというのが Reid［R］の問題で、彼の周辺の人たちによるいくつかの仕事がある。

我々はこの問題を以下のように拡張する。

（問チ）　$c_1^2 = 3p_g - 7$　を満たすＩ型曲面とＩＩ型曲面を具体的な複素解析族でつなげ。

則ち複素解析族　$M \to D = \{ |t| < 1 \}$ で、M_t $(t \neq 0)$ がＩ型曲面、M_0 がＩＩ型曲面である例を作れということである。（　反対に M_t がＩＩ型、M_0 がＩ型である族は存在しない。これは例えば小平次元の下半連続性からも容易に導ける。）　これに対し：

<u>定理</u>　p_g が５以上の任意の奇数とすると、上のような複素解析族が構成できる。

構成自体はしごく簡単で、種数３の非超楕円曲線が超楕円曲線に特殊化する例を作っておいて、それを以下のように相対化すればよい。（このアイデアは［数理科学、曲面の神秘、1974］中の堀川の記事のあるコメントにヒントを得たものである。）

n を偶数とし、$W=\Sigma_{\ell,m}$上の直線束　$L:=2T+(n/2)F$　をとる。今、t をパラメーターとして、W 上の $\mathbb{P}^1$束　$V:=\mathbb{P}(\mathcal{O}+\mathcal{O}(L))$ の部分多様体 S_t を

$$X_0^2+a_1X_0X_1+a_2X_1^2=0、\quad tX_0=qX_1$$

なる方程式で定義する。ここに、$(X_0:X_1)$ は $V\to W$ のファイバー座標、また $q\in H^0(W,L)$、$a_i\in H^0(W,iL)$ である。

族 $\{S_t\}$ が求める条件を満たすことが確認できる。 nが偶数であることから p_g が奇数であることが従う。

しかし、p_g が偶数の時は（問チ）は未解決である。

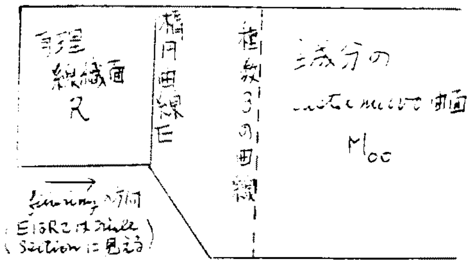
§5　臼井型退化現象

臼井［U］は、Torelli問題の帰納的解決をおもな動機として、不変量の少しだけ異なる一般型曲面どおしを、”やさしい”退化族の一般ファイバーと特異ファイバーの主成分といった形で結ぶ試みを行っている。現在のところ、Todorov曲面の系列と、Noether-堀川line の周辺にその構成例が見られるが、$c_1^2=3p_g-7$ なる line 上でも同様の現象が観察できる。則ち：

__定理__　Castelnuovo 曲面の退化族　$M\to D$ であって、その特異ファイバー M_0 は2つの成分 $M_{00}\cup R$ からなり、R は有理曲面、M_{00} は $p_g(M_{00})=p_g(M_t)-1$、$c_1^2(M_{00})=c_1^2(M_t)-3$、$(t\neq0)$ を満たす極小なCastelnuovo曲面であるものが存在する。

構成は、Castelnuovo 曲面の中で Hirzebruch 曲面の３重被覆になっているものをとってきて、それに $\widetilde{E}_6$ 型の単純楕円型特異点を１個ずつのせ、それを

族の中で特異点解消しながら行う。その際、２重被覆における堀川の canonical resolution にあたるものが巡回３次被覆の時にも拡張できたことが有力な道具立てとなった。（［AK2］） 得られる特異ファイバーの形は右図のようである。



最後に、これは著者たちの個人的な見解であるが、臼井型退化現象や前節のタイプの異なる曲面どおしの変形などは、何も”特別な現象”では決してなく、おそらく、一般型曲面の存在域の非常に広い範囲にわたって見られる”普通の現象”であるように思われる………。

＜ 文献 ＞

[AK1] T. Ashikaga and K. Konno: Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 7$, preprint.

[AK2] T. Ashikaga and K. Konno: Examples of degenerations of Castelnuovo surfaces, preprint.

[B] A. Beauville: L'application canonique pour les surfaces de type general, Invent. Math. 55 (1979), 121-140.

[C] G. Castelnuovo: Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie, Nota II. Rendiconti del R. Instituto Lombardo, s.II, vol 24, 1891.

[Ha] J. Harris: A bound on the geometric genus of projective varieties, Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa, IV. Ser VIII (1981), 35-68.

[H1] E. Horikawa: On deformation of holomorphic maps I, II, III. J.Math. Soc. Japan 25 (1973), 372-396, ibid. 26 (1974), 647-667, Math. Ann. 222 (1976), 275-282.

[H2] E. Horikawa: On deformation of quintic surfaces, Invent. Math. 31 (1975), 43-85.

[H3] E. Horikawa: Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, I, II, III, IV, V. Ann. Math. 104 (1976), 358-387, Invent. Math. 37 (1976), 121-155, ibid. 47 (1978), 209-248, ibid. 50 (1979), 103-128, Journ. of Fac. Soci. Univ. of Tokyo 28 (1981),745-755.

[H4] E. Horikawa: On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2. In: Complex Analysis and Algebraic Geometry, a volume dedicated to K. Kodaira, Tokyo and Cambridge, Iwanami Shoten and Cambridge Univ. Press, 1977, 79-90.

[O] T. Oda: Convex Bodies and Algebraic Geometry, A series of modern survey in math. 15, Springer, 1988.

[P] U. Persson: On Chern invarient of surfaces of general type, Composi-tio Math. 43 (1981), 3-58

[R] M. Reid: Problem 12, Part 2. Problémes Ouverts, Sem. Math. Super., Sem. Sci. OTAN, p. 8 (1980).

[S] K. Saito: Einfach-elliptishe singularitäten, Invent. Math. 23 (1974), 289-325.

[U] S. Usui: Private communication.

[X] G. Xiao: Hyperelliptic surfaces of general type with $K^2 < 4\chi$, manuscripta math. 57 (1987), 125-148.