代数幾何学シンポジウム記録
1998年度　pp.106-122

log Hodge 構造と分類空間(臼井三平氏との共同研究)

加藤和也(東京大学)

長い間 p 進世界でくらしてきた私は，$\mathbb{C}$ 上の世界に来て Hodge 構造を考えようとすると，地面の上に出てきたもぐらのように苦しかったのであるが，臼井さんと共同研究をすることができ，何とかやっております．

§1. Griffiths の夢

$\mathfrak{h}$ を上半平面とし，Γ を $SL(2,\mathbb{Z})$ の合同部分群とすると，$\Gamma\backslash\mathfrak{h}$ はモジュラー曲線と呼ばれる重要なものになり，これを

(1) $\qquad \Gamma\backslash\mathfrak{h} \subset \Gamma\backslash(\mathfrak{h}\cup\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})) = (\Gamma\backslash\mathfrak{h}) \cup \{$有限個の cusp$\}$

の形にコンパクト化することも重要なことである．

$\mathfrak{h}_g$ $(g\geq 1)$ を Siegel 上半空間 ($\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1$ である) とし，Γ を $Sp(g,\mathbb{Z})$ の合同部分群とするときも，$\Gamma\backslash\mathfrak{h}_g$ は重要なものになり，そのコンパクト化

(2) $\qquad \Gamma\backslash\mathfrak{h}_g \subset$ 佐武-Baily-Borel compact 化
$\qquad\qquad\qquad \subset$ Mumford compact 化

も重要である．

この $\mathfrak{h}_g$ はある特別な型の polarized Hodge 構造の分類空間である．Griffiths は，一般に，fix された重み，Hodge number を持つ polarized Hodge 構造の分類空間 D を定義した (§2 参照)．

重み $=1$，Hodge number が $h^{1,0}=h^{0,1}=g$，他の $h^{p,q}=0$

の場合

$$D=\mathfrak{h}_g$$

である．

一般のDに対しても，Sp(g, ℤ)にあたる群$G_{\mathbb{R}}$，Sp(g, ℤ)にあたる群$G_{\mathbb{Z}} \subset G_{\mathbb{R}}$が定義され，これらはDに作用している．

Griffithsの夢（[G]）　Γを$G_{\mathbb{Z}}$の合同部分群とするとき，Γ\Dに適切な無限遠点をつけくわえて

$$\Gamma\backslash D \subset (?)$$

の形に(1)(2)を一般化したい．

臼井さんと私の方法は，この問題に

polarized Hodge構造の分類空間

⊂ polarized log Hodge構造の分類空間

という形に，答えようとするものである．これはMumford compact化の理論を，polarized log Hodge構造の考えで解釈しなおし，一般化しようとするものである．

「polarized log Hodge構造」とは，「polarized Hodge構造の退化したもの」をlog structureの理論によって把握したものである．

log structureの理論（§4参照）は，退化をあつかうための理論であって，退化して醜くなっているように見える対象に，log structureをふりかけると，その対象が本来持っているはずの美点があらわれるというものである．

最近外国での研究集会で，美女と野獣（Beauty and Beast）の話において野獣が少女の愛を受けて本来の王子の姿にもどったことと，log structureを比較して，黒板に

$$\text{ugly object} \xrightarrow{\text{log structure}} \text{nice object}$$

$$\text{Beast} \xrightarrow{\text{love of girl}} \text{prince}$$

と並べて書いた所，斎藤毅氏から，ここに

ℓove of $g$irl

というふしぎな一致があらわれているという指摘があり，私も，聴いていた人も，ふしぎさに驚いたことがあった．

polarized log Hodge 構造を，「退化したもの」と呼びはしたが，それは「不完全なもの」「いいかげんなもの」ではなく，log structure の眼で見て愛をそそげば，polarized log Hodge 構造が無限遠へむかって退化している様子は，むしろ無限遠へ向かわないふつうの polarized Hodge 構造よりも，「苦労人の良さ」のような味わい深さを持ち，より多くの美点を示すもののように思われる．

無限遠について考えるには，遠くほど大きく見える眼を持たなければならないようである．

以下，§2 で Griffiths の分類空間 D を復習し，§3 で Griffiths の夢に出てくる空間(?)の作り方について述べ，§4 でその空間と polarized log Hodge 構造の関係について述べる．

§2 Griffiths の分類空間 D

Griffiths の分類空間 D の定義を紹介する

次のものを fix する．

w —— 重みと呼ばれる整数

$h^{p,q}$ —— Hodge number と呼ばれる整数の族 (p, q は整数を走る)

H_0 —— lattice と呼ばれる有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群

$\langle\ ,\ \rangle_0$ —— $\mathbb{Q}$ 双線型写像 $H_{0,\mathbb{Q}} \times H_{0,\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$.

(ここに $H_{0,\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes H_{0,\mathbb{Q}}$.)

そしてこれらは次の条件をみたすものと仮定する

(i) $h^{p,q} = h^{q,p} \quad \forall p, q$

(ii) $p+q \neq w \Rightarrow h^{p,q} = 0$.

(iii) $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(H_0) = \sum_{p,q} h^{p,q}$

(iv) $\langle\ ,\ \rangle_0$ は非退化で，w が偶数なら対称形式，奇数なら交代形式．

Griffiths の分類空間 D は

$$D = \{F\ ;\ F = (F^p)_{p\in\mathbb{Z}} \text{ は } H_{0,\mathbb{C}} = \mathbb{C}\otimes H_0 \text{ に入る降 filtration で}$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(F^p) = \sum_{r\geq p} h^{r,w-r} \quad \forall p\in\mathbb{Z} \qquad \cdots\cdots (あ)$$

をみたし，かつ $(H_0, \langle\ ,\ \rangle_0, F)$ が重み w の polarized Hodge 構造となるもの $\}$

と定義される．「重み w の polarized Hodge 構造になる」とは，次の(い)(う)をみたすこと：

$$p+q > w \Rightarrow \langle F^p, F^q\rangle_0 = 0 \qquad \cdots\cdots (い)$$

$H^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}$ とおくと，$H_{0,\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=w} H^{p,q}$ となり，
もし $p+q=w$，$x\in H^{p,q}$，$x\neq 0$ なら，$i^{p-q}\langle x, \bar{x}\rangle_0 > 0$ $\qquad \cdots\cdots (う)$

一方

$$\check{D} = \{F\ ;\ F = (F^p)_{p\in\mathbb{Z}} \text{ は } H_{0,\mathbb{C}} \text{ に入る降 filtration で}$$
上の(あ)(い)をみたす（(う)はみたさなくてよい）もの $\}$

とおく．D, $\check{D}$ は複素解析多様体で $D \underset{\text{open}}{\subset} \check{D}$ となる

例（この例を上半平面 case と呼ぶ） $w=1$, $h^{1,0}=h^{0,1}=1$, 他の $h^{p,q}=0$.
$H_0=\mathbb{Z}^2$ (base e_1, e_2), $\langle\ ,\ \rangle_0$ は交代形式で $\langle e_2, e_1\rangle=1$
とする．このとき

$$D=\mathfrak{h}\ \subset\ \check{D}=\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

となる．$\tau\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ に対応する $\check{D}$ の元 F_τ は次のように与えられる

$p\leqq 0$ なら $F^p_\tau=H_{0,\mathbb{C}}$

$p\geqq 2$ なら $F^p_\tau=\{0\}$

F^1_τ は，$\tau\in\mathbb{C}$ なら $\mathbb{C}(\tau e_1+e_2)$, $\tau=\infty$ なら $\mathbb{C}e_1$.

例（Siegel 上半空間 case と呼ぶ） 上の例の一般化である，
$w=1$, $h^{1,0}=h^{0,1}=g$, 他の $h^{p,q}=0$ の場合には，$D=\mathfrak{h}_g$ と
なる．

§3 空間(?)の作り方

Mumford の夢に出てくる空間(?)を作る私どもの方法は，次のとおりである．この §3 では polarized log Hodge 構造の概念には関係なしにこの空間をつくり，§4 で polarized log Hodge 構造と関係づける．

$(w, (h^{p,q})_{p,q}, H_0, \langle\ ,\ \rangle_0)$ を §2 のとおりとし，固定する
さらに fan Σ （定義 3.2）というものを固定するとき，

$$D_\Sigma\supset D$$

となる空間 D_Σ があらわれ（定義 3.3），それから

$$(?)=\Gamma\backslash D_\Sigma\supset\Gamma\backslash D$$

が得られるのである（Γ についてはあとで説明）．

Siegel 上半空間 case の, Mumford compact 化, も このようにして得られるものになっている

ただ臼井さんと私の方法の, いまだ不十分な所は,

「十分大きなfanを見つける方法をまだ得ていない」

ということである. fan Σ, Σ' について

$$\Sigma \subset \Sigma' \Rightarrow D_\Sigma \subset D_{\Sigma'}$$

であり, Siegel 上半空間 case の場合には十分大きい Σ をとらないと, できた空間 $\Gamma\backslash D_\Sigma$ はコンパクトにならない. Siegel 上半空間 case の場合には Mumford らによって十分大きい Σ を作る方法が見出されており, 十分大きい Σ についての $\Gamma\backslash D_\Sigma$ が Mumford compact 化になるのである.

一般の場合には Σ をどんなに大きくとっても $\Gamma\backslash D_\Sigma$ が compact になりえないこともある. (Σ をどんなに大きくとっても $D_\Sigma = D$ としかなりえないことすらある「$w \geq 2$, $h^{w,0} = h^{0,w} = 1$, 他の $h^{p,q} = 0$」の場合がそう).

しかしそれでも, 「十分大きいfan という概念を定義することはできるのである (説明略) が, この十分大きいfan を一般に作る方法をまだ得ていないのである.

いろいろ定義を並べてのちに D_Σ を定義する.

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \{ \mathbb{Q}\text{線型写像 } h : H_{0,\mathbb{Q}} \to H_{0,\mathbb{Q}} \text{ で } \langle hx, y\rangle + \langle x, hy\rangle = 0 \ \ \forall x, y \in H_{0,\mathbb{Q}} \text{ をみたすもの全体} \}$$

とおく.

定義 3.1 nilpotent cone とは, $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の部分集合 σ で次の (i) ― (iv) をみたすもののことである.

(i) $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の有限個の元 $N_1, \cdots, N_n$ があって

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{Q}_{\geq 0} N_j \qquad \left(= \left\{ \sum_{j=1}^{n} y_j N_j \ ; \ y_j \in \mathbb{Q},\ y_j > 0 \right\} \right)$$

と書ける.

(ii) $N \in \sigma \Rightarrow N$ は巾零.

(iii) $N, N' \in \sigma \Rightarrow NN' = N'N$.

(iv) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

この σ は, 無限遠へむかって退化してゆくものの, その無限遠の方向をあらわす役目をする.

定義3.2 fan とは, $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の nilpotent cone からなる空でない集合 Σ で, 次の (i) (ii) をみたすもの.

(i) $\sigma \in \Sigma$ で σ' が σ の face なら, $\sigma' \in \Sigma$.

(ii) $\sigma, \sigma' \in \Sigma \Rightarrow \sigma \cap \sigma'$ は σ の face.

ここで σ の face とは「σ のへり」という感じのもので, たとえば $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0} N_1 + \mathbb{Q}_{\geq 0} N_2$, N_1 と N_2 が $\mathbb{Q}$ 上1次独立のとき, σ のへりとは

σ 自身, $\mathbb{Q}_{\geq 0} N_1$, $\mathbb{Q}_{\geq 0} N_2$, $\{0\}$

の4つである. 一般には σ の face とは, σ の部分集合 σ' で,

「$x, y \in \sigma$ に対し「$x + y \in \sigma'$」と「$x \in \sigma'$ かつ $y \in \sigma'$」は同値」

「$x \in \sigma'$, $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \Rightarrow ax \in \sigma'$」

「$0 \in \sigma'$」

をみたすものである.

定義3.3 Σ を fan とするとき

$$D_{\Sigma} = \{ (\sigma, Z) \ ; \ Z \text{ は } \sigma\text{-nilpotent orbit} \}$$

と定義する. ここで σ-nilpotent orbit とは, $\check{D}$ の部分集合 Z で次の (i)−(iii) をみたすもののことである.

(i) $F \in Z \Rightarrow Z = \exp(\sigma_{\mathbb{C}})F$

ここに $\sigma_{\mathbb{C}}$ は σ が生成する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ 内の $\mathbb{C}$ 部分線型空間で $\exp(\sigma_{\mathbb{C}})F$ は F を $\exp(\sigma_{\mathbb{C}})$ の元でずらしてできる orbit をあらわす

(ii) $F \in Z,\ N \in \sigma \Rightarrow N(F^p) \subset F^{p-1} \ \forall p \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}N_1 + \cdots + \mathbb{Q}_{\geq 0}N_n$ となる $N_1, \cdots, N_n$ をとり, $F \in Z$ とすると,

$z_j \in \mathbb{C}$, z_j の虚部 $\gg 0$ $(1 \leq j \leq n) \Rightarrow \exp(\sum_{j=1}^{n} z_j N_j)F \in D$

例3.4 $\Xi = \{\mathbb{Q}_{\geq 0}N \ ;\ N \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}},\ N$ は巾零$\}$

とおくと Ξ は fan であり, したがって D_{Ξ} が定義される

「十分大きい fan」という概念は定義を略するが, この Ξ が十分大きい fan である場合も多々あり, 上半平面 case では Ξ は十分大きく

$$D_{\Xi} = \mathfrak{h} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$$

となり欲する無限遠点が完全に得られる.

Siegel 上半空間 case で $g \geqq 2$ の場合には, Ξ は十分大きくはない.

なお, 上半平面 case で, $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ に対応する D_{Ξ} の元 (σ, Z) は,

$$\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \check{D}$$

で与えられる. $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{C}$ に対し $\exp(zN)F_{\tau} = F_{\tau+z}$ であり,

σ-nilpotent orbit の条件 (iii) は, 「$\tau \in \mathbb{C}$ とすると,

$z \in \mathbb{C}$, z の虚部 $\gg 0 \Rightarrow \tau + z \in \mathfrak{h}$ 」

ということであるから, みたされる.

次に商 $\Gamma\backslash D_\Sigma$ を作るための準備をする.

$$G_{\mathbb{Z}} = \{\gamma : H_0 \xrightarrow{\cong} H_0\ ;\ \mathbb{Z}\text{加群の同型},$$
$$\langle \gamma x, \gamma y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H_0\}$$

とおく. Γ を $G_{\mathbb{Z}}$ の部分群とする.

定義 3.5　fan Σ と, $G_{\mathbb{Z}}$ の部分群 Γ が, compatible であるとは, 次の (i)(ii) が成立することである.

(i)　$\gamma \in \Gamma,\ \sigma \in \Sigma \Rightarrow \gamma\sigma\gamma^{-1} \in \Sigma.$

(ii)　$\Gamma(\sigma) = \{\gamma \in \Gamma\ ;\ \gamma$ は unipotent, $\log(\gamma) \in \sigma\}$

とおくと, 各 $\sigma \in \Sigma$ について $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}\log(\Gamma(\sigma))$.

例 3.6　Ξ (例 3.4) は, $G_{\mathbb{Z}}$ のすべての指数有限部分群と compatible である. しかし, たとえば Ξ と単位群 $\{1\}$ は, ((i) は成立するが (ii) が成立しないので, compatible ではない)

Σ と Γ が compatible なら, Γ は D_Σ に,

$$\Gamma \ni \gamma : (\sigma, Z) \longmapsto (\gamma\sigma\gamma^{-1}, \gamma Z)$$

によって作用する (定義 3.5 の条件 (i) による). したがって商空間 $\Gamma\backslash D_\Sigma$ をつくることができる. この $\Gamma\backslash D_\Sigma$ に, $\Gamma\backslash D$ 上の複素正則関数の層を延長し, さらに log structure も付すことができるのである (ここで, 定義 3.5 の条件 (ii) が使われる; たとえば上半平面 case において Ξ と単位群 $\{1\}$ は条件 (ii) をみたさないが, D_Ξ を $\{1\}$ でわった空間 $\mathfrak{h} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ には, $\mathfrak{h}$ 上の正則関数の層は, まともな形には, 延長できない) しかし この層の定義, log structure の定義は, あまりに長い説明になるので省略する.

§4 polarized log Hodge 構造

結論は，§3でつくった空間 $\Gamma\backslash D_\Sigma$ が，polarized log Hodge structure の分類空間（moduli space）だということである

以下，

の順に述べていく

§4.1 fs log analytic space

X を ringed space とするとき，X 上の log structure とは，X 上の可換半群の層 M で，準同型 $\alpha : M \to \mathcal{O}_X$ が付されたものであり，$\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X^\times$ （α による）が成立するもののことである．ここで $\mathcal{O}_X$ は乗法について可換半群の層とみなす（半群といえば単位元 1 を持ち，準同型といえば 1 を 1 にうつすものとする）

log analytic space とは，$\mathbb{C}$ 上の analytic space で，log structure を付されたものである

fs log analytic space とは，log analytic space のうち，その log structure が下の定義 4.2 の意味で "fs" であることをいう

定義 4.1　可換半群 P が fs であるとは，次の (i)−(iii) をみたすこと．

(i)　P は有限生成

(ii)　$ab = ac \Rightarrow b = c$ が成立する

（(ii) により $P \hookrightarrow$ 群 $P^{gp} = \{ab^{-1} ; a, b \in P\}$．）

(iii) $a \in P^{gp}$, $a^n \in P$ $\exists n \geq 1 \Rightarrow a \in P$.

定義4.2 ringed space X 上の log structure M が fs であるとは，X 上 local に，可換半群 P で fs であるものと準同型 $\beta : P \to \mathcal{O}_X$（$P$ はここで X 上の定数層と見ている）があって，M は可換半群の層の圏における

$$\begin{array}{ccc} \beta^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) & \hookrightarrow & \text{定数層} P \\ \downarrow & & \\ \mathcal{O}_X^\times & & \end{array}$$

の push out になっており，α は，β と包含写像 $\mathcal{O}_X^\times \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ から導かれるものになっていることである

例4.3 X を smooth（つまり特異点のない）analytic space とし，Y を X 上の normal crossing をもつ divisor とし，

$$M = \{f \in \mathcal{O}_X \;;\; f \text{ は } Y \text{ の外で可逆}\}$$

とし，$\alpha : M \to \mathcal{O}_X$ を包含写像とする このMを付された X は，fs log analytic space である．

§4.2 polarized log Hodge 構造

X を fs log analytic space とする．(その log structure を M_X と書く）

X 上の polarized log Hodge 構造，というものを導入する．

そのため，まず X^{log} という位相空間を導入する

$$X^{log} = \{(x, h) \;;\; x \in X,$$
$$h \text{ は準同型 } M_{X,x} \to S^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \;;\; |z| = 1\} \text{ で}$$
$$h(u) = \frac{u(x)}{|u(x)|} \quad \forall u \in \mathcal{O}_{X,x}^\times \text{ をみたすもの}\}.$$

$X^{\log}$ の位相の入れ方については省略する([加中]参照). $X^{\log}$ はこの[加中]で定義された方法で今書いているが, [川並]においても独立に別の方法で定義された.

例4.4　$X = \Delta = \{ z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < 1 \}$ とおく.

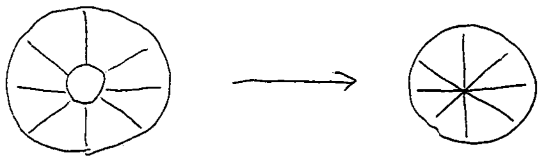
そして $\{0\}$ を Δ の normal crossing な divisor と見て, 例4.3のように log structure を入れる. (M_Δ と記す)

$$M_{\Delta, x} = \begin{cases} \mathcal{O}^\times_{\Delta, x} & x \in \Delta - \{0\} \text{ のとき} \\ \mathcal{O}^\times_{\Delta, 0} \times \{ z^n : n \geq 0 \} & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(zは座標関数)

そして $\Delta^{\log}$ は次のようになる

$$\Delta^{\log} \xrightarrow[(x, h) \longmapsto x]{} \Delta$$



すなわち, $x \in \Delta - \{0\}$ の逆像は1点だが, $0 \in \Delta$ の逆像は S^1 と同型になる. ($(0, h) \in \Delta^{\log}$ に $h(z) \in S^1$ を対応させる.)

例4.5　$f : E \longrightarrow \Delta$ を, Δ の原点において退化する, 楕円曲線の有名な family で,

$q \in \Delta - \{0\}$ に対し, $f^{-1}(q) = \mathbb{C}^\times / q^{\mathbb{Z}}$

となるものとする. $q \in \Delta$ に対し

$f^{-1}(q) \cong$

$q \neq 0$ のとき

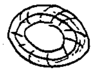
$q = 0$ のとき

となる.

Δ に例4.4のように log structure を入れ，E に，normal crossing divisor $f^{-1}(0)$ に対する log structure を入れる．このときふしぎなことに，

$$f^{\log} : E^{\log} \to \Delta^{\log}$$

については

$(f^{\log})^{-1}(y) \cong$  $\forall\ y \in \Delta^{\log}$

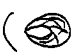
となり，log の魔法によって退化が消えてくれるのである．

X を fs log analytic space とするとき，X 上の polarized log Hodge 構造とは，$X^{\log}$ 上の（X 上のではなく!!）local system にある付加構造を付したものである．

たとえば例4.5において層 $R^1 f_* \mathbb{Z}$ は Δ の原点において次のように退化する：$q \in \Delta$ に対し

$(R^1 f_* \mathbb{Z})_q = H^1(f^{-1}(q), \mathbb{Z}) =$

$H^1($$, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$

$H^1($$, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

しかし $R^1(f^{\log})_* \mathbb{Z}$ は退化せず，$\Delta^{\log}$ 上の rank 2 の local system である．この $R^1(f^{\log})_* \mathbb{Z}$ に付加構造を付けたものが，E によって与えられる Δ 上の polarized log Hodge 構造になるのである

この付加構造を定義するには，fs log analytic space X に対し，$X^{\log}$ 上の環の層 $\mathcal{O}_X^{\log}$ を定義する必要がある．$\tau : X^{\log} \to X$ を $(x, h) \mapsto x$ とする．$\mathcal{O}_X^{\log}$ は $\tau^{-1}(\mathcal{O}_X)$-algebra であり，

$$\mathcal{O}_X^{\log} = \tau^{-1}(\mathcal{O}_X)[\log(\tau^{-1}(M_X^{gp}))]$$

と書かれるものである.（正確な定義は[加中]参照.）

さて, polarized log Hodge 構造を定義する. ただし, $\Gamma\backslash D_\Sigma$ との関係をつけやすくするため, ここでは, ある型Φをfixし, 「型Φの polarized log Hodge 構造」の定義を述べ, 型なしの polarized log Hodge 構造や, polarization なしの log Hodge 構造の定義は省く.

$(w, (h^{p,q})_{p,q}, H_0, \langle\ ,\ \rangle_0)$ を §2 のとおりとして固定し, fan Σ と $G_{\mathbb{Z}}$ の部分群 Γ で, compatible であるものを固定する.

$$\Phi = (w, (h^{p,q})_{p,q}, H_0, \langle\ ,\ \rangle_0, \Sigma, \Gamma)$$

とおく.

型Φの polarized log Hodge 構造とは, 4つ組

$$(H, \langle\ ,\ \rangle, F, \iota)$$

で次をみたすものである.

H は, $X^{\log}$ 上の（X 上のではない!）$\mathbb{Z}$ 加群の層,

$\langle\ \rangle$ は, $\mathbb{Q}$ 双線型写像 $H_{\mathbb{Q}} \times H_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}$

F は $\mathcal{O}_X^{\log} \otimes_{\mathbb{Z}} H$ に入る, $\mathcal{O}_X^{\log}$-submodules による降 filtration,

ι は $X^{\log}$ 上の層

$$\Gamma\backslash \underline{\mathrm{Isom}}((H, \langle\ ,\ \rangle), (H_0, \langle\ ,\ \rangle_0))$$

の global section（H_0 は $X^{\log}$ 上の定数層とみている）

であり, 次の (i) − (v) をみたすものである.

(i) 各 F^p $(p \in \mathbb{Z})$ は, local には, $\mathcal{O}_X^{\log} \otimes_{\mathbb{Z}} H$ の, $\mathcal{O}_X^{\log}$-直和因子.

(ii) 各 F^p $(p \in \mathbb{Z})$ は, τ^*(局所有限生成自由 $\mathcal{O}_X$ 加群) と書ける.

(iii) 各 F^p $(p \in \mathbb{Z})$ の, $\mathcal{O}_X^{\log}$ 加群としての rank は $\sum_{r \geq p} h^{r, w-r}$.

(iv) $p + q > w \Rightarrow \langle F^p, F^q \rangle = 0$.

(v)　(この条件(v)がややこしいけれども，要所である)

$y \in Y$ とし，$\tilde{\iota}_y : (H_y, \langle\, ,\, \rangle_y) \xrightarrow{\cong} (H_0, \langle\, ,\, \rangle_0)$ を，y における ι の代表とする．すると，ある $\sigma \in \Sigma$ があって，次の (v-1), (v-2) が成立する．$x = \tau(y) \in X$ とおく．

(v-1)　これは，「$(H, \langle\, ,\, \rangle)$ の x における local monodromy が σ の方向を向いている」という条件

(v-2)　これは，「$(H, \langle\, ,\, \rangle, F, \iota)$ が x において σ-nilpotent orbit を与える」という条件．

(v-1) の正確な形：　合成写像

$$\mathrm{Hom}(M_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x}^{\times}, \mathbb{N}) \subset \mathrm{Hom}(M_{X,x}^{gp}/\mathcal{O}_{X,x}^{\times}, \mathbb{Z}) = \pi_1(\tau^{-1}(x))$$

$$\longrightarrow \mathrm{Aut}(H_y, \langle\, ,\, \rangle_y) \xrightarrow[\tilde{\iota}_y\text{による}]{\cong} \mathrm{Aut}(H_0, \langle\, ,\, \rangle_0)$$

の像は $\Gamma(\sigma)$ に含まれる．

(ここで用いた同一視 $\mathrm{Hom}(M_{X,x}^{gp}/\mathcal{O}_{X,x}^{\times}, \mathbb{Z}) = \pi_1(\tau^{-1}(x))$ は「自然なもの」．説明省略．)

(v-2) の正確な形：　$s : \mathcal{O}_{X,y}^{\log} \longrightarrow \mathbb{C}$ (環準同型) を $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{C}$; $f \longmapsto f(x)$ の拡張とするとき，$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} H_y$ の filtration $\mathbb{C} \otimes_{s} \mathcal{O}_{X,y}^{\log}$ F の $\tilde{\iota}_y$ による像 (それは $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} H_0$ の filtration) を $F(s) \in \check{D}$ と書けば，

$$\{F(s)\}_s$$

はある σ-nilpotent orbit にふくまれる．

§4.3 Classifying space

定理　Γ は neat（下参照）であるとする．このとき，fs log analytic space X についての functor として，

$$\mathrm{Mor}(X, \Gamma\backslash D_\Sigma) \cong \{X \text{ 上の型}\Phi\text{の polarized log Hodge 構造}\}/\cong.$$

ここで Mor は log structure のついた $\mathbb{C}$ 上の ringed space の圏における morphism 全体の集合である．

この同型において，　　X 上の型 Φ の polarized Hodge structure が与えられたとき，それに対応する $X \longrightarrow \Gamma\backslash D_\Sigma$ は，

$$x \longmapsto \text{条件 (v) にでてくる } (\sigma,\ \sigma\text{-nilpotent orbit})$$

である．

注　$\Gamma\backslash D_\Sigma$ はこの定理によって次の意味で特徴づけられる

fs log analytic space の圏を $\mathcal{A}$，log structure の付された $\mathbb{C}$ 上の ringed space の圏を $\mathcal{C}$ とし，$\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}$ となる $\overline{\mathcal{A}}$ を，

$$\overline{\mathcal{A}} = \{B \in \mathcal{C}\ ;\ \text{すべての } C \in \mathcal{C} \text{ に対し}$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mor}_{\text{関手として}}(h^B_{\mathcal{A}}, h^C_{\mathcal{A}})\ \}$$

ここに

$$h^B_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathrm{Sets}\ ;\ A \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$$
$$h^C_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathrm{Sets}\ ;\ A \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

と定義する．すると，$\Gamma\backslash D_\Sigma$ は一般には $\mathcal{A}$ に属さないが，$\overline{\mathcal{A}}$ に属することが示される．

$\overline{\mathcal{A}}$ の対象 B は「$\mathcal{A}$ の対象から B へ，どんな morphism があるか」できまる（つまり関手 $h^B_{\mathcal{A}}$ で決まる）から，$\Gamma\backslash D_\Sigma$ は上の定理によって特徴づけられるものになる

§5 問題

大きな未解決問題は、§3に述べた、
「十分大きいΣを作れ」
である。また
「period map の無限遠における様子を$\Gamma\backslash D_\Sigma$を用いて研究する」
という問題も考えたい。

文献

[G] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussions of open problems, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970) 228-296.

[加中] Kato, K. and Nakayama, C., Log Betti cohomology, log etale cohomology, and log de Rham cohomology of log schemes over $\mathbb{C}$, to appear in Kodai J.

[川並] Kawamata, Y. and Namikawa, Y., Logarithmic deformations of normal crossing varieties and smoothing of degenerate Calabi-Yau varieties, Invent. Math. 118 (1994) 395-409.

本稿に述べたことは臼井三平氏との共著論文 (Logarithmic Hodge structures and classifying spaces) にまとめつつあるが未完成である。次はその要約:

Kato, K. and Usui, S., Logarithmic Hodge structures and classifying spaces (Summary), to appear in「Hodge理論, Log幾何学, 退化」1998, 八ケ岳, also submitted to Proceedings of The NATO Advanced Studies Institute/CRM Summer School 1998: The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles, Banff, Canada.