

超音波スペクトロスコピーを用いた
炭素繊維強化複合材料積層板の
層間界面特性評価に関する研究

石井 陽介

目次

第 1 章	緒論	1
1.1	炭素繊維強化複合材料	1
1.2	CFRP 積層板	1
1.3	CFRP 積層板の非破壊検査	2
1.4	CFRP 積層板の超音波非破壊検査	3
1.4.1	欠陥検出	3
1.4.2	ボイド含有率評価	6
1.4.3	異方性粘弾性特性評価	6
1.5	接着層や不完全接触界面の超音波非破壊評価	9
1.5.1	CFRP 積層板の層間樹脂リッチ領域	9
1.5.2	スプリング界面モデルに基づく接着層や不完全接触界面の健全性評価	10
1.6	本研究の目的および本論文の構成	13
1.7	第 1 章の参考文献	14
第 2 章	層間にスプリング界面を有する積層構造中の一次元弾性 波動場の理論解析	27
2.1	緒言	27
2.2	伝達マトリクス法による垂直入射超音波の反射・透過率の理論計算	27
2.3	フロケの定理による反射率の直接的表現の導出および反射率の零点に関する考察	32
2.4	第 2 章の結言	37
2.5	第 2 章の参考文献	37
第 3 章	反射スペクトル極点周波数分布による層間界面垂直剛性 とプライ縦波速度の評価	39
3.1	緒言	39
3.2	無次元パラメータの再定義	39
3.3	層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価法の提案	41
3.4	提案した評価手法の適用可能性に関する考察	43
3.4.1	評価に用いる極点周波数の個数	43

3.4.2	本評価手法の有効性	43
3.4.3	プライの粘弾性特性の影響	47
3.4.4	過渡波形の適用	50
3.4.5	層間界面垂直剛性の不均一性の影響	54
3.5	第3章の結言	56
3.6	第3章の参考文献	58

第4章 実験的検討 —提案手法の妥当性検証および吸水したCFRP

P積層板の層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価— 59

4.1	緒言	59
4.2	超音波測定装置	59
4.3	提案手法の妥当性検証	61
4.3.1	CFRP直交積層板の層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価	61
4.3.2	同定値の妥当性検証	64
4.4	吸水したCFRP積層板の層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価	65
4.4.1	背景	65
4.4.2	吸水試験	65
4.4.3	積層方向に関する平均的伝搬速度と減衰係数の評価	68
4.4.4	層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価	70
4.5	第4章の結言	77
4.6	第4章の参考文献	77

第5章 層間にスプリング界面を有する積層構造中の斜角入射超

音波伝搬挙動の理論解析 81

5.1	緒言	81
5.2	スティフネスマトリクス法による斜角入射超音波の反射・透過率の理論計算 ..	82
5.2.1	背景	82
5.2.2	解析モデル	82
5.2.3	プライ中を伝搬する弾性波の波数および偏向方向の計算	84
5.2.4	プライのスティフネスマトリクスの計算	86
5.2.5	層間界面のスティフネスマトリクスの計算	87
5.2.6	グローバルスティフネスマトリクスの計算	88
5.2.7	複素振幅反射・透過率の計算	89

5.3	一方向強化CFRP積層板の透過スペクトルに及ぼす層間界面剛性と入射角度の影響	90
5.4	無限積層構造における分散関係	94
5.4.1	フロケ波数の計算	94
5.4.2	有限積層構造の透過特性との比較	98
5.5	空間的・時間的に有限幅を有する超音波ビームの透過特性	101
5.5.1	ガウシアンビームの励起および反射・透過特性の定式化	102
5.5.2	平面調和波の透過特性との比較	107
5.6	測定値との比較	113
5.6.1	実験方法	113
5.6.2	一方向強化CFRP積層板における振幅透過率の周波数および入射角度依存性	114
5.7	第5章の結言	119
5.8	第5章の参考文献	119
第6章	結論	123
6.1	本論文の結論	123
6.2	将来の展望	124
6.3	第6章の参考文献	126
付録		129
付録A	式(2.32)の導出	129
付録B	非定常動弾性有限要素法の定式化	131
付録C	四次ルンゲ・クッタ法による陽的時間積分の定式化	135
付録D	一般化セルフコンシステントモデルによる有効媒質近似	137
付録E	異方性弾性体中での波数を求める六次方程式(5.15)の係数	139
付録F	フロケ波特性方程式(5.40)および式(5.41)の導出	140
付録G	ストップバンド発生条件式(5.46)の導出	146
付録	参考文献	148
本研究に関連する論文および発表		149
定期刊行誌掲載論文		149
国際会議発表		149
国内会議発表		150

謝辞.....	151
本論文に関連する著作権について.....	153

第1章 緒論

1.1 炭素繊維強化複合材料

炭素繊維強化複合材料 (Carbon Fiber Reinforced Plastic, 以下 CFRP) は炭素繊維を強化材, 樹脂を母材とした複合材料である. CFRP はアルミニウムや鋼などの単一素材からなる金属材料に比べ高比強度, 高比剛性, 低熱膨張性, 高耐腐食性, 高 X 線透過性といった特性を有し^{[1], [2]}, 航空機, 宇宙機, 自動車, 新幹線, 深海捜査艇や掃海艇, 電波望遠鏡, 風力発電機のブレード, コンクリート構造物の補強材, 圧力容器, テニスラケットやゴルフクラブといったスポーツ用品, カメラやノートパソコンといった電子機器の筐体, X 線撮影装置の天板など様々な産業分野で実用されている^{[1]-[10]}.

CFRP の成型方法としては, 樹脂に浸した炭素繊維をマンドレルに巻き付け筒状に成形後硬化炉で硬化させるフィラメントワインディング法, 炭素繊維をあらかじめ樹脂に含浸させた中間素材 (プリプレグシート) を巻き付けた後に硬化させるシートワインディング法, プリプレグシートを積層し金型で加熱・加圧するプレス成形法, 積層したプリプレグシートを真空バッグに入れオートクレーブ中で加熱・加圧するオートクレーブ成形法, 金型にシート状の炭素繊維 (プリフォーム) を配置し樹脂を流し込んで硬化させる樹脂注入成形法 (RTM 法: Resin Transfer Molding), 樹脂注入を真空下で行う真空樹脂注入成形法 (VaRTM 法: Vacuum Assisted RTM), 短繊維と樹脂からなるペレットを溶解させ金型内に射出する射出成形法などがある^{[1], [2], [11]}. そのなかでも特にオートクレーブ法は, 表面平滑性, 寸法安定性に優れた高強度の製品製造が可能なため, 航空機や宇宙機用構造部材の成形に広く用いられている^{[1], [2]}.

CFRP は 1980 年代以降に航空機やスポーツ用途を中心に市場が拡大され, 2000 年代に入って需要が急増した. そして今後も航空機用途を筆頭に, その他の産業用途でもさらなる需要増加が予想されている^{[7], [12]}.

1.2 CFRP 積層板

長繊維から成る CFRP は, 繊維方向に比べて繊維に垂直な方向には剛性や強度が低い. そのため, 通常は一方向に強化された厚さ 0.1~0.2 mm 程度の薄いプリプレグシートを, 繊維方向を変化させながら積層した積層材料として実用されている. CFRP 積層板の代表的な積層構成を Fig. 1.1 に示す. なお本論文では, 積層板を構成する各層をプライと呼ぶ. 全てのプライの繊維方向が等しい場合を一方向積層 (Fig. 1.1(a)), 0°と 90°プライを交互に積層し

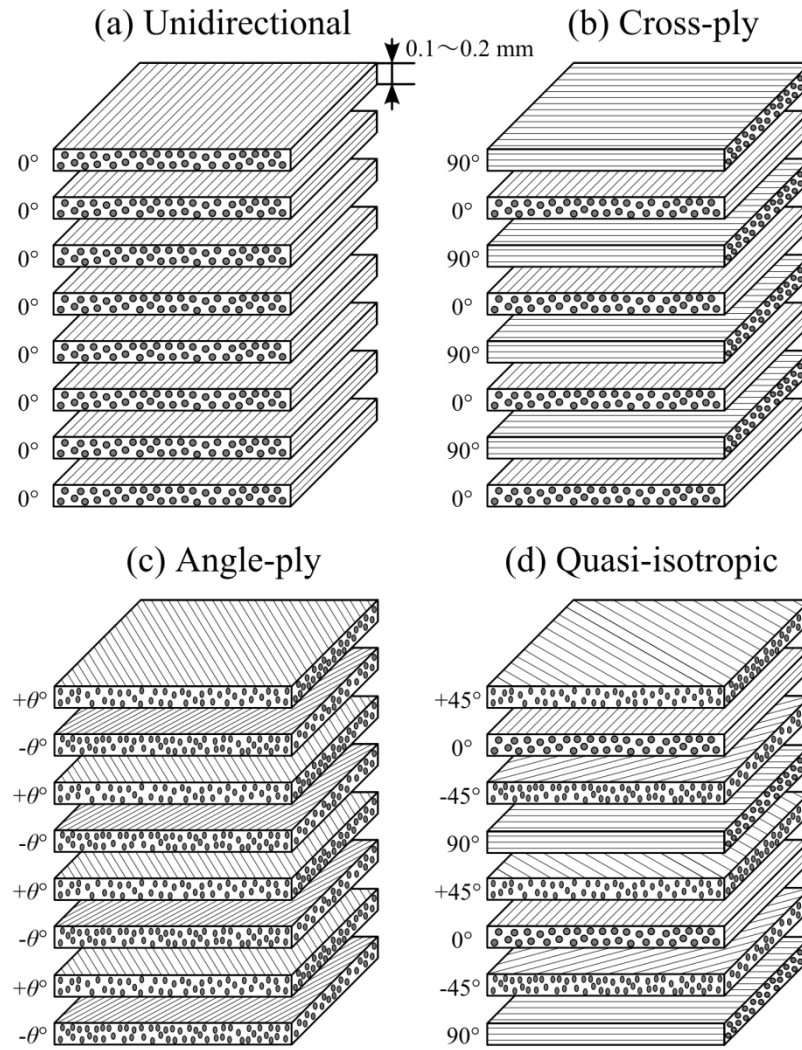


Fig. 1.1 Various stacking sequences of CFRP laminate.

た場合を直交積層またはクロスプライ積層 (Fig. 1.1(b)), $+\theta^\circ$ と $-\theta^\circ$ プライを交互に積層した場合をアングルプライ積層 (Fig. 1.1(c)), 0° , 90° , $\pm 45^\circ$ プライを隣接するプライの繊維配向角度差が 45° となるように積層した場合 (Fig. 1.1(d)) もしくは 0° と $\pm 120^\circ$ プライを繊維配向角度差が 120° となるように積層した場合を擬似等方積層と呼ぶ。

前節で述べたオートクレーブ法で成形される航空宇宙機用構造部材を含め, 現状実用されている CFRP の過半数がこの CFRP 積層板に該当する^[2]. 本論文では以下この CFRP 積層板について述べる.

1.3 CFRP 積層板の非破壊検査

CFRP の産業分野への適用拡大に伴い, 構造健全性や信頼性を確保するための非破壊検査の重要性が増加している. CFRP 積層板の非破壊検査では主に, 外部からの衝撃荷重などに

よって発生した層間はく離やトランスバースクラック（プライ内を積層方向に走る樹脂割れ）の検出，製造段階に発生するボイドの含有率評価，積層構成や繊維方向，繊維含有率の評価といった検査が行われている^{[13]-[18]}．検査手法としては，目視や打音による官能検査に加えて，渦電流^{[19]-[23]}，赤外線サーモグラフィ^{[24]-[28]}，X 線^{[29]-[33]}，超音波を利用した検査法などが用いられている．

渦電流を用いた渦電流探傷法は電磁誘導を利用した非破壊検査法であり，電流を流した励磁コイルによって導電性を有する被験体に渦電流を誘導し，欠陥による渦電流変化を検出することで探傷を行う手法である．CFRP は炭素を有するため導電性を有する．そのため，従来金属材料に適用されていた本手法が CFRP の非破壊検査にも適用され，層間はく離やトランスバースクラックの探傷に用いられている．本手法は，被験体に対して非接触で測定が行え検査効率が良いといった利点がある一方で，その適用範囲は被験体表面近傍の欠陥探傷に限定されており，表面下の深い位置にある欠陥は検出が困難である．

赤外線カメラを用いたパルスサーモグラフィ法では，強力なフラッシュで被験体表面を瞬間的に加熱し，その後赤外線カメラで表面温度の分布を測定することで欠陥検出を行う．材料内部に層間はく離などの空気層を有する欠陥が存在する場合，欠陥部で板厚方向への熱伝導が阻害されるため材料表面と欠陥の間に熱がこもる状態になる．そのため健全部に比較して表面温度が上昇し，それを赤外線カメラで測定することで内部欠陥の有無を判定する．本手法は渦電流探傷法と同様に，被験体に非接触で測定が行え，広い面積を短時間で検査可能といった利点がある．一方で，表面から遠方にある欠陥や十分な空気層を有さない微視欠陥の検出は困難である．

上記の渦電流や赤外線を用いた手法では検査範囲が被験体表面近傍に限定されるのに対して，超音波や X 線を用いた非破壊検査法は材料表面から深い位置の欠陥も探傷可能であり厚肉部材の検査にも適している．そして，X 線は人体に有害なため安全管理が必要不可欠である一方で，超音波は人体に無害であり取り扱いが容易である．そのため CFRP 積層板の非破壊検査では，超音波を用いた検査が最も頻繁に利用されている^[18]．次節では，この超音波非破壊検査について詳細に説明する．

1.4 C F R P 積層板の超音波非破壊検査

1.4.1 欠陥検出

CFRP 積層板の超音波非破壊検査に通常用いられている測定法を Fig. 1.2 に示す．測定方法には大きく分けて，超音波の送受信を一つの探触子で行うパルス・エコー法と，送受信を個別の探触子で行うピッチ・キャッチ法がある．パルス・エコー法（Fig. 1.2(a)）では，探触子から被験体に超音波を送信し，欠陥部からの反射波を同じ探触子で受信することで欠陥検出を行う．ピッチ・キャッチ法では，通常 Fig. 1.2(b)のように，被験体を挟みこむように送信機と受信機を設置し透過波の減衰量から欠陥の有無を判定する．また，ジェル状

の音響結合剤であるカプラントを用いて探触子を被験体に直接接触させる接触法（Figs. 1.2(a), (b)）に加えて、水中に保持された被験体に対し水を介して超音波の送受信を行う全没水浸法（Figs. 1.2(c), (d)）や、被験体 - 探触子間だけを局部的に水で満たす局部水浸法などがある。特に、接触法では受信波形がカプラントの種類や探触子の押付圧力に影響を受ける一方で、水浸法は探触子と被験体が水によって理想的に音響結合されているため探触子を走査させながら被験体の広い領域をスキャンする場合によく用いられる。

CFRP 積層板に対する現状の非破壊検査では、Figs. 1.2(a), (c)のように、被験体に対して超音波を垂直入射させるパルス・エコー法が主流であり^{[34]–[38]}、この手法は層間はく離のように積層方向に対して垂直方向に広がる欠陥の検出に適している。一方で、トランスバースクラックのように積層方向に伸びる欠陥に関しては、欠陥部での波動散乱が小さくなるため検出が困難とされている。それに加えて、被験体の表面および底面近傍に欠陥が存在する場合、欠陥部からの反射波が表面および底面からの反射波に埋もれてしまうため欠陥検出が困難になるといった問題点もある。

上記の垂直入射超音波に加えて、Figs. 1.3(a), (c)に示すように超音波を CFRP 積層板に斜角入射させ欠陥部からの反射波を測定することでトランスバースクラックを検出する研究

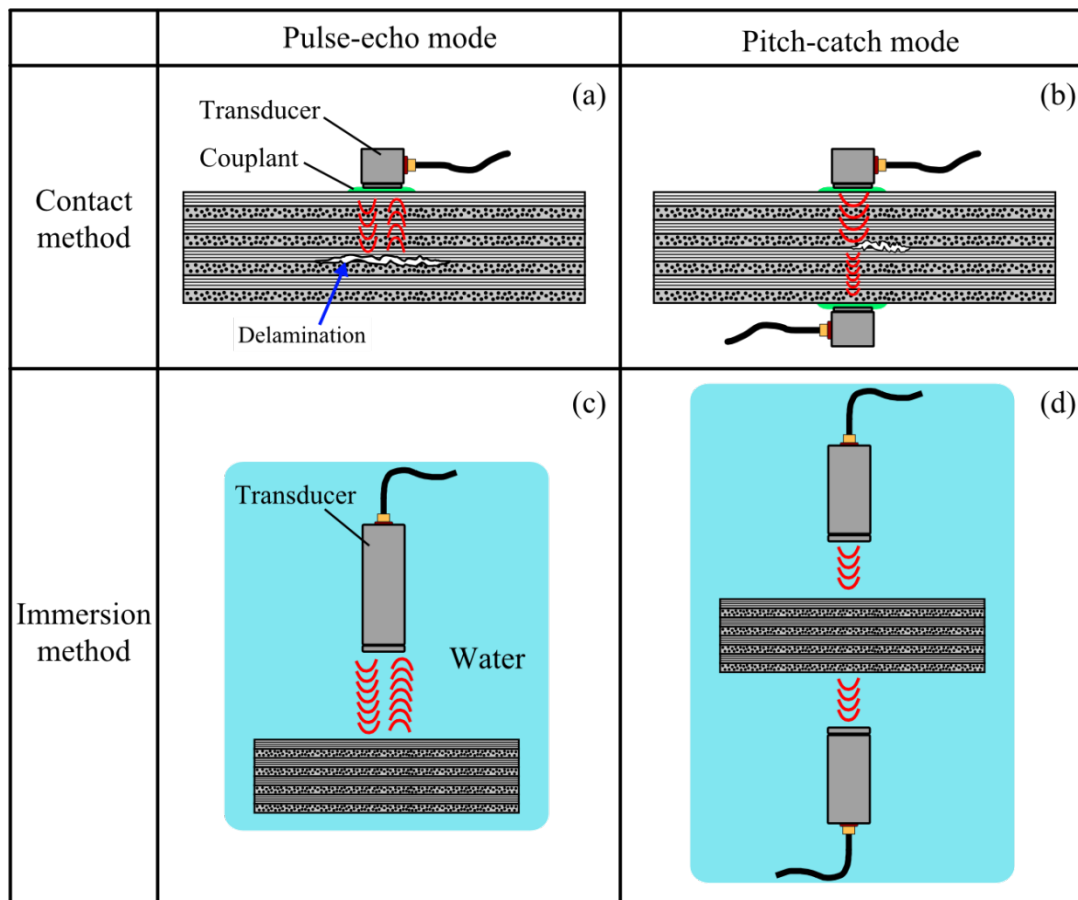


Fig. 1.2 Measurement techniques of ultrasonic waves at normal incidence to CFRP laminates.

も行われており^{[39]-[42]}，欠陥検出に最適な入射角度について検討が行われている．これらの研究では，入射角度を特定の値に固定した状態で探触子を被験体表面に沿って走査しているが，一方で被験体の特定の位置に様々な入射角度で超音波を入射させ，その反射・透過特性から欠陥検出を行う研究も行われている^{[43], [44]}．このような測定法は超音波ポーラースキャン^{[45]-[47]}と呼ばれ，欠陥検出以外にもポーラースキャンによる CFRP 積層板の疲労損傷評価^{[48]-[51]}や積層構成の検査^{[51], [52]}に関する研究が報告されている．また，Figs. 1.3(b), (d) に示すように斜角入射により積層板を長手方向に伝搬する板波を発生させ，その伝搬特性（減衰特性）を利用して内部欠陥を検出する研究も行われている^{[53]-[59]}．等方性媒質中を伝搬する板波はラム波と呼ばれるのに対して，CFRP のように異方性媒質中を伝搬する板波は準ラム波と呼ばれる．準ラム波は長距離伝搬が可能なため積層板の広範囲を効率良く検査できる可能性を秘めており，その応用が期待されている．しかし，板波は速度分散性（伝搬速度の周波数依存性）や多モード性など非常に複雑な伝搬形態を有するため，CFRP 積層板非破壊検査の現場では従来の垂直入射超音波による検査が未だ主流である．

これまでに述べた検査法は，単一の圧電素子を有する超音波探触子を用いた検査であるが，一方で多数の素子が一つの探触子の中に一次元もしくは二次元的に配列されたアレイ型探触子による探傷に関しても研究が行われている^{[60]-[64]}．この探触子では，各素子間に位

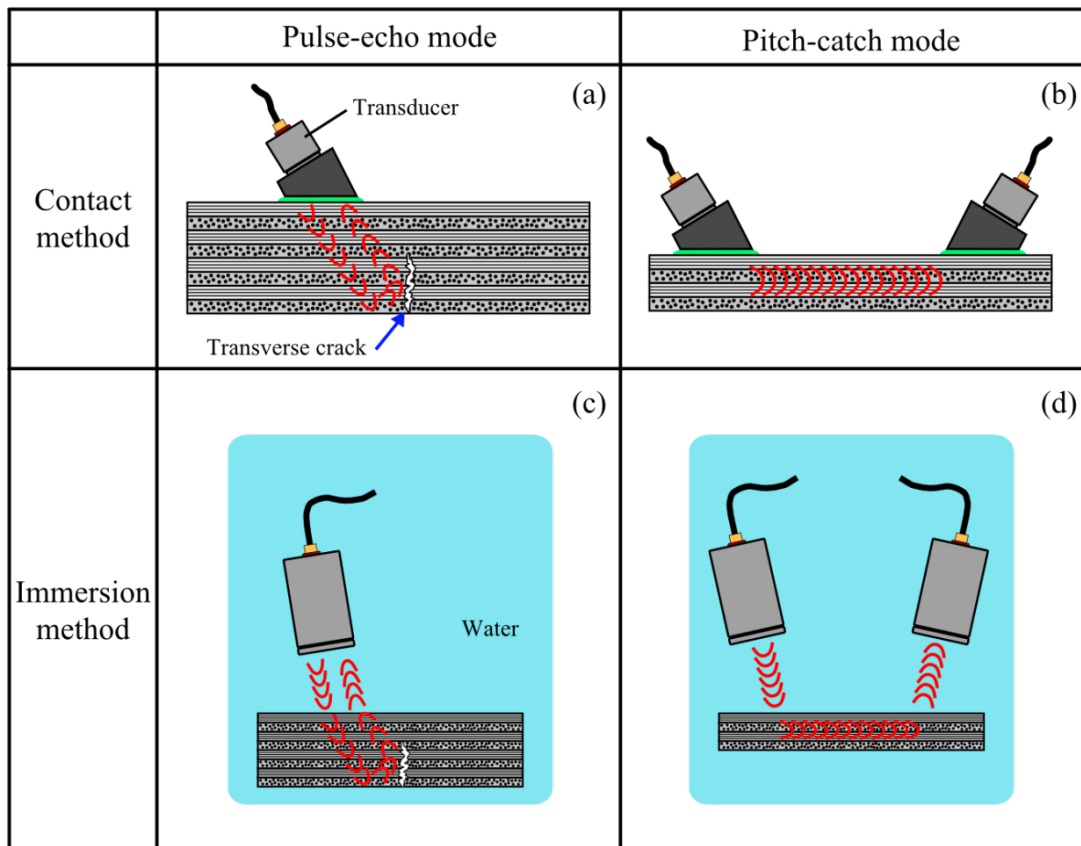


Fig. 1.3 Measurement techniques of ultrasonic waves at oblique incidence to CFRP laminates.

相差をつけて発信させることで全体としての超音波ビームの伝搬方向を制御したり、材料中のある特定点にビームを集束させることが可能である。二次元配列アレイ探触子を用いれば、各素子で受信した信号に開口合成処理を加えることで材料内部の欠陥を三次元画像化することも原理上可能である。本手法は従来法のように探触子を走査せずとも被験体の広範囲を検査可能であり、非破壊検査の高精度化および高効率化につながる新しい検査法として期待されている。

1.4.2 ボイド含有率評価

ボイドは、CFRP 積層板の製造段階において発生する微小な空孔状欠陥である。これは、プリプレグ積層時に混入した空気や樹脂中に含まれる揮発性物質が、主に成形時の圧力不足（真空バグの破れなど）に起因して、材料内部に残存することで生じる。そして、一般にボイド体積含有率が2%^[65]を超えると、層間せん断強度^{[66]–[70]}や曲げ強度^{[66], [71]}, 引張強度^{[67], [70]}, 圧縮強度^[72]といった機械的特性が大きく低下することが知られている。そのため、ボイド含有率評価は重要な課題であり、その非破壊検査に関してこれまで盛んに研究が行われている。

ボイド含有率が増加すると、積層板の巨視的な弾性率が低下（波動伝搬速度が低下）し、さらに波動散乱による減衰の影響が大きくなる。そのため、超音波を用いたボイド含有率評価では、Fig. 1.2のように積層板に対して超音波を垂直入射させ、材料表面および底面からの反射波を測定することで波の伝搬速度^{[73]–[78]}や減衰率^{[77]–[91]}を評価する手法が一般に用いられている。その中でも減衰率はボイド含有率に対して敏感に変化するため、伝搬速度よりも頻繁に使用されている^[65]。減衰の大きさ（減衰係数）に基づく評価に加えて、Hsu and Nair^[81]は減衰係数の周波数に対する傾きがボイド含有率評価に有効であることを示している。また、斜角入射超音波の伝搬速度や減衰特性を用いると垂直入射時よりも高感度にボイド含有率が評価できるといった報告も Park ら^[92]によりなされている。

上記の伝搬速度や減衰特性を用いることで、積層板の積層方向に関する総体的なボイド含有率が評価できるものの、材料内におけるボイドの偏在状態を評価することは困難である。これに対して Dominguez and Mascaro^[93]は、CFRP 積層板の各層間からの反射波に着目し、そのエネルギーや周波数を用いることで板厚方向のボイド偏在位置を特定する研究を行っている。また、層間からの反射波の統計モーメントや^[94]最大振幅^[95]を用いてボイド含有率を評価する研究も報告されている。

1.4.3 異方性粘弾性特性評価

CFRP 積層板をはじめとする積層構造中の超音波伝搬解析に関しては理論的・実験的研究がこれまでに盛んに行われており^{[96], [97]}, その結果明らかとなった超音波伝搬特性は、層間にはく離やトランスバースクラックの検出といった探傷試験に加えて、CFRP 積層板の材料特性評価にも広く利用されている^{[98], [99]}。

CFRP において炭素繊維の直径や繊維の配置間隔は数 μm 程度であるのに対し、現状の非

破壊検査で用いられる超音波の周波数は数 MHz 程度であり波長は 0.1~1 mm 程度である。このように CFRP の不均質スケールに対して波の波長が十分長い場合 CFRP は均質材料と見なすことができ、一方向に強化されたプライは一般に繊維方向に関して横等方性もしくは直交異方性を有する均質粘弾性体でモデル化される。

超音波が材料中を伝搬する速度は、材料の弾性率および質量密度と密接に関係している。その関係を表したものが次のクリストフェル方程式である。

$$(C_{ijkl}n_jn_l - \rho V_p^2 \delta_{ik})p_k = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

上式では総和規約を用いており、 C_{ijkl} は 4 階弾性係数テンソル、 n_j は波の位相が伝搬する方向を表す単位ベクトル ($n_i n_i = 1$) の第 j 成分、 ρ は質量密度、 V_p は波の位相速度、 p_k は波の偏向方向を表すベクトルの第 k 成分、 δ_{ik} はクロネッカーのデルタである。このクリストフェル方程式の詳細に関しては第 5 章で改めて説明する。式(1.1)より、超音波の位相速度 V_p を測定することで、CFRP 積層板の異方性弾性率 C_{ijkl} を評価することが可能である。具体的には、Fig. 1.4(a)に示すように、水中に保持された被験体に対しパルス状の超音波（縦波）を斜角入射させて、3 種類の屈折波（準縦波と 2 種類の準横波）を発生させる。そしてそれぞれが被験体底面において再度縦波にモード変換した透過波を被験体下側に設けた受信機で測定し、その到達時刻から被験体中での各モードの伝搬速度を算出する。この操作を様々な入射角度 θ で行い、式(1.1)から求めた位相速度の理論値をフィッティングさせることで異方性弾性率 C_{ijkl} を求める^{[100]–[105]}。なお、異方性弾性体中では、一般に波の位相が伝わる速度・方向はエネルギーが伝わる速度・方向とは異なる。そして実際の測定においてパルス波の到達時刻から算出される速度は本来エネルギーが材料中を伝わる速度（群速度）であり、

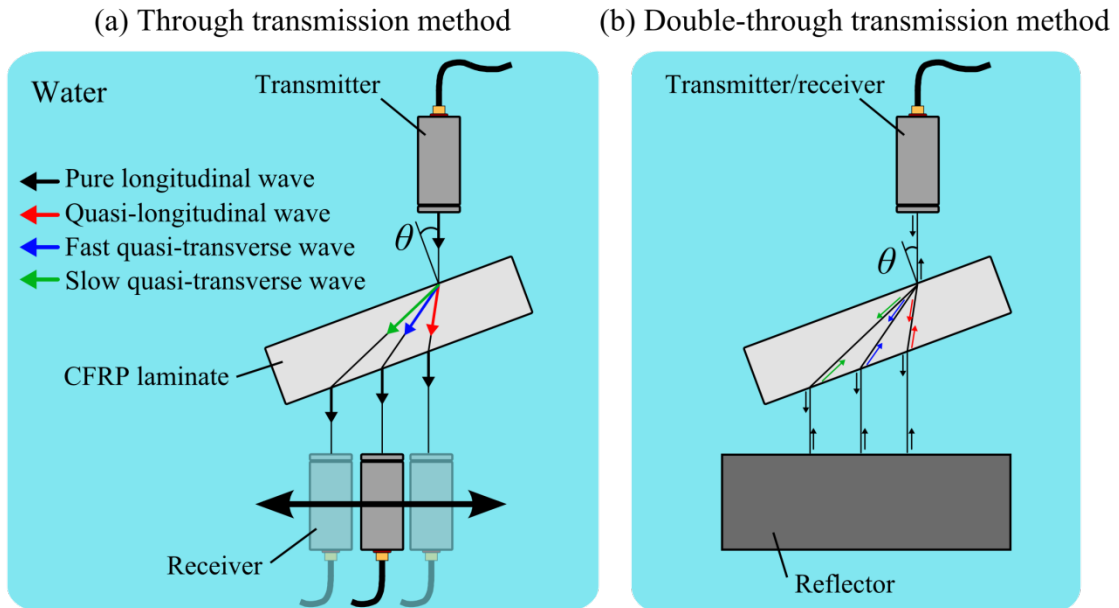


Fig. 1.4 Ultrasonic measurement techniques for stiffness evaluation of CFRP laminates.

理論と比較するためには位相速度を測定する必要がある。しかしながら、Fig. 1.4(a)に示す測定系を用いた場合、群速度に基づいて求めた送受信機間の波動伝搬時間と位相速度に基づいて求めたそれが厳密に一致することが理論的に証明されている^{[105], [106]}。そのため、パルス波の到達時刻から算出される速度がそのまま位相速度となり、式(1.1)で求めた理論的な位相速度との比較が可能である。

Figure 1.4(a)の測定方法では、3 種類の屈折波を測定するために受信機の水平方向位置を調節する必要がある。また、水 - 被験体境界での屈折角は入射角度 θ に依存しているため、この位置調整は θ を変更する度に行わなければならない。この問題を解決するために提案された測定法が Fig. 1.4(b)に示す 2 回透過法である^{[106], [107]}。本手法は、Fig. 1.4(a)において受信機を設置していた部分に水平方向に十分な長さを有するミラー（通常は表面研磨した金属材料を使用）を設置し、被験体を実質 2 回透過した波を送信機と同じ探触子で受信するものである。この場合スネルの法則により、探触子から送信された波はいかなる入射角度 θ においても、往路と復路で必ず同じ伝搬経路を取る。そのため受信機の水平方向位置を変更することなく 2 回透過波を測定可能である。

上記手法は、一方向強化 CFRP 積層板に加えて、直交積層板や擬似等方積層板を均質な単一平板と見なしたときの異方性弾性率評価にも適用されている^{[108]-[110]}。さらに積層板内部の各層間界面での波の屈折を考慮することで、直交積層板を構成するプライの異方性弾性率を評価する研究も行われている^[111]。また、Fig. 1.4 と同様の測定系を用いて水 - 被験体境界での臨界角（屈折角が 90° となる入射角度）を測定し、それを理論値と比較することで CFRP 積層板の異方性弾性率を評価する研究も報告されている^{[112]-[117]}。

伝搬速度に加えて、材料中での波の減衰率を測定することで CFRP 積層板の粘弾性特性が評価可能である。Hosten ら^{[118], [119]}は、Fig. 1.4(a)と同様の測定系を用いて 3 種類の屈折波それぞれの伝搬速度と減衰率を求め、それを理論値と比較することで一方向積層板の複素弾性率を評価している。水浸法における水をオイルに変更し、その温度を変化させながら同様の測定を行うことで、CFRP の粘弾性特性の温度依存性を考察する研究も行われている^{[120], [121]}。また、岡部と武田^{[122], [123]}は、吸水した一方向 CFRP 積層板に対して同様の測定を行い、吸水率と粘弾性特性の関係を考察している。

ここまで述べた評価手法は、積層板の板厚が十分大きく、水 - 被験体境界で発生した 3 種類の屈折波が時間的に分離して受信されるような場合には有効な手法である。一方で、板厚が薄い場合には 3 種類の屈折波が重なり合って測定されるため、それぞれの到達時刻や振幅（減衰率）を同定することが困難である。この課題を解決するために Castaings ら^[124]は、受信した信号全体をフーリエ変換することで振幅透過スペクトルを求め、それを理論値と比較することで異方性粘弾性特性を評価する手法を提案している。また、積層板を長手方向に伝搬する準ラム波を測定し、その分散関係（周波数と波数の関係）を理論値と比較することで、粘弾性特性を評価する研究も行われている^{[125]-[130]}。これらの評価法は、原理上どのような板厚の積層板でも適用可能である。

1.5 接着層や不完全接触界面の超音波非破壊評価

1.5.1 CFRP 積層板の層間樹脂リッチ領域

CFRP 積層板には樹脂のみで構成される薄い層間領域が存在し、この領域は層間樹脂リッチ領域と呼ばれる。Figure 1.5 に、マイクロスコープで測定した一方向積層板と直交積層板の断面画像およびその拡大図を示す。どちらの積層構成においても、層間に厚さ数 μm 程度の樹脂リッチ領域が形成されていることが確認できる。ここでは 2 種類の積層構成の断面画像を示しているが、その他擬似等方積層など、どのような積層構成でも樹脂リッチ領域は存在する。そしてこの領域では強化材である炭素繊維が存在せず強度が低下しているため、衝撃荷重を受けたときには層間はく離が発生しやすくなる。したがって、1.4.1 節で述べた層間はく離の検出に加えて、はく離が生じる以前の製造段階や供用段階において、CFRP 積層板の層間の特性を非破壊評価することは非常に重要であると考えられる。しかし、1.4.3 節で紹介した先行研究では、CFRP 積層板を構成する各プライを完全接着状態（応力と変位

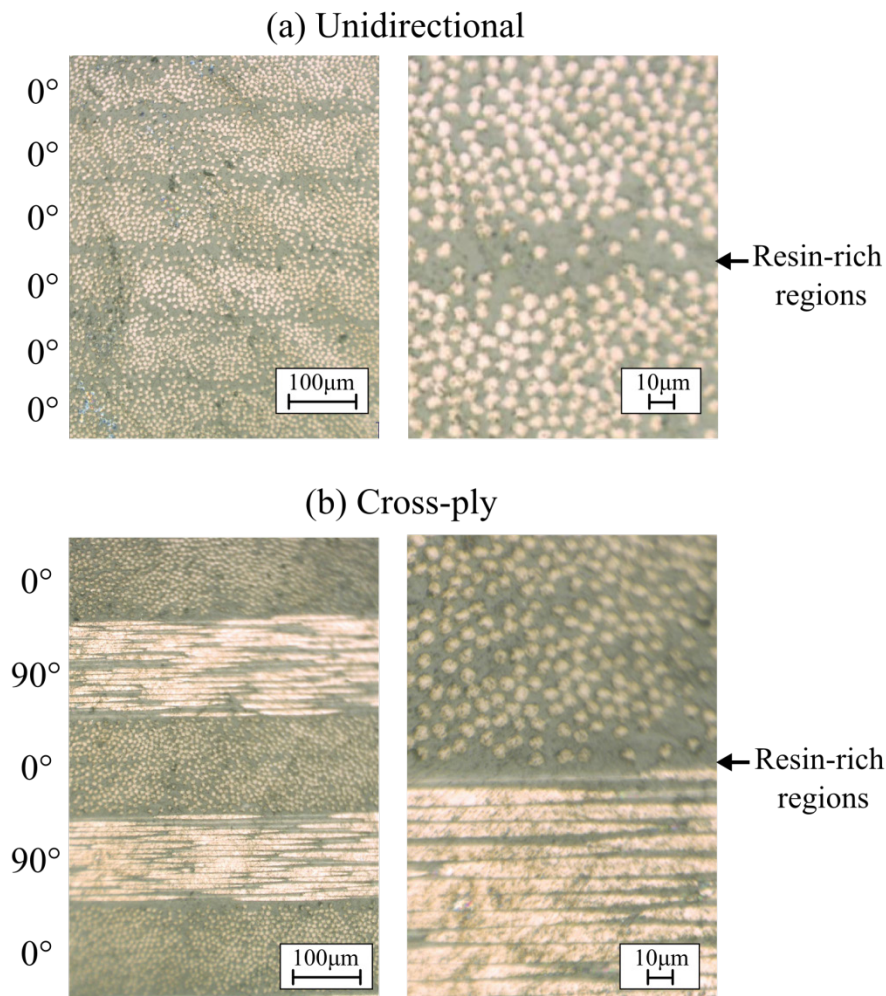


Fig. 1.5 Cross-sections of (a) unidirectional and (b) cross-ply CFRP laminates.

が連続)と仮定して理論的検討が行われており、層間樹脂リッチ領域の影響は考慮されていない。そして、測定値と理論値の比較に基づいて評価された積層板の材料特性は、層間樹脂リッチ領域とプライの特性を合わせた積層板の総体的特性であり、CFRP 積層板の層間特性を直接的に評価した研究は著者の知る限り報告されていない。

1.5.2 スプリング界面モデルに基づく接着層や不完全接触界面の健全性評価

1.4.3 節で述べたように、CFRP 積層板の非破壊検査で用いられる超音波の波長はおよそ 0.1~1 mm 程度であり、それに対して層間樹脂リッチ領域の厚さは数 μm 程度である。このように波長に比べて十分薄い領域を含む材料中の超音波伝搬を考える場合、これらの領域を等価なバネで置き換えてモデル化できることが先行研究で明らかとなっている^{[131]–[135]}。これがスプリング界面モデルである。Figure 1.6 に示すようにスプリング界面は、波長に比べて薄い層そのものをモデル化する場合 (Fig. 1.6(a)) と、二つの固体材料を突き合わせた

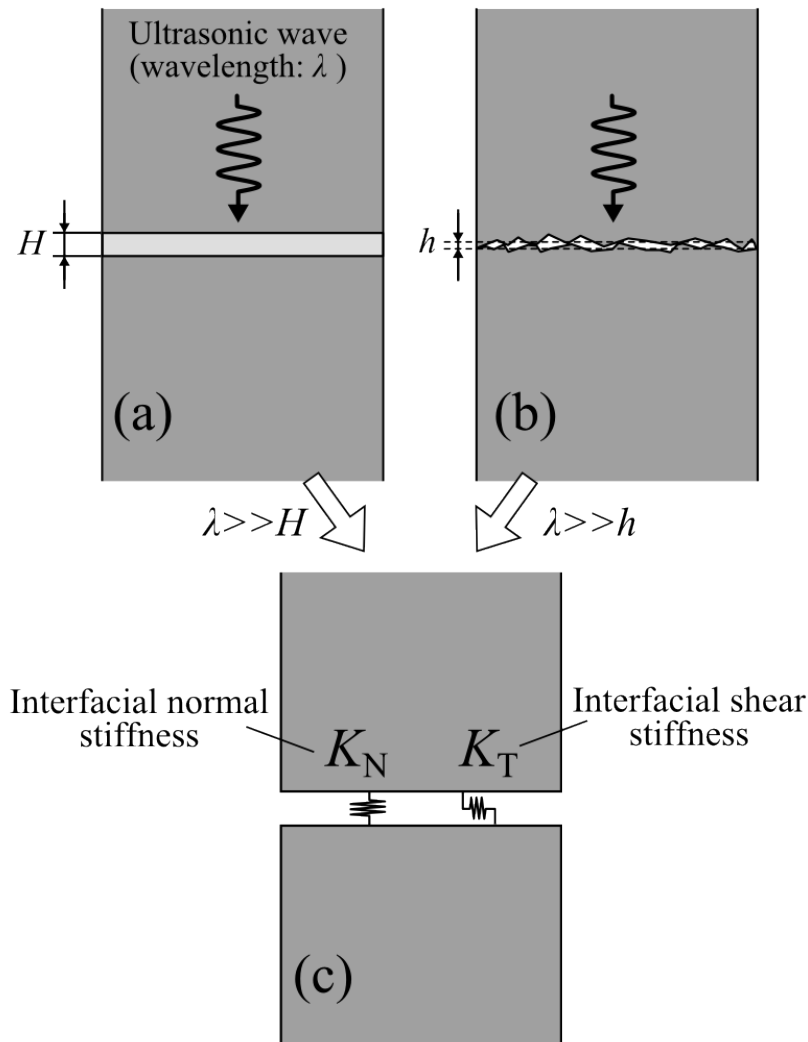


Fig. 1.6 Modeling of (a) a thin layer and (b) a contact interface between two solids by (c) spring-type interface.

ときに微視的に部分接触している界面（不完全接触界面）をモデル化する場合（Fig. 1.6(b)）に適用することができる．そしてスプリング界面におけるバネ剛性は界面剛性と呼ばれ、垂直方向成分（垂直界面剛性 K_N ）と接線方向成分（接線界面剛性 K_T ）からなる．Figure 1.6(a)の場合、界面剛性は薄層の弾性特性や厚さを反映した特性量となる．したがって、界面剛性を同定することで、例えば固体材料同士を接着接合したときの接着層の劣化状態や厚さなどを評価することが可能である．同様に、CFRP 積層板の層間樹脂リッチ領域をスプリング界面でモデル化した場合、界面剛性を同定することで樹脂リッチ領域の弾性率や厚さを評価することができる．Figure 1.6(b)の場合には、界面剛性は固体間の真の接触面積を反映した特性量となる．例えば界面剛性が無限の場合は固体同士が完全接着している状態を表し、界面剛性が零の場合には固体同士が完全に分離している状態を表す．したがって、界面剛性を評価することで固体間の接触状態を評価することが可能である．

スプリング界面モデルを用いた超音波伝搬解析に関してはこれまでに多くの研究が行われており^{[136]–[140]}、超音波伝搬特性を用いた界面剛性の非破壊評価法も複数提案されている．単一スプリング界面の場合、垂直入射超音波の反射率または透過率を用いることで界面剛性を評価できる^{[141]–[145]}．例えば、Fig. 1.6(c)のように同じ材質を有する二つの等方性固体間にある単一スプリング界面の垂直剛性 K_N および接線剛性 K_T は、次の関係から求めることができる^[145]．

$$K_N = \frac{\rho c_L \omega \sqrt{1 - R_L^2}}{2R_L}, \quad K_T = \frac{\rho c_T \omega \sqrt{1 - R_T^2}}{2R_T}. \quad (1.2)$$

ここで、 ρ は固体の質量密度、 c_L (c_T) は固体中の縦波（横波）の伝搬速度、 ω は角周波数、 R_L (R_T) は縦波（横波）を界面に垂直入射したときの振幅反射率である．垂直入射に加えて、Pilarski and Rose^[146]は斜角入射超音波の反射・透過率から界面剛性を評価している．また、Biwa ら^[145]は、固体間接触界面に沿って伝わる界面波の位相速度から接線界面剛性を評価している．その他にも、ラム波の位相速度や減衰率から薄板の接着部界面剛性を評価する研究^{[147]–[150]}や、薄板同士の突き合わせ部におけるラム波の反射・透過特性から突き合わせ部界面剛性を評価する研究^{[151], [152]}も行われている．

上記の単一界面問題に加えて、Lavrentyev and Rokhlin^[153]は二重界面問題に関して界面剛性の評価を行っている．彼らは、Fig. 1.7 に示すように、固体間接着接合部において接着層の厚さが波長に比べて無視できない場合を想定し、接着層を粘弾性体、固体 - 接着層間界面をスプリング界面としてモデル化している．そして測定した垂直入射超音波の反射スペクトルを理論値にフィッティングさせることで、二重界面の界面剛性を評価している．また、Baltazar ら^[154]は、同様のモデルに対して垂直入射と斜角入射超音波の反射スペクトルを用いることで、界面剛性に加えて接着層の粘弾性特性を同時に評価している．Singher ら^[155]は、薄板同士を接着接合した場合について同様の二重界面によるモデル化を行い、ラム波の位相速度を用いて界面剛性を評価している．

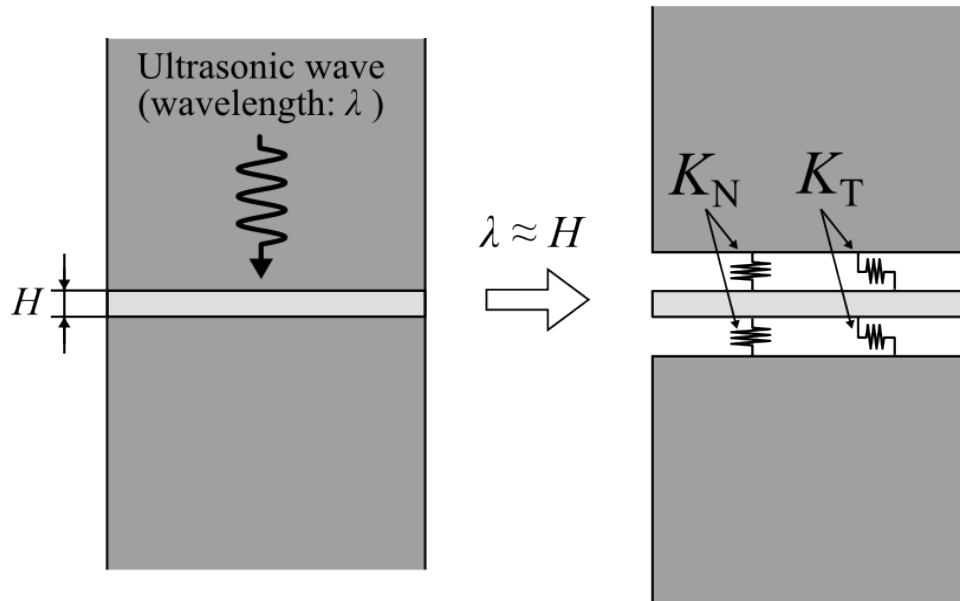


Fig. 1.7 Double spring-type interfaces between a layer and two solids.

さらに界面数が増加した多重界面問題に関してもいくつか研究が行われている。Leiderman ら^{[156]–[158]}は特定の界面において界面剛性が局所的に低下している場合に、その空間分布を斜角入射超音波の反射率から評価する研究を行っている。ただし、彼らは界面剛性が低下する前の健全状態における多重界面の界面剛性を既知と仮定している。また、彼らの提案している評価手法は原理上任意の界面数を有する構造に対して適用可能とされているが、実例としては二重界面問題の評価のみが示されている。Jian ら^[159]は、垂直入射超音波の反射波にフィルタリングを施すことで特定の界面からの反射波を抽出し、その振幅から界面剛性を評価している。彼らの研究は、三重界面問題に対する界面健全性の定性的評価を対象としており、界面剛性の定量評価やより一般的な多重界面問題に対する検討はなされていない。Lu and Achenbach^[160]は、多重界面を有する材料中の超音波伝搬特性に関して一次元伝達マトリクス法による理論解析を実施し、界面ごとに界面剛性がばらついているときに垂直入射超音波の反射・透過率に及ぼす影響を考察している。また、プライの弾性特性がばらついている場合に関しても Lu^[161]により検討が行われている。

このように、多重界面問題における超音波伝搬特性はある程度検討がなされているものの、その界面剛性の定量的評価手法は未だ提案されていない。1.5.1 節で述べた課題である、CFRP 積層板の層間特性の非破壊評価を行うには、多重界面問題における超音波伝搬特性の理論的基盤の構築および界面剛性評価手法の確立が必要不可欠である。

1.6 本研究の目的および本論文の構成

これまでの節では、CFRP 積層板およびその非破壊検査に関して概説を述べ、特に超音波を用いた欠陥検出および材料物性・界面特性評価に着目して先行研究を紹介した。1.5.1 節でも述べたように、CFRP 積層板の層間特性評価は構造健全性や信頼性を保証するうえできわめて重要であり、その評価法の確立は喫緊の課題である。また、単一および二重界面問題に関しては界面剛性評価法が確立されているのに対し、多重界面問題についてはいまだ未解決の問題であり、その超音波伝搬特性の解明および界面剛性評価法の確立は学術的にも意義があると考えられる。

そこで本研究では、層間樹脂リッチ領域をスプリング界面でモデル化した CFRP 積層板の超音波伝搬解析を実施することで、層間界面が超音波伝搬挙動に及ぼす影響の解明を図る。そして、得られた知見に基づいて超音波スペクトロスコープを用いた界面剛性評価法を確立することを目的とする。

本論文の構成を以下に述べる。

第 2 章では、一次元伝達マトリクス法^{[160], [161]}に基づく CFRP 積層板の垂直入射超音波反射特性の理論解析について述べる。積層板の層間界面をスプリング界面でモデル化し、プライを均質な弾性体とすることで、垂直入射超音波の振幅反射・透過率の計算法を定式化する。その後、無限積層構造中の波動伝搬を取り扱うフロケの定理を導入し、上記反射率の直接的表現を導出する。そして超音波反射スペクトルに及ぼす各種パラメータの影響を検討し、特に反射率が厳密に零となる周波数に関して考察を行う。

第 3 章では、第 2 章で得られた知見をふまえて、垂直入射超音波反射スペクトルの極点周波数分布を用いた積層板の層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の非破壊評価手法を提案する。そして、提案手法の適用可能性に関して検討する。

第 4 章では実験的検討を行う。はじめに、CFRP 直交積層板に対して第 3 章で提案した評価法を適用し、同定した層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度の妥当性を検証する。次に、温水中で吸水させた一方向強化 CFRP 積層板に対して提案手法を適用することで、層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度に及ぼす吸水の影響に関して考察を行う。

第 5 章では、CFRP 積層板の斜角入射超音波伝搬特性の理論解析について述べる。はじめにスティフネスマトリクス法^{[162], [163]}の定式化を行い、層間にスプリング界面を有する積層板に対する斜角入射超音波反射・透過率の計算法を述べる。次に、振幅透過率に及ぼす層間界面剛性や入射角度の影響を考察する。特に、透過率が著しく低下する周波数帯に着目し、無限積層構造中を伝搬するフロケ波の分散関係と比較することでその発生挙動（周波数、層間界面剛性、入射角度依存性）を解明する。また、ガウシアンビームを入射波としたときの振幅透過率を理論的に計算し、平面調和波入射時の透過率と比較することで、入射波の空間的・時間的有限幅が透過特性に及ぼす影響を考察する。最後に一方向強化 CFRP

積層板に対する測定値と理論値を比較し、ストップバンド発生挙動を考察する。

第 6 章では、第 2—5 章で得られた結果をまとめ、本論文の結論および将来の展望について述べる。

1.7 第 1 章の参考文献

- [1]. 前田豊, 「炭素繊維の最先端技術」, シーエムシー出版 (2007).
- [2]. 前田豊, 「炭素繊維の応用と市場」, シーエムシー出版 (2008).
- [3]. 香川豊, 「複合材料」, 2005 年度物質材料研究アウトルック, 第 4 部, 第 10 章 (2005), pp.184–187.
- [4]. 「炭素繊維を使いませんか」, 日経ものづくり 2008 年 4 月号, pp. 50–71.
- [5]. 「低炭素・脱石油向け技術が深化「第 41 回東京モーターショーから」」, 日経ものづくり 2009 年 12 月号, pp. 28–35.
- [6]. 北野彰彦, 「航空機の軽量化を支える炭素繊維強化複合材料」, 日本化学会 化学と教育 59 巻 4 号 (2011), pp. 226–229.
- [7]. 河村雅彦, 「PAN 系炭素繊維の現状と将来」, 第 24 回複合材料セミナー資料 (2011), pp. 1–7.
- [8]. 「CFRP 多用の EV コンセプトカーで自動車設計の“革命”を狙う東レ」, 日経ものづくり 2011 年 10 月号, pp. 20–21.
- [9]. 「使ってみたい材料 30」, 日経ものづくり 2012 年 2 月号, pp. 46–48.
- [10]. 種市伸彦, 「PAN 系炭素繊維の現状と将来」, 第 25 回複合材料セミナー資料 (2012), pp. 1–7.
- [11]. 「CFRP を使いこなすための基礎知識」, 日経ものづくり 2014 年 10 月号, pp. 44–45.
- [12]. 「航空機分野の人材の確保にむけて」, 経済産業省 2014 年度ものづくり白書, 第 1 章 第 2 節 (その 2), pp. 54–70.
- [13]. R. Prakash, “Non-destructive testing of composites,” *Composites* Vol. **11**, No. 4 (1980), pp. 217–224.
- [14]. I. G. Scott and C. M. Scala, “A review of non-destructive testing of composite materials,” *NDT International* Vol. **15**, No. 2 (1982), pp. 75–86.
- [15]. J. Summerscales ed., *Non-destructive testing of fibre-reinforced plastics composites* Vol. **1** (Elsevier Applied Science Publications, New York, 1987).
- [16]. R. D. Adams and P. Cawley, “A review of defect types and nondestructive testing techniques for composites and bonded joints,” *NDT International* Vol. **21**, No. 4 (1988), pp. 208–222.
- [17]. J. Summerscales ed., *Non-destructive testing of fibre-reinforced plastics composites* Vol. **2** (Elsevier Applied Science Publications, New York, 1990).
- [18]. R. A. Smith, “Composite defects and their detection,” *Materials Science Engineering* Vol. **III**

- (2009), pp. 103–143.
- [19]. M. P. D. Goeje and K. E. D. Wapenaar, “Non-destructive inspection of carbon fibre-reinforced plastics using eddy current methods,” *Composites* Vol. **23**, No. 3 (1992), pp. 147–157.
 - [20]. X. E. Gros, “An eddy current approach to the detection of damage caused by low-energy impacts on carbon fibre reinforced materials,” *Materials & Design* Vol. **16**, No. 3 (1995), pp. 167–173.
 - [21]. B. A. Auld and J. C. Moulder, “Review of advances in quantitative eddy current nondestructive evaluation,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **18**, No. 1 (1999), pp. 3–36.
 - [22]. G. Mook, R. Lange, and O. Koeser, “Non-destructive characterisation of carbon-fibre-reinforced plastics by means of eddy-currents,” *Composites Science and Technology* Vol. **61**, No. 6 (2001), pp. 865–873.
 - [23]. 小山潔, 星川洋, 横田理, 上田政人, 西川康博, 大滝政博, 「炭素繊維複合材料 (CFRP) の損傷検出への電磁誘導非破壊試験に関する研究」, 日本大学生産工学部生産工学研究所 地域連携研究プロジェクト平成 20 年度報告書.
 - [24]. B. J. Ball and D. P. Almond, “The detection and measurement of impact damage in thick carbon fiber reinforced laminates by transient thermography,” *NDT&E International* Vol. **31**, No. 3 (1998), pp. 165–173.
 - [25]. W. Bai and B. S. Wong, “Evaluation of defects in composite plates under convective environments using lock-in thermography,” *Measurement Science and Technology* Vol. **12**, No. 2 (2001), pp. 142–150.
 - [26]. N. Rajic, “Principal component thermography for flaw contrast enhancement and flaw depth characterisation in composite structures,” *Composite Structures* Vol. **58**, No. 4 (2002), pp. 521–528.
 - [27]. N. P. Avdelidis, B. C. Hawtin, and D. P. Almond, “Transient thermography in the assessment of defects of aircraft composites,” *NDT&E International* Vol. **36**, No. 6 (2003), pp. 433–439.
 - [28]. A. A. Badghaish and D. C. Fleming, “Non-destructive inspection of composites using step heating thermography,” *Journal of Composite Materials* Vol. **42**, No. 13 (2008), pp. 1337–1357.
 - [29]. M. P. Hentschel, K. –W. Harbich, and A. Lange, “Nondestructive evaluation of single fibre debonding in composites by X-ray refraction,” *NDT&E International* Vol. **27**, No. 5 (1994), pp. 275–280.
 - [30]. W. H. Green and P. Sincebaugh, “Nondestructive evaluation of complex composites using advanced computed tomography (CT) imaging,” *Army Research Laboratory report ARL-TR-2400* (2001), pp. 1–16.
 - [31]. A. J. Moffat, P. Wright, J. –Y. Buffière, I. Sinclair, and S. M. Spearing, “Micromechanisms of

- damage in 0° splits in a [90/0]_s composite material using synchrotron radiation computed tomography,” *Scripta Materialia* Vol. **59** (2008), pp. 1043–1046.
- [32]. P. Wright, A. Moffat, I. Sinclair, and S.M. Spearing, “High resolution tomographic imaging and modelling of notch tip damage in a laminated composite,” *Composites Science and Technology* Vol. **70**, No. 10 (2010) pp. 1444–1452.
- [33]. D. J. Bull, L. Helfen, I. Sinclair, S. M. Spearing, and T. Baumbach, “A comparison of multi-scale 3D X-ray tomographic inspection techniques for assessing carbon fibre composite impact damage,” *Composites Science and Technology* Vol. **75** (2013), pp. 55–61
- [34]. T. E. Preuss and G. Clark, “Use of time of flight c-scanning for assessment of impact damage in composites,” *Composites* Vol. **19**, No. 2 (1988), pp. 145–148.
- [35]. T. J. Moran and C. F. Buynak, “Correlation of ultrasonic imaging and destructive analysis of low energy impact events,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **8**, Part B (1989), pp. 1627–1634.
- [36]. M. V. Hosur, C. R. L. Murthy, T. S. Ramamurthy, and A. Shet, “Estimation of impact-induced damage in CFRP laminates through ultrasonic imaging,” *NDT&E International* Vol. **31**, No. 5 (1998), pp. 359–374.
- [37]. R. A. Smith, D. A. Bruce, L. D. Jones, A. B. Marriott, L. P. Scudder, and S. J. Willsher, “Ultrasonic C-scan standardization for polymer-matrix composites – acoustic considerations,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **17**, Part A (1998), pp. 2037–2044.
- [38]. S. -C. Wooh and C. Wei, “A high-fidelity ultrasonic pulse-echo scheme for detecting delaminations in composite laminates,” *Composites Part B: Engineering* Vol. **30**, No. 5 (1999), pp. 433–441.
- [39]. M. R. Gorman, “Ultrasonic polar backscatter imaging of transverse matrix cracks,” *Journal of Composite Materials* Vol. **25**, No. 11 (1991), pp. 1499–1514.
- [40]. K. V. Steiner, R. F. Eduljee, X. Huang, and J. W. Gillespie Jr, “Ultrasonic NDE techniques for the evaluation of matrix cracking in composite laminates,” *Composite Science and Technology* Vol. **53**, No. 2 (1995), pp. 193–198.
- [41]. F. Aymerich and S. Meili, “Ultrasonic evaluation of matrix damage in impacted composite laminates,” *Composites Part B: Engineering* Vol. **31**, No. 1 (2000), pp. 1–6.
- [42]. Q. Shen, M. Omar, and S. Dongri, “Ultrasonic NDE techniques for impact damage inspection on CFRP laminates,” *Journal of Materials Science Research* Vol. **1**, No. 1 (2012), pp. 2–16.
- [43]. M. Kersemans, A. Martens, K. V. D. Abeele, J. Degrieck, F. Zastavnik, L. Pyl, H. Sol, and W. V. Paepegem, “Detection and localization of delaminations in thin carbon fiber reinforced composites with the ultrasonic polar scan,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **33**, No. 4 (2014), pp. 522–534.

- [44]. M. Kersemans, W. V. Paepegem, B. Lemmens, K. V. D. Abeele, L. Pyl, F. Zastavnik, H. Sol, and J. Degrieck, “The pulsed ultrasonic backscatter polar scan and its applications for NDT and material characterization,” *Experimental Mechanics* Vol. **54**, No. 6 (2014), pp. 1059–1071.
- [45]. N. F. Declercq, J. Degrieck, and O. Leroy, “Simulations of harmonic and pulsed ultrasonic polar scans,” *NDT&E International* Vol. **39**, No. 3 (2006), pp. 205–216.
- [46]. N. F. Declercq, J. Degrieck, and O. Leroy, “Ultrasonic polar scans: Numerical simulation on generally anisotropic media,” *Ultrasonics* Vol. **45** (2006), pp. 32–39.
- [47]. M. Kersemans, I. D. Baere, W. V. Paepegem, and J. Degrieck, “Experimental and numerical polar scans of several anisotropic materials using pulsed and harmonic ultrasonic beams,” *Emerging Technologies in Non-destructive Testing V* (2011), pp. 275–280.
- [48]. N. F. Declercq, J. Degrieck, and O. Leroy, “On the influence of fatigue on ultrasonic polar scans of fiber reinforced composites,” *Ultrasonics* Vol. **42** (2004), pp. 173–177.
- [49]. L. Satyanarayan, J. M. V. Weide, and N. F. Declercq, “Ultrasonic polar scan imaging of damaged fiber reinforced composites,” *Materials Evaluation* Vol. **68**, No. 6 (2010), pp. 733–739.
- [50]. M. Kersemans, I. D. Baere, J. Degrieck, K. V. D. Abeele, L. Pyl, F. Zastavnik, H. Sol, and W. V. Paepegem, “Damage signature of fatigued fabric reinforced plastics in the pulsed ultrasonic polar scan,” *Experimental Mechanics* Vol. **54**, No. 8 (2014), pp. 1467–1477.
- [51]. M. Kersemans, I. D. Baere, J. Degrieck, K. V. D. Abeele, L. Pyl, F. Zastavnik, H. Sol, and W. V. Paepegem, “Nondestructive damage assessment in fiber reinforced composites with the pulsed ultrasonic polar scan,” *Polymer Testing* Vol. **34** (2014), pp. 85–96.
- [52]. M. Kersemans, N. Lemmens, W. V. Paepegem, K. V. D. Abeele, F. Zastavnik, J. Gu, L. Pyl, and H. Sol, “Determination of the fiber direction and the C-tensor of a ud carbon/epoxy composite by means of the ultrasonic polar scan,” *Proceedings of the 2013 International Congress on Ultrasonics* (2013), pp. 651–656.
- [53]. N. Guo and P. Cawley, “The interaction of Lamb waves with delaminations in composite laminates,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **94**, No. 4 (1993), pp. 2240–2246.
- [54]. P. Cawley, “The rapid non-destructive inspection of large composite structures,” *Composites* Vol. **25**, No. 5 (1994), pp. 351–357.
- [55]. T. Kundu, P. Karpur, T. E. Matikas, and P. D. Nicolaou, “Lamb wave mode sensitivity to detect various material defects in multilayered composite plates,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **15**, Part A (1996), pp. 231–238.
- [56]. M. Castaings, P. Cawley, R. Farlow, and G. Hayward, “Single sided inspection of composite materials using air coupled ultrasound,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **17**, No. 1

- (1998), pp. 37–45.
- [57]. S. S. Kessler, S. M. Spearing, and C. Soutis, “Damage detection in composite materials using Lamb wave methods,” *Smart Materials and Structures* Vol. **11**, No. 2 (2002), pp. 269–278.
 - [58]. J. Tian, U. Gabbert, H. Berger, and X. Su, “Lamb wave interaction with delaminations in CFRP laminates,” *Computers, Materials & Continua* Vol. **1**, No. 4 (2004), pp. 327–336.
 - [59]. Z. Su, L. Ye, and Y. Lu, “Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review,” *Journal of Sound and Vibration* Vol. **295** (2006), pp. 753–780.
 - [60]. R. J. Freemantle, N. Hankinson, and C. J. Brotherhood, “Rapid phased array ultrasonic imaging of large area composite aerospace structures,” *Insight* Vol. **47**, No. 3 (2005), pp. 129–132.
 - [61]. C. Nageswaran, C. R. Bird, and R. Takahashi, “Phased array scanning of artificial and impact damage in carbon fibre reinforced plastic (CFRP),” *Insight* Vol. **48**, No. 3 (2006), pp. 155–159.
 - [62]. A. S. Purekar and D. J. Pines, “Damage detection in thin composite laminates using piezoelectric phased sensor arrays and guided lamb wave interrogation,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* Vol. **21** (2010), pp. 995–1010.
 - [63]. C. Li, D. Pain, P. D. Wilcox, and B. W. Drinkwater, “Imaging composite material using ultrasonic arrays,” *NDT&E International* Vol. **53** (2013), pp. 8–17.
 - [64]. Y. Humeida, V. J. Pinfield, R. E. Challis, P. D. Wilcox, and C. Li, “Simulation of ultrasonic array imaging of composite materials with defects,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* Vol. **60**, No. 9 (2013), pp. 1935–1948.
 - [65]. E. Birt and R. A. Smith, “A review of NDE methods for porosity measurement in fibre-reinforced polymer composites,” *Insight* Vol. **46**, No. 11 (2004), pp. 681–686.
 - [66]. K. J. Bowles and S. Frimpong, “Void effects on the interlaminar shear strength of unidirectional graphite-fiber-reinforced composites,” *Journal of Composite Materials* Vol. **26**, No. 10 (1992), pp. 1487–1509.
 - [67]. P. Olivier, J. P. Cottu, and B. Ferret, “Effects of cure cycle pressure and voids on some mechanical properties of carbon/epoxy laminates,” *Composites* Vol. **26** (1995), pp. 509–515.
 - [68]. H. Jeong, “Effects of voids on the mechanical strength and ultrasonic attenuation of laminated composites,” *Journal of Composite Materials* Vol. **31**, No. 3 (1997), pp. 276–292.
 - [69]. M. L. Costa, S. F. M. Almeida, and M. C. Rezende, “The influence of porosity on the interlaminar shear strength of carbon/epoxy and carbon/bismaleimide fabric laminates,” *Composites Science and Technology* Vol. **61**, No. 14 (2001), pp. 2101–2108.
 - [70]. P. A. Olivier, B. Mascaro, P. Margueres, and F. Collombet, “CFRP with voids: ultrasonic characterization of localized porosity, acceptance criteria and mechanical characteristics,” *Proceedings of the 16th International Conference on Composite Materials* (2007).

- [71]. S. F. M. Almeida and Z. S. N. Neto, “Effects of void content on the strength of composite laminates,” *Composite Structures* Vol. **28**, No. 2 (1994), pp. 139–148.
- [72]. J. –M. Tang, W. I. Lee, and G. S. Springer, “Effects of cure pressure on resin flow, voids, and mechanical properties,” *Journal of Composite Materials* Vol. **21**, No. 5 (1987), pp. 421–440.
- [73]. B. G. Martin, “Ultrasonic wave propagation in fiberreinforced solids containing voids,” *Journal of Applied Physics* Vol. **48**, No. 8 (1977), pp. 3368–3373.
- [74]. W. N. Reynolds and S. J. Wilkinson, “The analysis of fibre-reinforced porous composite materials by the measurement of ultrasonic wave velocities,” *Ultrasonics* Vol. **16**, No. 4 (1978), pp. 159–163.
- [75]. D. K. Hsu and H. Jeong, “Ultrasonic velocity change and dispersion due to porosity in composite laminates,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **8**, Part B (1989), pp. 1567–1573.
- [76]. I. N. Komsly, I. M. Daniel, and S. C. Wooh, “Characterization of porosity in thick composites using ultrasonic wave velocity measurements,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **12**, Part A (1993), pp. 1273–1280.
- [77]. H. Jeong and D. K. Hsu, “Experimental analysis of porosity-induced ultrasonic attenuation and velocity change in carbon composites,” *Ultrasonics* Vol. **33**, No. 3 (1995), pp. 195–203.
- [78]. J. Ito, S. Biwa, T. Hayashi, and A. Kuraishi, “Ultrasonic wave propagation in the corner section of composite laminate structure: Numerical simulations and experiments,” *Composite Structures* Vol. **123** (2015), pp. 78–87.
- [79]. D. E. W. Stone and B. Clarke, “Ultrasonic attenuation as a measure of void content in carbon-fibre reinforced plastics,” *Non-destructive Testing* Vol. **8**, No. 3 (1975), pp. 137–145.
- [80]. B. G. Martin, “Ultrasonic attenuation due to voids in fibre-reinforced plastics,” *NDT International* Vol. **9**, No. 5 (1976), pp. 242–246.
- [81]. D. K. Hsu and S. M. Nair, “Evaluation of porosity in graphite-epoxy composite by frequency dependence of ultrasonic attenuation,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **6**, Part A (1987), pp. 1185–1193.
- [82]. J. M. Hale and J. N. Ashton, “Ultrasonic attenuation in voided fibre-reinforced plastics,” *NDT International* Vol. **21**, No. 5 (1988), pp. 321–326.
- [83]. J. G. Miller, “Quantitative non-destructive evaluation of porous composite materials based on ultrasonic wave propagation,” *Topical Semiannual Progress Report NASA-CR-182544* (1988), pp. 1–28.
- [84]. S. M. Nair, D. K. Hsu, and J. H. Rose, “Porosity estimation using the frequency dependence of the ultrasonic attenuation,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **8**, No. 1 (1989), pp. 13–26.
- [85]. I. M. Daniel, S. C. Wooh, and I. Komsky, “Quantitative porosity characterization of

- composite materials by means of ultrasonic attenuation,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **11**, No.1 (1992), pp. 1–8.
- [86]. F. A. Reed, T. J. Batzinger, and R. W. Reed, “Porosity measurement in composites using ultrasonic attenuation methods,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **12**, Part B (1993), pp. 1265–1272.
- [87]. J. E. Michaels, T. E. Michaels, and S. Jönsson, “Ultrasonic methods for detection of micro porosity in composite materials,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **12**, Part B (1993), pp. 1281–1287.
- [88]. L. Lin, M. Luo, H. T. Tian, X. M. Li, and G. P. Guo, “Experimental investigation on porosity of carbon fiber-reinforced composite using ultrasonic attenuation coefficient,” *Proceedings of the 17th World Conference on Nondestructive Testing* (2008).
- [89]. L. Lin, X. Zhang, J. Chen, Y. Mu, and X. Li, “A novel random void model and its application in predicting void content of composites based on ultrasonic attenuation coefficient,” *Applied Physics A* Vol. **103**, No. 4 (2011), pp. 1153–1157.
- [90]. L. Lin, J. Chen, X. Zhang, and X. Li, “A novel 2-D random void model and its application in ultrasonically determined void content for composite materials,” *NDT&E International* Vol. **44**, No. 3 (2011), pp. 254–260.
- [91]. Y. Yu, J. Ye, Y. Wang, B. Zhang, and G. Qi, “A mesoscale ultrasonic attenuation finite element model of composites with random-distributed voids,” *Composites Science and Technology* Vol. **89** (2013), pp. 44–51.
- [92]. J. –W. Park, D. –J. Kim, K. –H. Im, S. –K. Park, D. K. Hsu, A. H. Kitem S. –K. Kim, K. –S. Lee, and I. –Y. Yang, “Ultrasonic influence of porosity level on CFRP composite laminates using Rayleigh probe waves,” *Acta Mechanica Solida Sinica* Vol. **21**, No. 4 (2008), pp. 298–307.
- [93]. N. Dominguez and B. Mascaro, “Ultrasonic non-destructive inspection of localized porosity in composite materials,” *Proceedings of the 9th European Conference on Non-Destructive Testing* (2006), Tu.2.1.4.
- [94]. D. Grolemond and C. Tsai, “Statistical moments of backscattered ultrasound in porous fiber reinforced composites,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* Vol. **45**, No. 2 (1998), pp. 295–304.
- [95]. K. B. Kim, D. K. Hsu, and D. J. Barnard, “Estimation of porosity content of composite materials by applying discrete wavelet transform to ultrasonic backscattered signal,” *NDT&E International* Vol. **56** (2013), pp. 10–16.
- [96]. W. M. Ewing, W. S. Jardetzky, and F. Press, *Elastic Waves in Layered Media* (McGraw-Hill, New York, 1957).
- [97]. L. M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media* (Academic Press, New York, 1960).

- [98]. R. A. Kline, *Nondestructive Characterization of Composite Media* (Technomic Publishing, Pennsylvania, 1992).
- [99]. S. I. Rokhlin, D. E. Chimenti, and P. B. Nagy, *Physical Ultrasonics of Composites* (Oxford University Press, New York, 2011).
- [100]. M. F. Markham, "Measurement of the elastic constants of fibre composites by ultrasonics," *Composites* Vol. **1** (1970), pp. 145–149.
- [101]. R. E. Smith, "Ultrasonic elastic constants of carbon fibers and their composites," *Journal of Applied Physics* Vol. **43**, No. 6 (1972), pp. 2555–2561.
- [102]. B. Castagnède, J. T. Jenkins, W. Sachse, and S. Baste, "Optimal determination of the elastic constants of composite materials from ultrasonic wave-speed measurements," *Journal of Applied Physics* Vol. **67**, No. 6 (1990), pp. 2753–2761.
- [103]. E. P. Papadakis, T. Patton, Y. –M. Tsai, D. O. Thompson, and R. B. Thompson, "The elastic moduli of a thick composite as measured by ultrasonic bulk wave pulse velocity," *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **89**, No. 6 (1991), pp. 2753–2757.
- [104]. C. Aristégui and S. Baste, "Optimal recovery of the elasticity tensor of general anisotropic materials from ultrasonic velocity data," *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **101**, No. 2 (1997), pp. 813–833.
- [105]. S. K. Sahay, R. A. Kline, and R. Mignogna, "Phase and group velocity considerations for dynamic modulus measurement in anisotropic media," *Ultrasonics* Vol. **30**, No. 6 (1992), pp. 373–382.
- [106]. S. I. Rokhlin and W. Wang, "Double through-transmission bulk wave method for ultrasonic phase velocity measurement and determination of elastic constants of composite materials," *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **91**, No. 6 (1992), pp. 3303–3312.
- [107]. Y. C. Chu and S. I. Rokhlin, "Comparative analysis of through-transmission ultrasonic bulk wave methods for phase velocity measurements in anisotropic materials," *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **95**, No. 6 (1994), pp. 3204–3212.
- [108]. B. Hosten, "Stiffness matrix invariants to validate the characterization of composite materials with ultrasonic methods," *Ultrasonics* Vol. **30**, No. 6 (1992), pp. 365–371.
- [109]. B. Hosten, D. A. Hutchins, and D. W. Schindel, "Measurement of elastic constants in composite materials using air-coupled ultrasonic bulk waves," *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **99**, No. 4(1996), pp. 2116–2123.
- [110]. J. Vishnuvardhan, C. V. Krishnamurthy, and Krishnan Balasubramaniam, "Genetic algorithm reconstruction of orthotropic composite plate elastic constants from a single non-symmetric plane ultrasonic velocity data," *Composites Part B: Engineering* Vol. **38** (2007), pp. 216–227.
- [111]. Y. C. Chu and S. I. Rokhlin, "A method for determination of elastic constants of a unidirectional lamina from ultrasonic bulk velocity measurements on [0/90] cross-ply

- composites,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **96**, No. 1 (1994), pp. 342–352
- [112]. S. I. Rokhlin and W. Wang, “Critical angle measurement of elastic constants in composite material,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **86**, No. 5 (1986), pp. 1876–1882.
- [113]. M. Kersemans, W. V. Paepegem, D. V. Nuffel, FG. Luyckx, I. D. Baere, F. Zastavnik, J. Gu, H. Sol, K. V. D. Abeele, and J. Degrieck, “Polar scan technique for material characterization and identification of new operating regimes,” *Proceedings of 15th International Conference on Experimental Mechanics* (2012), Paper Ref: 3021, pp. 1–12.
- [114]. M. Kersemans, A. Martens, N. Lammens, K. V. D. Abeele, J. Degrieck, F. Zastavnik, L. Pyl, H. Sol, and W. V. Paepegem, “Identification of the elastic properties of isotropic and orthotropic thin-plate materials with the pulsed ultrasonic polar scan,” *Experimental Mechanics* Vol. **54**, No. 6 (2014), pp. 1121–1132.
- [115]. M. Kersemans, W. V. Paepegem, K. V. D. Abeele, L. Pyl, F. Zastavnik, H. Sol, and J. Degrieck, “Pitfalls in the experimental recording of ultrasonic (backscatter) polar scans for material characterization,” *Ultrasonics* Vol. **54**, No. 6 (2014), pp. 1509–1521.
- [116]. M. Kersemans, N. Lemmens, J. Degrieck, K. V. D. Abeele, L. Pyl, F. Zastavnik, H. Sol, and W. V. Paepegem, “Extraction of bulk wave characteristics from a pulsed ultrasonic polar scan,” *Wave Motion* Vol. **51**, No. 7 (2014), pp. 1071–1081.
- [117]. M. Kersemans, A. Martens, K. V. D. Abeele, J. Degrieck, L. Pyl, F. Zastavnik, H. Sol, and W. V. Paepegem, “The quasi-harmonic ultrasonic polar scan for material characterization: Experiment and numerical modeling,” *Ultrasonics* Vol. **58** (2015), pp. 111–122.
- [118]. B. Hosten, M. Deschamps, and B. R. Tittmann, “Inhomogeneous wave generation and propagation in lossy anisotropic solids. Application to the characterization of viscoelastic composite materials,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **82**, No. 5 (1987), pp. 1763–1770.
- [119]. B. Hosten, “Reflection and transmission of acoustic plane waves on an immersed orthotropic and viscoelastic solid layer,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **89**, No. 6 (1991), pp. 2745–2752.
- [120]. S. Baudouin and B. Hosten, “Immersion ultrasonic method to measure elastic constants and anisotropic attenuation in polymer-matrix and fiber-reinforced composite materials,” *Ultrasonics* Vol. **34** (1996), pp. 379–382.
- [121]. S. Baudouin and B. Hosten, “Comparison between prediction and measurement of viscoelastic moduli in composite materials versus temperature using ultrasonic immersion technique with oil,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **102**, No. 6 (1997), pp. 3450–3457.

- [122]. 岡部洋二, 武田展雄, 「吸湿による CFRP 弾性率変化の超音波伝播特性による評価」, 日本機械学会論文集 (A 編) **64** 巻, 620 号 (1998), pp. 185–190.
- [123]. 岡部洋二, 武田展雄, 「吸湿による CFRP 粘性係数変化の超音波伝ば特性による評価」, 材料 **47** 巻, 5 号 (1998), pp. 472–477.
- [124]. M. Castaings, B. Hosten, and T. Kundu, “Inversion of ultrasonic, plane-wave transmission data in composite plates to infer viscoelastic material properties,” *NDT&E International* Vol. **33** (2000), pp. 377–392.
- [125]. M. R. Karim, A. K. Mal, and Y. Bar-Cohen, “Determination of the elastic constants of composite through the inversion of leaky Lamb wave data,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **9**, Part A (1990), pp. 109–116.
- [126]. S. I. Rokhlin, C. Y. Wu, and L. Wang, “Application of coupled ultrasonic plate modes for elastic constant reconstruction of anisotropic composites,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **9**, Part A (1990), pp. 1403–1410.
- [127]. S. I. Rokhlin and D. E. Chimenti, “Reconstruction of elastic constants from ultrasonic reflectivity data in a fluid coupled composite plate,” *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. **9**, Part A (1990), pp. 1411–1418.
- [128]. A. Safaeinili, O. I. Lobkis, and D. E. Chimenti, “Air-coupled ultrasonic estimation of viscoelastic stiffness in plates,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* Vol. **34**, No. 6 (1996), pp. 1171–1180.
- [129]. D. E. Chimenti and D. Fei, “Scattering coefficient reconstruction in plates using focused acoustic beams,” *International Journal of Solids and Structures* Vol. **39** (2002), pp. 5495–5513.
- [130]. D. Fei, D. E. Chimenti, and S. V. Teles, “Material property estimation in thin plates using focused synthetic-aperture acoustic beams,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **113**, No. 5 (2003), pp. 2599–2610.
- [131]. J. –M. Baik and R. B. Thompson, “Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-state model,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **4**, No. 3 (1984), pp. 177–196.
- [132]. S. I. Rokhlin and Y. J. Wang, “Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **89**, No. 2 (1991), pp. 503–515.
- [133]. S. I. Rokhlin and Y. J. Wang, “Equivalent boundary conditions for thin orthotropic layer between two solids: Reflection, refraction, and interface waves,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **91**, No. 4 (1992), pp. 1875–1887.
- [134]. S. I. Rokhlin and W. Huang, “Ultrasonic wave interaction with a thin anisotropic layer between two anisotropic solids: Exact and asymptotic-boundary condition methods,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **92**, No. 3 (1992), pp. 1729–1742.

- [135]. S. I. Rokhlin and W. Huang, “Ultrasonic wave interaction with a thin anisotropic layer between two anisotropic solids. II. Second-order asymptotic boundary conditions,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **94**, No. 6 (1993), pp. 3405–3420.
- [136]. A. Boström and G. Wickham, “On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **10**, No. 4 (1991), pp. 139–149.
- [137]. A. Boström and M. Golub, “Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plane with interface damage modelled by spring boundary conditions,” *Quarterly Journal of Mechanical Applied Mathematics* Vol. **62**, No. 1 (2009), pp. 39–52.
- [138]. M. V. Golub, “Propagation of elastic waves in layered composites with microdefect concentration zones and their simulation with spring boundary conditions,” *Acoustical Physics* Vol. **56**, No. 6 (2010), pp. 848–855.
- [139]. M. V. Golub and A. Boström, “Spring boundary conditions and modeling of 2D wave propagation in composites with imperfect interfaces,” *Proceedings of Days on Diffraction’2010* (2010), pp. 73–78.
- [140]. M. V. Golub and A. Boström, “Interface damage modeled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves,” *Wave Motion* Vol. **48** (2011), pp. 105–115.
- [141]. P. Fraisse, F. Smit, and A. Zarembowitch, “Ultrasonic inspection of very thin adhesive layers,” *Journal of Applied Physics* Vol. **72**, No. 8 (1992), pp. 3264–3271.
- [142]. P. B. Nagy, “Ultrasonic classification of imperfect interfaces,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **11**, No. 3 (1992), pp. 127–139.
- [143]. B. W. Drinkwater, R. S. Dwyer-Joyce, and P. Cawley, “A study of the interaction between ultrasonic and a partially contacting solid-solid interface,” *Proceedings of the Royal Society London A* Vol. **452** (1996), pp. 2613–2628.
- [144]. B. W. Drinkwater, R. S. Dwyer-Joyce, and P. Cawley, “A study of the transmission of ultrasound across solid-rubber interfaces,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **101**, No. 2 (1997), pp. 970–981.
- [145]. S. Biwa, S. Hiraiwa, and E. Matsumoto, “Stiffness evaluation of contacting surfaces by bulk and interface waves,” *Ultrasonics* Vol. **47** (2007), pp. 123–129.
- [146]. A. Pilarski and J. L. Rose, “A transverse-wave ultrasonic oblique-incidence technique for interfacial weakness detection in adhesive bonds,” *Journal of Applied Physics* Vol. **63**, No. 2 (1988), pp. 300–307.
- [147]. S. Rokhlin, M. Hefets, and M. Rosen, “An elastic interface wave guided by a thin film between two solids,” *Journal of Applied Physics* Vol. **51**, No. 7 (1980), pp. 3579–3582.
- [148]. B. Drinkwater, M. Castaings, and B. Hosten, “The measurement of A_0 and S_0 Lamb wave attenuation to determine the normal and shear stiffness of a compressively loaded interface,”

- The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **113**, No. 6 (2003), pp. 3161–3170.
- [149]. B. Hosten and M. Castaings, “Finite elements methods for modeling the guided waves propagation in structures with weak interfaces,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **117**, No. 3 (2005), pp. 1108–1113.
- [150]. B. L. Crom and M. Castaings, “Shear horizontal guided wave modes to infer the shear stiffness of adhesive bond layers,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **127**, No. 4 (2010), pp. 2220–2230.
- [151]. N. Mori, S. Biwa, and T. Hayashi, “Reflection and transmission of Lamb waves at an imperfect joint of plates,” *Journal of Applied Physics* Vol. **113** (2013), 074901.
- [152]. N. Mori and S. Biwa, “Resonance of an imperfect joint of plates by the lowest-order symmetric Lamb mode,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **137**, No. 6 (2015), pp. 3139–3148.
- [153]. A. I. Lavrentyev and S. I. Rokhlin, “Ultrasonic spectroscopy of imperfect contact interfaces between a layer and two solids,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **103**, No. 2 (1998), pp. 657–664.
- [154]. A. Baltazar, L. Wang, B. Xie, and S. I. Rokhlin, “Inverse ultrasonic determination of imperfect interfaces and bulk properties of a layer between two solids,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **114**, No. 3 (2003), pp. 1424–1434.
- [155]. L. Singher, Y. Segal, E. Segal, and J. Shamir, “Considerations in bond strength evaluation by ultrasonic guided waves,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **96**, No. 4 (1994), pp. 2497–2505.
- [156]. R. Leiderman, A. M. B. Braga, and P. E. Barbone, “Scattering of ultrasonic waves by defective adhesion interfaces in submerged laminated plates,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **118**, No. 4 (2005), pp. 2154–2166.
- [157]. R. Leiderman, P. E. Barbone, and A. M. B. Braga, “Reconstructing the adhesion stiffness distribution in a laminated elastic plate: Exact and approximate inverse scattering solutions,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **122**, No. 4 (2007), pp. 1906–1916.
- [158]. R. Leiderman and D. Castello, “Scattering of ultrasonic waves by heterogeneous interfaces: Formulating the direct scattering problem as a least-squares problem,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **135**, No. 1 (2014), pp. 5–16.
- [159]. X. M. Jian, N. Guo, M. X. Li, and H. L. Zhang, “Characterization of bonding quality in a multilayer structure using segment adaptive filtering,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **21**, No.2 (2002), pp. 55–65.
- [160]. Y. Lu and J. D. Achenbach, “Effects of random deviations in interface properties on the propagation of ultrasound in thick composites,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **90**, No. 5 (1991), pp. 2576–2585.

- [161]. Y. Lu, “Effects of random fluctuations in ply mechanical properties on ultrasound propagation in a laminated solid layer,” *Ultrasonics* Vol. **30**, No. 5 (1992), pp. 289–295.
- [162]. L. Wang and S. I. Rokhlin, “Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media,” *Ultrasonics* Vol. **39** (2001), pp. 413–424.
- [163]. S. I. Rokhlin and L. Wang, “Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media: Stiffness matrix method,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **112**, No. 3 (2002), pp. 822–834.

第2章 層間にスプリング界面を有する積層構造中の一次元弾性波動場の理論解析

2.1 緒言

本章では、積層構造の波動伝搬解析に広く用いられる伝達マトリクス法^{[1]–[5]}を用いて、CFRP 積層板に縦波が垂直入射したときの反射特性に関する理論的検討を行う。

2.2 節では、CFRP 積層板の層間樹脂リッチ領域をスプリング界面でモデル化したときの垂直入射超音波の振幅反射・透過率計算法を定式化する。2.3 節では、2.2 節で得た結果と無限周期構造における波動伝搬を扱う理論であるフロケの定理^{[6]–[8]}を組み合わせることで、反射率の直接的な表現を導出する。そして反射率が厳密に零となる周波数について考察を加える。2.4 節で本章の結言を述べ、2.5 節に参考文献を示す。

2.2 伝達マトリクス法による垂直入射超音波の反射・透過率の理論計算

解析対象として、Fig. 2.1 に示すような N 個のプライおよび $N - 1$ 個のスプリング界面で構成される積層板を考え、平面縦波が積層板に垂直入射する状況を考える。積層板の各プライは同じ材料特性（質量密度 ρ 、縦波速度 c 、厚さ h ）を有し、各界面は同じ層間界面垂直剛性 K_N を有すると仮定する。界面におけるバネの自然長は無視できるほど小さいと仮定し、層間界面の位置を $x = X_1, X_2, \dots, X_{N-1}$ とする。そして、積層板の両側 ($x < X_0, x > X_N$) には、質量密度 ρ_0 および縦波速度 c_0 の媒質（水浸法の場合は水に対応）が半無限的に続いているとする。なお、本解析では積層板への縦波垂直入射を考えており、その結果材料中で生じる縦波の振動方向（ x 方向）は、積層構成に関わらず常にプライの繊維方向に対して垂直となる。したがって、直交積層板や擬似等方積層板などプライごとに繊維方向が異なる場合でも、すべてのプライを同じ材料特性を有する弾性体でモデル化することができる。また、波の振動方向は界面に対して常に垂直であるため、層間界面接線剛性は波動伝搬に影響を及ぼさない。接線剛性の影響に関しては第 5 章の斜角入射超音波伝搬解析において述べる。

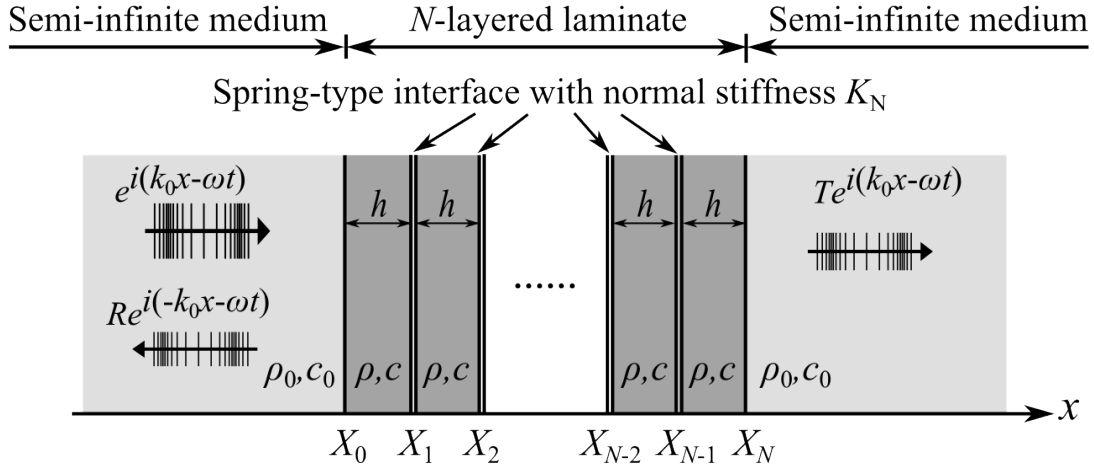


Fig. 2.1 An N -layered laminate with interlayer spring-type interfaces embedded between semi-infinite media.

x 方向に伝搬する縦波を考えると、位置 x および時間 t における変位 $u(x, t)$ は以下の波動方程式を満たす。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad X_m < x < X_{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x < X_0, x > X_N. \quad (2.1b)$$

また、応力 $\sigma(x, t)$ は、

$$\sigma(x, t) = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad X_m < x < X_{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.2a)$$

$$\sigma(x, t) = \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x < X_0, x > X_N, \quad (2.2b)$$

で与えられる。

各層間界面での境界条件は、

$$\sigma(X_{m+}, t) = \sigma(X_{m-}, t) = K_N [u(X_{m+}, t) - u(X_{m-}, t)], \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.3)$$

で与えられ、ここで下付き添え字の“ $m+$ ” (“ $m-$ ”) は、 $x = X_m$ に右側（左側）から近づいたときの当該変数の極限值を表す。また、積層板と半無限媒質の境界（ $x = X_0$ および $x = X_N$ ）は完全接合状態（応力と変位が連続）として、以下の境界条件を考える。

$$\sigma(X_{m+}, t) = \sigma(X_{m-}, t), \quad u(X_{m+}, t) = u(X_{m-}, t), \quad m = 0, N. \quad (2.4)$$

次に、変位場と応力場を調和波の形を用いて以下のように仮定する.

$$u(x, t) = U(x) \exp(-i\omega t), \quad (2.5a)$$

$$\sigma(x, t) = \Sigma(x) \exp(-i\omega t). \quad (2.5b)$$

ここで、 i は虚数単位 ($i^2 = -1$), ω は角周波数である. このとき、式(2.1)–(2.4)は以下の形に書き直すことができる.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0, \quad X_m < x < X_{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.6a)$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} U = 0, \quad x < X_0, x > X_N, \quad (2.6b)$$

$$\Sigma(x) = \rho c^2 \frac{dU}{dx}, \quad X_m < x < X_{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.7a)$$

$$\Sigma(x) = \rho_0 c_0^2 \frac{dU}{dx}, \quad x < X_0, x > X_N, \quad (2.7b)$$

$$\Sigma(X_{m+}) = \Sigma(X_{m-}) = K_N [U(X_{m+}) - U(X_{m-})], \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.8)$$

$$\Sigma(X_{m+}) = \Sigma(X_{m-}), \quad U(X_{m+}) = U(X_{m-}), \quad m = 0, N. \quad (2.9)$$

式(2.6)を満たす変位場 $U(x)$ は、 x の正方向に伝搬する縦波 $U_F(x)$ と x の負方向に伝搬する縦波 $U_B(x)$ の和として、以下の形で表すことができる.

$$\begin{aligned} U(x) &= U_F(x) + U_B(x) \\ &= \begin{cases} A_F^m \exp(ikx) + A_B^m \exp(-ikx), & X_m < x < X_{m+1}, m = 0, 1, \dots, N-1, \\ A_F^L \exp(ik_0 x) + A_B^L \exp(-ik_0 x), & x < X_0, \\ A_F^R \exp(ik_0 x) + A_B^R \exp(-ik_0 x), & x > X_N. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで、 $k = \omega/c$ および $k_0 = \omega/c_0$ はプライおよび半無限媒質中での波数を表し、 A_F^m (A_F^L , A_F^R) および A_B^m (A_B^L , A_B^R) はプライ (半無限媒質) 内を x の正方向および負方向に伝搬する波の

振幅を表す.

次に, 位置 x における変位ベクトル $\mathbf{U}(x)$ を

$$\mathbf{U}(x) = \begin{pmatrix} U_F(x) \\ U_B(x) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

として定義すると, 式(2.6a), (2.7a), (2.8), (2.10)より, 各層間界面の両側における変位は以下のように関係づけられる.

$$\mathbf{U}(X_{(m+1)+}) = \mathbf{S}\mathbf{U}(X_{(m+1)-}), \quad m = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.12)$$

ここで, $\mathbf{S}$ は界面の散乱マトリクス^[4]と呼ばれ, 以下で与えられる.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 + i\Lambda\Omega & -i\Lambda\Omega \\ i\Lambda\Omega & 1 - i\Lambda\Omega \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

ここで,

$$\Omega \equiv \frac{\omega h}{c}, \quad \Lambda \equiv \frac{\rho c^2}{2K_N h}, \quad (2.14)$$

である. Ω は無次元周波数であり, Λ はプライと層間界面の剛性比を表す無次元パラメータである.

次に, 式(2.10)より, 各プライ内の両端における変位は以下のように関係づけられる.

$$\mathbf{U}(X_{(m+1)-}) = \mathbf{P}\mathbf{U}(X_{m+}), \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.15)$$

ここで, $\mathbf{P}$ はプロパゲータマトリクス^[4]と呼ばれ, 以下で与えられる.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \exp(i\Omega) & 0 \\ 0 & \exp(-i\Omega) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

また, 式(2.6), (2.7), (2.9), (2.10)より, 積層板と半無限媒質の境界 ($x = X_0$ および $x = X_N$) 両側の変位は以下のように関係づけられる.

$$\mathbf{U}(X_{0+}) = \mathbf{T}_{SL}\mathbf{U}(X_{0-}), \quad \mathbf{T}_{SL} = \frac{1}{2\Xi} \begin{bmatrix} 1 + \Xi & -1 + \Xi \\ -1 + \Xi & 1 + \Xi \end{bmatrix}, \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{U}(X_{N+}) = \mathbf{T}_{LS}\mathbf{U}(X_{N-}), \quad \mathbf{T}_{LS} = [\mathbf{T}_{SL}]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \Xi & 1 - \Xi \\ 1 - \Xi & 1 + \Xi \end{bmatrix}. \quad (2.17b)$$

ここで,

$$\Xi \equiv \frac{\rho c}{\rho_0 c_0}, \quad (2.18)$$

は、プライと半無限媒質の特性音響インピーダンス（ ρc と $\rho_0 c_0$ ）の比を表す無次元パラメータである。

ここまでに導出した式(2.12), (2.15), (2.17)を用いると、積層板両端における変位の関係は次のように書くことができる。

$$\mathbf{U}(X_{N+}) = \mathbf{L}\mathbf{U}(X_{0-}). \quad (2.19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_{LS} \mathbf{P} [\mathbf{SP}]^{N-1} \mathbf{T}_{SL} \\ &= \mathbf{T}_{LS} \mathbf{S}^{-1} [\mathbf{SP}]^N \mathbf{T}_{SL}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

である。

次に、Fig. 2.1 に示すように、単位振幅を持つ縦波調和波が積層板左側から入射し、それに伴い反射波および透過波が発生する状況を考える。このとき積層板左側（ $x = X_{0-}$ ）および右側（ $x = X_{N+}$ ）における変位は次のように表せる。

$$\mathbf{U}(X_{0-}) = \begin{pmatrix} U_F(X_{0-}) \\ U_B(X_{0-}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(ik_0 X_0) \\ R \exp(-ik_0 X_0) \end{pmatrix}, \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{U}(X_{N+}) = \begin{pmatrix} U_F(X_{N+}) \\ U_B(X_{N+}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \exp(ik_0 X_N) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21b)$$

ここで、 R は複素振幅反射率、 T は複素振幅透過率を表す。式(2.19)–(2.21)より、 R および T は以下で与えられる。

$$R = -\frac{L_{21}}{L_{22}} \exp(2ik_0 X_0), \quad (2.22a)$$

$$T = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}{L_{22}} \exp[-ik_0(X_N - X_0)]. \quad (2.22b)$$

式(2.22)を用いることで、任意積層数を有する積層板の反射・透過率を求めることができる。

2.3 フロケの定理による反射率の直接的表現の導出および反射率の零点に関する考察

本節では、フロケの定理^{[6]–[8]}（またはブロッホの定理^{[9], [10]}）を用いて前節で導いた反射率 R （式(2.22a)）の直接的な表現を求める．なお、フロケの定理は無限周期構造中の波動伝搬を取り扱う定理であるが、本定理から導かれる結果は有限積層の場合とも密接に関係しており、その関係性についても述べる．

はじめに、以下で表される伝達マトリクス $\mathbf{H}$ を導入する．

$$\begin{aligned}\mathbf{H} \equiv \mathbf{SP} &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 + i\Lambda\Omega)\exp(i\Omega) & -i\Lambda\Omega\exp(-i\Omega) \\ i\Lambda\Omega\exp(i\Omega) & (1 - i\Lambda\Omega)\exp(-i\Omega) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.23)$$

ここで、関数 $G(\Omega)$ を

$$G(\Omega) \equiv \cos \Omega - \Lambda\Omega \sin \Omega, \quad (2.24)$$

で定義すると、式(2.23)より、 $\mathbf{H}$ は以下の性質を満たす．

$$\det(\mathbf{H}) = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1, \quad (2.25a)$$

$$\text{tr}(\mathbf{H}) = H_{11} + H_{22} = 2G(\Omega). \quad (2.25b)$$

次に、フロケの定理を導入する．Fig. 2.2 に示すようなプライとスプリング界面から成る

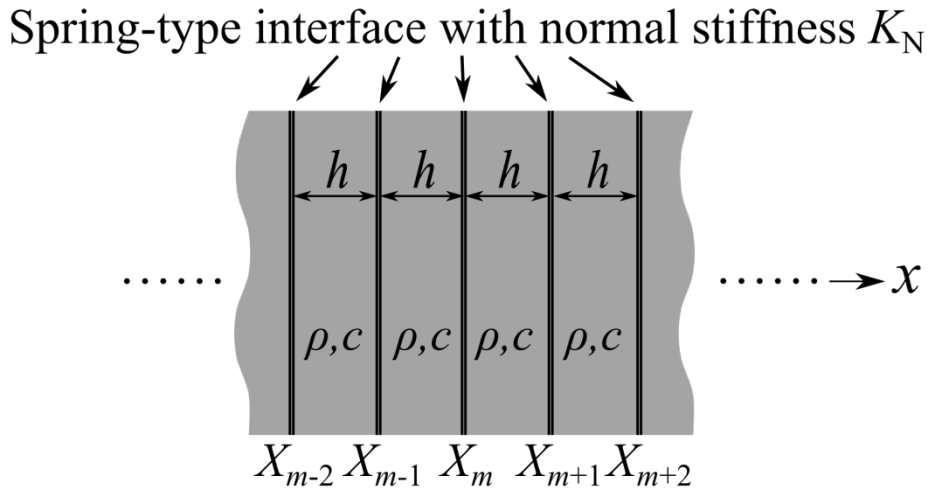


Fig. 2.2 An infinite periodic structure with spring-type interlayer interfaces.

無限積層構造を考える．このような無限に続く周期構造中を伝搬する波はフロケ波と呼ばれる．フロケの定理を用いると，一つのプライと一つの界面から構成される周期構造のユニットセル両端における変位は，以下のように関係づけられる．

$$\mathbf{U}(X_{(m+1)+}) = \exp(i\zeta h) \mathbf{U}(X_{m+}). \quad (2.26)$$

ここで ζ はフロケ波数^{[6]-[8]}である．一方で，式(2.12)，(2.15)，(2.23)より，ユニットセル両端における変位の関係は

$$\mathbf{U}(X_{(m+1)+}) = \mathbf{H} \mathbf{U}(X_{m+}), \quad (2.27)$$

と書くこともできる．式(2.26)と(2.27)を比較すると， $\exp(i\zeta h)$ が伝達マトリクス $\mathbf{H}$ の固有値であることがわかる．したがって，次の固有多項式が得られる．

$$[\exp(i\zeta h)]^2 - \text{tr}(\mathbf{H})\exp(i\zeta h) + \det(\mathbf{H}) = 0. \quad (2.28)$$

式(2.25)と(2.28)より， $\exp(i\zeta h)$ は以下のように求められる．

$$\exp(i\zeta h) = G(\Omega) \pm i\sqrt{1 - [G(\Omega)]^2}. \quad (2.29)$$

式(2.29)で得られる二つの解はそれぞれ， x の正方向および負方向に伝搬するフロケ波に対応している．式(2.29)より， $-1 \leq G(\Omega) \leq 1$ のとき ζ は実数となる．この場合 $|\exp(i\zeta h)| = 1$ となるため，式(2.26)より，フロケ波はユニットセル一つ分を伝搬したときに位相が変化するだけで変位の大きさ $|\mathbf{U}|$ は保存される．このような周波数領域をパスバンドと呼ぶ．一方で $|G(\Omega)| > 1$ の場合，式(2.29)より ζ は複素数となる．これはフロケ波が伝搬するに伴って減衰することを意味しており，このような周波数帯をストップバンドと呼ぶ．

Figure 2.3 に無次元周波数 Ω と $G(\Omega)$ の関係，そして Ω とフロケ波数 ζ の関係を合わせて示す．ただし，Figs. 2.3(b)および(c)は x の正方向に伝搬するフロケ波の波数を表している．また，式(2.26)よりフロケ波数は $2m\pi$ (m は整数) の不定性を有するため，波数の実部 (Figs. 2.3(b)) は曲線が連続となるように，式(2.29)から計算した値に $2m\pi$ を適宜加算している．Figure 2.3 において，周波数 Ω が 0 から増加するにしたがい， $G(\Omega)$ は 1 から減少し，フロケ波数実部は 0 から増加し始めることがわかる．そして，ある Ω において $G(\Omega) = -1$ となり， $\zeta h = \pi$ となる．この点からは $G(\Omega) < -1$ となり， $\text{Im}[\zeta]h > 0$ となる．つまりこの点でパスバンドが終了しストップバンドが始まることを表している．ストップバンドの中では常に $\text{Re}[\zeta]h = \pi$ となり波数は虚部だけが変化する． $\Omega = \pi$ になると再度 $G(\Omega) = -1$ ， $\zeta h = \pi$ となり，この点からは $G(\Omega) > -1$ ， $\text{Im}[\zeta]h = 0$ となる．これは， $\Omega = \pi$ においてストップバンドが終了し，次のパスバンドが始まることを意味している．このように周波数の増加とともにパスバンドとストップバンドの生成が繰り返される．また，Fig. 2.3 には異なる無次元パラメータ Λ (式(2.14)) に対する結果を合わせて示している． Λ が増加する (層間界面垂直剛性 K_N が低下する) とストップバンドの幅が広くなり，ストップバンドにおけるフロケ波数虚部も増加す

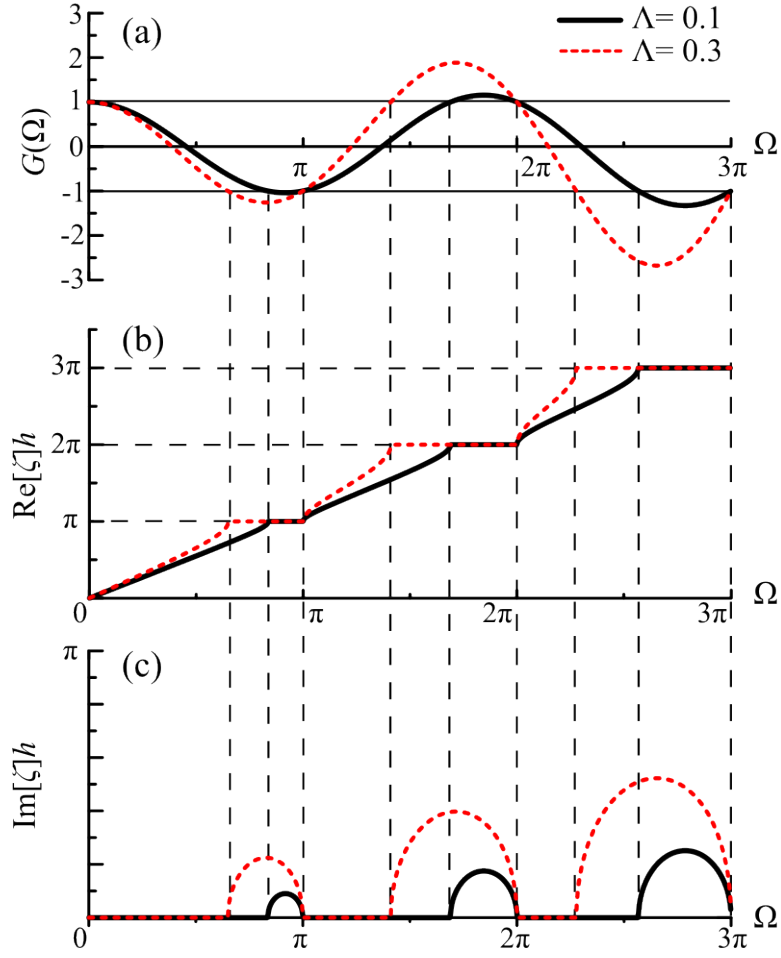


Fig. 2.3 The variation of (a) $G(\Omega)$, (b) real part, and (c) imaginary part of Floquet wavenumber with the non-dimensional frequency Ω for different Λ .

る.

フロケ波数は本来, Fig. 2.2 のような無限積層構造中の波動伝搬を特徴づけるパラメータであるが, Fig. 2.1 のような有限積層構造中の波動伝搬にも深く関係している. 周波数がパスバンドに属するとき ($-1 \leq G(\Omega) \leq 1$), 式(2.29)より以下の関係が成り立つ.

$$\cos(\zeta h) = G(\Omega). \quad (2.30)$$

そして, 固有多項式(2.28)にケーリー・ハミルトンの定理を適用することで以下の関係が得られる.

$$\mathbf{H}^2 - 2\cos(\zeta h)\mathbf{H} + \mathbf{I} = 0. \quad (2.31)$$

ここで $\mathbf{I}$ は 2×2 単位行列を表す. パスバンドとストップバンドの境界 $G(\Omega) = \pm 1$ を除いた周波数領域 ($-1 < G(\Omega) < 1$) を考えると, 式(2.31)より, $\mathbf{H}^N$ は次のように表すことができる (導出は付録 A に示す).

$$\mathbf{H}^N = \frac{\sin(N\zeta h)}{\sin(\zeta h)} \mathbf{H} - \frac{\sin[(N-1)\zeta h]}{\sin(\zeta h)} \mathbf{I}. \quad (2.32)$$

ここで、前節で述べた有限積層構造の場合について考えると、式(2.32)の關係を用いて式(2.20)は次のように書ける。

$$\mathbf{L} = \frac{\sin(N\zeta h)}{\sin(\zeta h)} \mathbf{T}_{LS} \mathbf{P} \mathbf{T}_{SL} - \frac{\sin[(N-1)\zeta h]}{\sin(\zeta h)} \mathbf{T}_{LS} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T}_{SL}. \quad (2.33)$$

式(2.33)の右辺を具体的に計算することで、式(2.22a)の反射率は $-1 < G(\Omega) < 1$ のとき、以下のように書き直すことができる。

$$R = \frac{D_3}{D_1 + iD_2} \exp(2ik_0 X_0). \quad (2.34)$$

ここで、

$$D_1 = (\Xi^2 + 1) \sin(N\zeta h) \sin \Omega + 2\Lambda\Omega \sin[(N-1)\zeta h], \quad (2.35a)$$

$$D_2 = 2\Xi \{ \sin(N\zeta h) \cos \Omega - \sin[(N-1)\zeta h] \}, \quad (2.35b)$$

$$D_3 = 2\Lambda\Omega \sin[(N-1)\zeta h] - (\Xi^2 - 1) \sin(N\zeta h) \sin \Omega, \quad (2.35c)$$

である。 $-1 < G(\Omega) < 1$ のとき D_3 は実数となり、以下の形で書き直すことができる。

$$D_3 = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(N\zeta h + \alpha). \quad (2.36)$$

ここで、 A 、 B および α は、

$$A = 2\Lambda\Omega \cos(\zeta h) - (\Xi^2 - 1) \sin \Omega, \quad B = -2\Lambda\Omega \sin(\zeta h), \quad (2.37a)$$

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.37b)$$

で与えられる。式(2.34)と(2.36)より、以下の条件を満たすとき、有限積層構造の反射率 R は零となることがわかる。

$$N\zeta h + \alpha = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.38)$$

そして、反射率が零となる周波数 Ω および零点の数は N 、 Λ および Ξ により決まる。

異なる N 、 Λ および Ξ に対して求めた無次元周波数 Ω と振幅反射率 $|R|$ の關係（反射スペクトル）を、無限積層構造（ $N = \infty$ ）における振幅反射率と合わせて Figs. 2.4–2.6 に示す。無限

積層構造における振幅反射率は、パスバンドで $|R| = 0$ 、ストップバンドで $|R| = 1$ となる。Figures 2.4, 2.5 を比較すると、上述したように無次元パラメータ Λ はストップバンドの幅を増減させる効果を有することがわかる。一方で、Figs. 2.5, 2.6 の比較から、 Ξ はパスバンドに対応する周波数領域において、振幅反射率の極大値を増減させる効果を有することがわかる。また、Figs. 2.4–2.6 を見ると、式(2.38)で示したように反射率が零となる周波数がパスバンドにおいて複数存在することがわかる。周波数 $\Omega = 0$ から始まるパスバンドでは Λ および Ξ の値に関わらず、 $\Omega = 0$ を除いて積層数 $N=5$ の場合には4個の零点、 $N=10$ の場合には9個の零点が存在している。一方で $\Omega = \pi$ から始まる二つ目のパスバンドでは、零点の数が N のみならず、 Λ および Ξ にも依存している。

なお、“パスバンド・ストップバンド”は本来無限積層構造に対して使用される用語であるが、本論文ではこれ以降、有限積層構造について議論する場合においても、“無限積層構造に拡張したときにパスバンド・ストップバンドに対応する周波数”を単に“パスバンド・ストップバンド”と表記する。

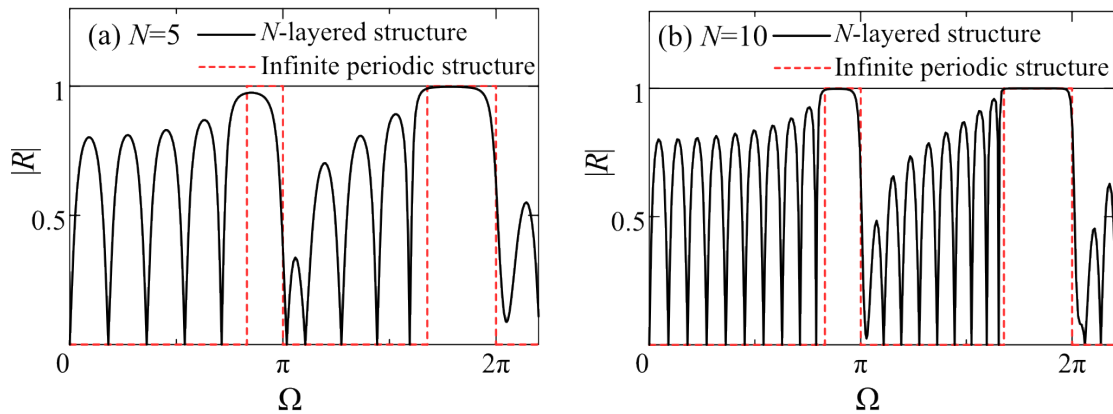


Fig. 2.4 The amplitude reflection spectrum of (a) 5-layered and (b) 10-layered laminates for $\Lambda = 0.1$ and $\Xi = 3.3$, together with the reflection spectrum of the corresponding infinite periodic structure.

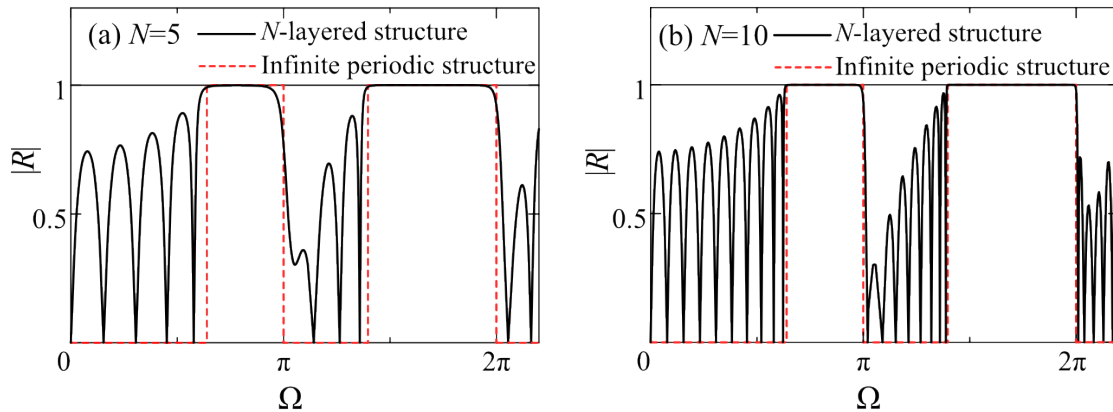
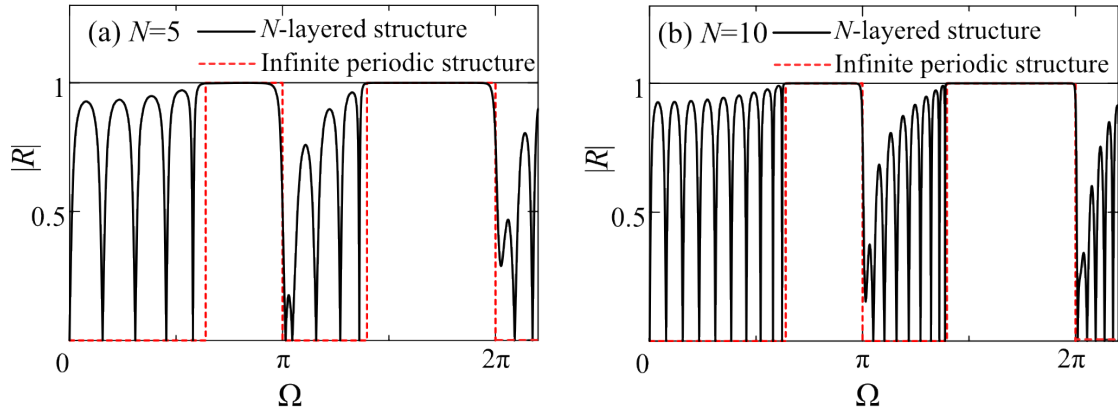


Fig. 2.5 The same as Fig. 2.4, but for $\Lambda = 0.3$ and $\Xi = 3.3$.

Fig. 2.6 The same as Fig. 2.4, but for $\Lambda = 0.3$ and $\Xi = 6.6$.

2.4 第 2 章の結言

本章では，層間にスプリング界面を有する積層板における積層方向への一次元弾性波伝搬の理論解析を行った．はじめに，垂直入射超音波の反射・透過率計算法である一次元伝達マトリクス法の定式化を行った．そして無限積層構造中の波動伝搬を取り扱うフロケの定理を用いることで，反射率の直接的表現を導出した．超音波反射特性に関して検討した結果以下のことを示した．

- (1) 任意の積層数を有する積層板の振幅反射率 $|R|$ は 4 個の無次元パラメータ Ω （無次元周波数）， N （積層数）， Λ （プライと層間界面の剛性比）および Ξ （プライと半無限媒質の音響インピーダンス比）によって支配される．
- (2) 無次元パラメータ Λ は，反射スペクトルのストップバンドとなる周波数帯を伸縮させる効果を有し， Ξ はパスバンドにおける反射率を増減させる効果を有する．
- (3) 無限積層構造（ $N \rightarrow \infty$ ）でパスバンドとなる周波数帯において，有限積層構造の反射率が厳密に零となる周波数が必ず複数個存在する（有限積層構造の反射率は周波数に対して振動する）．そしてその個数は主に積層数 N に支配される．

2.5 第 2 章の参考文献

- [1]. W. T. Thomson, “Transmission of elastic waves through a stratified solid medium,” *Journal of Applied Physics* Vol. **21** (1950), pp. 89–93.

- [2]. N. A. Haskell, “The dispersion of surface waves on multilayered media,” *Bulletin of the Seismological Society of America* Vol. **43** (1953), pp. 17–34.
- [3]. A. H. Nayfeh, “The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **89**, No. 4 (1991), pp. 1521–1531.
- [4]. Y. Lu and J. D. Achenbach, “Effects of random deviations in interface properties on the propagation of ultrasound in thick composites,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **90**, No. 5 (1991), pp. 2576–2585.
- [5]. Y. Lu, “Effects of random fluctuations in ply mechanical properties on ultrasound propagation in a laminated solid layer,” *Ultrasonics* Vol. **30**, No. 5 (1992), pp. 289–295.
- [6]. A. M. B. Braga and G. Herrmann, “Floquet waves in anisotropic periodically layered composites,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **91**, No. 3 (1992), pp. 1211–1227.
- [7]. C. Potel, J. –F. Belleval, and Y. Gargouri, “Floquet waves and classical plane waves in an anisotropic periodically multilayered medium: Application to the validity domain of homogenization,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **97**, No. 5 (1995), pp. 2815–2825.
- [8]. L. Wang and S. I. Rokhlin, “Floquet wave homogenization of periodic anisotropic media,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **112**, No. 1 (2002), pp. 38–45.
- [9]. J. M. Bendickson, J. P. Dowling, and M. Scalora, “Analytic expressions for the electromagnetic mode density in finite, one-dimensional, photonic band-gap structures,” *Physical Review E* Vol. **53** (1996), pp. 4107–4121.
- [10]. F. Kobayashi, S. Biwa, and N. Ohno, “Wave transmission characteristics in periodic media of finite length: multilayers and fiber arrays,” *International Journal of Solids and Structures* Vol. **41**, No. 26 (2004), pp. 7361–7375.

第3章 反射スペクトル極点周波数分布による層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価

3.1 緒言

本章では、第 2 章の理論解析で得られた知見に基づいて、超音波反射スペクトルの極点周波数分布を用いた積層板の層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度の評価手法を提案する。3.2 節では評価法確立のために、第 2 章で用いた無次元パラメータを定義し直し、それらの反射スペクトルに及ぼす影響を考察する。3.3 節では、反射スペクトルの極点周波数と無次元パラメータの関係について考察し、それに基づいて層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度の評価手法を提案する。3.4 節では、提案した手法の適用可能性について検討を行う。3.5 節で本章の結言を述べ、3.6 節に参考文献を示す。

3.2 無次元パラメータの再定義

第 2 章の理論解析では、積層板に縦波が垂直入射したときの反射率 R が無次元パラメータ N , Ω , Λ , Ξ によって支配されることを示した。そして、反射スペクトルにおける零点周波数およびその個数は N , Λ , Ξ に依存することも示した。したがって、このような周波数に着目することで、無次元パラメータを評価できる可能性がある。

式(2.14)で定義した無次元周波数 $\Omega = \omega h/c$ は、角周波数 ω とプライ厚さ h およびプライ縦波速度 c から決定されるパラメータである。一方で、実際の実験で測定される反射スペクトルは有次元パラメータの周波数と反射率の関係である。したがって、理論と実験を直接比較できるようにするために理論解析における無次元パラメータを以下のように定義し直す。

$$\Psi \equiv \frac{\rho c \omega_0}{2K_N}, \quad \Gamma \equiv \frac{\omega_0 h}{c}, \quad \Xi \equiv \frac{\rho c}{\rho_0 c_0}, \quad \tilde{f} \equiv \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (3.1)$$

ここで、 Ψ および Γ は、層間界面のコンプライアンス（界面剛性の逆数）およびプライのスローネス（速度の逆数）を表す無次元パラメータである。 Ξ はプライと半無限媒質の音響インピーダンス比を表すパラメータであり 2.2 節で述べた定義（式(2.18)）と同じである。そ

して、 $\tilde{f}$ は無次元周波数であり、 ω_0 は任意の規格化定数を表す。このとき、2.3節で導出した反射率（式(2.34)および(2.35)）は以下の形に書き直される。

$$R = \frac{D_3}{D_1 + iD_2} \exp(2ik_0X_0), \quad (3.2)$$

$$D_1 = (\Xi^2 + 1) \sin(N\zeta h) \sin(\Gamma\tilde{f}) + 2\Psi\tilde{f} \sin[(N-1)\zeta h], \quad (3.3a)$$

$$D_2 = 2\Xi \{ \sin(N\zeta h) \cos(\Gamma\tilde{f}) - \sin[(N-1)\zeta h] \}, \quad (3.3b)$$

$$D_3 = 2\Psi\tilde{f} \sin[(N-1)\zeta h] - (\Xi^2 - 1) \sin(N\zeta h) \sin(\Gamma\tilde{f}). \quad (3.3c)$$

また、パスバンドにおけるフロケ波数を求める式(2.30)は、

$$\cos(\zeta h) = \cos(\Gamma\tilde{f}) - \Psi\tilde{f} \sin(\Gamma\tilde{f}), \quad (3.4)$$

となる。

異なる Ψ および Γ に対して求めた無次元周波数 $\tilde{f}$ と振幅反射率 $|R|$ の関係を、無限積層構造における振幅反射率と合わせて Fig. 3.1 および Fig. 3.2 に示す。Figure 3.1 より無次元パラメータ Ψ は、2.3節で述べた無次元パラメータ Λ と同様にストップバンドの幅を増減させる効果を有する。そして Fig. 3.2 より、 Γ はスペクトルを周波数方向に伸縮させる効果を有する。積層数 N および Ξ の及ぼす影響に関しては、2.3節（Figs. 2.4–2.6）で述べたとおりである。

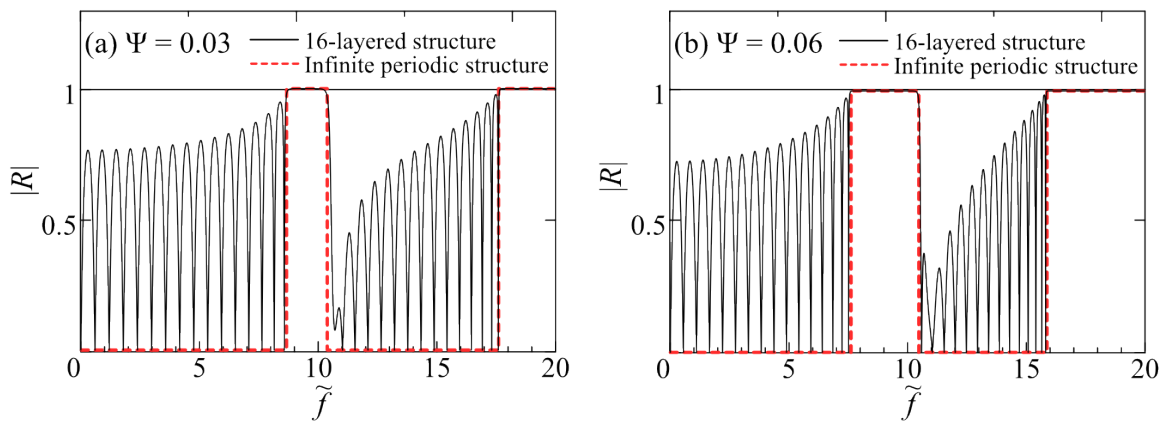


Fig. 3.1 The amplitude reflection spectrum of a 16-layered laminate when (a) $\Psi = 0.03$ and (b) $\Psi = 0.06$ for fixed $\Gamma = 0.3$ and $\Xi = 3$, together with the reflection spectrum of the corresponding infinite periodic structures.

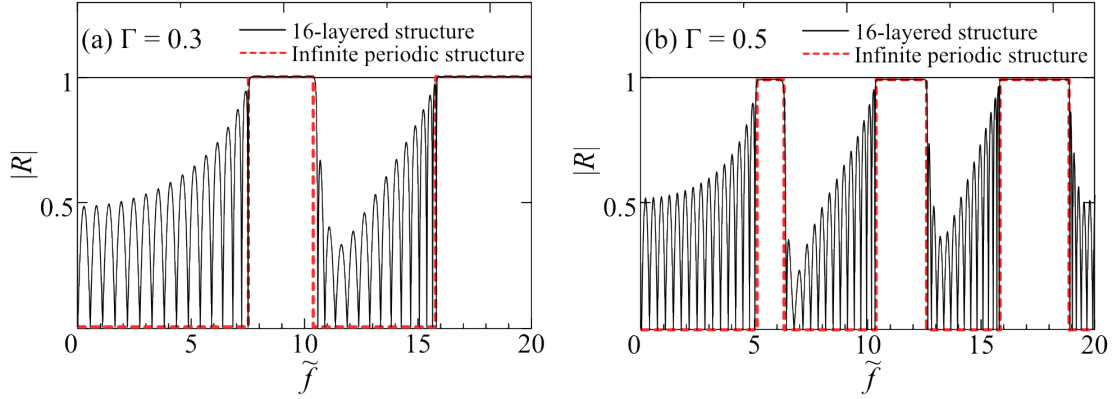


Fig. 3.2 The amplitude reflection spectrum of a 16-layered laminate when (a) $\Gamma = 0.3$ and (b) $\Gamma = 0.5$ for fixed $\Psi = 0.06$ and $\Xi = 2$, together with the reflection spectrum of the corresponding infinite periodic structures.

3.3 層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価法の提案

ここまで示した反射スペクトル (Figs. 2.4–2.6, 3.1, 3.2) を見ると、反射率が特定の周波数において極大や極小（零点を含む）を取ることがわかる。実験で測定した反射スペクトルにおいては、厳密な零点よりもこのような極大・極小値の方が求めやすい。Figure 3.3 に、16 層から成る積層板の反射スペクトルの一つ目および二つ目のパスバンドにおいて極値を取る周波数 $\tilde{f}^e$ と無次元パラメータ Ψ , Γ , Ξ の関係を示す。極点周波数の分布は、 Ψ （ただし Ψ が小さい領域を除く）および Γ に依存していることがわかる。したがって極点周波数を用いてこれらの二つのパラメータを評価できる可能性がある。一方で、Fig. 3.3(c) を見ると、極点周波数は Ξ にほとんど依存していない。これは、2.3 節で述べたように、 Ξ は主にパ

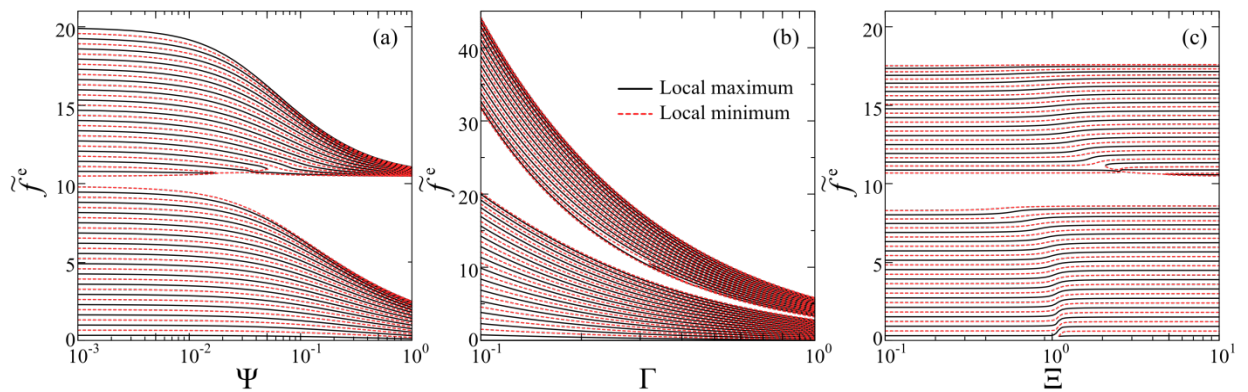


Fig. 3.3 The extremal frequencies in the 1st and 2nd passbands of the amplitude reflection spectrum of a 16-layered laminate as a function of (a) Ψ for fixed $\Gamma = 0.3$ and $\Xi = 3$, (b) Γ for fixed $\Psi = 0.03$ and $\Xi = 3$, and (c) Ξ for fixed $\Psi = 0.03$ and $\Gamma = 0.3$.

スバンドにおける反射率の大きさを増減させる効果のみを有し、スペクトルの周波数方向への変化にはほとんど寄与しないためである。したがって、極点周波数分布から Ξ を精密に評価することは困難であると考えられる。

仮に反射スペクトル極点周波数分布を用いて無次元パラメータ Ψ , Γ , Ξ が評価されたとすると、積層板の有次元パラメータである層間界面垂直剛性 K_N , プライ縦波速度 c , プライ密度 ρ は,

$$K_N = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 \omega_0 \frac{\Xi}{\Psi}, \quad c = \frac{\omega_0 h}{\Gamma}, \quad \rho = \frac{\rho_0 c_0}{\omega_0 h} \Gamma \Xi, \quad (3.5)$$

で求められる。ここで、その他の有次元パラメータ（水の密度 ρ_0 および音速 c_0 , プライ厚さ h , 規格化定数 ω_0 ）および積層数 N は既知と仮定している。しかし、上述したように Ξ の精密評価が困難であるため、 Ξ を用いて計算される K_N および ρ も精密に評価できないことになる。この問題を解決するために、新しい無次元パラメータ

$$\Theta \equiv \Gamma \Xi = \frac{\rho \omega_0 h}{\rho_0 c_0}, \quad (3.6)$$

を導入し、 Θ も既知であると仮定する（つまりプライ密度 ρ も既知と仮定する）と、界面剛性およびプライ縦波速度は、以下の形で与えられる。

$$K_N = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 \omega_0 \frac{\Theta}{\Psi \Gamma}, \quad c = \frac{\omega_0 h}{\Gamma}. \quad (3.7)$$

式(3.7)には Ξ が含まれないため、上式を用いることで K_N および c を精密評価することが可能となる。

以上の結果をふまえて、反射スペクトル極点周波数分布を用いた層間界面垂直剛性 K_N とプライ縦波速度 c の評価法を以下に提案する。

- (1) はじめに、積層板に対して超音波反射スペクトルを測定し、極大・極小となる周波数分布 $\omega_q^{\text{e,exp}}$ ($q = 1, \dots, m$)を求める。ここで m は極点数を表す。
- (2) 規格化定数 ω_0 を用いて無次元極点周波数 $\tilde{f}_q^{\text{e,exp}} = \omega_q^{\text{e,exp}} / \omega_0$ (式(3.1)) を計算する。
- (3) 積層数 N , プライ密度 ρ , プライ厚さ h , 水の密度 ρ_0 および音速 c_0 が既知であると仮定し、実験的および理論的な極点周波数の誤差の二乗和で定義される評価関数

$$J(\Psi, \Gamma) = \frac{1}{m} \sum_{q=1}^m \left[\frac{\tilde{f}_q^{\text{e,exp}} - \tilde{f}_q^{\text{e,the}}(\Psi, \Gamma)}{\tilde{f}_q^{\text{e,exp}}} \right]^2, \quad (3.8)$$

を最小化する $(\Psi, \Gamma) = (\Psi^{\text{opt}}, \Gamma^{\text{opt}})$ を求める。ここで $\tilde{f}_q^{\text{e,the}}(\Psi, \Gamma)$, ($q = 1, \dots, m$)は、 N および Θ を定数として Ψ および Γ の関数として求めた理論的な極点周波数分布を表す。これら

は、式(3.2)–(3.4)を用いて十分小さい周波数刻み幅 $\Delta\tilde{f} = 1 \times 10^{-4}$ でスペクトルを計算しながら極大・極小を探索することで求める。

- (4) 式(3.7)に Ψ^{opt} , Γ^{opt} およびその他の既知パラメータを代入し、層間界面垂直剛性 K_N とブライ縦波速度 c の最適値を求める。

3.4 提案した評価手法の適用可能性に関する考察

3.4.1 評価に用いる極点周波数の個数

3.3 節で示した Figs. 3.3(a), (b)を見ると、一つ目のパスバンドにおける反射スペクトル極点周波数は Ψ および Γ の両者に対して単調減少している。これは、一つ目のパスバンドの極点だけを用いて評価を行うと、 Ψ および Γ の間にトレードオフが生じることを意味している。一例として、異なる Ψ および Γ の値を用いて求めた 16 層の積層板の反射スペクトルを Fig. 3.4 に示す。Figures 3.4(a)–(c)を比較すると、 Ψ および Γ の値が異なるにもかかわらず一つ目のパスバンド ($\tilde{f} < 10$) における極点周波数がほとんど一致していることが確認できる。したがって、 Ψ および Γ を一意に定めるには、一つ目に加えて二つ目のパスバンドに位置する極点周波数も含めて（ストップバンドの幅に関する情報も含めて）評価を行う必要がある。

式(3.8)の評価関数を計算するにあたって、ある Ψ, Γ の値を与えると理論的な極点周波数は複数個存在するが、その中で測定値 $\tilde{f}_p^{\text{e,exp}}$ に対応する極点 $\tilde{f}_p^{\text{e,the}}(\Psi, \Gamma)$ を同定する必要がある。Figures 3.3(a), (b)を見ると、一つ目のパスバンドにおける極点の数は、 Ψ および Γ に依存していない。そのため測定した極点に対応する理論値がすぐさま定まる。これは例えば、パスバンドの端からの極点数を数えることで求められる。一方で、Figs. 3.3(a), (b)の二つ目のパスバンドでは極点の数が Ψ や Γ に伴って変化している。そのため、この領域では測定値と理論値の対応関係が明らかではなく、評価関数を計算するたびに測定した極点に対応する理論値を検索する必要がある。そこで本論文では、測定値 $\tilde{f}_p^{\text{e,exp}}$ に対応する可能性のある理論値をすべて検索し、その中で評価関数が最小となるものを $\tilde{f}_p^{\text{e,the}}(\Psi, \Gamma)$ として採用する。

3.4.2 本評価手法の有効性

Lavrentyev and Rokhlin^[1]は、二つの固体間にある接着層の材料特性（接着層の厚さ、密度、弾性率）を非破壊評価するに当たり、振幅反射率の材料特性に対する感度解析を行っている。ここでは、彼らの定式化にしたがって反射スペクトル極点周波数の感度解析を実施し、提案した評価手法の有効性を検討する。

はじめに、反射スペクトルの極点周波数 $\tilde{f}^e$ をパラメータ p の関数とみなす。ここで p は、 Ψ もしくは Γ である。このとき、 p の相対誤差 $\varepsilon_p = \delta p/p$ と、 $\tilde{f}^e$ の相対誤差 $\varepsilon_{\tilde{f}^e} = \delta \tilde{f}^e/\tilde{f}^e$ は以下のように関係づけられる。

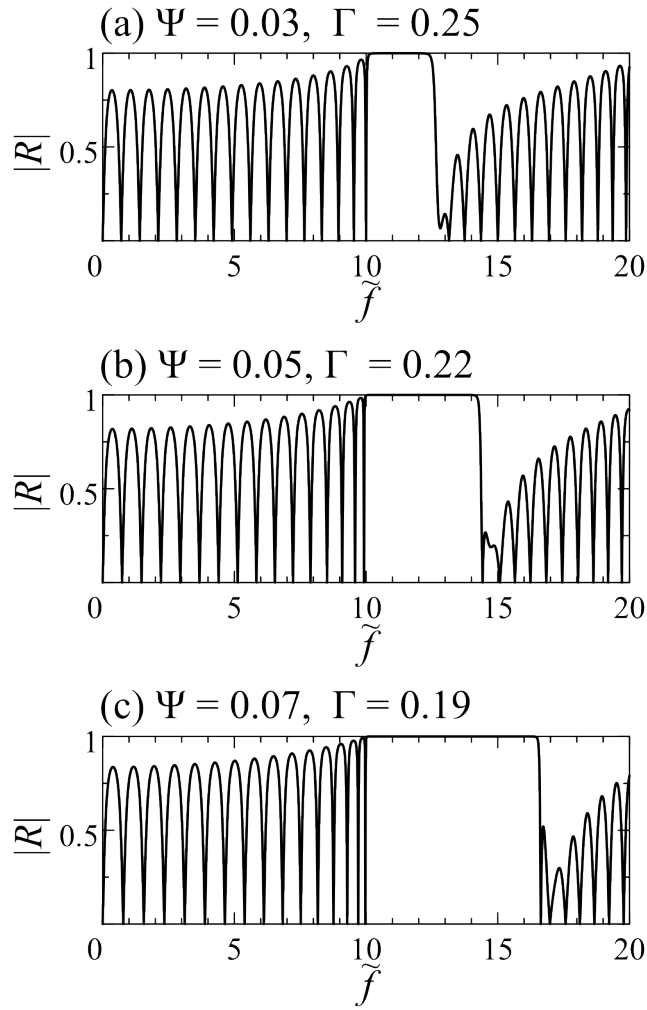


Fig. 3.4 The amplitude reflection spectrum of a 16-layered laminate for a fixed $\Theta = 0.84$ when (a) $\Psi = 0.03$ and $\Gamma = 0.25$, (b) $\Psi = 0.05$ and $\Gamma = 0.22$, and (c) $\Psi = 0.07$ and $\Gamma = 0.19$.

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_{\tilde{f}^e}}{X_{\tilde{f}^e,p}}. \quad (3.9)$$

ここで,

$$X_{\tilde{f}^e,p} = \frac{p}{\tilde{f}^e} \frac{\partial \tilde{f}^e}{\partial p}, \quad (3.10)$$

は、極点周波数 $\tilde{f}^e$ のパラメータ p に対する感度を表す。式(3.9)より、感度が高いとき、極点周波数の誤差がパラメータ p の評価に及ぼす影響は小さくなる。つまり、感度が高いほど p の評価のロバスト性が向上することになる。

極点周波数の感度 $X_{\tilde{f}^e,p}$ は、原理上式(3.2)–(3.4)と(3.10)から求めることができるが、計算が

極めて煩雑になる．そのため，ここでは極点周波数の代わりに反射率が零になる周波数 $\tilde{f}^z$ の感度 $X_{\tilde{f}^z, \Psi}$ を考える．この場合感度は反射率の分子である式(3.3c)および式(3.4), (3.10)から求めることができ，以下で与えられる．

$$X_{\tilde{f}^z, \Psi} = \frac{\Psi}{\tilde{f}^z} \frac{\partial \tilde{f}^z}{\partial \Psi} = \frac{E_4}{E_1 E_2 + E_3}, \quad (3.11a)$$

$$X_{\tilde{f}^z, \Gamma} = \frac{\Gamma}{\tilde{f}^z} \frac{\partial \tilde{f}^z}{\partial \Gamma} = \frac{E_5}{E_1 E_2 + E_3}. \quad (3.11b)$$

ここで,

$$E_1 = 2\Psi\Gamma^2\tilde{f}^z(N-1)\cos[(N-1)\zeta h] - N(\Theta^2 - \Gamma^2)\cos(N\zeta h)\sin(\Gamma\tilde{f}^z), \quad (3.12a)$$

$$E_2 = \tilde{f}^z[(\Psi + \Gamma)\sin(\Gamma\tilde{f}^z) + \Psi\Gamma\tilde{f}^z\cos(\Gamma\tilde{f}^z)], \quad (3.12b)$$

$$E_3 = (\Theta^2 - \Gamma^2)[\sin(\Gamma\tilde{f}^z) - \Gamma\tilde{f}^z\cos(\Gamma\tilde{f}^z)]\sin(\zeta h)\sin(N\zeta h), \quad (3.12c)$$

$$E_4 = -\Psi\tilde{f}^z\{2\Gamma^2\sin(\zeta h)\sin[(N-1)\zeta h] + E_1\sin(\Gamma\tilde{f}^z)\}, \quad (3.12d)$$

$$E_5 = [(\Theta^2 - \Gamma^2)\Gamma\tilde{f}^z\cos(\Gamma\tilde{f}^z) - 2\Theta^2\sin(\Gamma\tilde{f}^z)]\sin(\zeta h)\sin[(N-1)\zeta h] - E_1\Gamma\tilde{f}^z[\sin(\Gamma\tilde{f}^z) + \Psi\tilde{f}^z\cos(\Gamma\tilde{f}^z)], \quad (3.12e)$$

である．

式(3.11)と(3.12)より求めた $\tilde{f}^z$ の Ψ に対する感度 $X_{\tilde{f}^z, \Psi}$ を Fig. 3.5 に， Γ に対する感度 $X_{\tilde{f}^z, \Gamma}$ を

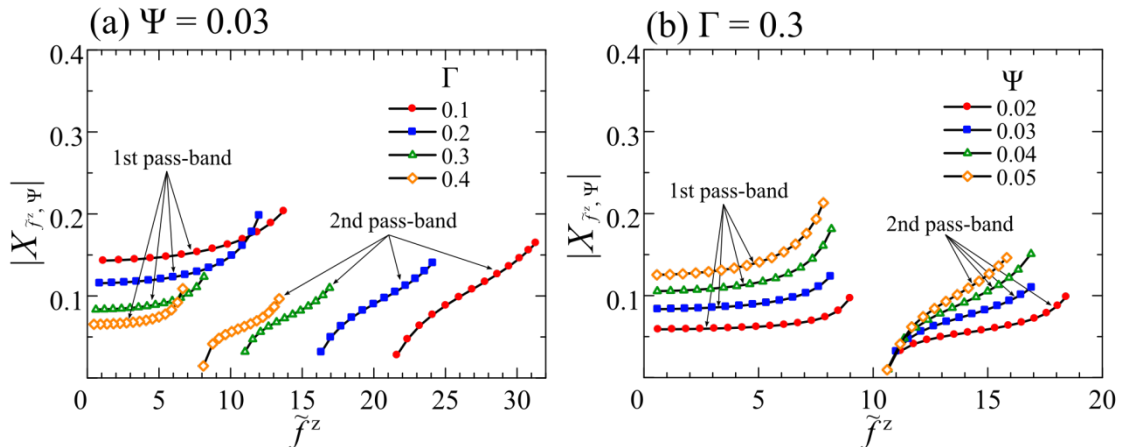


Fig. 3.5 The sensitivity of the zero-reflection frequencies of a 16-layered laminate to Ψ for a fixed $\Theta = 0.84$ when (a) $\Gamma = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ with a fixed $\Psi = 0.03$ and (b) $\Psi = 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$ with a fixed $\Gamma = 0.3$.

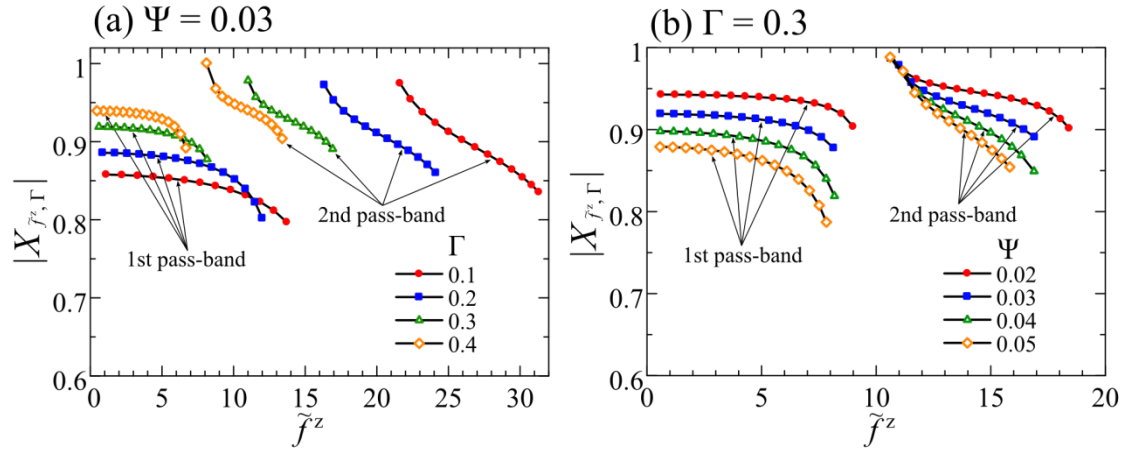


Fig. 3.6 The sensitivity of the zero-reflection frequencies of a 16-layered laminate to Γ for a fixed $\Theta = 0.84$ when (a) $\Gamma = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ with a fixed $\Psi = 0.03$ and (b) $\Psi = 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$ with a fixed $\Gamma = 0.3$.

Fig. 3.6 に示す．積層数は 16，無次元パラメータ Θ は 0.84 としており，Figs. 3.5(a), 3.6(a) は Ψ を固定して Γ を変化させた場合の結果を表し，一方で Figs. 3.5(b), 3.6(b) は Γ を固定して Ψ を変化させた場合の結果を表す．なお，ここでは反射率が零となる周波数に着目しているが，その他の極点周波数の感度に関しても，ほぼ Figs. 3.5, 3.6 に描いた曲線上の値を取ると予想される．Figure 3.5 を見ると， Γ が小さくなるもしくは Ψ が大きくなるに伴って Ψ に対する感度が高くなることがわかる．一方で Fig. 3.6 を見ると， Γ が大きくなるもしくは Ψ が小さくなるに伴って Γ に対する感度が高くなる．したがって， Γ が小さく Ψ が大きな場合は， Ψ を敏感に評価することが可能である一方で Γ を敏感に評価することが困難になる．逆に， Γ が大きく Ψ が小さな場合は， Γ を敏感に評価することが可能である一方で Ψ を敏感に評価することが困難となる．例として，式(3.2)–(3.4)から計算した反射スペクトルを測定値と見なし，それに対して式(3.8)より求めた評価関数を Fig. 3.7 に示す．Figure 3.7 において下付き添え字“o”はスペクトル計算時に使用したパラメータを表しており，Fig. 3.7(a) は $\Psi_o = 0.05$ ， $\Gamma_o = 0.1$ とした場合，Fig. 3.7(b) は $\Psi_o = 0.02$ ， $\Gamma_o = 0.4$ とした場合の結果である．なお，評価関数の計算には 3.4.1 節の結果をふまえて，一つ目および二つ目のパスバンドにおける極点周波数を使用している．Figures 3.7(a), (b) を見ると，両者とも $(\Psi, \Gamma) = (\Psi_o, \Gamma_o)$ で評価関数が最小値を取っていることから，3.3 節で提案した評価手法の妥当性が確認できる．また，横軸方向に関して見ると，Fig. 3.7(a) の方が Fig. 3.7(b) よりも最小値が鋭敏に求まっている．これは上述したように，Fig. 3.7(a) の方が極点周波数の Ψ に対する感度が高いためである．一方で縦軸方向に関しては，Fig. 3.7(a) は Fig. 3.7(b) より極点周波数の Γ に対する感度が低下しているにもかかわらず，最小値が比較的鋭敏に定まっている．これは Figs. 3.5, 3.6 の縦軸を比較するとわかるように， Γ に対する感度が Fig. 3.7(b) より低下したとしてもその大きさは依然として Ψ に対する感度に比べて高くなるためである．

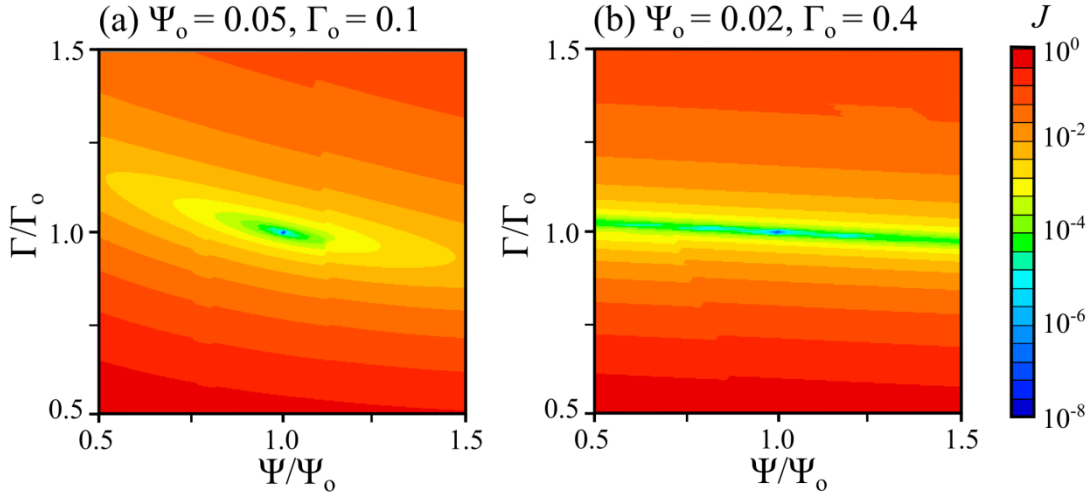


Fig. 3.7 The evaluation function computed for the extremal frequencies of a 16-layered laminate for a fixed $\Theta = 0.84$ when the actual non-dimensional parameters are (a) $\Psi_0 = 0.05$ and $\Gamma_0 = 0.1$ and (b) $\Psi_0 = 0.02$ and $\Gamma_0 = 0.4$.

したがって、提案した評価手法は Ψ の小さい領域を除いて、 Ψ および Γ を鋭敏に評価可能であると言える。これは、 Ψ が層間界面垂直剛性 K_N に反比例していることから、層間が完全接着状態に近い場合は鋭敏に評価できないが、界面剛性が低下するとそれを鋭敏に評価できることを意味する。

3.4.3 プライの粘弾性特性の影響

第2章および3.2節で述べた理論解析では、積層板のプライを弾性体と仮定していた。しかし、実際のCFRP積層板は、超音波の周波数領域において粘弾性特性を有するため、このような場合でも提案した評価手法が有効なのか検討する必要がある。

そこで、ここではプライをケルビン・フォークト型の線形粘弾性体としてモデル化し、反射スペクトル極点周波数分布に及ぼす粘弾性特性の影響を考察する。なお、積層板両側の半無限媒質は弾性体と仮定する。ケルビン・フォークト型の粘弾性体では応力 σ とひずみ ε の関係は以下で与えられる。

$$\sigma = D\varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (3.13)$$

ここで、 D は静弾性係数、 η は粘性係数である。第2章で述べた伝達マトリックス法の定式化においてプライ縦波速度 c を周波数に依存する複素縦波速度

$$c_{VE}(\omega) = \sqrt{\frac{D - i\omega\eta}{\rho}}, \quad (3.14)$$

に置き換えることで、プライの粘弾性特性を考慮した場合の反射率を求めることができる。なお c を $c_{VE}(\omega)$ に置き換えても 2.2 節の議論は有効であり、反射率は(2.22a)で与えられる。そして、この場合のプライ内を縦波が実際に伝搬する速度は

$$c(\omega) = \frac{1}{\text{Re}[1/c_{VE}(\omega)]} \quad (3.15)$$

で与えられるが、現実の固体材料および実用的に用いられる超音波周波数の範囲では $\omega\eta/D \ll 1$ が成り立つため、

$$c(\omega) \approx \sqrt{\frac{D}{\rho}}, \quad (3.16)$$

と近似することができる。したがって、プライ内の縦波伝搬速度は、粘性係数 η や角周波数 ω にはほとんど依存せず、静弾性係数 D と密度 ρ により決まる。

Table 3.1 に示す材料定数と、 $D = 15.0$ GPa, $\eta = 14.0$ Pa $\cdot$ s^[2] および層間界面垂直剛性 $K_N =$

Table 3.1 Material properties of the laminate and the semi-infinite media.

Number of plies N	16
Thickness of ply h (mm)	0.135
Density of ply ρ ($\times 10^3$ kg/m ³)	1.49
Longitudinal wave velocity of semi-infinite media (water) c_0 (km/s)	1.50
Density of semi-infinite media (water) ρ_0 ($\times 10^3$ kg/m ³)	1.00

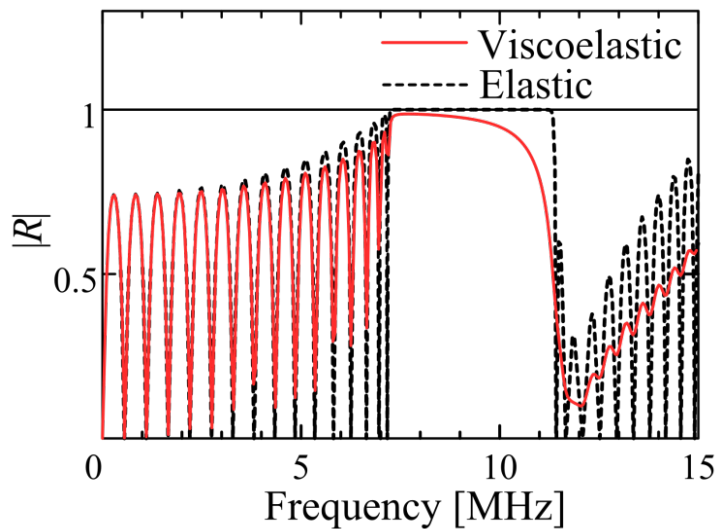


Fig. 3.8 The amplitude reflection spectrum of a 16-layered laminate when the plies are modeled as elastic and viscoelastic media.

0.2 GPa/ μm を用いて求めた振幅反射率を、プライの粘弾性を無視した場合の結果と合わせて Fig. 3.8 に示す。そして、粘弾性を考慮した場合と無視した場合の反射スペクトル極点周波数分布を、層間界面垂直剛性 K_N およびプライ静弾性係数 D の関数として Fig. 3.9 に示す。Figure 3.8 より、プライの粘弾性特性を考慮すると反射率の大きさは変化するが、極値となる周波数はほとんど変化していないことが確認できる。また、Fig. 3.9 を見ると、最初のパスバンドに対応する周波数領域では、粘弾性の有無に関わらず極点周波数はよく一致しており、Fig. 3.10 に示す両者の平均誤差を見ると、それらは最大でも 0.05% 以内に納まっている。二つ目のパスバンドに対応する周波数領域では、特に K_N の小さい領域 (Fig. 3.9(a), $K_N < 0.2 \text{ GPa}/\mu\text{m}$) において、粘弾性の影響による極値の消滅が見られ、この傾向は D の小さい領域 (Fig. 3.9(b), $D < 8 \text{ GPa}$) においても確認することができる。このように極値の消滅がある特定の領域で見られるものの、存在している極値の位置 (周波数) は粘弾性の影響をほとんど受けないことがわかる。したがって、CFRP 積層板のようにプライが粘弾性特性を有する場合でも、プライを弾性体と仮定して求めた反射率 (式(3.2)) に基づく反射スペクトル極点周波数分布を用いて層間界面垂直剛性 K_N およびプライ縦波速度 c の評価が可能であると考えられる。

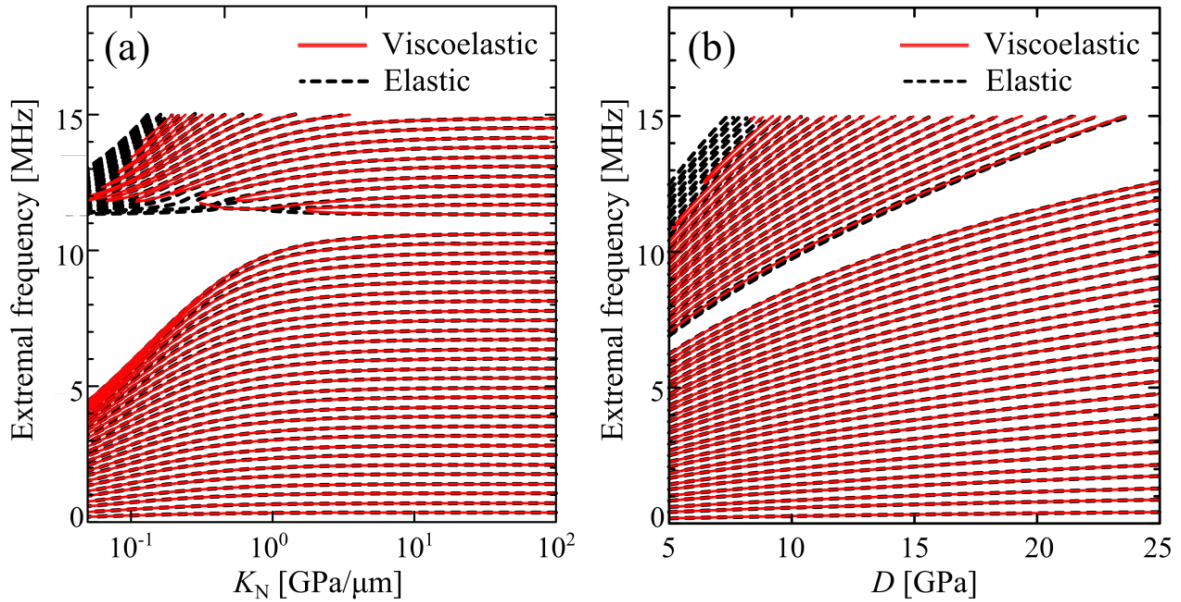


Fig. 3.9 The variation of the extremal frequencies of the amplitude reflection spectrum of a 16-layered laminate with (a) the interlayer interfacial normal stiffness K_N for a fixed $D = 15.0 \text{ GPa}$ and (b) the ply static stiffness D for a fixed $K_N = 1.0 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ when the plies are modeled as elastic and viscoelastic media.

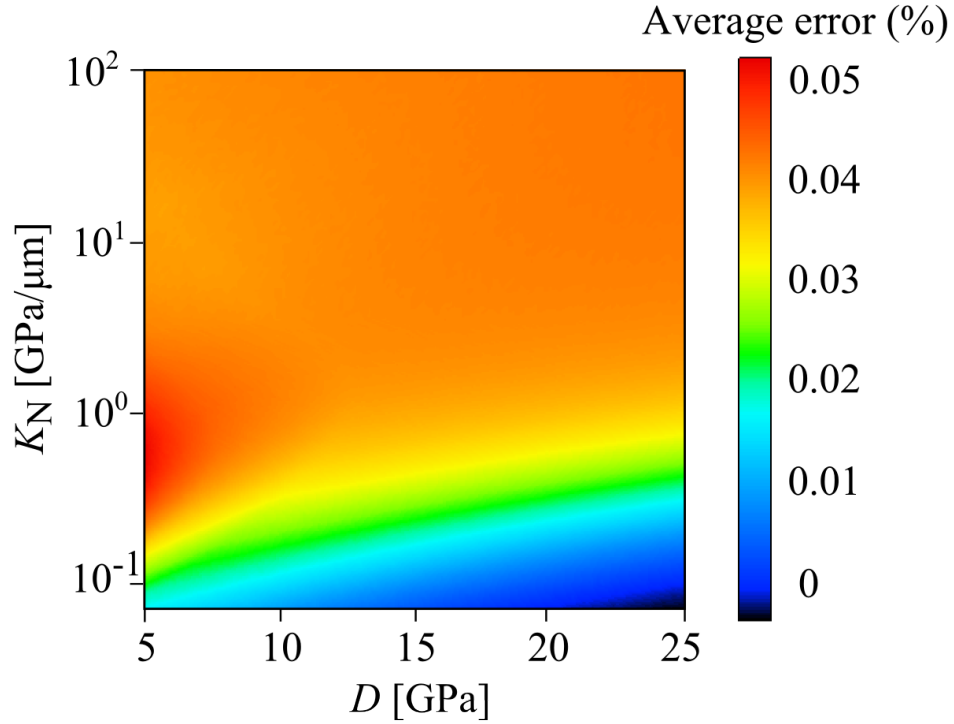


Fig. 3.10 Average errors of the extremal frequencies in the first pass-band when the plies are modeled as elastic and viscoelastic media.

3.4.4 過渡波形の適用

第2章および3.2節で述べた反射率の理論計算は、周波数領域で定式化を行っている。これは、単一周波数の連続波を送信し続け、波動場が定常振動状態になった状況を考えることになる。一方で、実際の測定では有限な時間長さを有するパルス状の波を被験体に送信し反射波を測定する。したがって測定で得られる波形は一般に過渡的（時間領域）である。測定した過渡的反射波形が仮に無限な時間長さを有する場合には、フーリエ変換を施すことで周波数領域での定式化に基づく解析と同じ結果を得ることができる。しかし、実際の測定で得られる波形は必ず有限な時間長さで打ち切られるため、この場合でも妥当な反射スペクトル極点周波数分布が得られるのか検討する必要がある。

そこで本節では、積層板中の一次元弾性波伝搬の数値解析を実施することで過渡的反射波形を計算する。そして得られた波形に対して、異なる時間ゲートでフーリエ変換を行うことで反射スペクトルを求め、ゲート幅が反射スペクトル極点周波数に及ぼす影響について検討を行う。また、過渡波形に及ぼす層間界面垂直剛性 K_N および静弾性係数 D （プライ縦波速度 c ）の影響についても考察を行う。なお、周波数領域で計算した反射スペクトルを逆フーリエ変換することでも過渡波形を求めることができるが、ここでは第2章で述べた理論解析の妥当性も検証するために、別途数値解析を行う。

数値解析には、粘弾性を含む非定常動弾性問題に対する自作の二次元平面ひずみ有限要

素コードを用いる．解析モデルとして Fig. 3.11 に示すように，16 層の積層板が水中に保持されており，そこに縦波が垂直入射する状況を考える．解析領域の上下端には周期境界条件を設定し，左右両端には，境界での反射を防ぐために無反射境界条件^{[3]-[5]}を設定している．プライの粘弾性特性のモデル化には前節と同様にケルビン・フォークトモデルを用いる．また，層間には二重節点を設置しそれらをバネでつなげることでスプリング界面を導入する．本解析において解くべき運動方程式は以下ようになる（定式化の詳細は付録 B に示す）．

$$\mathbf{M}^G \frac{d^2 \mathbf{U}(t)}{dt^2} + \mathbf{C}^G \frac{d \mathbf{U}(t)}{dt} + \mathbf{K}^G \mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (3.17)$$

ここで， $\mathbf{M}^G$ はグローバル質量行列， $\mathbf{C}^G$ はグローバル減衰行列， $\mathbf{K}^G$ はグローバル剛性行列， $\mathbf{U}(t)$ は節点変位ベクトル， $\mathbf{F}(t)$ は節点力ベクトルを表す．ここで，行列 $\mathbf{M}^G$ には集中質量近似（対角化近似）^{[6], [7]}を適用し，式(3.17)の時間積分には動的陽解法として四次ルンデ・クッタ法（付録 C）を用いる．また，行列 $\mathbf{C}^G$ および $\mathbf{K}^G$ は一般に疎行列となるため，圧縮行格納方式^[8]により非零成分のみを記憶することで計算効率の向上を図る．

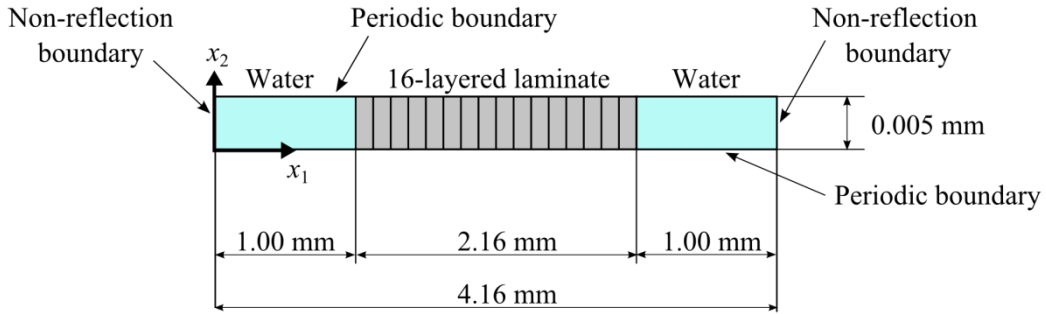


Fig. 3.11 Computational model for dynamic finite element analysis.

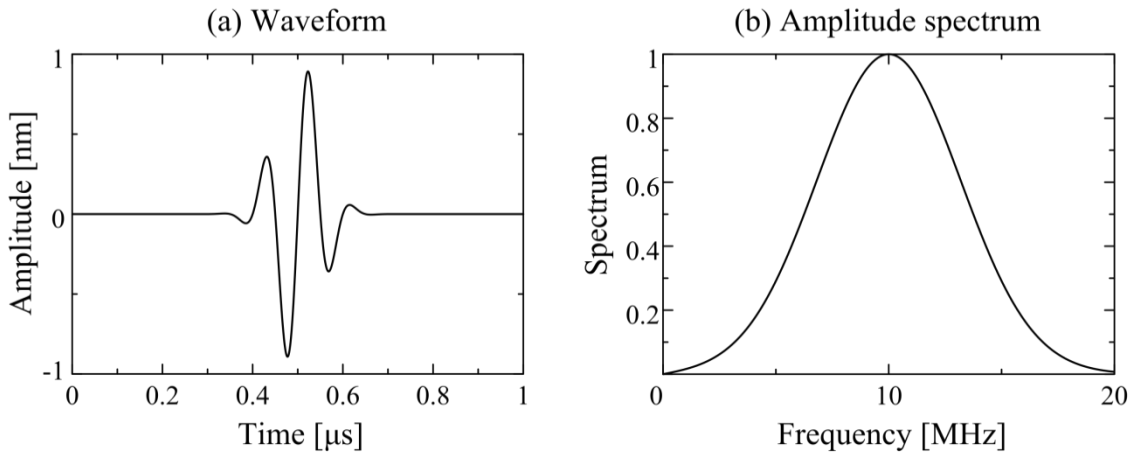


Fig. 3.12 (a) Exciting waveform and (b) its amplitude spectrum for finite element analysis.

解析領域の左側境界において

$$u_{x_1}(t) = \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right] \sin(2\pi ft), \quad (3.18)$$

で表される強制変位を与えることで x_1 方向に伝搬する縦波を励起し、同じく左側境界において反射波形を測定する。本解析では、式(3.18)におけるパラメータを $t_0 = 0.50 \mu\text{s}$, $\sigma = 0.05 \mu\text{s}$, $f = 10 \text{ MHz}$ とする。このときの時間波形およびそれをフーリエ変換して求めた振幅スペクトルを Fig. 3.12 に示す。Figure 3.12(b)より、入射波形はおよそ 0~20 MHz の周波数成分を含むことがわかる。

解析領域の離散化にはすべて同じ大きさの 4 節点アイソパラメトリック要素を用いる。要素の大きさは数値分散を防ぐために、最低波長(水中で周波数 20 MHz において 0.075 mm)を 15 分割するように $5 \mu\text{m} \times 5 \mu\text{m}$ とする。さらに本解析では積層方向に関する一次元波動場の計算を行うことを考慮し、計算量が最小となるように解析領域は x_2 方向に要素一つ分だけの長さを持つとする。離散化に用いた要素数は 832 個、節点数は 1,692 個である。運動方程式(3.17)の時間積分における時間ステップ Δt はクーラン条件を満足するように $\Delta t = 1.0 \text{ ns}$ とする。材料定数は Table 3.1 の値を用い、プライの粘性係数は $\eta = 14.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ とする。これらの有限要素プログラムは Fortran90 で作成した。

動的有限要素解析により計算した過渡的反射波形を Fig. 3.13 に示す。Figure 3.13(a)は層間界面垂直剛性 K_N を変化させたときの波形の比較を表し、Fig. 3.13(b)はプライの静弾性係数 D (縦波速度 c)を変化させたときの波形の比較を表す。Figure 3.13(a)を見ると、 K_N の低下に伴って底面反射波(積層板底面からの反射波)の到達時刻が遅れていることが確認できる。これは K_N が小さいほど、縦波が層間界面を透過する際の位相の遅れが大きくなるためである。さらに、Fig. 3.13(a)より K_N の低下に伴って表面反射波(積層板表面からの反射波)に続く持続振動成分(各層間界面で多重反射した波)が大きくなる。これは K_N が小さいほど、各層間界面での振幅反射率が大きくなるためである。一方で Fig. 3.13(b)を見ると、静弾性係数 D の低下に伴い底面反射波の到達時刻が遅れている。これは、式(3.16)より、 D が低下することでプライ縦波速度が低下するためである。さらに、Fig. 3.13(b)より、 D の低下に伴って表面反射波の振幅が小さくなっている。これはプライ縦波速度の低下に伴い、プライの特性音響インピーダンス Z が水のインピーダンス Z_0 に近づき、水と積層板の境界における振幅反射率

$$R_{WL} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}, \quad (3.19)$$

が低下するためである。これらの特徴を用いることで、過渡的反射波形から層間界面垂直剛性 K_N やプライ縦波速度 c をある程度評価することは可能であるが、それらを精密に評価することは困難である。

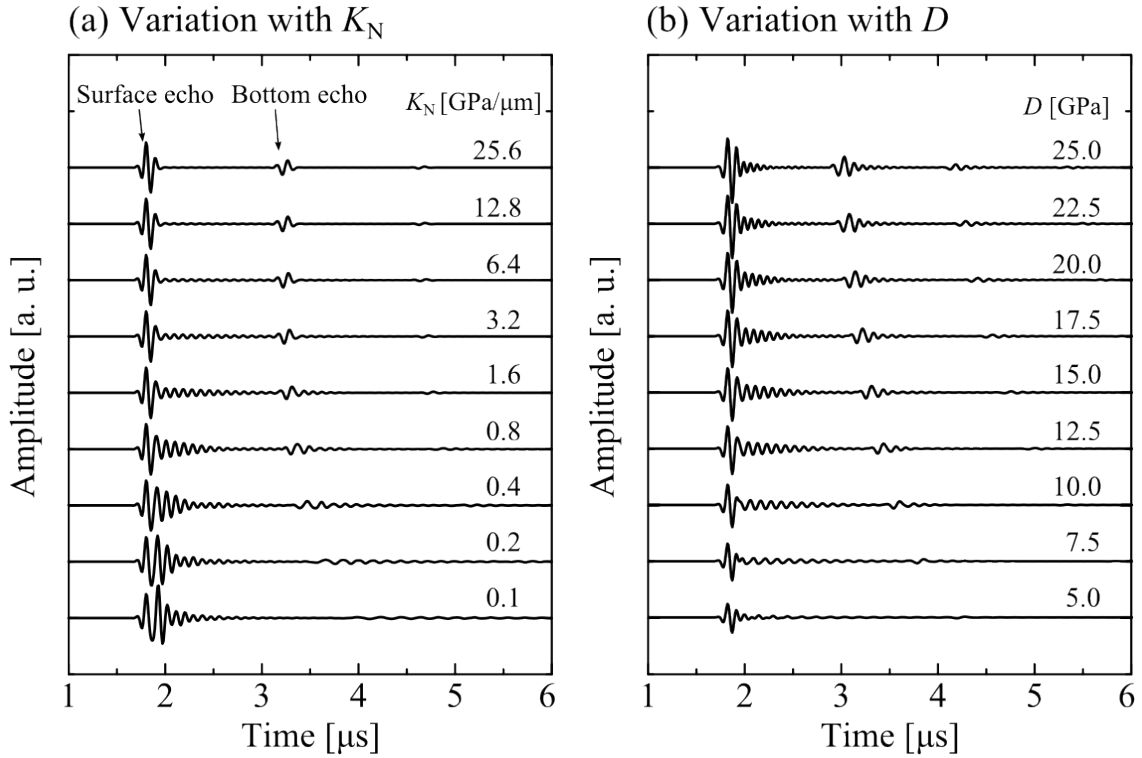


Fig. 3.13 The variation of the reflected waveform from a 16-layered laminate with (a) the interlayer interfacial normal stiffness K_N for a fixed $D = 15.0$ GPa and (b) the ply static stiffness D for a fixed $K_N = 1.0$ GPa/μm.

次に、有限な時間長さを有する過渡的波形から反射スペクトル極点周波数分布が得られるのか検討する。Figure 3.14(a)に示す反射波形を、 $1.5 < t < 3.0$ μs、 $1.5 < t < 4.5$ μs および $1.5 < t < 6.0$ μs の3種類の有限時間長さで打ち切り、それをフーリエ変換後入射波のスペクトル (Fig. 3.12(b)) で除して求めた反射スペクトルを、伝達マトリクス法による理論値とともに Figs. 3.14(b)–(d)に示す。Figures 3.14(c), (d)では、過渡波形から計算した反射スペクトル極点周波数分布が理論と良く一致していることが確認できる (平均誤差は0.2%以内である)。一方で Fig. 3.14(b)では、過渡波形から計算したスペクトルに適切な極点分布が現れていない。この原因として、時間長さ $1.5 < t < 3.0$ μs の中に底面反射波が含まれていないことが挙げられる。第2章の理論解析では、反射スペクトルが周波数に対して振動するのは積層板が有限厚さ (有限積層数) を有するためであることを示した。そして、過渡的反射波形において板厚に関する情報が含まれるのは積層板表面および底面からの反射波であるため、理論と比較可能な極点周波数分布を得るには、表面反射波および底面反射波の両者を含めてフーリエ変換する必要がある。

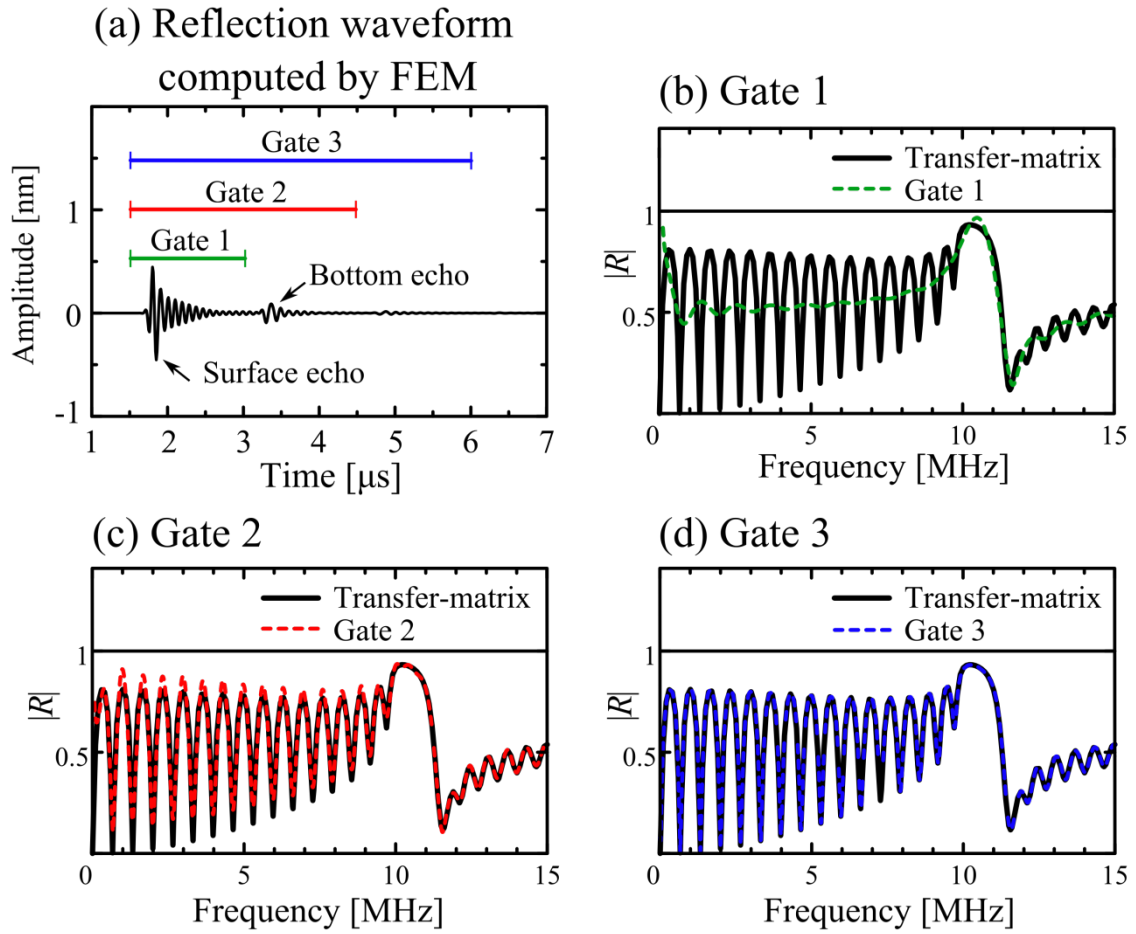


Fig. 3.14 (a) The reflection waveform computed by dynamic FEM and its amplitude reflection spectrum when the waveform is gated for (b) 1.5–3.0 μs , (c) 1.5–4.5 μs , and (d) 1.5–6.0 μs , together with the corresponding reflection spectrum computed by the transfer-matrix method.

3.4.5 層間界面垂直剛性の不均一性の影響

第1章で示した CFRP 積層板の断面画像 (p. 9, Fig. 1.5) を見ると、層間樹脂リッチ領域の厚さは必ずしも均一ではなく場所ごとに異なっている。そして層間界面剛性は樹脂リッチ領域の厚さを反映した特性量であるため、実際の CFRP 積層板では界面ごとに層間界面剛性がばらついている可能性が考えられる。このような状況下でも積層板全体での代表的な界面剛性を評価することは重要であると考えられる。そこでここでは、界面剛性が界面ごとにばらついている場合に提案した評価手法が適用可能かどうか検討する。なお、以下では各層間の界面剛性は、ばらつきがある状況下でも互いに近い値を有していると仮定する。したがって、例えばある特定の界面だけが他と著しく異なる界面剛性を有するような場合は考えない。またプライ縦波速度に関しては、全てのプライが同じ値 ($c = 3.00 \text{ km/s}$) を有すると仮定する。

16 層から成る積層板の層間界面垂直剛性が、平均 $\overline{K_N} = 0.3 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ および標準偏差 $\sigma_K =$

0.05 GPa/μm の正規分布に従う場合の積層方向への分布を、ばらつきがないときの分布と合わせて Fig. 3.15(a)に示す。Figure 3.15(a)の右側の縦軸には、式(3.1)に対して Table 3.1 の材料定数と規格化定数 $\omega_0 = 2\pi \times 10^6$ rad/s により求めた無次元パラメータ Ψ の値も示している。そして、Figure 3.15(a)の層間界面垂直剛性に対して、 $\Gamma = 0.283$, $\Theta = 0.84$ として伝達マトリクス法により求めた反射スペクトルを Fig. 3.15(b)に示す。Figure 3.15(b)を見ると、界面剛性がばらついている場合は、ばらついていない場合に比較してパスバンドにおける反射率が大きく乱されるが、極値となる周波数は依然として存在している。

Figure 3.15(b)の一つ目 ($0 < \tilde{f} < 8.5$) および二つ目 ($11.2 < \tilde{f} < 17.3$) のパスバンドにある極点を用いて求めた評価関数を Fig. 3.16 に示す。Figure 3.16 の縦軸と横軸は、 $\Psi_0 = 4.68 \times 10^{-2}$ と $\Gamma_0 = 0.283$ ($K_N = \bar{K}_N = 0.3$ GPa/μm, $c = 3.00$ km/s に対応) で規格化している。Figure 3.16(b)のばらつきがない場合に比較して、Fig. 3.16(a)は若干不明瞭になってはいるものの $\Psi/\Psi_0 = 1.10$, $\Gamma/\Gamma_0 = 1.01$ ($K_N = 0.27$ GPa/μm, $c = 2.97$ km/s に対応) において評価関数が最小値を取る。

上記の操作を、 K_N のばらつきの標準偏差が $\sigma_K = 0.01$ GPa/μm の場合と 0.05 GPa/μm の場合それぞれに対して異なる 1000 通りの K_N の分布で行った結果をヒストグラムの形で Fig. 3.17

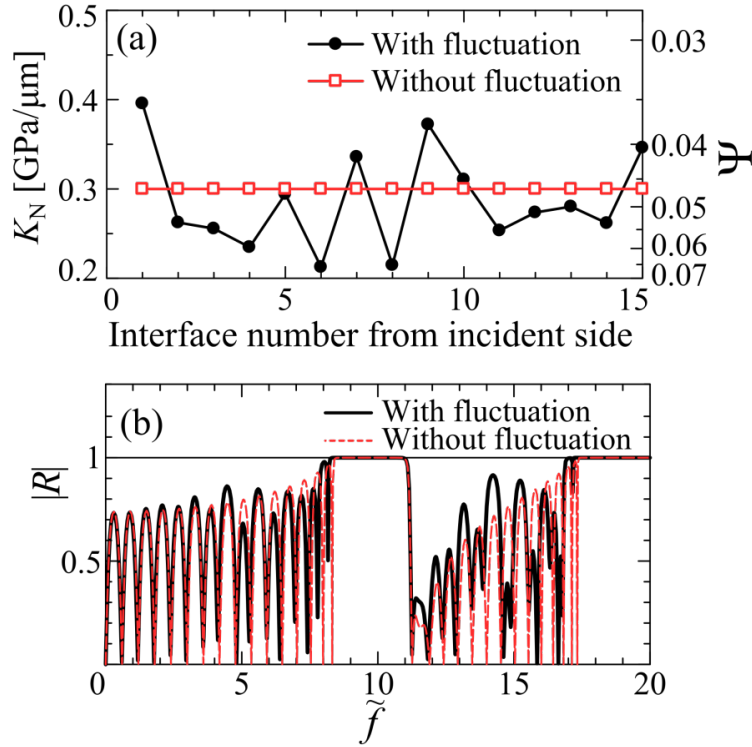


Fig. 3.15 (a) The distribution of the fluctuated interlayer interfacial normal stiffness K_N (non-dimensional parameter Ψ) through the stacking direction of a 16-layered laminate and (b) the corresponding amplitude reflection spectrum computed by the transfer-matrix method with $\Gamma = 0.283$ and $\Theta = 0.84$, together with those without fluctuation of K_N (Ψ).

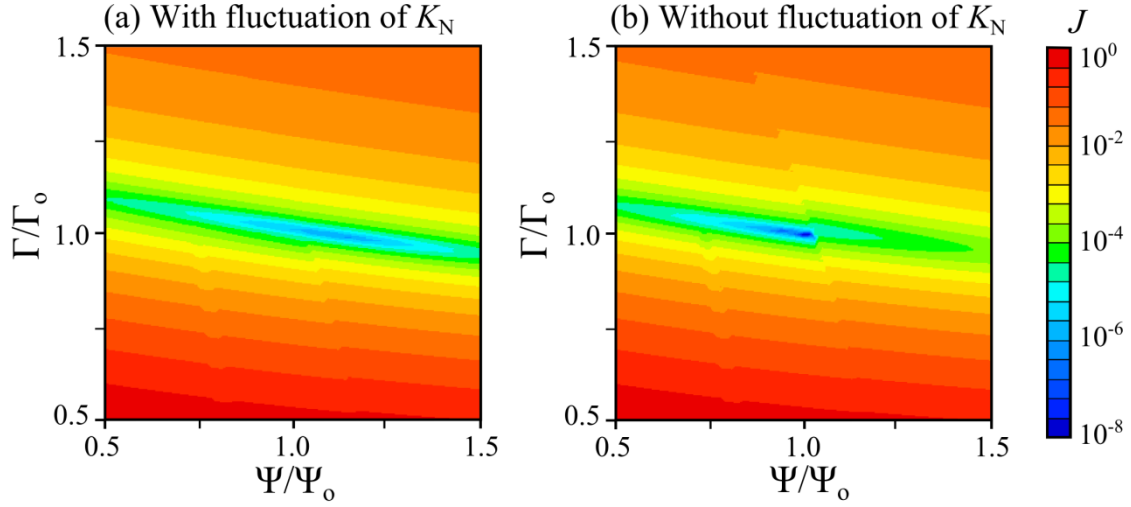


Fig. 3.16 The evaluation function computed for the extremal frequencies in Fig. 3.15(b), where the vertical and horizontal axes are normalized by $\Psi_0 = 4.68 \times 10^{-2}$ and $\Gamma_0 = 0.283$ (corresponding to $K_N = \overline{K}_N = 0.3$ GPa/ μm and $c = 3.00$ km/s), respectively.

に示す．各試行における評価関数の最適化には Fletcher-Reeves 共役勾配法^[9]を用いており，探索時の初期値は $\Psi/\Psi_0 = \Gamma/\Gamma_0 = 0.9$ とした．なお，Fig. 3.16 では最適解以外に局所解が存在していない．したがって，探索時の初期値が図に描かれている範囲内 ($0.5 < \Psi/\Psi_0 < 1.5$, $0.5 < \Gamma/\Gamma_0 < 1.5$) にある限りは，最適解に収束すると考えられる．Figure 3.17 を見ると，同定された層間界面垂直剛性 K_N とプライ縦波速度 c は標準偏差 σ_K に依存してばらついてはいるものの，積層方向にはほぼ平均した界面剛性と元々すべてのプライで同一にしていた縦波速度に近い値が本評価法により得られていることがわかる．

3.5 第 3 章の結言

本章では，第 2 章の結果に基づいて，垂直入射超音波の反射スペクトル極点周波数分布による CFRP 積層板の層間界面垂直剛性 K_N およびプライ縦波速度 c の評価手法を提案した．

はじめに，垂直入射超音波の反射スペクトル極点周波数が，本章で新しく定義し直した無次元パラメータ Ψ および Γ に依存することを示した．これにより，極点周波数分布から Ψ および Γ が評価できること，そして同定した Ψ および Γ から層間界面垂直剛性 K_N およびプライ縦波速度 c が評価できることを示した．そして提案した評価手法の適用可能性について検討し，以下のことを示した．

- (1) 本手法により無次元パラメータ Ψ と Γ (K_N と c) を一意に定めるためには，反射スペクトルの一つ目のパスバンドに加えて，二つ目のパスバンドにある極点周波数も含めて評価を行う必要がある．

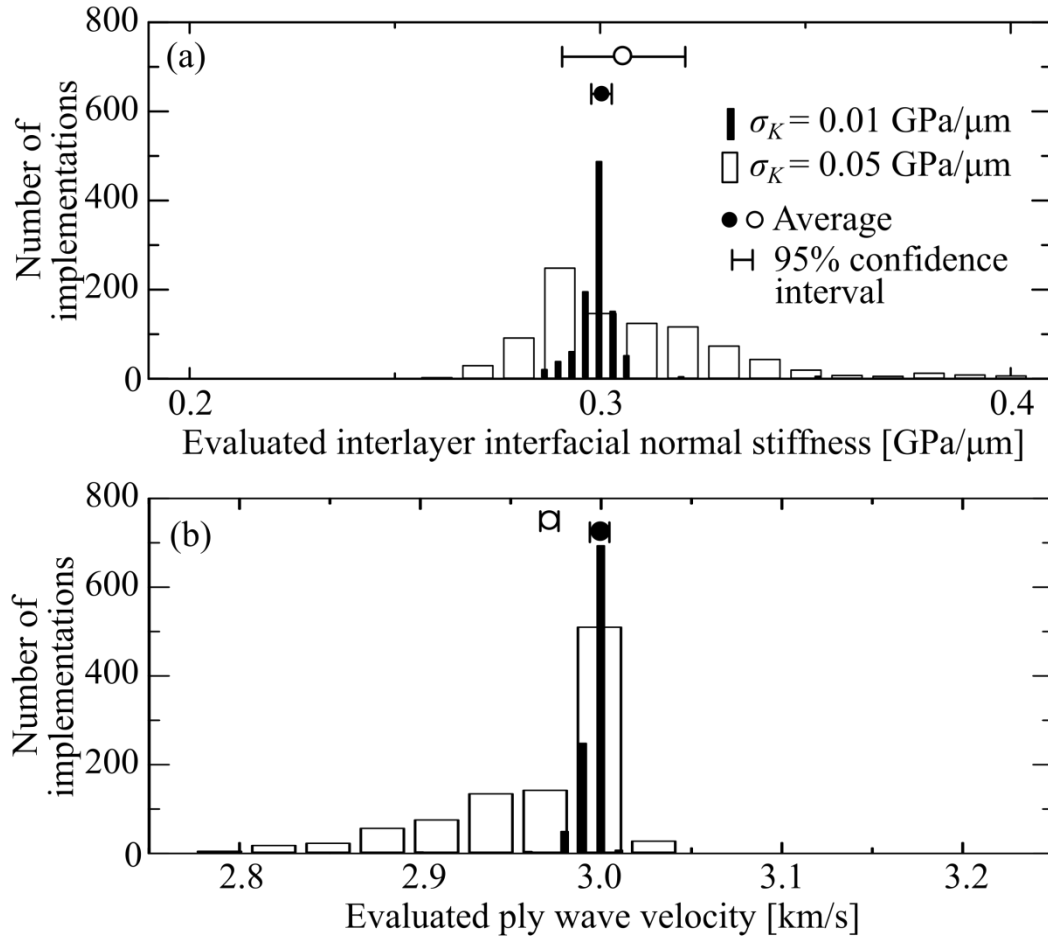


Fig. 3.17 The histogram of the evaluated (a) interlayer interfacial normal stiffness K_N and (b) ply longitudinal wave velocity c for two different standard deviations of the fluctuation of K_N with fixed $\overline{K_N} = 0.3 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ and $c = 3.00 \text{ km/s}$.

- (2) 本手法は、 Ψ の小さな領域（層間が完全接着状態に近い場合）を除いて Ψ と Γ を感度良く評価することが可能である。
- (3) 積層板のプライが粘弾性特性を有する場合でも、プライを弾性体と仮定して計算した反射スペクトル極点周波数分布を用いて K_N と c が評価できる。
- (4) 実際の測定で得られるような過渡的反射波形からでも、表面および底面反射波を含めるようにしてフーリエ変換すれば、周波数領域（伝達マトリクス法）に基づく結果と同等の反射スペクトル極点周波数分布が得られる。
- (5) 層間界面垂直剛性 K_N が界面ごとにばらついている状態でも、本手法によりそれらをおよそ平均した値を評価することができる。

3.6 第3章の参考文献

- [1]. A. I. Lavrentyev and S. I. Rokhlin, “Determination of elastic moduli, density, attenuation, and thickness of a layer using ultrasonic spectroscopy at two angles,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **102**, No. 6 (1997), pp. 3467–3477.
- [2]. B. Hosten, M. Deschamps, and B. R. Tittmann, “Inhomogeneous wave generation and propagation in lossy anisotropic solids. Application to the characterization of viscoelastic composite materials,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **82**, No. 5 (1987), pp. 1763–1770.
- [3]. Y. K. Chow, “Accuracy of consistent and lumped viscous dampers in wave propagation problems,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. **21** (1985), pp. 723–732.
- [4]. D. Datta and N. N. Kishore, “Features of ultrasonic wave propagation to identify defects in composite materials modelled by finite element method,” *NDT&E International* Vol. **29**, No. 4 (1996), pp. 214–223.
- [5]. K. Nakashima, S. Biwa, and E. Matsumoto “Elastic wave transmission and stop band characteristics in unidirectional composites,” *Journal of Solid Mechanics and Material Engineering* Vol. **2** (2008), pp. 1195–1206.
- [6]. Z. You, M. Lusk, and W. Lord, “Numerical simulation of ultrasonic wave propagation in anisotropic and attenuative solid materials,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* Vol. **38**, No. 5 (1991), pp. 436–445.
- [7]. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The finite element method for solid and structural mechanics, sixth edition* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005).
- [8]. R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. M. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. V. D. Vorst, *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods* (Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987), pp. 57–60.
- [9]. R. Fletcher and C. M. Reeves, “Function minimization by conjugate gradients,” *The Computer Journal* Vol. **7** (1964), pp. 149–154.

第4章 実験的検討 —提案手法の妥当性 検証および吸水したCFRP積層板の層間 界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価—

4.1 緒言

本章では、第3章で提案した層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価手法に関する実験的検討を行う。4.2節では、実験で用いる超音波測定装置について説明する。4.3節では、第3章で提案した評価手法をCFRP直交積層板に適用し、評価された層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度の妥当性を検証する。4.4節では、吸水したCFRP積層板に対して層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度を評価し、層間およびプライの弾性特性に及ぼす吸水の影響に関して検討を行う。4.5節で本章の結言を述べ、4.6節に参考文献を示す。

4.2 超音波測定装置

CFRP積層板の超音波測定に用いる実験装置をFig. 4.1に示す。本装置は水中に保持された被験体に対して超音波の送受信を行う全没水浸型の測定装置であり、Fig. 4.1(a)に示すように、直交座標 X, Y, Z 軸に沿って探触子を走査させることが可能である。Figure 4.1(b)の探触子付近の拡大図と、その他の測定機器との配線図をFig. 4.2に示す。本測定装置は X, Y, Z の三軸に加えて、探触子の角度を制御する二つの軸(θ 軸と φ 軸)を有しており、被験体に対して任意角度で超音波を入射させることが可能である。なお、本章では垂直入射超音波の反射波測定を行うため、 θ 軸と φ 軸は $\theta = 0^\circ$ 、 $\varphi =$ 任意角度に固定して測定を行う。これらの二軸を変化させた場合の測定に関しては、第5章の斜角入射超音波透過特性の検討において述べる。また、Fig. 4.2の音響ミラーに関しても本章の測定では使用せず、その詳細は第5章で説明する。

本測定系は、Fig. 4.2に示すように、主にパソコン (MATLAB)、デジタルオシロスコープ (Agilent, DSO5034A)、パルサーレシーバ (Parametrics, 5072PR)、モーターコントローラ、ステッピングモータから構成される。はじめにパソコンからモーターコントローラに指示を送ることで探触子を所望の位置に移動させる。その後パソコンからオシロスコープに波形取得の指示を送る。パルサーレシーバからのスパイク状電圧によって探触子から超音波を励起し、同じ探触子で被験体からの反射波を受信した後、パルサーレシーバ→ディジ

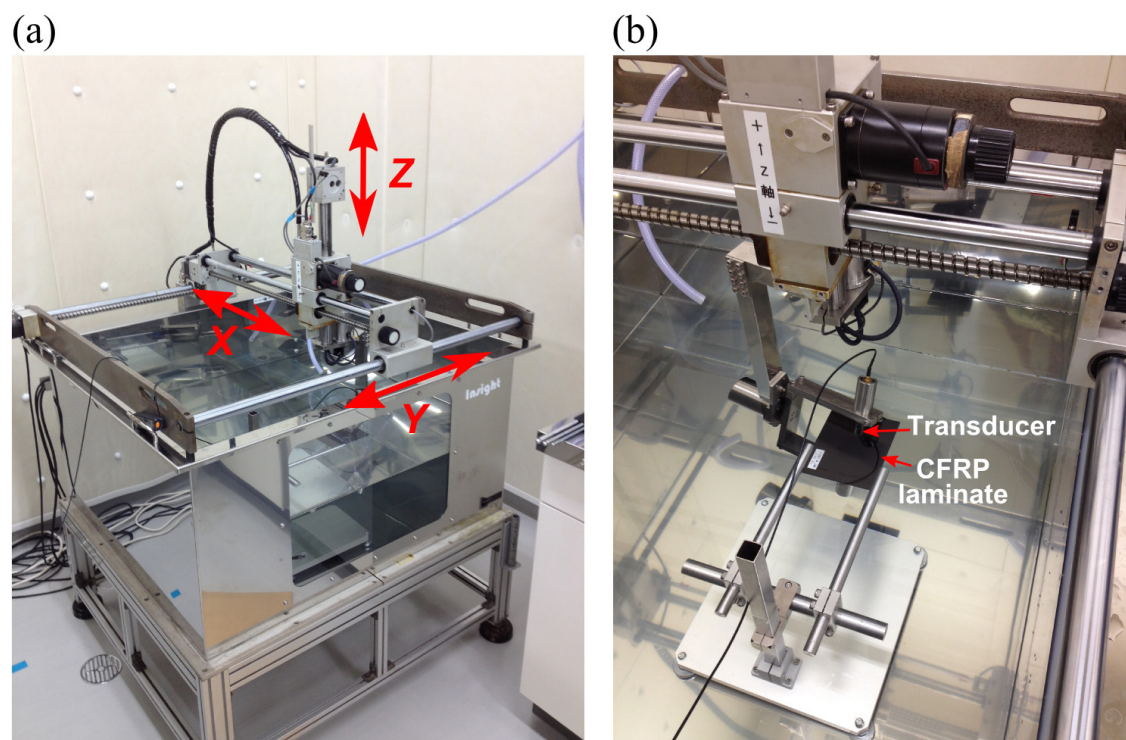


Fig. 4.1 (a) Apparatus for ultrasonic immersion measurement and (b) enlarged view near the transducer.

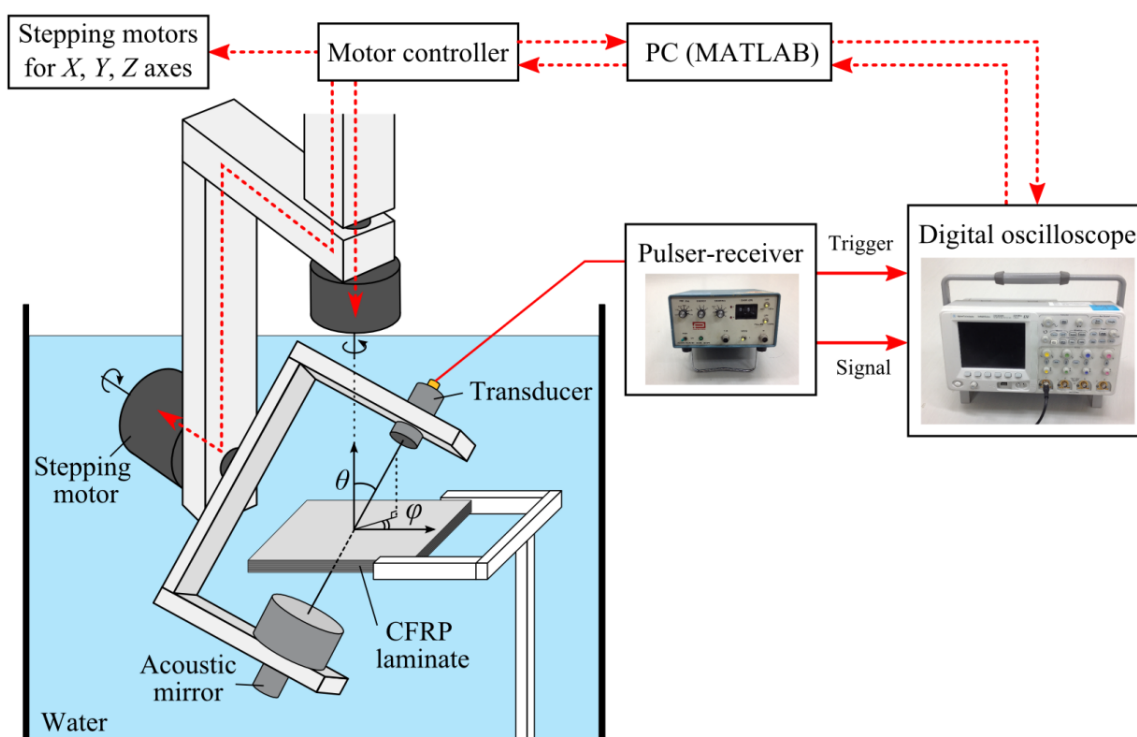


Fig. 4.2 A schematic of the experimental set-up for ultrasonic immersion measurement.

タルオシロスコープへと信号を転送する．そしてオシロスコープでデジタル化された波形データをパソコンに送る．なお， X, Y 軸は5相ステッピングモータ， Z 軸は2相ステッピングモータで制御しており，探触子の最小移動量は X, Y 方向に $0.5\ \mu\text{m}$ ， Z 方向に $0.1\ \mu\text{m}$ である．

4.3 提案手法の妥当性検証

4.3.1 CFRP直交積層板の層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価

本節では，実際の CFRP 積層板に対して第3章で提案した評価手法を適用し，層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度の評価を行う．試験片は，16層からなる CFRP 直交積層板（板厚 $2.16\ \text{mm}$ ）を用いる．母材はエポキシ樹脂（三菱レイヨン#340， 130°C 硬化タイプ），強化材は炭素繊維（三菱レイヨン TR30，直径 $7\ \mu\text{m}$ ，繊維含有率 53.3%）である．超音波探触子は公称中心周波数 $15\ \text{MHz}$ の水浸用探触子（Insight, IT1506R）を用いる．

水浸させた積層板に対して測定した垂直入射超音波の反射波形を Fig. 4.3(a)上段に示す．また，パルス波の波長に比べて十分に厚く，研磨加工した表面をもつアルミニウム合金ブロックに対して実験条件（探触子から被験体表面までの距離）を変更せずに測定した反射波形（参照波形）を Fig. 4.3(a)下段に示す．なお，波形測定時のサンプリング周波数は $100\ \text{MHz}$ （時間ステップ $10\ \text{ns}$ ）であり，加算平均回数は 100 としている．そして Fig. 4.3(a)の波形をフーリエ変換して求めた振幅スペクトルを Fig. 4.3(b)に示す．このとき，積層板に対する振幅反射率 $|R|$ は，積層板反射波のスペクトル S^L と参照波形のスペクトル S^{Al} を用いて以下のようを求めることができる．

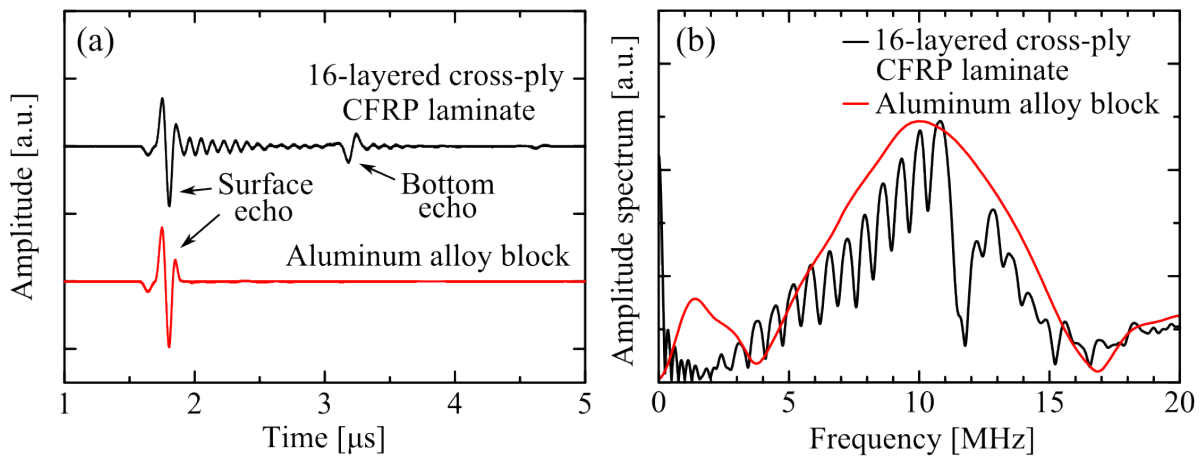


Fig. 4.3 (a) Experimental reflection waveforms from the 16-layered cross-ply CFRP laminate specimen and a polished surface of a thick aluminum alloy block immersed in water and (b) their amplitude spectra.

$$|R| = \left| \frac{S^L}{S^{Al}} R_{WA} \right|. \quad (4.1)$$

ここで,

$$R_{WA} = \frac{\rho_w c_w - \rho_{Al} c_{Al}}{\rho_w c_w + \rho_{Al} c_{Al}} = -0.84, \quad (4.2)$$

は, 水 (密度 $\rho_w = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 音速 $c_w = 1.50 \text{ km/s}$) とアルミニウム合金ブロック (密度 $\rho_{Al} = 2.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 縦波速度 $c_{Al} = 6.38 \text{ km/s}$) の境界における振幅反射率を表す. なお, CFRP 積層板とアルミニウム合金ブロックの両者の測定において探触子 - 被験体間距離を揃えることで, 超音波が水中を伝搬するときのビーム拡散の影響をほぼ相殺することができる. 一次元波動伝搬に基づく理論解析の結果と比較可能な反射率を得ることができる.

式(4.1)と(4.2)により求めた CFRP 直交積層板の反射スペクトルを Fig. 4.4 に示す. なお, 探触子から実際に送信されている超音波のスペクトルは, Fig. 4.3(b)のアルミニウム合金ブロック反射スペクトルとほぼ同じと考えることができる. Figure 4.3(b)の周波数が 5 MHz 以下および 15 MHz 以上ではスペクトルが 10 MHz 近傍の最大値に比べて小さくなっており, これらを用いて求めた反射率は妥当性に欠けると考えられる. したがって, Fig. 4.4 には 5

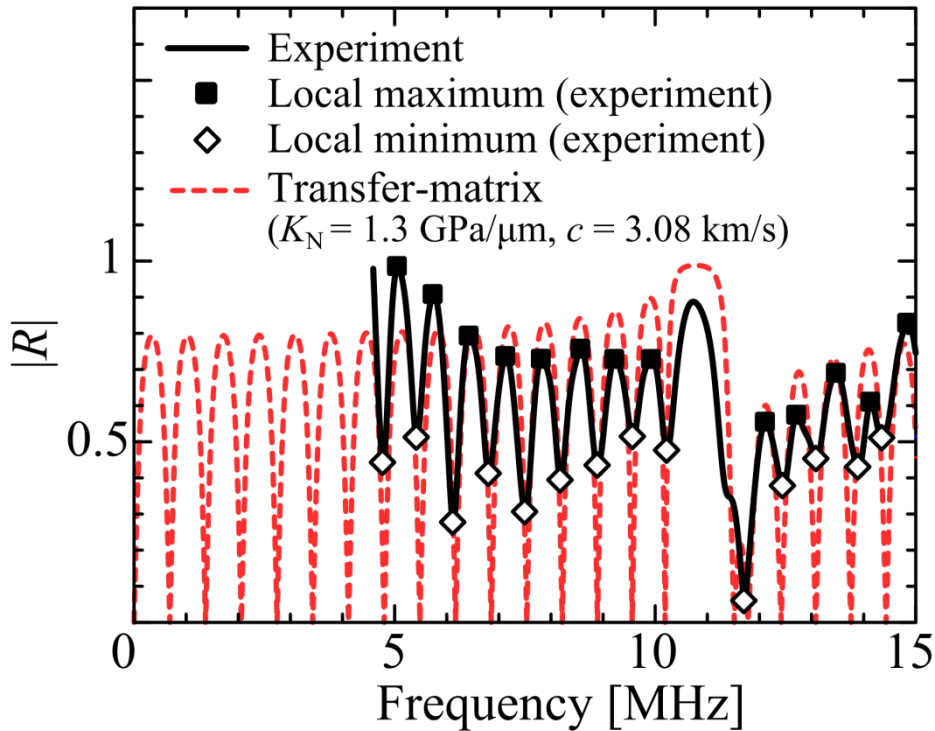


Fig. 4.4 Experimental amplitude reflection spectrum for the 16-layered cross-ply CFRP laminate specimen, together with the theoretical one computed by the optimized interlayer interfacial normal stiffness $K_N = 1.3 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ and ply longitudinal wave velocity $c = 3.00 \text{ km/s}$.

～15 MHz の周波数範囲で結果を示している． Figure 4.4 を見ると，10.5 MHz 近傍に反射率が比較的大きくなる領域（ストップバンド）が形成されている．次に，Fig. 4.4 において極値となる周波数分布（計 27 個）を抽出し，それに対して計算した評価関数（式(3.8), p. 42）を Fig. 4.5 に示す．なお，評価関数の計算に必要な理論的な極点周波数分布は Table 4.1 の値（対応する既知無次元パラメータ $\Theta = 0.84$ ）を用いて求めている． Figure 4.5 を見ると， $\Psi = 1.10 \times 10^{-2}$ ， $\Gamma = 0.275$ において評価関数が最小値を取る．これらの値を式(3.7)に代入することで，本実験で用いた試験片の層間界面垂直剛性は $K_N = 1.3 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ ，プライ縦波速度は $c = 3.08 \text{ km/s}$ と同定される．

同定した K_N および c の値を用いて伝達マトリックス法により求めた反射スペクトルを

Table 4.1 Parameters for the evaluation of interlayer interfacial normal stiffness and ply longitudinal wave velocity.

Number of plies N	16
Thickness of ply h (mm)	0.135
Density of ply ρ ($\times 10^3 \text{ kg/m}^3$)	1.49
Longitudinal wave velocity of semi-infinite media c_0 (km/s)	1.50
Density of semi-infinite media (water) ρ_0 ($\times 10^3 \text{ kg/m}^3$)	1.00
Normalized factor ω_0 (rad/s)	$2\pi \times 10^6$

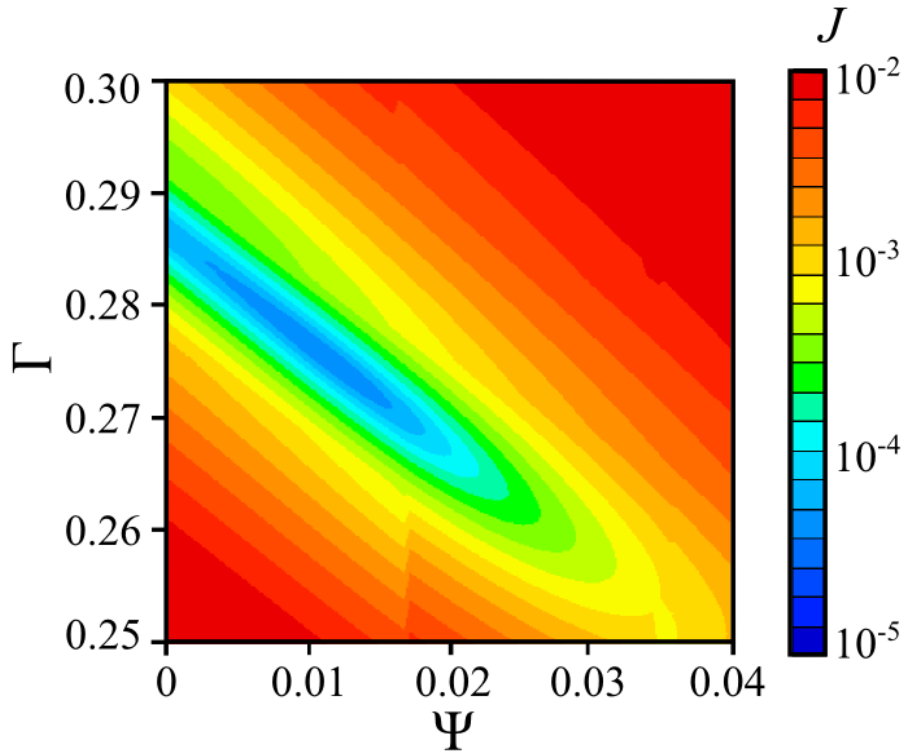


Fig. 4.5 The evaluation function computed for the experimental extremal frequencies of the amplitude reflection spectrum shown in Fig. 4.4.

Fig. 4.4に示す. なおこの計算においてプライの粘弾性特性は無視している. そのためFig. 4.4を見ると, 実験と理論で反射率の大きさは異なっている. 一方で, 反射率の周波数に対する振動挙動, つまり極点周波数については実験と理論が良好に一致していることがわかる.

4.3.2 同定値の妥当性検証

次に, 試験片の断面観察を行い, 4.3.1 節で同定した層間界面垂直剛性 K_N の妥当性を検証する. マイクロスコープ (KEYENCE, VHX-500) を用いて撮影した試験片の断面画像を Fig. 4.6 に示す. 画像から層間樹脂リッチ領域の厚さ h_r を測定したところ, それらは一定ではないもののおよそ $h_r = 3 \sim 10 \mu\text{m}$ 程度であることがわかった. 一方で層間界面垂直剛性 K_N は, 樹脂リッチ領域の厚さ h_r , 樹脂の質量密度 ρ_r および樹脂の縦波速度 c_r (ラメ定数 λ_r, μ_r) を用いて,

$$K_N = \frac{\lambda_r + 2\mu_r}{h_r} = \frac{\rho_r c_r^2}{h_r}, \quad (4.3)$$

と概算することができる^{[1]-[3]}. 式(4.3)に対して $h_r = 3 \sim 10 \mu\text{m}$ および, 試験片に用いられている樹脂と同種の樹脂板に対して測定した値 $\rho_r = 1230 \text{ kg/m}^3$, $c_r = 2668 \text{ m/s}$ ^[4]を用いると, 層間界面垂直剛性は $K_N = 0.9 \sim 2.9 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ 程度であることがわかった. これより, 提案手法により同定した $K_N = 1.3 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ は十分妥当な値であると考えられる. また, 式(4.3)と $K_N = 1.3 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ を用いると, 試験片の樹脂リッチ領域がすべて一定と考えた場合の厚さは $h_r = 6.7 \mu\text{m}$ となり, これは断面観察による結果と比較して十分妥当な値であると考えられる.

また, 提案手法により同定したプライ縦波速度 $c = 3.08 \text{ km/s}$ とプライ密度 $\rho = 1.49 \times 10^3$

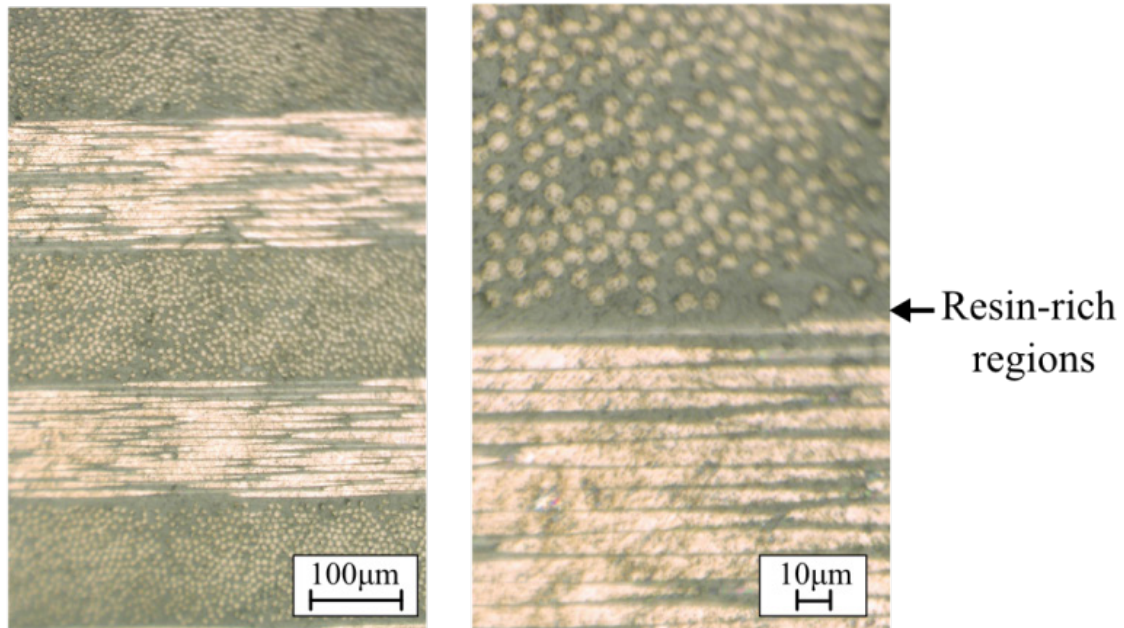


Fig. 4.6 Cross-sections of the cross-ply CFRP laminate specimen (same as Fig. 1.5(b)).

kg/m^3 を用いて積層方向(繊維と垂直方向)に関するプライ弾性率 D を求めると $D = \rho c^2 = 14.1$ GPa となる. これをマイクロメカニクスモデル(一般化セルフコンシステントモデル)による計算値 14.3 GPa^[5]と比較すると, 同定した縦波速度の値は十分妥当であると考えられる.

4.4 吸水したCFRP積層板の層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価

4.4.1 背景

CFRP や GFRP (Glass Fiber Reinforced Plastics) などの高分子材料を母材とする複合材料は, 吸水により機械的特性が低下することが知られている^{[6]-[18]}. そのため吸水による材料特性変化の非破壊評価は重要な課題であり, これまでに繊維強化複合材料積層板の吸水率が超音波伝搬特性に及ぼす影響に関して実験的検討が行われている. 岡部と武田^{[19], [20]}は, 斜角入射超音波の伝搬速度と減衰率から吸水した一方向強化 CFRP 積層板の異方性粘弾性特性を評価している. また, Fortineau^[21]らは斜角入射超音波の透過スペクトルを用いて二次元織物 CFRP 積層板の異方性弾性率を評価している. Jayet ら^[22]は, GFRP 積層板の積層方向への伝搬速度と減衰率の周波数依存性に及ぼす吸水率の影響を考察しており, 吸水によって伝搬速度が低下し減衰率が増加する一方でそれらの周波数依存性はほぼ変化しない結果を報告している. Neilsen and Toftegaard^[23]はポリエチン繊維とスチレン-イソプレン樹脂からなる繊維強化複合材料に対して, 伝搬速度より算出した一方向および直交積層板の積層方向弾性率に及ぼす吸水率の影響を考察している. Cinquin ら^[24]は, 二次元織物 CFRP 積層板における準ラム波の分散関係(周波数と波数の関係)と吸水率の関係を考察しており, 準ラム波の減衰特性(周波数と波数虚部の関係)が吸水率に大きく依存することを報告している.

上記の先行研究は, プライと層間界面の特性を合わせた積層板の総体的な評価を対象としている. そこで本節では, 吸水した一方向強化 CFRP 積層板の層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度を評価し, これらのパラメータに及ぼす吸水の影響に関して検討する.

4.4.2 吸水試験

本実験では, 三菱レイヨン社製 UD プリプレグ TR380G250S (エポキシ樹脂硬化温度: 130°C, 炭素繊維径: 7 μm , 繊維含有率: 67%) 16 層から成る一方向強化 CFRP 積層板 (寸法: 100 mm $\times$ 80 mm $\times$ 3.9 mm) を試験片として用いた. はじめに, 真空乾燥機 (アズワン, AVO-200NB) 内で試験片を 5 日間 60°C で乾燥させた^{[19], [20]}. その後, 電子天秤 (A&D, FZ-300i) で試験片の初期質量 M_0 を測定し, さらにアルキメデスの原理により初期密度を求めた. 次に, 恒温水槽 (トーマス科学, T-104NA) で 90°C に保持されたイオン交換水中に試験片を浸漬させ吸水試験を行った. 総浸漬時間は 30 日間とし, 浸漬開始後 2 日ごとに試験片を水槽から

取り出し、質量 M_t 、板厚、密度および超音波反射波の測定を行った。そして測定した質量から

$$W = \frac{M_t - M_0}{M_0}, \quad (4.4)$$

の関係式を用いて吸水率 W を求めた。

垂直入射超音波の反射波測定には、4.3 節と同様の全没水浸法を用いる。そして、用途別に2種類の公称中心周波数 (2.25 MHz と 10 MHz) を有する探触子を用いて測定を行う。2.25 MHz の探触子 (Insight, IS0213R) では、積層板表面および底面反射波を測定し、既往の研究^[22]でも実施されている積層方向の平均的伝搬速度および減衰係数の評価を行う。10 MHz の探触子 (Sonix, IS1006R) で測定した反射波形に対しては、4.3 節と同様に反射スペクトル極点周波数分布から層間界面垂直剛性とプライ縦波速度を評価する。波形測定時のサンプリング周波数は 100 MHz (時間ステップ 10 ns)、加算平均回数は 100 とする。なお、本測定は常温水中で行うこと、そして試験片の水浸時間も数十分程度であることから、測定中の吸水率変化は無視できると仮定する。

式(4.4)より求めた CFRP 積層板の吸水率と浸漬時間の関係を Fig. 4.7 に示す。吸水率は試験開始から浸漬時間とともに増加し、30 日後に約 1.7 % でほぼ飽和した。次に、積層板の板厚および密度と浸漬時間の関係を Fig. 4.8 に示す。浸漬時間の増加とともに、板厚は増加し密度は減少した。

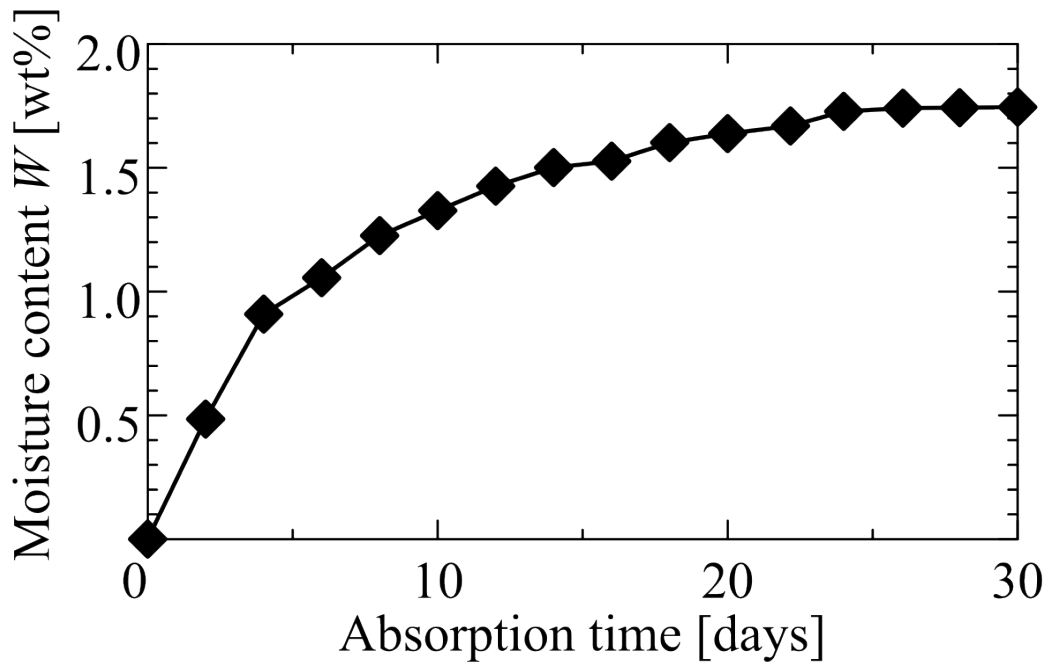


Fig. 4.7 History of moisture absorption of the unidirectional CFRP laminate specimen.

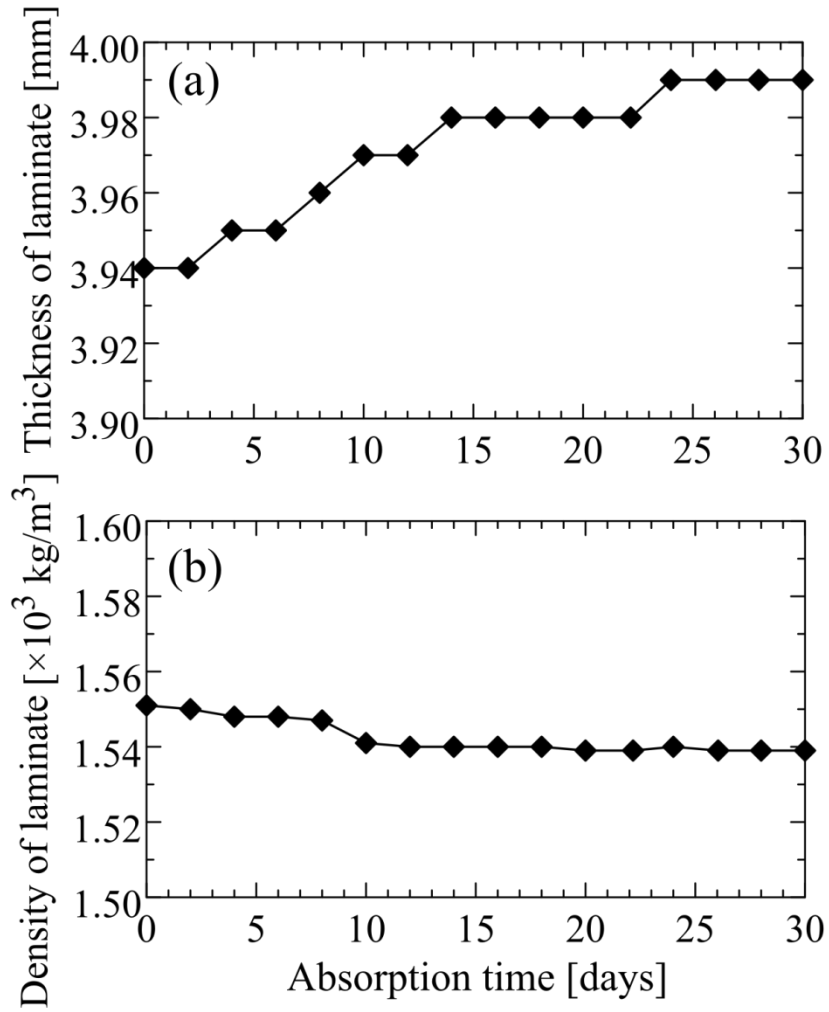


Fig. 4.8 The variation of (a) thickness and (b) density of the unidirectional CFRP laminate specimen with absorption time.

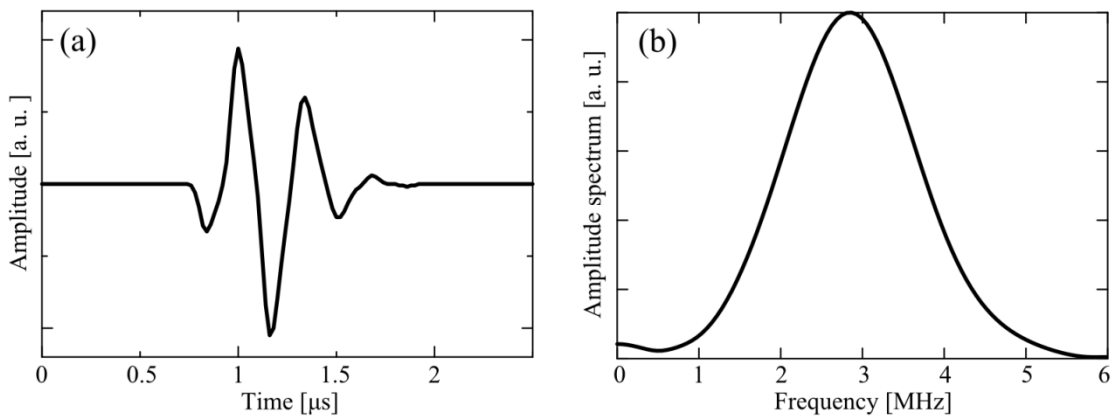


Fig. 4.9 (a) Reference waveform from a polished surface of an aluminum alloy block measured by the 2.25 MHz transducer and (b) its amplitude spectrum.

4.4.3 積層方向に関する平均的伝搬速度と減衰係数の評価

ここでは、積層板を単一平板とみなしたときの板厚方向への伝搬速度および減衰係数に関して検討を行う。水浸させたアルミニウム合金ブロックに対して中心周波数 2.25 MHz の探触子により測定した表面反射波およびその振幅スペクトルを Fig. 4.9 に示す。Figure 4.9(b) より、Fig. 4.9(a)の波はおよそ 1~5 MHz の周波数帯を有しており、実際の試験片に入射される超音波も同程度の周波数帯を有していると考えられる

上記探触子で測定した CFRP 積層板からの反射波を Fig. 4.10 に示す。Figure 4.10 において約 17 μs に見られる波が積層板表面からの反射波であり、約 19.5 μs に見られる波が積層板底面からの反射波である。これら二つの波を用いて、積層方向に関する平均的な伝搬速度 c_{Lami} および減衰係数 α_{Lami} を

$$c_{\text{Lami}} = \frac{2H}{\Delta t}, \quad (4.5)$$

$$\alpha_{\text{Lami}} = \frac{1}{2H} \ln \left(\frac{1 - R_{\text{WL}}^2}{A_{\text{B}}/A_{\text{S}}} \right), \quad (4.6)$$

より求めた。ここで、 A_{S} および A_{B} は表面および底面反射波包絡線の最大値、 Δt は最大値間の時間差である。包絡線は、測定波形を実部、波形のヒルベルト変換を虚部に持つような信号（解析信号）の絶対値を求めることで描いている。また、式(4.6)において、

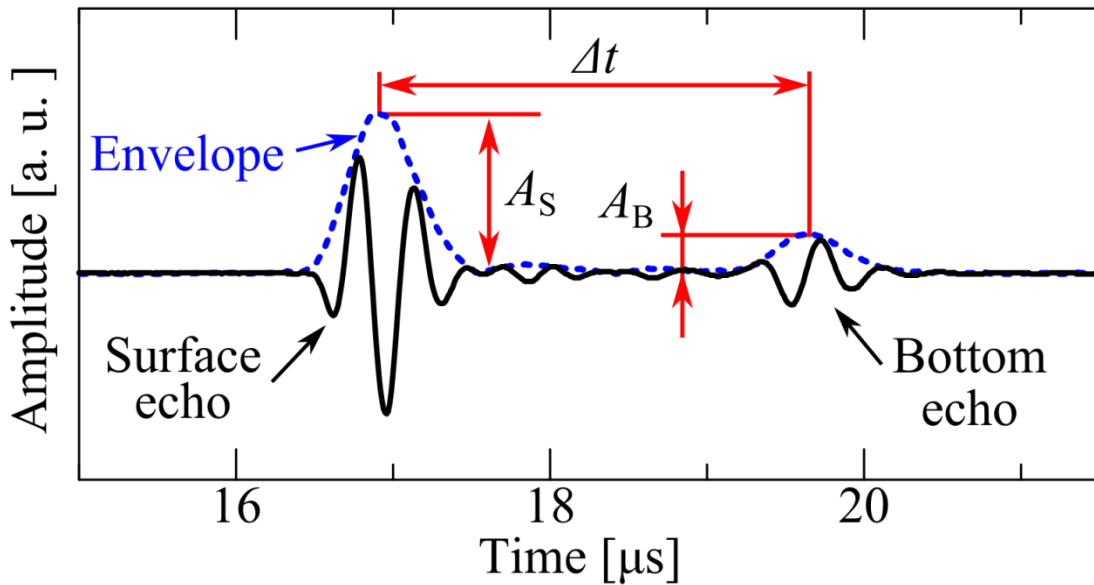


Fig. 4.10 Experimental reflection waveform from the CFRP laminate specimen measured by the 2.25 MHz transducer, together with its envelope.

$$R_{WL} = \frac{\rho_{Lami}c_{Lami} - \rho_w c_w}{\rho_{Lami}c_{Lami} + \rho_w c_w}, \quad (4.7)$$

は水 - 積層板境界での振幅反射率であり, $\rho_w = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ および $c_w = 1.50 \text{ km/s}$ は水の密度および音速である. そして, H および ρ_{Lami} は積層板の板厚および密度であり, 各浸漬時間ごとに Fig. 4.8 に示す値を用いた. なお, 本測定では超音波伝搬特性の周波数依存性が十分小さいと考えられる低周波数帯を用いているため, 速度と減衰は周波数に依存しないと仮定している. 周波数依存を考慮した位相速度や減衰係数は例えば Fig. 4.10 の反射波形に対して位相スペクトル法^{[25], [26]}を用いることで算出できる.

式(4.5)–(4.7)より求めた CFRP 積層板の伝搬速度および減衰係数と浸漬時間の関係を Fig. 4.11 に示す. データ点およびエラーバーは, 試験片の異なる点における測定結果の平均値お

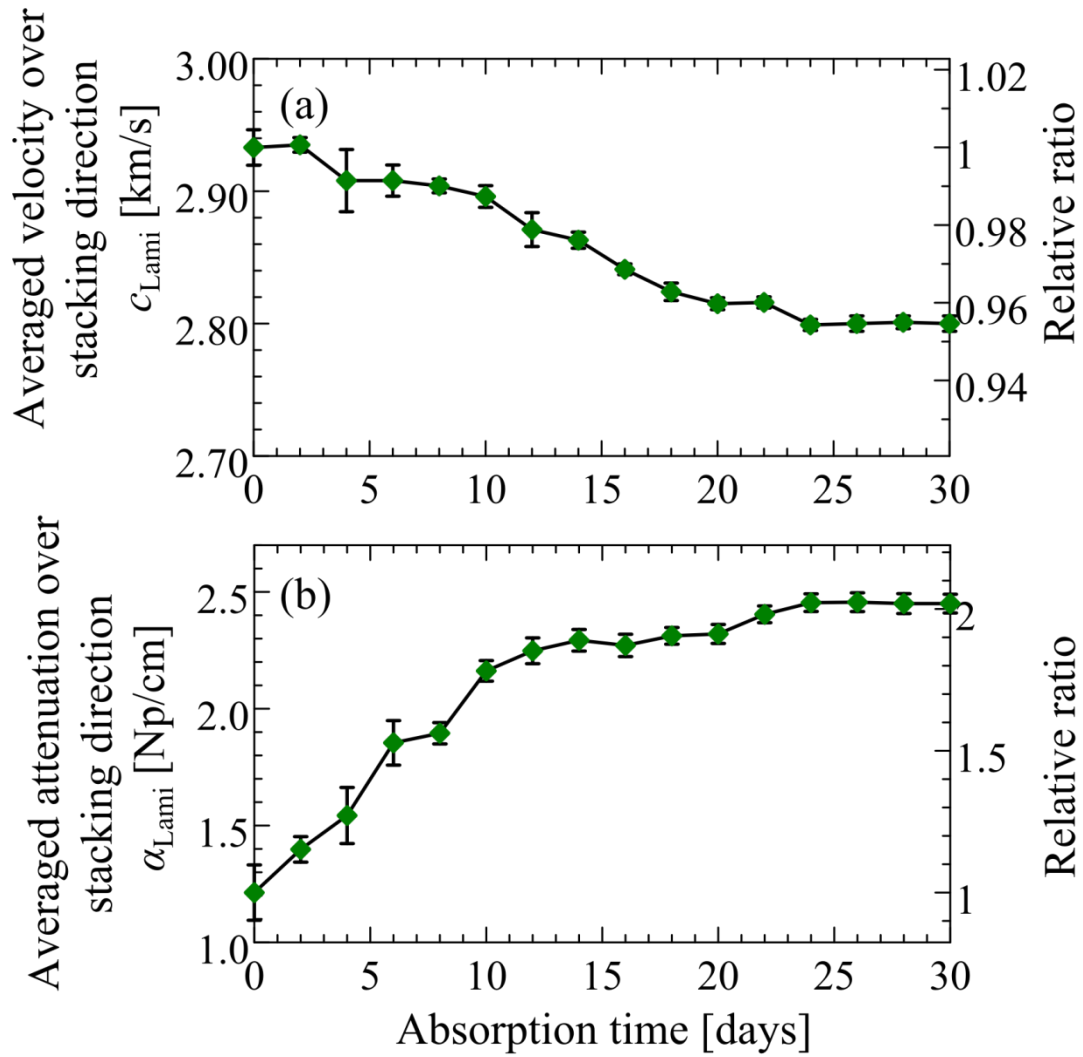


Fig. 4.11 The variation of averaged (a) longitudinal wave velocity c_{Lami} and (b) attenuation coefficient α_{Lami} over the stacking direction of the laminate with absorption time.

および標準誤差の ± 2 倍（95 %信頼区間）を表している。Figure 4.11を見ると、浸漬時間とともに伝搬速度は減少し減衰係数は増加している。これらの傾向は先行研究^[22]で報告されている結果と一致している。速度が低下する要因としては、吸水により樹脂が軟化し弾性率が低下した結果、積層板全体としての弾性率も低下したこと^[20]が考えられる。減衰係数が増大する要因としては、吸水により樹脂が軟化し粘弾性効果が増大したこと^[20]や、樹脂の膨潤により繊維 - 母材界面が劣化し、波動散乱の影響が強くなったこと^[23]が考えられる。また、Fig. 4.11 右側に示した浸漬前（吸水率 0 %）との相対比を見ると、伝搬速度は高々 5 % の変化量であるのに対し減衰係数は最大で 100 % 近く変化していることがわかる。したがって減衰係数の方が吸水率の変化に対し敏感であり、非破壊評価に有用であると考えられる。一方で、これらの表面・底面反射波に基づく手法では、層間界面とプライの特性を分離して評価することは困難である。

4.4.4 層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価

次に、第3章で提案した評価手法を用いて、吸水した CFRP 積層板の層間界面垂直剛性とプライ縦波速度を評価する。水浸させたアルミニウム合金ブロックに対して中心周波数 10 MHz の探触子により測定した表面反射波およびその振幅スペクトルを Fig. 4.12 に示す。Figure 4.12(b)より、表面反射波は 7 MHz 近傍にピークを有する広帯域の波であり、実際の試験片に入射される超音波も同程度の周波数帯を有していると考えられる。

上記探触子を用いて、CFRP 積層板の浸漬開始後 0 日、4 日、30 日（積層板の吸水率は 0 %, 1.0 %, 1.7 % に対応）において測定した反射波形を Fig. 4.13(a)に示す。そして、これらの波形の振幅スペクトルと Fig. 4.12(b)のスペクトルに対して式(4.1)より求めた振幅反射スペクトルを Fig. 4.13(b)に示す。Figure 4.13(a)を見ると、約 17.5 μs の表面反射波と約 20.2 μs の底面反射波の間に各層間界面からの反射波を確認でき、その振幅が浸漬時間とともに大きくなっている。層間界面垂直剛性が低下すると層間界面反射波の振幅が大きくなることから

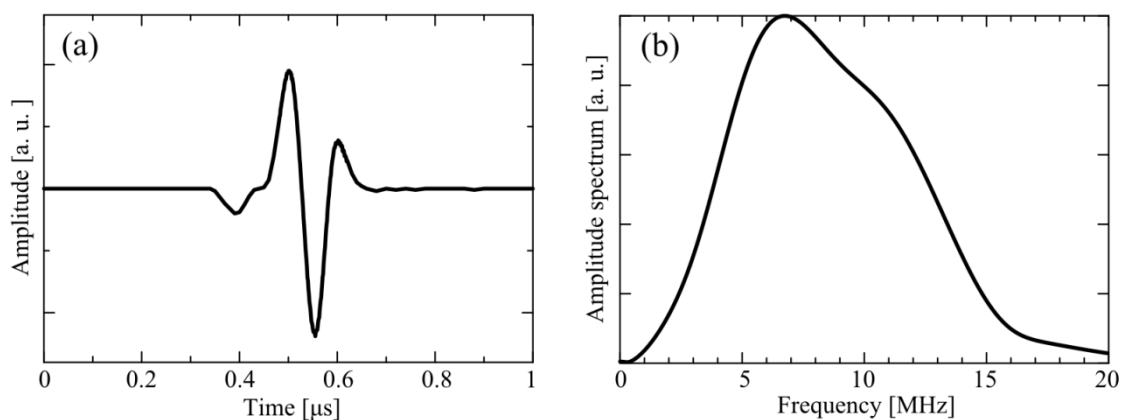


Fig. 4.12 (a) Reference waveform from a polished surface of an aluminum alloy block measured by the 10 MHz transducer and (b) its amplitude spectrum.

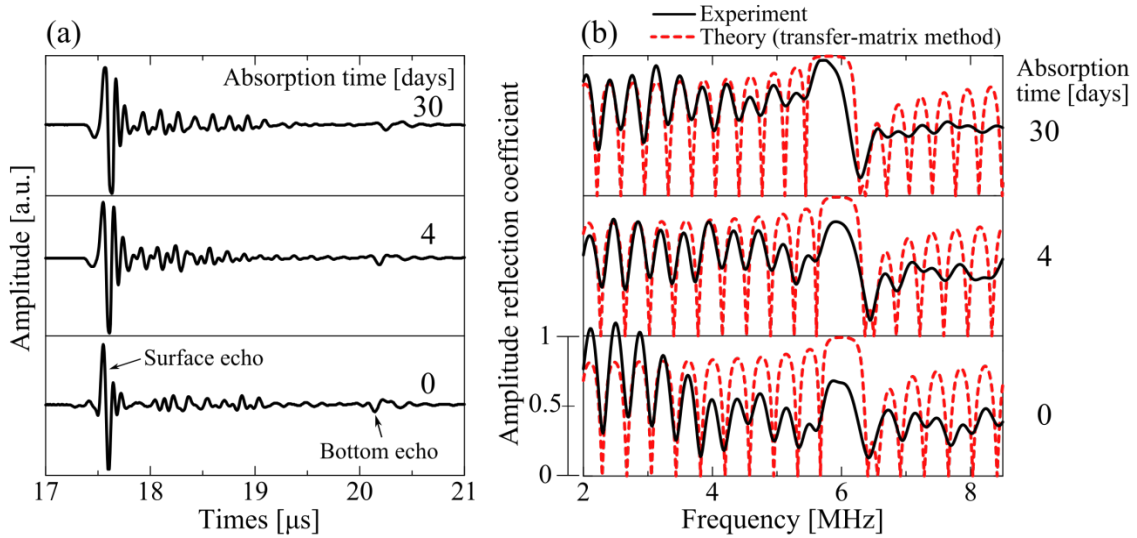


Fig. 4.13 (a) Reflection waveforms from the unidirectional CFRP laminate specimen measured by the 10 MHz transducer for three different absorption time (0, 4, 30 days) and (b) their reflection spectra, together with the theoretical ones computed by the transfer-matrix method with the evaluated interlayer interfacial normal stiffness and ply longitudinal wave velocity.

(cf. 3.4.4 節 Fig. 3.13(a) (p. 53)), 吸水によって層間界面垂直剛性が低下していると予想される。また, Fig. 4.13(b)の反射スペクトルを見ると, 浸漬時間が増加するに伴って 6 MHz 近傍に形成されたストップバンドの幅が若干広くなり, その位置が低周波数方向へシフトしている。この傾向から, 吸水によって層間界面垂直剛性 K_N およびプライ縦波速度 c が低下していると予想される (cf. 3.2 節 Fig. 3.1 および Fig. 3.2 (p. 40))。

Figure 4.13(b)の反射スペクトル極点周波数に対して, 3.3 節で提案した手法により評価した層間界面垂直剛性 K_N およびプライ縦波速度 c と浸漬時間の関係を Fig. 4.14 に示す。なお, これらのパラメータの評価にあたって, Fig. 4.8(a)で示した積層板の板厚を積層数 (= 16) で除した値をプライ厚さ h とし, Fig. 4.8(b)で示した積層板の密度をプライ密度 ρ として用いた。また, 積層板両側の半無限媒質は水として密度 $\rho_0 = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ および音速 $c_0 = 1.50 \text{ km/s}$ を用い, 任意の規格化定数は $\omega_0 = 2\pi \times 10^6 \text{ rad/s}$ とした。Figure 4.14 のデータ点およびエラーバーは Fig. 4.11 と同様に, 試験片の異なる点における結果の平均値および 95 %信頼区間を表す。そして, 評価した界面剛性およびプライ縦波速度を用いて伝達マトリクス法により求めた理論的な反射スペクトルを Fig. 4.13(b)に合わせて示す。Figure 4.13(b)を見ると, 理論ではプライの粘弾性特性を考慮していないため実験値と反射率自体は合わないものの, 測定で得られた極点周波数の分布が理論でも良好に再現されていることが確認できる。

Figure 4.14 を見ると, 浸漬時間の増加に伴い層間界面垂直剛性 K_N とプライ縦波速度 c がともに減少傾向にある。3.4.4 節の Fig. 3.13(a)で示したように, 層間界面垂直剛性 K_N が低下すると底面反射波の到達時刻が遅れることから, 4.4.3 節の Fig. 4.11(a)で見られた積層方向の平均的伝搬速度 c_{Lami} の低下は, プライ縦波速度 c の低下と層間界面垂直剛性 K_N の低下の両者

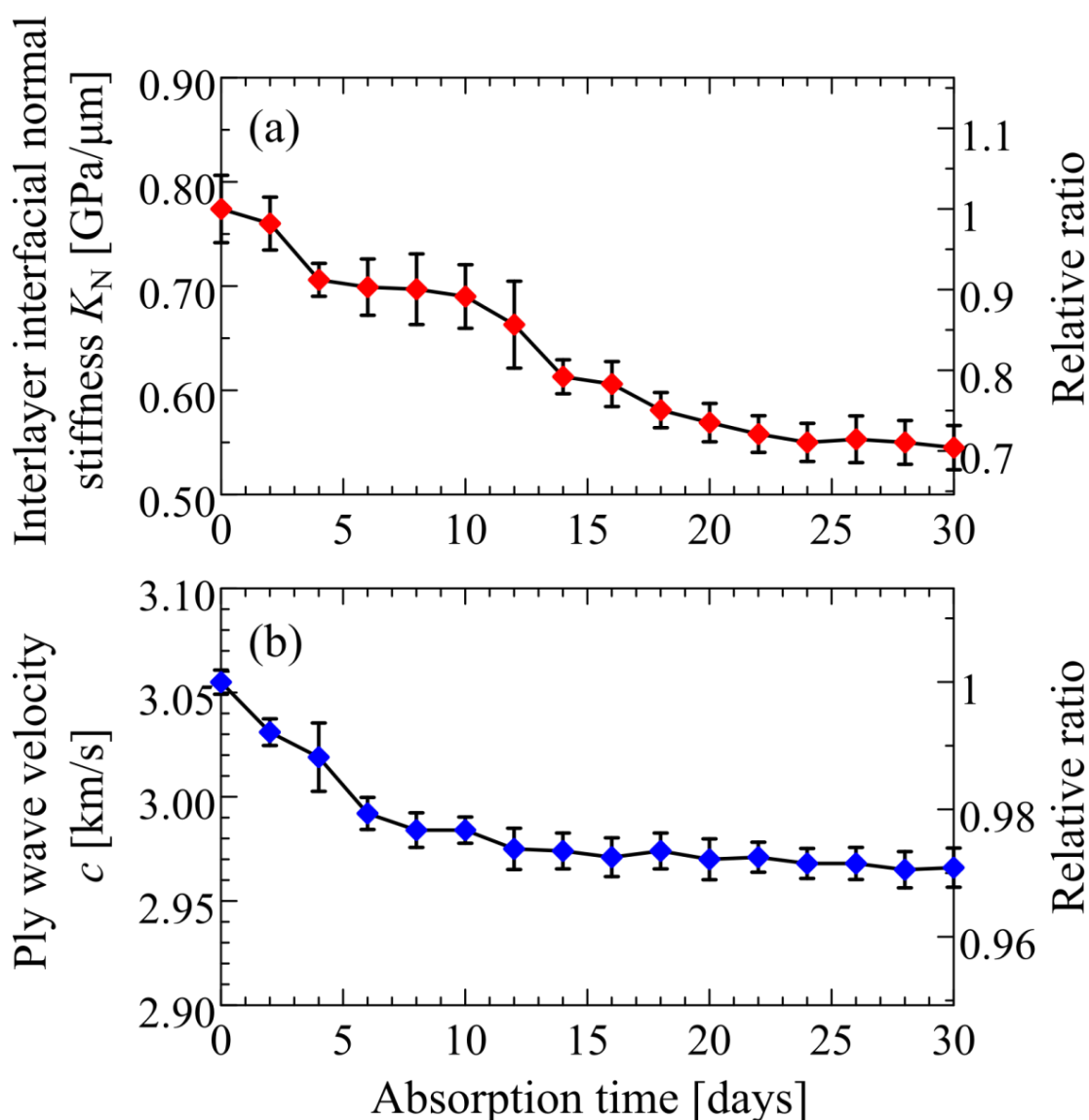


Fig. 4.14 The variation of (a) interlayer interfacial normal stiffness K_N and (b) ply longitudinal wave velocity c with absorption time.

によるものだとわかる。プライ縦波速度 c が低下した要因は、4.4.3 節と同様に、吸水によって樹脂が軟化しプライ弾性率が低下したことが考えられる。一方で、層間界面垂直剛性 K_N が減少した要因として、樹脂の軟化による弾性率の低下（式(4.3) (p. 64) 右辺分子の低下）、そして樹脂の膨潤による樹脂リッチ領域厚さの増加（式(4.3)右辺分母の増加）が考えられる。また、Fig. 4.14 右側に示した吸水前（吸水率 0 %）との相対比を見ると、プライ縦波速度 c は高々 3 % 程度しか変化していないのに対し層間界面垂直剛性 K_N は最大で 30 % 近く変化している。したがって層間界面垂直剛性 K_N の方が吸水に対してより敏感であるといえる。これは、プライの特性が樹脂（体積含有率約 33 %）と繊維の特性から決まる一方で、層間界面垂直剛性はほぼ樹脂の特性のみで決まることから、樹脂の材料特性変化に伴って層内特性

よりも層間特性の方が大きく変化するためであると考えられる．以下では一般化セルフコンシステントモデル^{[27], [28]}を用いて，Fig. 4.14 で見られた K_N と c の相対変化の妥当性に関して検討する．

ここでは，簡単のため以下の仮定を設定する．

- (1) 炭素繊維は吸水しない（吸水前後で炭素繊維の特性は変化せずに樹脂の特性のみが変化する）．
- (2) 層間樹脂リッチ領域の厚さ h_r は吸水前後で変化しない（式(4.3)の関係より，層間界面垂直剛性 K_N の変化は，樹脂弾性率 $\lambda_r + 2\mu_r$ の変化だけに起因する）．
- (3) 吸水前後で繊維体積含有率 V_f は変化しない．

上記仮定の下で，はじめに吸水前の樹脂弾性率 $\lambda_r^{\text{bef}} + 2\mu_r^{\text{bef}} = K_N^{\text{bef}} h_r$ ，吸水前の樹脂ポアソン比 ν_r^{bef} （上付き添え字“bef”は吸水前の材料特性を表す），繊維体積含有率 V_f を用いて，炭素繊維の繊維に垂直方向の弾性特性（せん断弾性率 μ_f およびポアソン比 ν_f ）を評価する．これは，一般化セルフコンシステントモデルにより有効媒質の弾性率 C_{22} および C_{44} （繊維方向： x_1 ）を計算した後，吸水前のプライ密度 ρ^{bef} と，

$$c_L = \sqrt{\frac{C_{22}}{\rho}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad (4.8)$$

の関係から求めたプライ縦波速度 c_L および横波速度 c_T を測定値にフィッティングさせることで同定する． C_{22} および C_{44} の計算方法は付録Dに示す．そして， $\lambda_r^{\text{bef}} + 2\mu_r^{\text{bef}}$ ， ν_r^{bef} ， V_f および同定した μ_f ， ν_f を用いて再度縦波・横波速度を計算し，それらを c_L^{bef} ， c_T^{bef} とする．

次に，同定した μ_f ， ν_f および，吸水後の樹脂弾性率 $\lambda_r^{\text{aft}} + 2\mu_r^{\text{aft}} = K_N^{\text{aft}} h_r$ ，吸水後の樹脂ポアソン比 ν_r^{aft} （上付き添え字“aft”は吸水後の材料特性を表す）， V_f を用いて，一般化セルフコンシステントモデルにより有効媒質の弾性率 C_{22}^{aft} を計算し，式(4.8)と吸水後プライ密度 ρ^{aft} を用いて吸水後のプライ縦波速度 c_L^{aft} を計算する．

本解析では，繊維体積含有率を $V_f = 0.67$ とし，吸水前後の層間界面垂直剛性はFig. 4.14(a)より $K_N^{\text{bef}} = 0.78 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ および $K_N^{\text{aft}} = 0.55 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ ，吸水前後のプライ密度はFig. 4.8(b)より $\rho^{\text{bef}} = 1.55 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ および $\rho^{\text{aft}} = 1.54 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ とする．繊維の弾性特性 μ_f および ν_f を同定するときのプライ縦波速度の測定値はFig. 4.14(b)より 3.06 km/s とする．横波速度は，積層板に対する横波垂直入射時の表面・底面反射波に対して，ゼロクロス法^[25]により算出した積層方向に関する平均的伝搬速度 1.46 km/s をプライ横波速度の測定値として用いる．吸水前の樹脂ポアソン比は未知であるため，文献^[4]を参考に $\nu_r^{\text{bef}} = 0.38$ とする．また，層間樹脂リッチ領域の厚さ h_r および吸水後の樹脂ポアソン比 ν_r^{aft} も未知であるため，これらのパラメータを変化させて c_L^{aft} を計算する．

層間樹脂リッチ領域の厚さ h_r を変化させたときの，吸水前の樹脂ヤング率 E_m^{bef} ，同定した

繊維の弾性特性 μ_f および ν_f ，同定した値を用いて計算した縦波・横波速度 c_L^{bef} および c_T^{bef} をFig. 4.15に示す．ここで，樹脂のヤング率は，

$$E_m = \frac{(1 - 2\nu_r)(1 + \nu_r)}{(1 - \nu_r)} K_N h_r, \quad (4.9)$$

の関係より求めた．Figure 4.15(b)に示す繊維の弾性特性を用いると，一般化セルコンシステントモデルにより計算した吸水前の縦波・横波速度（Fig. 4.15(c)）が上記測定値と良好に一致することが確認できる．次に，層間樹脂リッチ領域の厚さ h_r および吸水後の樹脂ポアソン

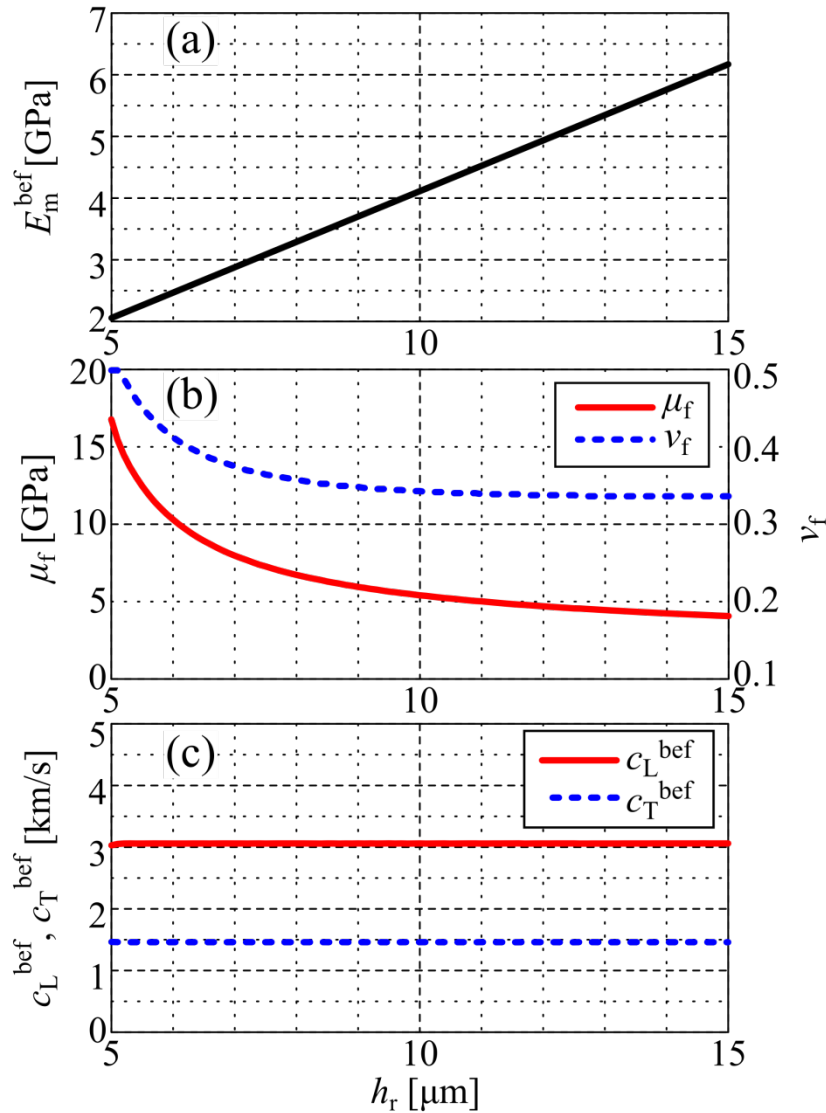


Fig. 4.15 The variation of (a) Young's modulus of resin before moisture absorption E_m^{bef} , (b) identified shear modulus μ_f and Poisson's ratio ν_f of carbon fiber, and (c) calculated ply longitudinal c_L^{bef} and shear c_T^{bef} wave velocity before moisture absorption with thickness of interlayer resin-rich regions h_r .

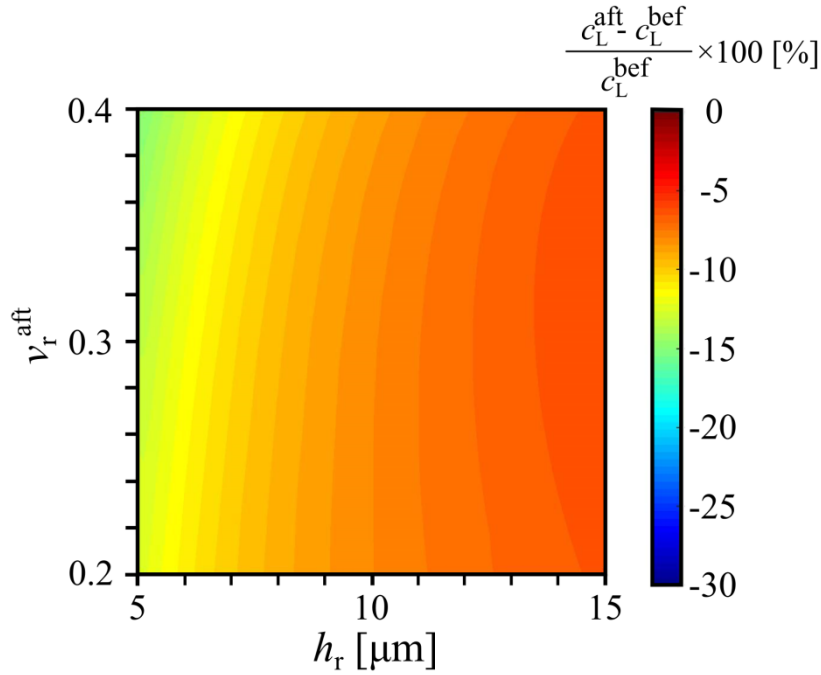


Fig. 4.16 The variation of relative ratio of calculated ply longitudinal wave velocity before and after moisture absorption with thickness of interlayer resin-rich regions h_r and Poisson's ratio of resin after moisture absorption v_m^{aft} .

比 v_r^{aft} を変化させて計算した吸水前後のプライ縦波速度の相対比を Fig. 4.16 に示す. Figure 4.16 を見ると, プライ縦波速度の相対的变化量は h_r および v_r^{aft} に依存するものの, 図に示す範囲内では層間界面垂直剛性 K_N の変化量(約 30 %)よりも低くなることがわかる. 一方で, Fig. 4.14(b)で見られたプライ縦波速度の相対的变化量(約 3 %)に比べると全体的に変化量が大きくなっている. この要因として, 本解析では層間樹脂リッチ領域厚さ h_r を吸水前後で一定として扱ったが(上記仮定(2)), 実際は吸水とともに h_r も変化したと考えられる. そこで, 以下では吸水による樹脂リッチ領域厚さの変化を考慮に入れて, Fig. 4.16 と同様のプライ縦波速度相対比の計算を行う.

積層板の板厚を H , プライ厚さを h_p , 積層数を N とすると, 以下の関係が成り立つ.

$$H = Nh_p + (N - 1)h_r. \quad (4.10)$$

吸水前後で積層板の板厚が

$$\Delta H = H^{\text{aft}} - H^{\text{bef}}, \quad (4.11)$$

だけ変化した場合, 積層板内の樹脂が均等に吸水したと仮定すると, 層間界面一つあたりの厚さの変化 Δh_r は

$$\Delta h_r = \frac{h_r}{N h_p (1 - V_f) + (N - 1) h_r} \Delta H, \quad (4.12)$$

で見積もることができる．ここで炭素繊維は吸水しないと仮定した．式(4.10)および(4.12)より，吸水後の層間樹脂リッチ領域厚さ h_r^{aft} は，吸水前の厚さ h_r^{bef} を用いて以下で与えられる．

$$h_r^{\text{aft}} = h_r^{\text{bef}} \left(1 + \frac{\Delta H}{H^{\text{bef}}(1 - V_f) + (N - 1) V_f h_r^{\text{bef}}} \right). \quad (4.13)$$

Figure 4.8(a)より吸水前後の積層板板厚を $H^{\text{bef}} = 3.94 \text{ mm}$ および $H^{\text{aft}} = 3.99 \text{ mm}$ として，式(4.13)を用いて計算したプライ縦波速度の相対比を Fig. 4.17 に示す．Figure 4.17 を見ると，Fig. 4.16 よりも相対的变化量が低下している．これは，吸水に伴う層間樹脂リッチ領域厚さの増加を考慮したことにより，吸水前後での樹脂弾性率の変化量が低下したためである．Figure 4.17（特に $h_r^{\text{bef}} > 10 \mu\text{m}$ ）が実験結果（相対的变化量約3%）に比較的近い値を示していることから，Fig. 4.14 で見られたプライ縦波速度と層間界面垂直剛性の相対変化の差は十分妥当であると考えられる．

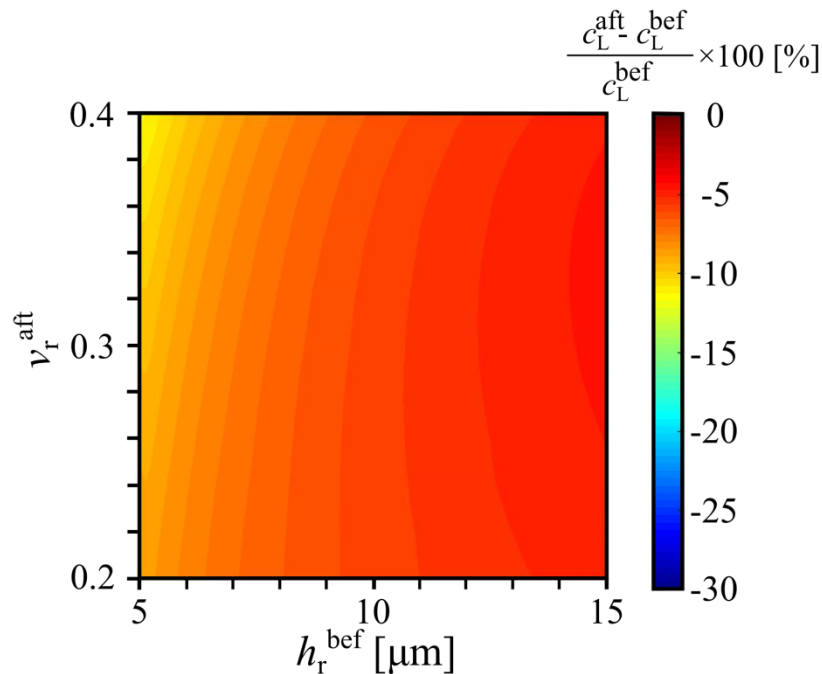


Fig. 4.17 The same as Fig. 4.16, but the thickness change of interlayer resin-rich regions due to the moisture absorption is considered.

4.5 第 4 章の結言

本章では，第 3 章で提案した層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度の評価手法に関して実験的検討を行った．16 層の CFRP 直交積層板に対して提案手法を適用し，試験片の断面画像観察に基づく概算値と比較することで同定した層間界面垂直剛性の妥当性を示した．また，先行研究で報告されているプライ弾性率の計算値と比較することで，提案手法により同定したプライ縦波速度の妥当性を示した．

次に，90℃の温水中で吸水させた 16 層の一方向強化 CFRP 積層板に対して，積層方向への平均的な伝搬速度と減衰係数の評価および，提案手法の適用による層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の評価を行った．その結果，以下のことを示した．

- (1) 積層板の吸水率（質量比率）は，温水に浸漬開始とともに単調増加し，30 日後に約 1.7 % でほぼ飽和した．また，浸漬時間とともに積層板の板厚が増加し密度が減少した．
- (2) 浸漬時間の増加とともに積層方向への平均的な伝搬速度は低下し，減衰係数は増大した．浸漬開始前に比べて速度は高々 5 % 程度しか変化しなかったのに対して，減衰係数は最大で 100 % 近く変化した．したがって，速度に比べて減衰係数の方が吸水による材料特性変化に対して敏感である．
- (3) 浸漬時間の増加とともに層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の両者が低下した．吸水試験開始前に比べて，プライ縦波速度は高々 3 % 程度しか変化しなかったのに対して，層間界面垂直剛性はおよそ 30 % 近く変化した．したがってプライの特性に比べて，層間特性の方が吸水の影響を受けやすいと考えられる．

4.6 第 4 章の参考文献

- [1]. A. Pilarski and J. L. Rose, “A transverse-wave ultrasonic oblique-incidence technique for interfacial weakness detection in adhesive bonds,” *Journal of Applied Physics* Vol. **63**, No. 2 (1988), pp. 300–307.
- [2]. A. Boström and G. Wickham, “On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **10**, No.4 (1991), pp. 139–149.
- [3]. S. I. Rokhlin and Y. J. Wang, “Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **89**, No. 2 (1991), pp. 503–515.
- [4]. 琵琶志朗，渡辺由布，小竹美広，大野信忠，「一方向 FRP における超音波減衰のモデリングー 一定式化および縦波減衰特性の解析ー」，材料 **50** 巻，1 号 (2001)，pp. 62–68.

- [5]. R. -B. Yang and A. K. Mal, “Multiple scattering of elastic waves in a fiber-reinforced composite,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* Vol. **42**, No. 12 (1994), pp. 1945–1968.
- [6]. R. J. Morgan, J. E. O’Neal, and D. L. Fanter, “The effect of moisture on the physical and mechanical integrity of epoxies,” *Journal of Materials Science* Vol. **15**, No. 3 (1980), pp. 751–764.
- [7]. 駒井謙治郎, 箕島弘二, 渋谷豊茂, 「一方向強化炭素繊維/エポキシ樹脂複合材料の引張破壊特性と疲労に及ぼす水環境効果」, 日本機械学会論文集 (A 編) **56** 巻, 525 号 (1990), pp. 1021–1029.
- [8]. 駒井謙治郎, 箕島弘二, 石川直明, 「CFRP の機械的特性と疲労挙動に及ぼす極低温度・吸水複合環境効果」, 日本機械学会論文集 (A 編) **59** 巻, 566 号 (1993), pp. 2278–2285.
- [9]. P. Chiou and W. L. Bradley, “Effects of seawater absorption on fatigue crack development in carbon/epoxy EDT specimens,” *Composites* Vol. **26**, No. 12 (1995), pp. 869–876.
- [10]. R. Selzer and K. Friedrich, “Mechanical properties and failure behavior of carbon fibre-reinforced polymer composites under influence of moisture,” *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* Vol. **28**, No. 6 (1997), pp. 595–604.
- [11]. 松田聡, 北條正樹, 落合庄治郎, 「層間高靱化 CFRP のモードⅡ層間はく離疲労に及ぼす水環境の影響」, 日本機械学会論文集 (A 編) **64** 巻, 622 号 (1998), pp. 1639–1645.
- [12]. B. C. Ray, “Temperature effect during humid ageing on interfaces of glass and carbon fibers reinforced epoxy composites,” *Journal of Colloid and Interface Science* Vol. **298**, No. 1 (2006), pp. 111–117.
- [13]. 青木雄一郎, 山田健, 石川隆司, 邊吾一, 「CFRP 積層板の衝撃後残留圧縮強度特性に及ぼす吸水・環境温度の影響」, 日本複合材料学会誌 **32** 巻, 4 号 (2006), pp. 163–170.
- [14]. 広中直人, 井上恵介, 神田昌枝, 西義武, 「CFRP の吸水による機械的性質の変化」, 日本金属学会誌 第 **71** 巻, 12 号 (2007), pp. 1102–1106.
- [15]. 加藤木秀章, 竹村兼一, 「炭素繊維強化複合材料の曲げ強度及びクリープ特性に及ぼす吸水の影響」, 日本複合材料学会誌 **35** 巻, 6 号 (2008), pp. 233–240.
- [16]. J. M. Ryan, R. Adams, and S. G. R. Brown, “Moisture ingress effect on properties of CFRP,” *Proceedings of the 17th International Conference on Composite Materials* (2009), pp. 73–78.
- [17]. E. P. -Pacheco, J. I. C. -Cupul, A. V. -González, and P. J. H. -Franco, “Effect of moisture absorption on the mechanical behavior of carbon fiber/epoxy matrix composites,” *Journal of Materials Science* Vol. **48**, No. 5 (2012), pp. 1873–1882.
- [18]. M. Meng, M. J. Rizvi, S. M. Grove, and H. R. Le, “Effects of hygrothermal stress on the failure of CFRP composites,” *Composite Structures* Vol. **133** (2015), pp. 1024–1035.
- [19]. 岡部洋二, 武田展雄, 「吸湿による CFRP 弾性率変化の超音波伝播特性による評価」, 日本機械学会論文集 (A 編) **64** 巻, 620 号 (1998), pp. 185–190.

- [20]. 岡部洋二, 武田展雄, 「吸湿による CFRP 粘性係数変化の超音波伝ば特性による評価」, 材料 **47** 巻, 5 号 (1998), pp. 472–477.
- [21]. J. Fortineau, E. L. Clézio, F. V. Meulen, and G. Feuillard, “Moisture content characterization in composite materials based on transmission measurements,” *Journal of Applied Physics* Vol. **101** (2007), 114911.
- [22]. Y. Jayet, R. Gaertner, P. Guym, R. Vassoille, and D. Zellouf, “Application of ultrasonic spectroscopy for hydrolytic damage detection in CRFC: correlations with mechanical tests and microscopic observations,” *Journal of Composite Materials* Vol. **34**, No. 16 (2000), pp. 1356–1368.
- [23]. S. A. Nielsen and H. Toftegaard, “Ultrasonic measurement of elastic constants in fiber-reinforced polymer composites under influence of absorbed moisture,” *Ultrasonics* Vol. **38** (2000), pp. 242–246.
- [24]. M. Cinquin, M. Castaings, B. Hosten, P. Brassier, and P. Pérès, “Monitoring of the moisture content in carbon-epoxy plates using Lamb waves,” *NDT&E International* Vol. **38**, No. 1 (2005), pp. 37–44.
- [25]. 川島紘一郎, 藤井郁也, 「固体中の超音波パルス伝ば時間を求める各種デジタル測定法の比較」, 日本機械学会論文集 (A 編) **59** 巻, 567 号 (1993), pp. 2758–2763.
- [26]. 川島紘一郎, 「超音波を用いた非破壊材料特性評価」, 日本機械学会論文集 (A 編) **67** 巻, 655 号 (2001), pp. 370–377.
- [27]. Z. Hashin and B. W. Rosen, “The elastic moduli of fiber-reinforced materials,” *Journal of Applied Mechanics* Vol. **31**, No. 2 (1964), pp. 223–232.
- [28]. R. M. Christensen and K. H. Lo, “Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* Vol. **27**, No. 4 (1979), pp. 315–330.

第5章 層間にスプリング界面を有する積層構造中の斜角入射超音波伝搬挙動の理論解析

5.1 緒言

第2—4章では、CFRP積層板の垂直入射超音波伝搬特性の理論的および実験的検討を行い、積層板の積層方向に関する特性（層間界面垂直剛性とプライ縦波速度）の評価法を構築した。これに加えて積層方向以外に関する特性である積層板の層間界面接線剛性やプライの異方性弾性率などの評価も重要な課題である。

1.4.3節で述べたように、先行研究において、斜角入射超音波伝搬特性を用いたCFRP積層板の異方性粘弾性特性の評価が行われている。しかし、それらは各プライが完全接着状態であると仮定し、層間樹脂リッチ領域の及ぼす影響に関しては検討されていない。そして評価された粘弾性特性はプライと層間界面の特性を合わせた積層板に対する総体的材料特性である。そのため、CFRP積層板の層間界面接線方向特性やプライの異方性弾性率の評価を行うには、層間樹脂リッチ領域の影響を考慮した斜角入射超音波伝搬解析およびその伝搬挙動の解明が必要不可欠である。

そこで本章では、層間にスプリング界面を有する積層板における斜角入射超音波伝搬特性の理論解析を実施し、層間界面剛性や周波数、入射角度が超音波伝搬特性に及ぼす影響に関して検討する。5.2節では、スティフネスマトリクス法の定式化を行い、積層板に任意角度で入射した超音波の複素振幅反射・透過率を計算する。5.3節では、一方向強化CFRP積層板の透過スペクトルに及ぼす層間界面剛性や入射角度の影響を考察する。5.4節ではフロケの定理を用いて無限積層構造中を伝搬するフロケ波の分散関係を導出する。そして、5.3節の有限積層構造における透過スペクトルと比較し、ストップバンド発生挙動を考察する。5.5節では、入射波としてガウシアンビームおよび平面調和波を考えた時の振幅透過率を比較することで、超音波ビームの空間的・時間的な有限幅が透過特性に及ぼす影響を考察する。5.6節では、一方向強化CFRP積層板に対する斜角入射超音波透過率の測定値と理論値の比較を示す。5.7節で本章の結言を述べ、5.8節に参考文献を示す。

5.2 スティフネスマトリクス法による斜角入射超音波の反射・透過率の理論計算

5.2.1 背景

ここでは、スティフネスマトリクス法を用いた斜角入射超音波の反射・透過率の理論計算について述べる。第2章で述べた伝達マトリクス法^{[1]-[5]}を三次元問題に拡張することで、原理上斜角入射超音波の反射・透過率を計算することが可能である。しかし三次元伝達マトリクス法は、周波数とプライ厚さの積が大きい場合に数値的不安定性を生じることが知られている^[6]。これは、伝達マトリクス法の定式化において 6×6 行列の逆行列を解く必要があり、周波数・プライ厚さの積が大きい場合にこの行列の条件数が増大するためである。この問題を解決するために提案されたのが、グローバルマトリクス法^{[7]-[10]}である。本手法は、有限要素法において要素ごとに求めたローカルマトリクスから解析領域全体のグローバルマトリクスを構成する操作と同様に、伝達マトリクス法においてプライごとに（または界面ごとに）求めた 6×6 行列を組み合わせることでグローバルマトリクスを構成する手法であり、このグローバルマトリクスからなる連立方程式を解くことで反射・透過率を求める。この場合、最終的に解かれる連立方程式は良条件になるため、数値的不安定性は生じない。ただし、本手法は積層数に伴ってグローバルマトリクスの大きさが増大するため、積層数が多い問題では計算コストがかかるといった欠点がある。グローバルマトリクス法以外にも伝達マトリクス法の数値的不安定性を解決する方法がいくつか提案されており、Lowe^[11]によりまとめられている。しかしそれらは伝達マトリクス法に比べて定式化が極めて複雑になり、“行列の積を機械的に繰り返すことで周期構造両端の波動場の関係を求める”という伝達マトリクス法の簡便さがほとんど失われている。一方で、使用する行列の大きさを 6×6 以下にしたまま、伝達マトリクス法の簡便さを失わずに数値的不安定性を解消したのが、Wang and Rokhlin^{[12], [13]}により提案されたスティフネスマトリクス法である。以下では、このスティフネスマトリクス法の定式化を行うことで、スプリング界面を有する積層構造における斜角入射超音波の複素振幅反射・透過率を計算する。

5.2.2 解析モデル

Figure 5.1 に示すような、 N 個のプライ（密度 ρ 、弾性率 C_{ijkl} 、厚さ h ）および $N-1$ 個の層間スプリング界面（垂直剛性 K_N 、接線剛性 K_T ）で構成される任意の積層構成の CFRP 積層板を考える。積層板は x_1 および x_2 方向には無限長さを有すると仮定し、層間界面の x_3 座標を $x_3 = Z_j$ ($j = 1, 2, \dots, N-1$)、積層板上下面の x_3 座標を $x_3 = Z_0, Z_N$ とする。積層板は完全流体（密度 ρ_0 、音速 c_0 ）中に保持されていると仮定し、積層板に対して角度 θ 、 φ で特徴づけられる方向から平面縦波調和波が斜角入射する状況を考える。ここで、 θ は入射角度、 φ は入射面と積層板最上部プライの繊維方向に垂直な面の隔たりを表す角度（以下、入射面角度）

である．入射面と $x_1 - x_3$ 平面が等しくなるように座標系を取ると，入射波および積層板上側に生じる反射波，積層板下側に生じる透過波の変位は，それぞれ以下で与えられる．

$$\mathbf{u}^{\text{inc}} = \begin{pmatrix} u_1^{\text{inc}} \\ u_2^{\text{inc}} \\ u_3^{\text{inc}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \exp\{ik_0[n_1x_1 + n_3(x_3 - Z_0)] - i\omega t\}, (x_3 > Z_0), \quad (5.1)$$

$$\mathbf{u}^{\text{ref}} = \begin{pmatrix} u_1^{\text{ref}} \\ u_2^{\text{ref}} \\ u_3^{\text{ref}} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ -n_3 \end{pmatrix} \exp\{ik_0[n_1x_1 - n_3(x_3 - Z_0)] - i\omega t\}, (x_3 > Z_0), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{u}^{\text{tra}} = \begin{pmatrix} u_1^{\text{tra}} \\ u_2^{\text{tra}} \\ u_3^{\text{tra}} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \exp\{ik_0[n_1x_1 + n_3(x_3 - Z_0)] - i\omega t\}, (x_3 < Z_N). \quad (5.3)$$

ここで， i は虚数単位， $k_0 = \omega/c_0$ は流体中での縦波の波数， ω は角周波数（ $\omega = 2\pi f$ ， f ：周波数）， t は時間， R は複素振幅反射率， T は複素振幅透過率である．また n_j （ $j = 1, 2, 3$ ）は入

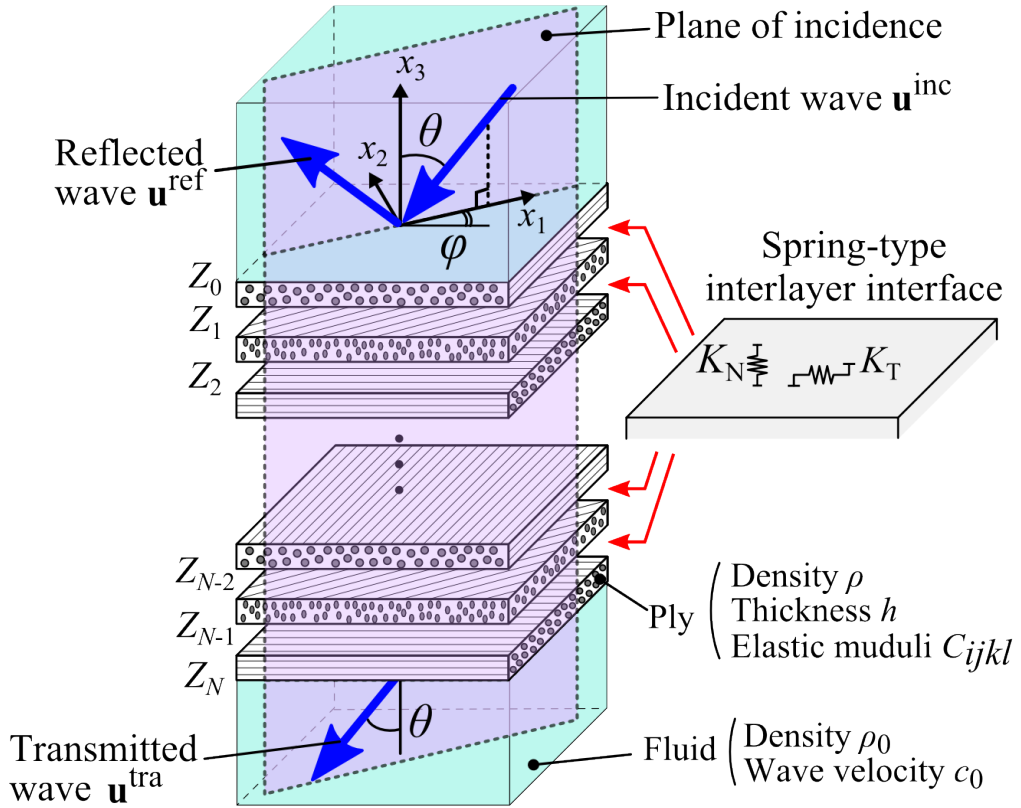


Fig. 5.1 An N -layered CFRP laminate with spring-type interlayer interfaces immersed in ideal fluid.

射波の位相が伝搬する方向を表す単位ベクトルの成分であり,

$$n_1 = -\sin \theta, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = -\cos \theta, \quad (5.4)$$

で与えられる.

5.2.3 プライ中を伝搬する弾性波の波数および偏向方向の計算

ここでは, プライ中を伝搬する弾性波の波数および偏向方向を求める. はじめに, 以下に示す微小変位動弾性問題の基礎方程式 (運動方程式, 応力 - ひずみ関係式, ひずみ - 変位関係式) を考える. なお, 本節では総和規約を用いる.

$$\frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x_l} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - f_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.5)$$

$$\sigma_{jl} = C_{jlpq} \varepsilon_{pq}, \quad j, l = 1, 2, 3, \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right), \quad p, q = 1, 2, 3. \quad (5.7)$$

ここで, σ_{jl} は応力テンソルの第 j, l 成分, ε_{pq} は微小ひずみテンソルの第 p, q 成分, u_j は変位の第 j 成分, f_j は体積力の第 j 成分を表す. 次に, 変位を平面調和波の形で仮定する.

$$u_j = P_j \exp[i(k_l x_l - \omega t)], \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.8)$$

ここで, P_j は波動の偏向方向を表す単位ベクトル ($P_l P_l = 1$) の第 j 成分, k_l は波数の第 l 成分である. 外力項を無視すると, 式(5.5)–(5.8)より以下のクリストフェル方程式が得られる.

$$(C_{jlpq} k_l k_q - \rho \omega^2 \delta_{jp}) P_p = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.9)$$

ここで, δ_{jp} はクロネッカーのデルタを表す. 入射波が式(5.1)で与えられるとき, スネルの法則により, 波数ベクトルの $x_1 - x_2$ 平面への射影は解析領域全体で保存される. つまり,

$$k_1 = k_0 n_1 = -k_0 \sin \theta, \quad k_2 = k_0 n_2 = 0, \quad (5.10)$$

となる. プライを繊維方向に関して横等方性を有する均質弾性体と仮定すると, 繊維方向が x_1 方向に等しいときの弾性係数行列はフォークト表記で

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 & C_{12}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22}^0 & C_{23}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22}^0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44}^0 & 0 & 0 \\ & & & & C_{55}^0 & 0 \\ \text{sym} & & & & & C_{55}^0 \end{bmatrix}, \quad C_{44}^0 = \frac{C_{22}^0 - C_{23}^0}{2}, \quad (5.11)$$

と表される．そして，プライの繊維方向が $x_1 - x_2$ 平面内にあり x_1 軸と角度 α を成している場合は，式(5.11)の $\mathbf{C}^0$ を x_3 軸まわりに $-\alpha$ だけ回転させることで

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\mathbf{C}^0\mathbf{M}^T, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2\alpha & -\frac{1}{2}\sin 2\alpha & 0 & 0 & 0 & \cos 2\alpha \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

として弾性係数行列を求めることができる．ここで $\mathbf{M}$ はボンド変換行列^[14]である．このときの弾性係数行列 $\mathbf{C}$ は必ず

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

の形の非零構造を取り，式(5.10)と(5.13)を用いると式(5.9)は以下の形になる．

$$\begin{bmatrix} C_{11}k_0^2 \sin^2 \theta + C_{55}k_3^2 - \rho\omega^2 & C_{16}k_0^2 \sin^2 \theta + C_{45}k_3^2 & -(C_{13} + C_{55})k_0k_3 \sin \theta \\ & C_{66}k_0^2 \sin^2 \theta + C_{44}k_3^2 - \rho\omega^2 & -(C_{36} + C_{45})k_0k_3 \sin \theta \\ \text{sym} & & C_{55}k_0^2 \sin^2 \theta + C_{33}k_3^2 - \rho\omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

非自明な偏向方向 P_j が存在するためには，式(5.14)左辺の行列式が零となる必要があり，それを具体的に計算することで，未知数 k_3 に関する六次方程式が得られる．

$$\beta_1 k_3^6 + \beta_2 k_3^4 + \beta_3 k_3^2 + \beta_4 = 0. \quad (5.15)$$

ここで β_j ($j = 1, 2, 3, 4$)の具体的な形は付録 E に示す．式(5.15)は， k_3^2 に関する三次方程式となるため解の公式 (カルダノの公式もしくはビエタの公式) により k_3^2 を求めることができ，その平方根を取ることでプライ中での波数の x_3 方向成分 k_3 が 6 個求まる．そして，求めた k_3 と式(5.14)および偏向方向ベクトルは単位ベクトルという条件 ($P_i P_i = 1$) から，偏向方向 P_j が求まる．なお，6 個の k_3 (P_j) は， x_3 の正方向および負方向に伝搬する 3 種類のバルク波モード (1 種類の縦波と 2 種類の横波) に対応する．一般に異方性弾性体中のバルク波の偏向方向は，純粋な縦波のように伝搬方向に対して平行ではなく，また純粋な横波のように伝搬方向に対して垂直でもない．そのため，異方性弾性体中のバルク波モードは準縦波，準

横波と呼ばれる。

5.2.4 プライのスティフネスマトリクスの計算

ここまでで、プライ内を伝搬する弾性波 6 種類の波数および偏向方向が定まった。次に、 m 番目 ($m = 1, 2, \dots, N$) のプライにおける変位を、これらの波の重ね合わせとして

$$u_j = \sum_{s=1}^3 \{A^{s+} P_j^{s+} \exp[ik_3^{s+}(x_3 - Z_m)] + A^{s-} P_j^{s-} \exp[ik_3^{s-}(x_3 - Z_{m-1})]\} \\ \times \exp[i(-x_1 k_0 \sin \theta - \omega t)], \quad j = 1, 2, 3, \quad Z_m < x_3 < Z_{m-1}, \quad (5.16)$$

と仮定する。ここで、上付き添え字の“ $s+$ ” (“ $s-$ ”) は x_3 の正方向 (負方向) に伝搬する s 番目のモード (準縦波と 2 種類の準横波のいずれか) を表し、 A は対応するモードの振幅を表す。列ベクトル $\mathbf{u}(z)$, $\mathbf{t}(z)$ を

$$\mathbf{u}(z) \equiv \begin{pmatrix} u_1|_{x_3=z} \\ u_2|_{x_3=z} \\ u_3|_{x_3=z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}(z) \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{13}|_{x_3=z} \\ \sigma_{23}|_{x_3=z} \\ \sigma_{33}|_{x_3=z} \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

で定義すると、プライ上下端 ($x_3 = Z_{(m-1)-}$ および $x_3 = Z_{m+}$) における変位は、式(5.16)から以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(Z_{(m-1)-}) \\ \mathbf{u}(Z_{m+}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^- & \mathbf{P}^+ \mathbf{H}^+ \\ \mathbf{P}^- \mathbf{H}^- & \mathbf{P}^+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A^{1-} \\ A^{2-} \\ A^{3-} \\ A^{1+} \\ A^{2+} \\ A^{3+} \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

ここで、第2章と同様に、下付き添え字の“ $m+$ ” (“ $m-$ ”) は、 $x_3 = Z_m$ に $x_3 > Z_m$ ($x_3 < Z_m$) から近づいたときの当該変数の極限值を表す。式(5.18)右辺の $\mathbf{P}^\pm$ と $\mathbf{H}^\pm$ は 3×3 行列であり、プライ厚さ $h = Z_{m-1} - Z_m$ を用いると以下で与えられる。

$$\mathbf{P}^\pm = \begin{bmatrix} P_1^{1\pm} & P_1^{2\pm} & P_1^{3\pm} \\ P_2^{1\pm} & P_2^{2\pm} & P_2^{3\pm} \\ P_3^{1\pm} & P_3^{2\pm} & P_3^{3\pm} \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{H}^\pm = \begin{bmatrix} \exp(\pm i k_3^{1\pm} h) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\pm i k_3^{2\pm} h) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\pm i k_3^{3\pm} h) \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

次に、式(5.6), (5.7), (5.13), (5.16) から $x_3 = Z_{(m-1)-}$ および $x_3 = Z_{m+}$ における応力を求める

と以下のように書ける．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_{(m-1)-}) \\ \mathbf{t}(Z_{m+}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^- & \mathbf{D}^+\mathbf{H}^+ \\ \mathbf{D}^-\mathbf{H}^- & \mathbf{D}^+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A^{1-} \\ A^{2-} \\ A^{3-} \\ A^{1+} \\ A^{2+} \\ A^{3+} \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

ここで，

$$\mathbf{D}^\pm = i \begin{bmatrix} d_1^{1\pm} & d_1^{2\pm} & d_1^{3\pm} \\ d_2^{1\pm} & d_2^{2\pm} & d_2^{3\pm} \\ d_3^{1\pm} & d_3^{2\pm} & d_3^{3\pm} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

$$d_1^{s\pm} = C_{55}P_3^{s\pm}k_1 + (C_{55}P_1^{s\pm} + C_{55}P_2^{s\pm})k_3^{s\pm}, \quad (5.23a)$$

$$d_2^{s\pm} = C_{45}P_3^{s\pm}k_1 + (C_{45}P_1^{s\pm} + C_{44}P_2^{s\pm})k_3^{s\pm}, \quad (5.23b)$$

$$d_3^{s\pm} = (C_{13}P_1^{s\pm} + C_{36}P_2^{s\pm})k_1 + C_{33}P_3^{s\pm}k_3^{s\pm}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (5.23c)$$

である．式(5.18)と(5.21)より， m 番目のプライ上下端の変位と応力は以下のように関係づけられる．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_{(m-1)-}) \\ \mathbf{t}(Z_{m+}) \end{pmatrix} = \mathbf{K}_m^{\text{ply}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(Z_{(m-1)-}) \\ \mathbf{u}(Z_{m+}) \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

ここで， 6×6 行列 $\mathbf{K}_m^{\text{ply}}$ はプライのスティフネスマトリクスであり，

$$\mathbf{K}_m^{\text{ply}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^- & \mathbf{D}^+\mathbf{H}^+ \\ \mathbf{D}^-\mathbf{H}^- & \mathbf{D}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^- & \mathbf{P}^+\mathbf{H}^+ \\ \mathbf{P}^-\mathbf{H}^- & \mathbf{P}^+ \end{bmatrix}^{-1}, \quad (5.25)$$

で与えられる．式(5.25)右辺右側の 6×6 行列は条件数が小さくなるため数値的不安定性を伴うことなく $\mathbf{K}_m^{\text{ply}}$ が計算可能である^{[12], [13]}．

5.2.5 層間界面のスティフネスマトリクスの計算

次に層間界面のスティフネスマトリクスを求める． $x_3 = Z_m$ ($m = 1, 2, \dots, N-1$) に位置する層間界面での境界条件は以下で与えられる．

$$\sigma_{13}|_{x_3=Z_{m+}} = \sigma_{13}|_{x_3=Z_{m-}} = K_T[u_1|_{x_3=Z_{m+}} - u_1|_{x_3=Z_{m-}}], \quad (5.26a)$$

$$\sigma_{23}|_{x_3=Z_{m+}} = \sigma_{23}|_{x_3=Z_{m-}} = K_T[u_2|_{x_3=Z_{m+}} - u_2|_{x_3=Z_{m-}}], \quad (5.26b)$$

$$\sigma_{33}|_{x_3=Z_{m+}} = \sigma_{33}|_{x_3=Z_{m-}} = K_N[u_3|_{x_3=Z_{m+}} - u_3|_{x_3=Z_{m-}}]. \quad (5.26c)$$

したがって、界面両側の変位と応力は以下のように関係づけられる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_{m+}) \\ \mathbf{t}(Z_{m-}) \end{pmatrix} = \mathbf{K}_m^{\text{sp}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(Z_{m+}) \\ \mathbf{u}(Z_{m-}) \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

ここで、 6×6 行列 $\mathbf{K}_m^{\text{sp}}$ は層間界面のスティフネスマトリクスであり

$$\mathbf{K}_m^{\text{sp}} = \begin{bmatrix} K_T & 0 & 0 & -K_T & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 & 0 & -K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_N & 0 & 0 & -K_N \\ K_T & 0 & 0 & -K_T & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 & 0 & -K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_N & 0 & 0 & -K_N \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

で与えられる。なお、CFRP 積層板の層間樹脂リッチ領域をスプリング界面でモデル化する場合、層間界面接線剛性 K_T は、樹脂のせん断弾性係数 μ と樹脂リッチ領域厚さ h_r を用いて

$$K_T = \frac{\mu}{h_r}, \quad (5.29)$$

と概算できる^{[15]-[17]}。式(5.29)および樹脂が等方性材料であるという観点から、本論文では、層間界面接線剛性は等方的である（ x_3 軸まわりの座標回転に対して不変）と仮定している。仮に接線剛性が異方的である（ x_3 軸まわりの回転に依存する）場合は、式(5.28)にカップリング効果を表す非零成分（(1,2)成分や(1,5)成分など）を付け加える必要がある。

5.2.6 グローバルスティフネスマトリクスの計算

ここでは、5.2.4 節と 5.2.5 節で求めたローカルスティフネスマトリクスを用いて、積層板全体としてのグローバルスティフネスマトリクスを求める。

はじめに、 m 番目のプライおよび界面のスティフネスマトリクスを以下の形に分解する。

$$\mathbf{K}_m^{\text{ply}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11}^A & \mathbf{L}_{12}^A \\ \mathbf{L}_{21}^A & \mathbf{L}_{22}^A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_m^{\text{sp}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11}^B & \mathbf{L}_{12}^B \\ \mathbf{L}_{21}^B & \mathbf{L}_{22}^B \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

ここで $\mathbf{L}_{IJ}^A$, $\mathbf{L}_{IJ}^B$ ($I, J = 1, 2$) は 3×3 行列である。このとき、式(5.24)と(5.27)より、 $x_3 = Z_{(m-1)-}$ および $x_3 = Z_{m-}$ の変位と応力の関係は以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_{(m-1)-}) \\ \mathbf{t}(Z_{m-}) \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{\text{ply+sp}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(Z_{(m-1)-}) \\ \mathbf{u}(Z_{m-}) \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{\text{ply+sp}}$ はプライと界面を合わせたスティフネスマトリクスであり、

$$\mathbf{K}^{\text{ply+sp}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11}^A + \mathbf{L}_{12}^A (\mathbf{L}_{11}^B - \mathbf{L}_{22}^A)^{-1} \mathbf{L}_{21}^A & -\mathbf{L}_{12}^A (\mathbf{L}_{11}^B - \mathbf{L}_{22}^A)^{-1} \mathbf{L}_{12}^B \\ \mathbf{L}_{21}^B (\mathbf{L}_{11}^B - \mathbf{L}_{22}^A)^{-1} \mathbf{L}_{21}^A & \mathbf{L}_{22}^B - \mathbf{L}_{21}^B (\mathbf{L}_{11}^B - \mathbf{L}_{22}^A)^{-1} \mathbf{L}_{12}^B \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

で与えられる．式(5.32)で得られた $\mathbf{K}^{\text{ply+sp}}$ を再度式(5.30)のように分解し、 $m+1$ 番目のプライのローカルスティフネスマトリクスとともに、式(5.32)に代入すると m 番目のプライ、 m 番目の界面、 $m+1$ 番目のプライを合わせたスティフネスマトリクスが得られる．この操作を再帰的に行うことで、積層板上下面における変位と応力を

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_{0-}) \\ \mathbf{t}(Z_{N+}) \end{pmatrix} = \mathbf{K}^L \begin{pmatrix} \mathbf{u}(Z_{0-}) \\ \mathbf{u}(Z_{N+}) \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

のように関係づける 6×6 のグローバルスティフネスマトリクス $\mathbf{K}^L$ が計算できる．

5.2.7 複素振幅反射・透過率の計算

式(5.1)–(5.4)より、 $x_3 = Z_{0+}$ および $x_3 = Z_{N-}$ における変位と応力は以下で与えられる．

$$\mathbf{u}(Z_{0+}) = \begin{pmatrix} -(1-R) \sin \theta \\ 0 \\ -(1+R) \cos \theta \end{pmatrix} \exp[i(-k_0 x_1 \sin \theta - \omega t)], \quad (5.34a)$$

$$\mathbf{u}(Z_{N+}) = \begin{pmatrix} -T \sin \theta \\ 0 \\ -T \cos \theta \end{pmatrix} \exp\{i[k_0(-x_1 \sin \theta + H \cos \theta) - \omega t]\}, \quad (5.34b)$$

$$\mathbf{t}(Z_{0+}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\rho_0 c_0 \omega (1-R) \end{pmatrix} \exp[i(-k_0 x_1 \sin \theta - \omega t)], \quad (5.34c)$$

$$\mathbf{t}(Z_{0+}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\rho_0 c_0 \omega T \end{pmatrix} \exp\{i[k_0(-x_1 \sin \theta + H \cos \theta) - \omega t]\}. \quad (5.34d)$$

ここで、 $H = Z_0 - Z_N$ は積層板の板厚を表す．式(5.33)、(5.34)および積層板 - 外部完全流体間の境界条件

$$\begin{aligned} u_3|_{x_3=Z_{m+}} &= u_3|_{x_3=Z_{m-}}, & \sigma_{33}|_{x_3=Z_{m+}} &= \sigma_{33}|_{x_3=Z_{m-}}, \\ \sigma_{13}|_{x_3=Z_{m+}} &= \sigma_{13}|_{x_3=Z_{m-}} = \sigma_{23}|_{x_3=Z_{m+}} = \sigma_{23}|_{x_3=Z_{m-}} = 0, & m &= 0, N, \end{aligned} \quad (5.35)$$

より、複素振幅反射・透過率は以下で与えられる．

$$R = \frac{-(\xi + S_{33}^L)(\xi + S_{66}^L) + S_{36}^L S_{63}^L}{(\xi - S_{33}^L)(\xi + S_{66}^L) + S_{36}^L S_{63}^L}, \quad (5.36a)$$

$$T = \frac{-2\xi S_{63}^L}{(\xi - S_{33}^L)(\xi + S_{66}^L) + S_{36}^L S_{63}^L} \exp(-ik_0 H \cos \theta). \quad (5.36b)$$

ここで,

$$\xi = \frac{\cos \theta}{i\rho_0 c_0 \omega}, \quad (5.37)$$

である. また, S_{IJ}^L ($I, J = 3, 6$) はグローバルスティフネスマトリクス $\mathbf{K}^L$ の逆行列の成分を表す. 式(5.36)を用いることで, 任意の積層構成の積層板に任意角度で入射した縦波の反射・透過率を計算することができる.

5.3 一方向強化 CFRP 積層板の透過スペクトルに及ぼす層間界面剛性と入射角度の影響

ここでは, 水中に保持された 11 層から成る一方向強化 CFRP 積層板における斜角入射超音波透過特性に関して検討を行う. 式(5.36b)と Table 5.1 に示すパラメータを用いて求めた振幅透過率 $|T|$ と周波数および界面剛性の関係を, 入射角度 $\theta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ の場合について Figs. 5.2, 5.3 に示す. なお, 入射面角度は $\varphi = 45^\circ$ としている. Figures 5.2, 5.3 の縦軸には, 層間界面垂直剛性および層間界面接線剛性を取っており, それぞれプライ厚さとプライ弾性率で規格化している. 図に示されている範囲は, $0.08 \leq K_N \leq 8 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ (Fig. 5.2),

Table 5.1 Material properties of the ply and the surrounding ideal fluid (water).

Elastic constants of ply (GPa) (transverse isotropy with x_1 as fiber direction is assumed.)	C_{11}	81.5
	C_{13}	4.9
	C_{33}	15.2
	C_{44}	3.2
	C_{66}	6.9
Density of ply ρ ($\times 10^3 \text{ kg/m}^3$)		1.50
Thickness of ply h (mm)		0.19
Density of fluid ρ_0 ($\times 10^3 \text{ kg/m}^3$)		1.00
Wave speed in fluid c_0 (km/s)		1.50

$0.04 \leq K_T \leq 4 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ (Fig. 5.3) に対応する. また, Figs. 5.2, 5.3 の横軸は, プライ厚さと x_3 方向へのプライ縦波速度 $\sqrt{C_{33}/\rho}$ (第2—4章で扱ったパラメータ c に対応) で規格化した周波数を表し, 図に示されている範囲は $0 \leq f \leq 16 \text{ MHz}$ に対応している.

Figures 5.2, 5.3 を見ると, 透過率は周波数や界面剛性のみならず入射角度にも強く依存していることが確認できる. これは, 入射角度に伴って材料内を伝搬するバルク波モードの数が増えることに起因している. プライ内を伝搬する3種類のバルク波モード(準縦波, 伝搬速度の速い準横波, 伝搬速度の遅い準横波)の臨界角と入射面角度 φ の関係を Fig. 5.4 に示す. 臨界角は屈折角が 90° になるときの入射角度を表し, この角度を超えると材料中を波が板厚方向に伝搬できないことを示している. なお, 本来積層板の透過特性を考察

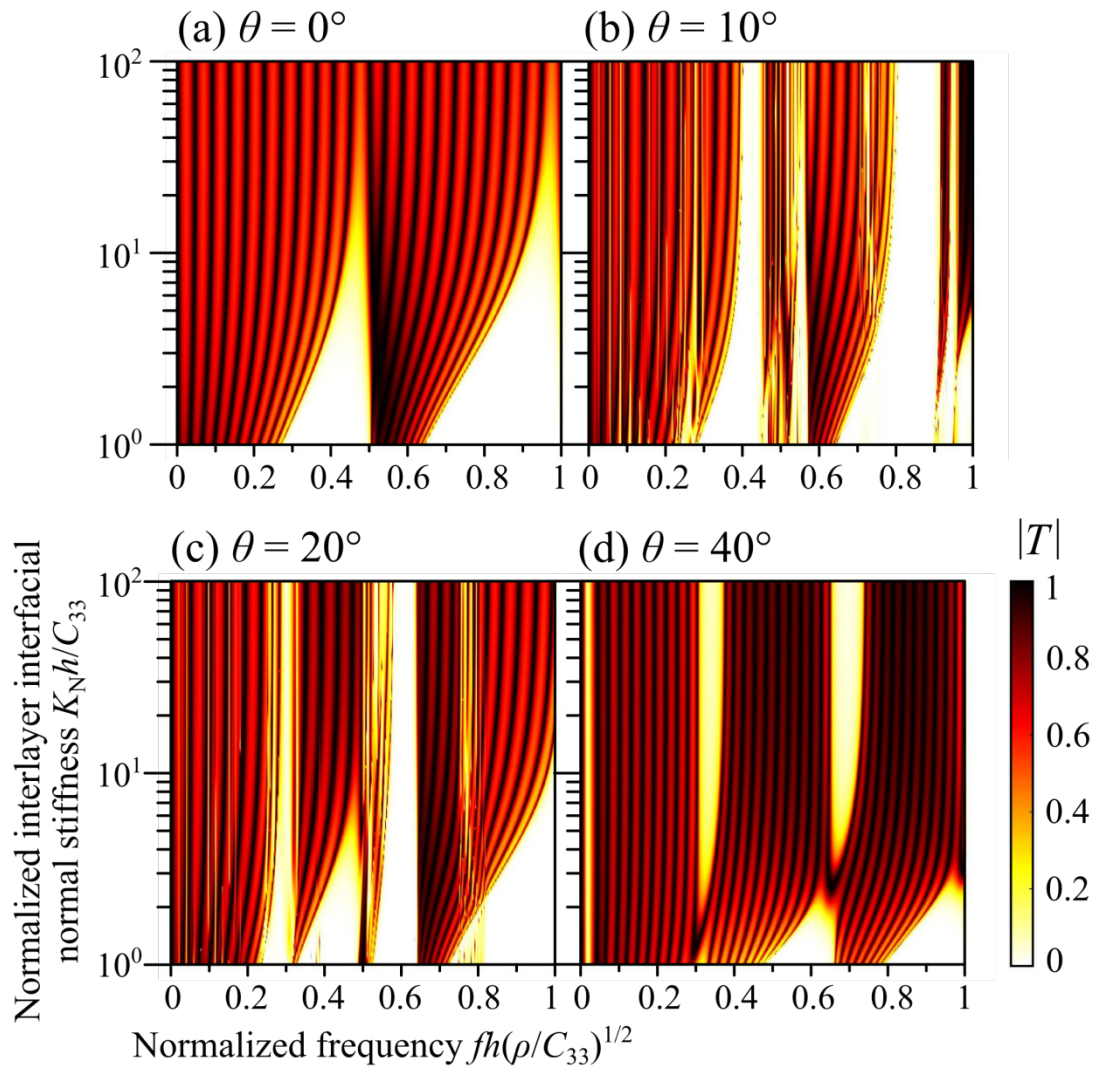


Fig. 5.2 The variation of amplitude transmission coefficient of a 16-layered unidirectional CFRP laminate with the normalized frequency and the normalized interlayer interfacial normal stiffness for four different angles of incidence ($\theta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ$) with fixed interfacial shear stiffness $K_T h / C_{66} = 1$ ($K_T = 0.04 \text{ GPa}/\mu\text{m}$) and angle for plane of incidence $\varphi = 45^\circ$.

するためには、次節で説明するフロケ波に対する臨界角^[18]を考える必要がある。しかし、一方向積層の場合は、フロケ波とバルク波の臨界角が極めて近い値を取る。したがって本節では、バルク波の臨界角を用いて議論を行う。Figure 5.4を見ると、臨界角が入射面角度 φ に依存している。これはプライ弾性率が異方性を有するためである。 $\varphi = 45^\circ$ では、各モードの臨界角は、 16° 、 36° 、 56° となる。

Figures 5.2(a), 5.3(a)の垂直入射では、第2章でも述べたように、材料内では純縦波のみが積層方向(x_3 方向)に伝搬する。そしてその振動方向は層間界面に対して常に垂直となるため、振幅透過率は層間界面垂直剛性 K_N には依存するが、接線剛性 K_T には依存しない。入射角度が 0° から増加すると (Figs. 5.2(b), 5.3(b))、純縦波が準縦波になり、それに加えて2種

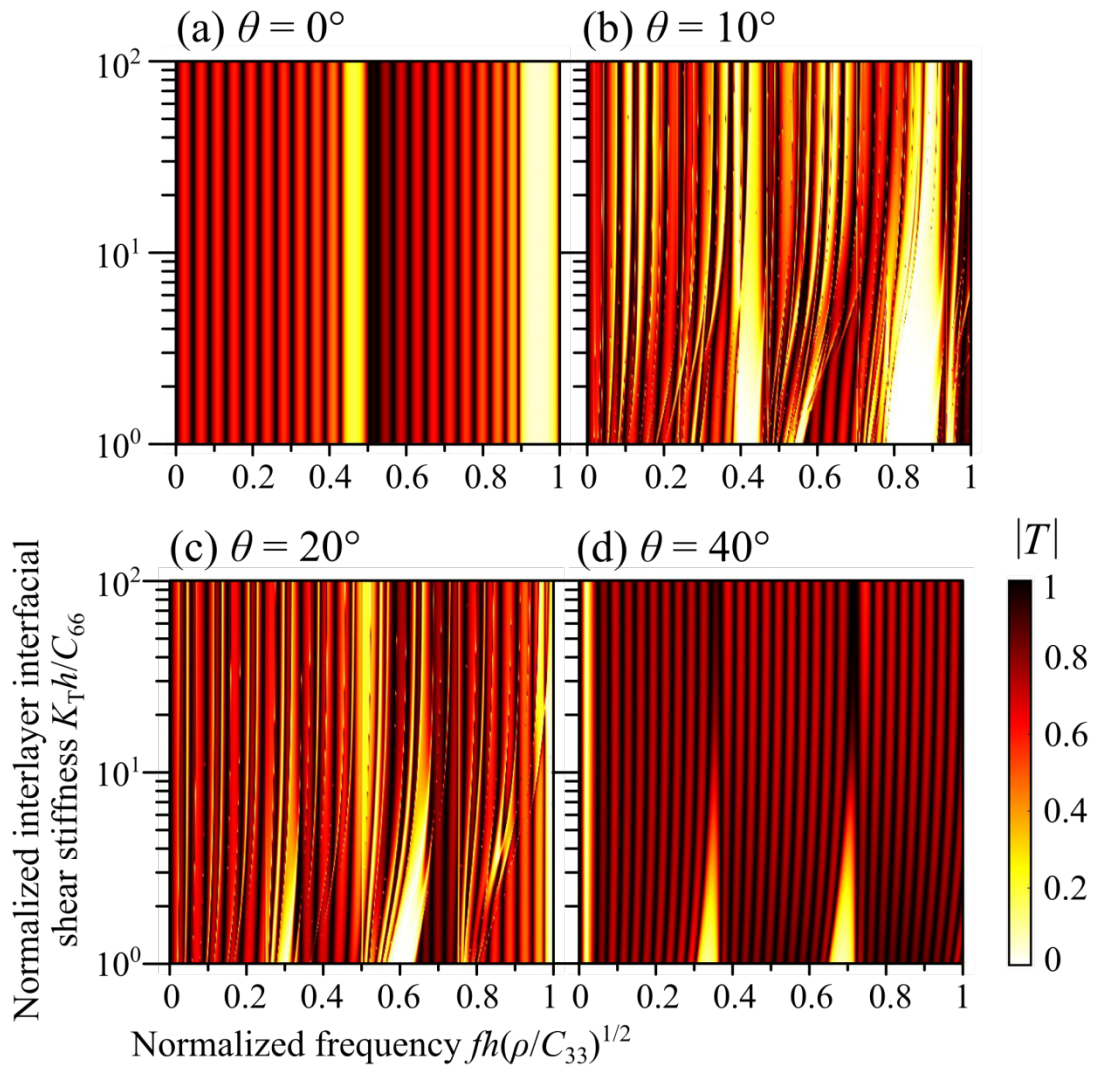


Fig. 5.3 The variation of amplitude transmission coefficient of a 16-layered unidirectional CFRP laminate with the normalized frequency and the normalized interlayer interfacial shear stiffness for four different angles of incidence ($\theta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ$) with fixed interfacial normal stiffness $K_N h / C_{33} = 10$ ($K_N = 0.8 \text{ GPa}/\mu\text{m}$) and angle for plane of incidence $\varphi = 45^\circ$.

類の準横波も材料中を伝搬する．そしてこれらの 3 種類のモードは一般に層間界面に平行な方向にも振動成分を有する．したがって透過率は層間界面接線剛性 K_T の影響も受けるようになり，垂直入射の場合に比べて複雑な周波数および界面剛性依存性を示す．入射角度 $\theta = 20^\circ$ では (Figs. 5.2(c), 5.3(c))，準縦波の臨界角 16° を超えているため準縦波は板厚方向へ伝搬しない．そのため，2 種類の準横波のみが材料中を板厚方向へ伝搬するが，透過率の周波数および界面剛性依存性は依然として複雑になる．さらに入射角度が増加し $\theta = 40^\circ$ になると (Figs. 5.2(d), 5.3(d))，伝搬速度の速い準横波の臨界角 36° を超えるため，伝搬速度の遅い準横波のみが材料中を板厚方向に伝搬する．そして，伝搬するモードが 1 種類のみ（純縦波）である垂直入射の場合 (Figs. 5.2(a), 5.3(a)) と同様に，透過率の周波数および界面剛性依存性は比較的単純になる．

さらに，Figs. 5.2, 5.3 を見ると，例えば Fig. 5.2(a)の $K_N h / C_{33} = 1$ における $0.28 \leq fh(\rho / C_{33})^{1/2} \leq 0.50$ や $0.65 \leq fh(\rho / C_{33})^{1/2} \leq 1$ のように，透過率が著しく低下する周波数帯が形成されている．そして，それらの発生する位置や幅は，層間界面剛性および入射角度に依存していることが確認できる．

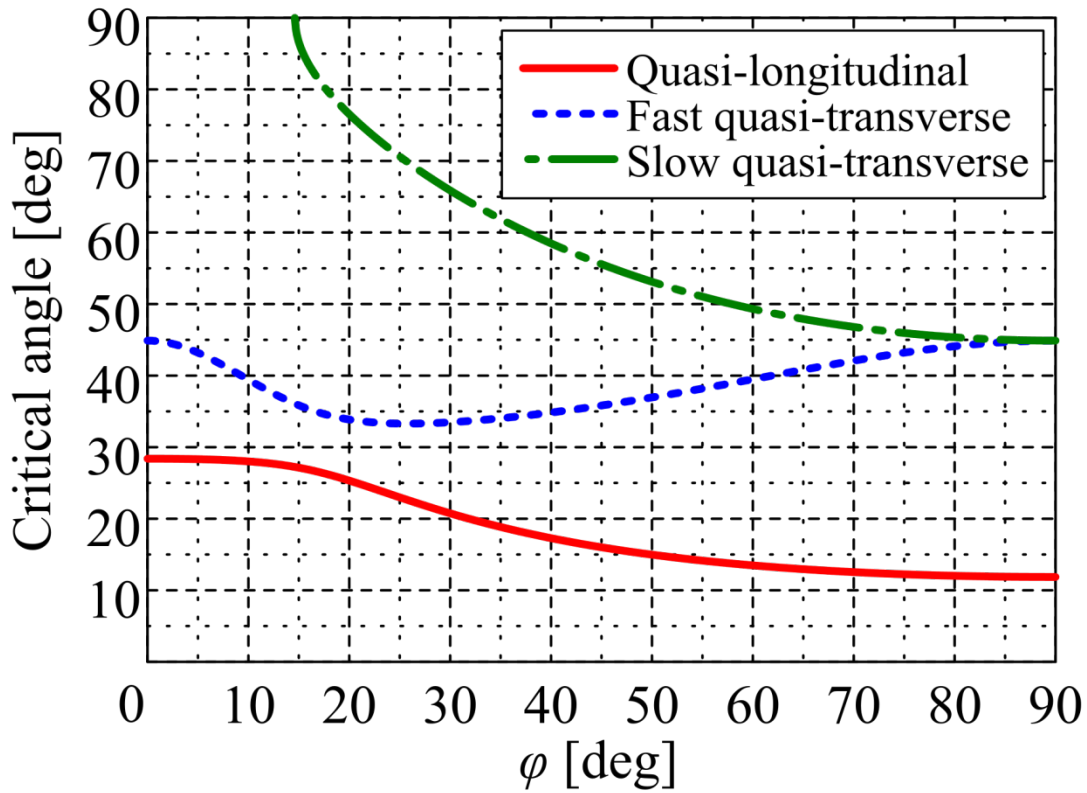


Fig. 5.4 The critical angle of three bulk modes at the water-ply interface as a function of the angle for plane of incidence ϕ .

5.4 無限積層構造における分散関係

ここでは、無限周期構造を伝搬するフロケ波の分散関係を用いることで、前節で確認された振幅透過率が著しく低下する周波数帯に関してその発生挙動を考察する。

5.4.1 フロケ波数の計算

ここではフロケ波数の計算方法について述べる。Figure 5.5 に示すような任意のプライ数および界面数からなるユニットセルが無限に繰り返される周期構造を考える。そしてユニットセル上下面の x_3 座標を Z_U , Z_L とし、ユニットセルのスティフネスマトリクスを $\mathbf{K}$ とすると、ユニットセル上下面の変位と応力の関係は以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_U) \\ \mathbf{t}(Z_L) \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(Z_U) \\ \mathbf{u}(Z_L) \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

一方で、フロケの定理^{[19]-[21]}を用いると、ユニットセル上下面の変位と応力の関係は

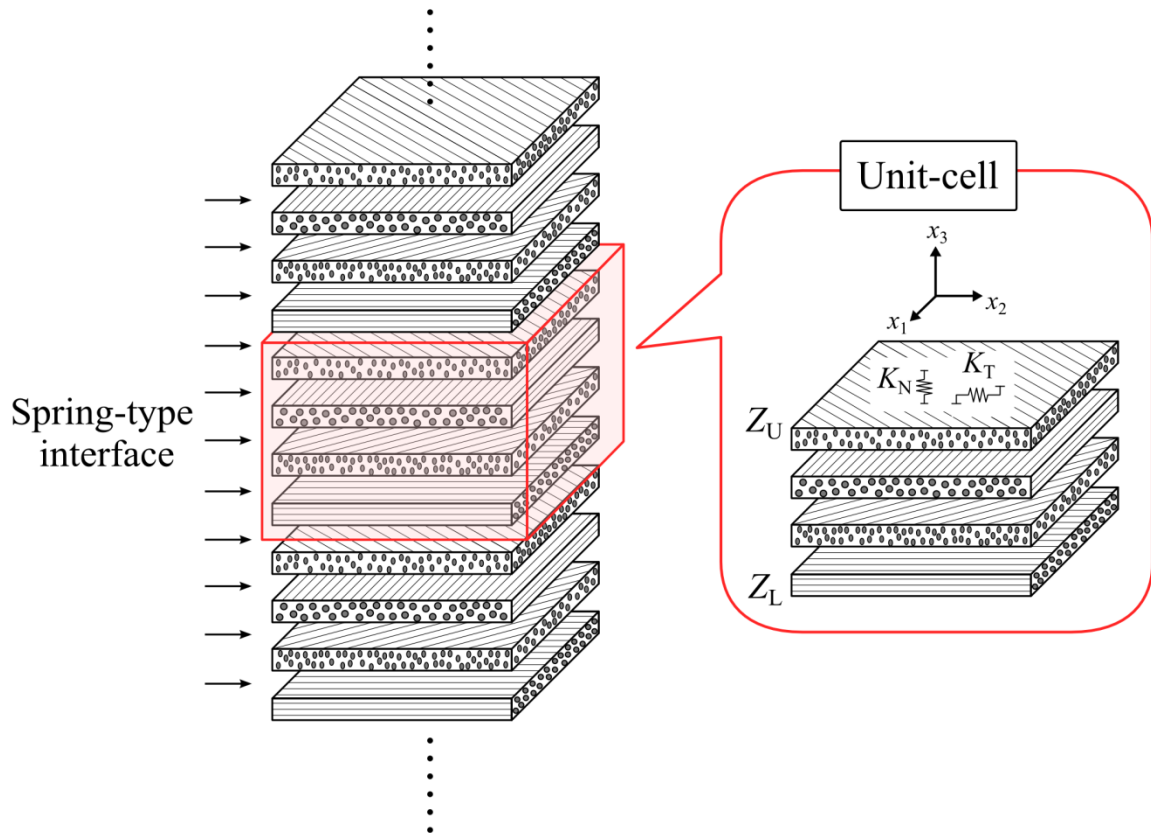


Fig. 5.5 An infinitely laminated composite and its unit-cell

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_U) \\ \mathbf{u}(Z_U) \end{pmatrix} = \exp(i\zeta h_u) \begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_L) \\ \mathbf{u}(Z_L) \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

と書くこともできる．ここで， ζ は無限周期構造中を伝搬するフロケ波の波数の x_3 方向成分を表す．また， $h_u = Z_U - Z_L$ はユニットセルの x_3 方向長さを表す．式(5.38)と(5.39)よりフロケ波数 ζ は以下の方程式を満足する．

$$A_3 \cos(3\zeta h_u) + A_2 \cos(2\zeta h_u) + A_1 \cos(\zeta h_u) + A_0 = 0. \quad (5.40)$$

ここで，

$$A_3 = \det(\mathbf{K}_{21}), \quad (5.41a)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} [\det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{21})] - \det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11}), \quad (5.41b)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} [\det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21}) - \det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}) + \det(\mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12})] - 2\det(\mathbf{K}_{21}), \quad (5.41c)$$

$$A_0 = \frac{1}{4} [\det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12})] - A_2, \quad (5.41d)$$

であり， $\mathbf{K}_{IJ}$ ($I, J = 1, 2$)は

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

で与えられる 3×3 行列である．式(5.40)および(5.41)の導出は付録 F に示す．

式(5.40)は， $-\pi/h_u \leq \text{Re}[\zeta] \leq \pi/h_u$ の範囲で， ζ に関して 6 個の解を有する．そして，それらを ζ_j ($j = 1, 2, \dots, 6$)とすると， $\zeta_1 = -\zeta_4$ ， $\zeta_2 = -\zeta_5$ ， $\zeta_3 = -\zeta_6$ といった関係がある．すなわち，6 個の解のうち 3 個は x_3 の正方向に伝搬するフロケ波に対応し，残りの 3 個は x_3 の負方向に伝搬するフロケ波を表す．式(5.40)より， ζ は

$$\zeta = \frac{2m\pi + \arg(X)}{h_u} - i \frac{\ln(X)}{h_u}, \quad (5.43)$$

で求められる．ここで m は整数であり， X ($= \exp(i\zeta h_u)$) は以下の二次方程式の解である．

$$X^2 - \eta X + 1 = 0. \quad (5.44)$$

ここで、 η は以下の三次方程式の解である。

$$A_3\eta^3 + A_2\eta^2 + (A_1 - 3A_3)\eta + 2(A_0 - A_2) = 0. \quad (5.45)$$

本論文では以下、 x_3 の正方向に伝搬するフロケ波のみに着目し、それらの波数を ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 とする。なお、フロケ波数の x_1 および x_2 方向成分は、ユニットセルのスティフネスマトリクス $\mathbf{K}$ を計算するときの初期条件として与える。これらの値は5.2節でも述べたように無限周期構造全体にわたって保存される（スネルの法則）。

ここで、5.3節で考えた一方向積層板の積層数を無限にした構造を考える。この場合、ユニットセルは、一つのプライと一つのスプリング界面で構成され、ユニットセル厚さ h_u はプライ厚さ h と等しくなる。Table 5.1 に示したプライの材料特性を使用して求めたフロケ波分散関係をFig. 5.6に示す。ここで、入射面角度は $\varphi = 45^\circ$ 、規格化界面剛性は $K_N h / C_{33} = 12.5$, $K_T h / C_{66} = 2.8$ ($K_N = 1 \text{ GPa}/\mu\text{m}$, $K_T = 0.1 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ に対応) としている。Figures 5.6(a)–(d)に示す θ は、フロケ波数の x_1 方向成分を水中からの入射角度に換算した値を表す。また、式(5.43)の m は、フロケ波数実部の曲線が連続になるように定めている。

フロケ波は、一般にプライ中を伝搬するバルク波（準縦波と2種類の準横波）の線形和（重ね合わせ）で表される^[20]。しかし、ここで考えているような一方向積層構造では、フロケ波はある特定のバルク波モードが支配的な伝搬形態となる。例えば、層間界面剛性が $K_N = K_T = \infty$ の場合、プライ同士は完全接着状態となり、層間界面では波動散乱が起らない。この場合、無限周期構造はプライと同じ材料特性を持つ無限媒質になり、フロケ波はプライ中を伝わるバルク波と完全に等しくなる。また、フロケ波数の x_1 , x_2 方向成分が零（ x_3 方向に伝搬）のときフロケ波は、単一のバルク波モード（純縦波と2種類の純横波のいずれか）のみで構成される。このような理由から、Fig. 5.6 では3種類のフロケ波をそれぞれの支配的なバルク波モードで表記している。

Figure 5.6 を見ると、ある特定の周波数領域においてフロケ波数の虚部が非零の値を取ることが確認できる。これらの領域がストップバンドである。なお、Fig. 5.6(a)の“L”で示す分散関係（純縦波のみで構成されるフロケ波）は、2.3節で示した積層方向に伝搬するフロケ波分散関係（Figs. 2.3(b), (c)）と同様のものである。ストップバンドは、以下の条件を満たすときに生成される（導出は付録Gに示す）。

$$\text{Re}[\zeta_\alpha]h_u/\pi + \text{Re}[\zeta_\beta]h_u/\pi = 2n. \quad (5.46)$$

ここで n は整数である。式(5.46)は、ストップバンドにおいて各ユニットセル境界からの反射波の位相が整合し、互いに強め合うことを示している。この現象はブラッグ反射と呼ばれる。 $\alpha = \beta$ のときは、1種類のフロケ波だけでブラッグ反射が起り、その結果 Fig. 5.6 に“L”, “T1”, “T2”, “QL”, “QT1”, “QT2” で表記されるストップバンドが形成される。一方で、 $\alpha \neq \beta$ のときは、2種類のフロケ波が組み合わさってブラッグ反射が起り、その結果 “QL-QT1”, “QL-QT2”, “QT1-QT2” で表記されるストップバンドが形成される。

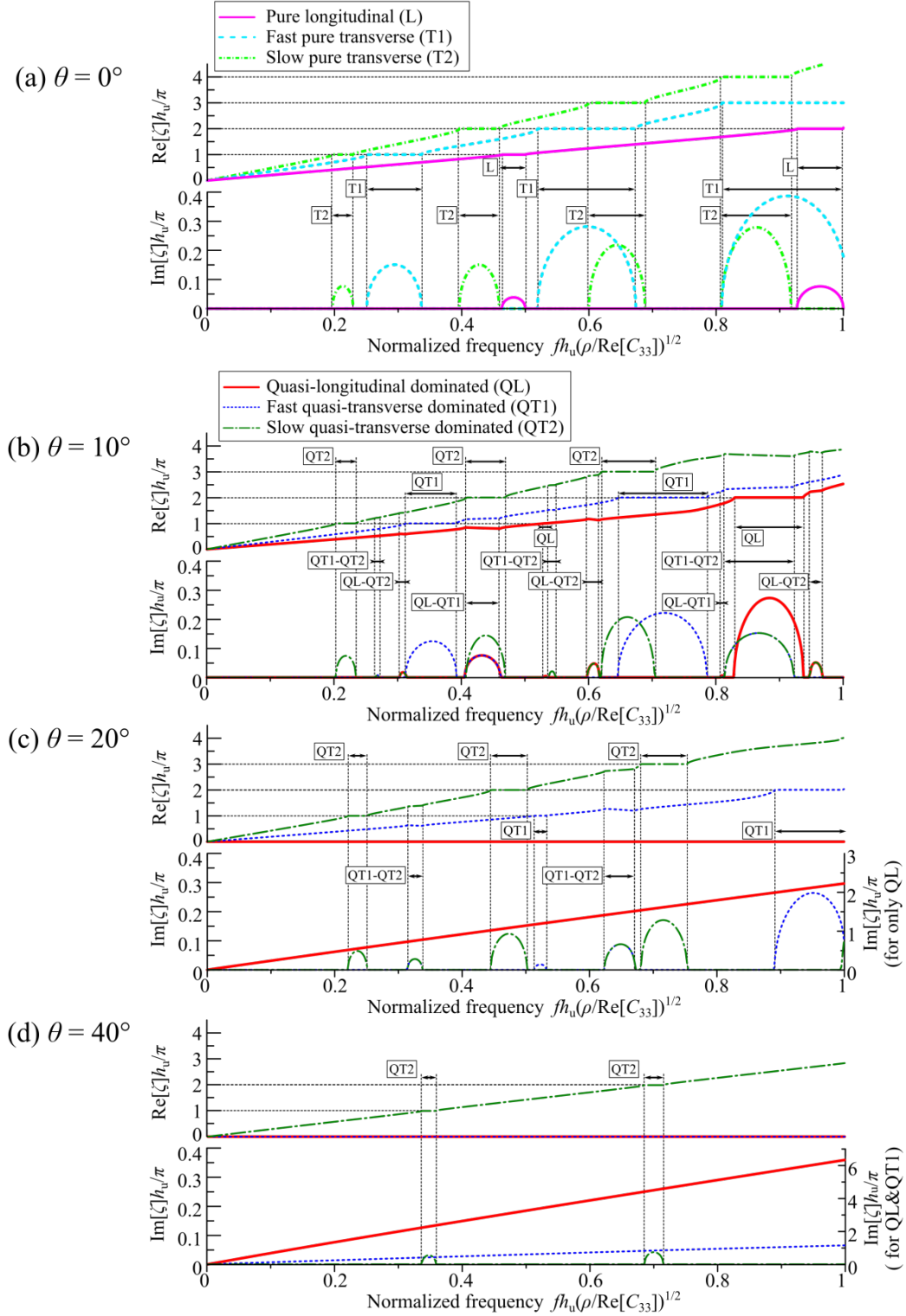


Fig. 5.6 The dispersion relation of Floquet waves propagating in a unidirectional infinite laminate structure for four different corresponding angles of incidence from water ($\theta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ$) with fixed interlayer interfacial normal stiffness $K_N h / C_{33} = 12.5$ ($K_N = 1 \text{ GPa}/\mu\text{m}$), shear stiffness $K_T h / C_{66} = 2.8$ ($K_T = 0.1 \text{ GPa}/\mu\text{m}$), and angle for plane of incidence $\varphi = 45^\circ$.

$\theta = 0^\circ$ のとき (Fig. 5.6(a)), 前述したように, 3種類のプロケ波モードはそれぞれ純縦波 (“L”) と純横波 (“T1” と “T2”) に等しくなる. そして, これらの波は層間界面においてモード変換を生じない. つまり, 純縦波 (純横波) が界面に垂直入射しても発生する反射波・透過波は必ず純縦波 (純横波) のみとなる. したがって, Fig. 5.6(a)では, 単一プロケ波モードによるストップバンドだけが生じ, 異なるモードが組み合わさったストップバンド (例えば “L-T1” など) は発生しない. $\theta = 10^\circ$ では (Fig. 5.6(b)), プロケ波は準縦波と準横波の両者から構成される. そしてこれらのバルク波モードは界面でモード変換を生じる. つまり, 準縦波 (準横波) が界面に斜角入射すると, 準縦波 (準横波) に加えて準横波 (準縦波) も反射波・透過波として発生する. そのため, Fig. 5.6(b)では単一プロケ波モードのストップバンドに加えて, 異なるプロケ波モード間のストップバンド (“QL-QT1” など) も形成される. これは, $\theta = 20^\circ$ のとき (Fig. 5.6(c)) も同様である. ただし, Fig. 5.6(c)では, 準縦波が臨界角を超えているため, 準縦波が支配的なプロケ波モードは積層方向に伝搬しない. これは, Fig. 5.6(c)のプロケ波数虚部 (赤線) がすべての周波数帯で非零となっている点からも確認できる. したがって, 準縦波が支配的なプロケ波モードはストップバンドの形成に寄与せず, 準横波が支配的な二つのプロケ波モードによってのみストップバンドが形成される. $\theta = 40^\circ$ のときは (Fig. 5.6(d)), 伝搬速度の速い準横波の臨界角を超えているため, それが支配的なプロケ波モードも積層方向に伝搬できなくなる. そのため, 伝搬速度の遅い準横波が支配的なプロケ波モードによってのみストップバンドが形成される.

5.4.2 有限積層構造の透過特性との比較

5.2.7 節の式(5.36b)により求めた有限積層構造の振幅透過スペクトルを, 積層数 $N = 2, 5, 10, 20, 40$ の場合について Fig. 5.7 に示す. 材料定数は Table 5.1 の値を使用し, 入射角度は $\theta = 10^\circ$, 入射面角度は $\varphi = 45^\circ$, 規格化界面剛性は $K_N h / C_{33} = 12.5$, $K_T h / C_{66} = 2.8$ ($K_N = 1 \text{ GPa}/\mu\text{m}$, $K_T = 0.1 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ に対応) としている. Figure 5.7 を見ると, $fh(\rho/C_{33})^{1/2} = 0.43$ および 0.87 付近に見られる透過率の低下する周波数帯が, 積層数の増加とともに明瞭になることが確認できる. そしてこれらの領域は, 対応するプロケ波分散関係 (Fig. 5.6(b)) におけるストップバンドと良好に対応している. これより, 積層数が有限な場合でも積層板内部でブラッグ反射が起こり, その結果透過スペクトルにおいてストップバンドが形成されることがわかる. また, Fig. 5.6(b)において準横波が支配的なプロケ波のストップバンド (“QT1”, “QT2”, “QT1-QT2”) に対応する周波数帯を Fig. 5.7 で見ると, 透過率の低下する領域が形成されていない. これは, 有限積層構造中の波動場が主に準縦波によって支配されているためである. つまり, 準横波が支配的なプロケ波がストップバンドに入っている場合でも, 超音波は準縦波として積層板を透過することができるため透過率が低下しない.

次に, 積層方向に伝搬可能な (ストップバンドに入っていない) プロケ波モードの数と周波数および層間界面剛性の関係を Fig. 5.8 と Fig. 5.9 に示す. 計算に用いたパラメータは

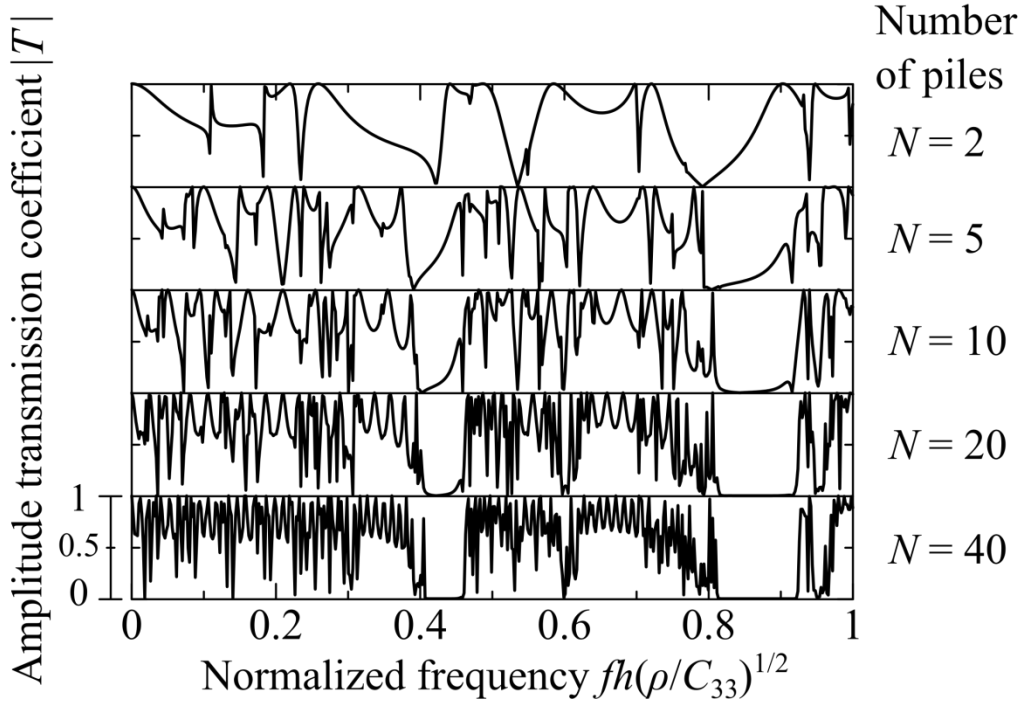


Fig. 5.7 The amplitude transmission spectrum for different number of plies ($N = 2, 5, 10, 20, 40$) for fixed interlayer interfacial normal stiffness $K_N h / C_{33} = 12.5$ ($K_N = 1$ GPa/ μm), shear stiffness $K_T h / C_{66} = 2.8$ ($K_T = 0.1$ GPa/ μm), angle of incidence $\theta = 10^\circ$, and angle for plane of incidence $\varphi = 45^\circ$.

Figs. 5.2, 5.3 に使用したものと同一であり、図中の θ は Fig. 5.6 と同様に、フロケ波数の x_1 方向成分を水中からの入射角度に換算した値を表す。なお Figs. 5.8(a), 5.9(a) ($\theta = 0^\circ$) においては、Figs. 5.2, 5.3 の有限積層構造透過率と比較するために、3 種類フロケ波のうち純縦波から構成されるモードのみを数えている。これは、有限積層構造と外部完全流体を考えた場合、横波は発生せず純縦波のみで透過特性が支配されるためである。Figures 5.8, 5.9 と Figs. 5.2, 5.3 を比較すると、Figs. 5.8, 5.9 において伝搬可能なフロケ波モードの数が零になるとき（白い領域）に Figs. 5.2, 5.3 の透過率が低下している。したがって、前述したように有限積層構造においてもブラッグ反射によりストップバンドが形成されることがわかる。しかし、Figs. 5.2, 5.3 で透過率が低下しているとき、Figures 5.8, 5.9 で伝搬可能なフロケ波モードの数が必ずしも零にはなっていない。例えば、Fig. 5.2(b) と Fig. 5.8(b) の $0.70 \leq fh(\rho/C_{33})^{1/2} \leq 0.76$, $1 \leq K_N h / C_{33} \leq 3$ の範囲を比較すると、透過率は著しく低下しているが、Fig. 5.8(b) に “QT2” で示すように、伝搬速度の遅い準横波が支配的なフロケ波モードは積層方向に伝搬可能である。これは前述したように、有限積層構造の斜角入射超音波透過率はある特定のバルク波モードによってほぼ支配されており（ $\theta = 10^\circ$ のときは準縦波、 $\theta = 20^\circ$ のときは伝搬速度の速い準横波）、その他のバルク波モードが積層板を透過できるかどうかにはほとんど影響を受けないためである。

また, Figs. 5.2(d), 5.3(d) ($\theta = 40^\circ$) の $fh(\rho/C_{33})^{1/2} = 0.02$ 近傍に透過率が比較的低下する領域が見受けられるが, 一方で Figs. 5.8(d), 5.9(d)を見ると対応する領域でストップバンドが形成されていない. これは, 積層板が有限厚さを有することに起因すると考えられる. つまり, 入射角度や周波数が積層板を長手方向 (x_1 方向) に伝搬する準ラム波の励起条件に一致し, その結果透過率が低下したと考えられる.

本解析では, 入射面角度を $\varphi = 45^\circ$ に固定して説明を行ったが, その他の φ の値における透過特性 (ストップバンド発生挙動) に関しても同様の議論で説明することが可能である.

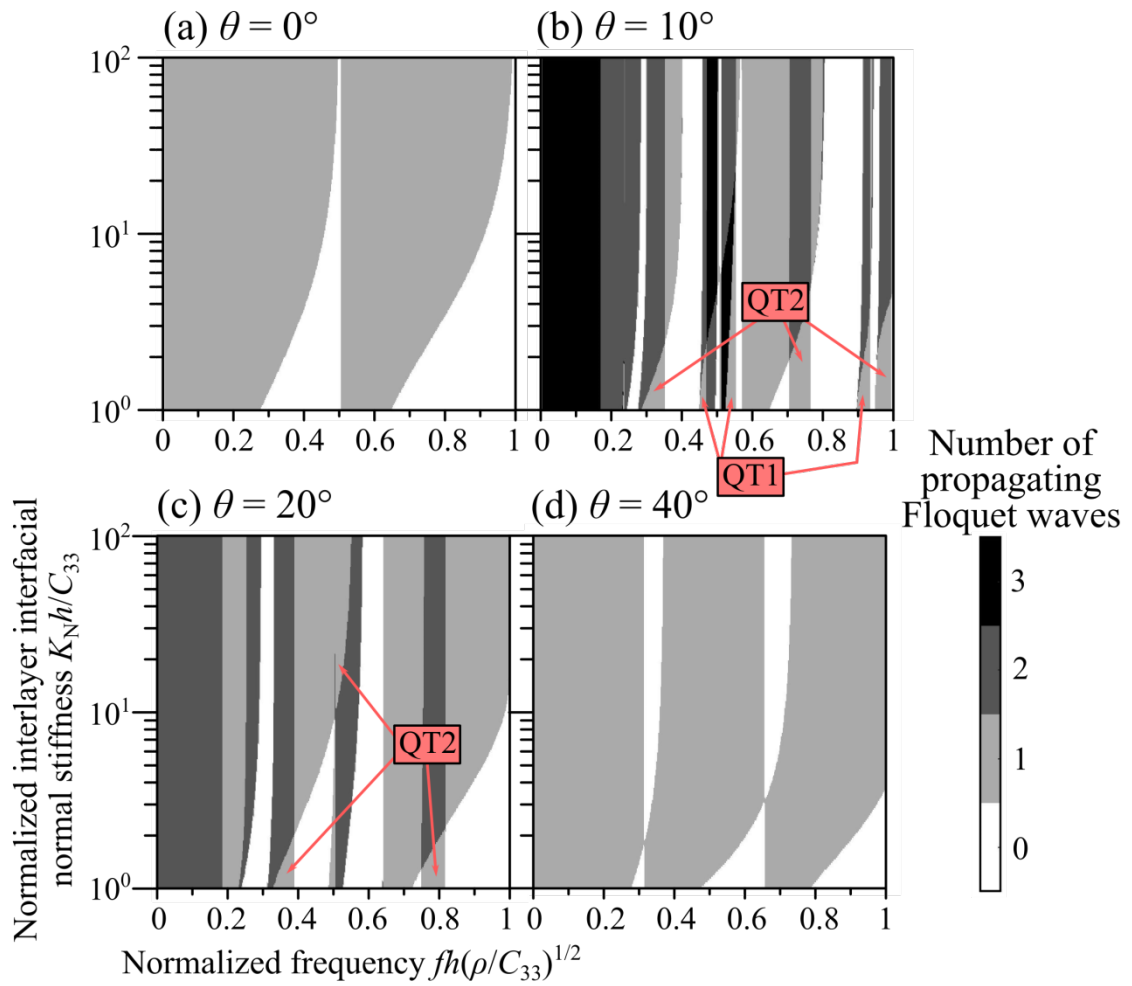


Fig. 5.8 The variation of the number of propagating Floquet waves with the normalized frequency and the normalized interfacial normal stiffness for four different corresponding angles of incidence from water ($\theta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ$) with fixed $K_T h / C_{66} = 1$ ($K_T = 0.04$ GPa/ μm) and angle for plane of incidence $\varphi = 45^\circ$.

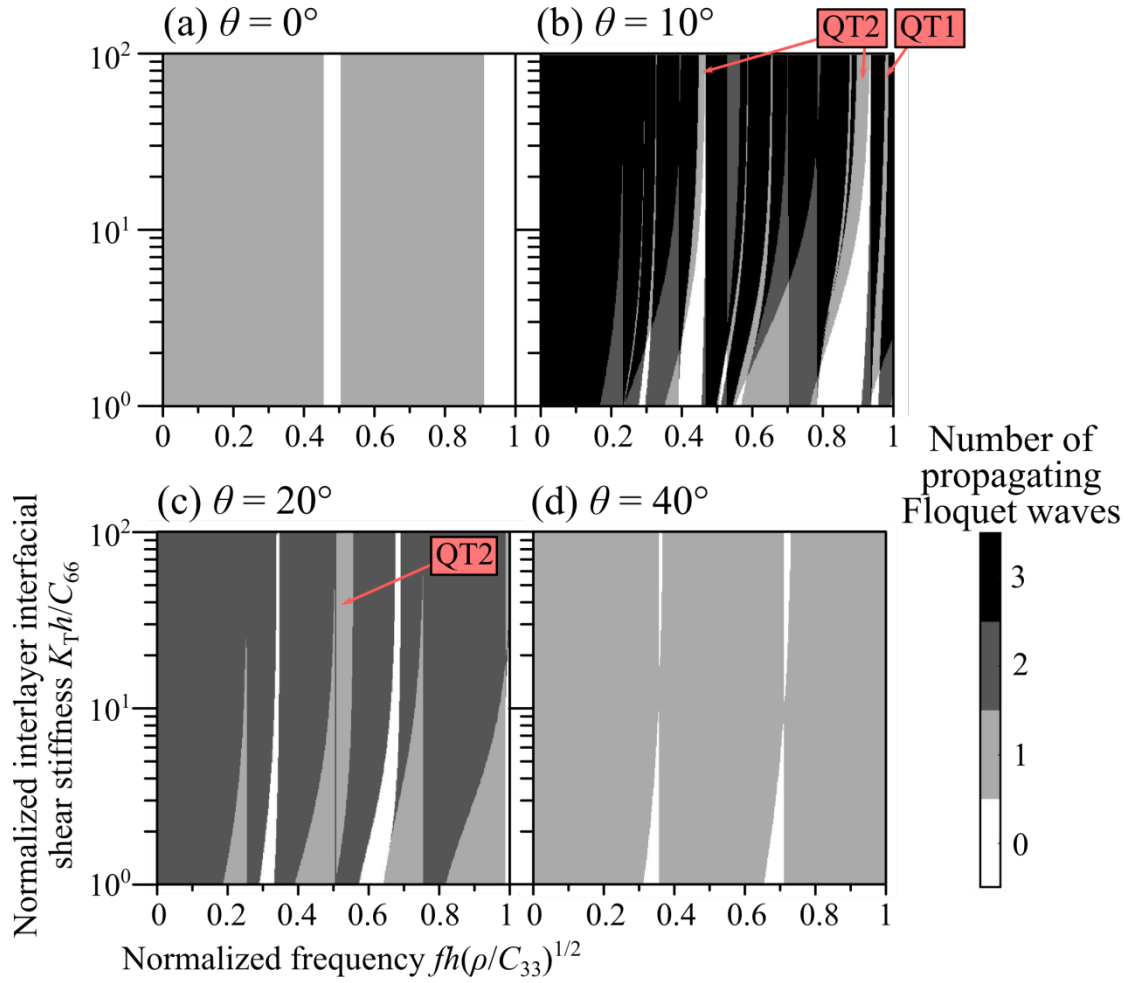


Fig. 5.9 The variation of the number of propagating Floquet waves with the normalized frequency and the normalized interfacial shear stiffness for four different corresponding angles of incidence from water ($\theta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ$) with fixed $K_N h / C_{33} = 10$ ($K_N = 0.8 \text{ GPa}/\mu\text{m}$) and angle for plane of incidence $\varphi = 45^\circ$.

5.5 空間的・時間的に有限幅を有する超音波ビームの透過特性

前節までに述べた斜角入射超音波伝搬解析では、入射波として平面調和波を仮定していた。一方で、実際の測定において探触子から発生する超音波は空間的・時間的に有限な幅を有する。そこで本節では、5.2 節で述べた単一入射角度および単一周波数における斜角入射超音波伝搬特性を様々な入射角度 (x_1 方向波数成分) および周波数に関して重ね合わせる

ことで、ガウシアンビームの過渡的な反射・透過挙動を求める．そして、その振幅透過率を計算し、平面調和波の透過率と比較することで、超音波ビームの空間的・時間的な有限幅が透過特性に及ぼす影響を考察する．

5.5.1 ガウシアンビームの励起および反射・透過特性の定式化

ここでは、ガウシアンビームが完全流体(密度 ρ_0 および音速 c_0)中を伝搬すると仮定する．流体中での応力は垂直成分のみが非零となり、総和規約を用いて以下のように書ける．

$$\sigma_{jl} = \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u_p}{\partial x_p} \delta_{jl}, \quad j, l = 1, 2, 3. \quad (5.47)$$

式(5.47)より、5.2.3 節で示した運動方程式(5.5)は、流体中において以下のように書ける．

$$\rho_0 c_0^2 \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_p \partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - f_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.48)$$

ここで、

$$u_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad (5.49)$$

$$f_j = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.50)$$

を満たすような変位および外力スカラーポテンシャル Φ 、 ψ を導入し、 $x_1 - x_3$ 平面内での二次元問題を考えると、式(5.48)は以下のようになる．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = -\psi. \quad (5.51)$$

ただし、式(5.51)では空間座標に依存しない項は無視している．

次に Fig. 5.10 に示すような、 $(x_1, x_3) = (x_1^0, x_3^0)$ に原点を取り、 $x_1 - x_3$ 座標系と角度 α を成す $\eta - \xi$ 座標系を考える．ただし、 $x_3^0 > 0$ と仮定する． x_2 軸と平行な線源が η 軸上に連続的に並んでいると仮定すると、音軸が ξ 軸と等しくなるようなガウシアンビームを励起する外力ポテンシャルは以下の形で表すことができる．

$$\psi(t, \eta, \xi) = g(t) \frac{1}{\sqrt{\pi} w_0} \exp \left[-\left(\frac{\eta}{w_0} \right)^2 \right] \delta(\xi). \quad (5.52)$$

ここで、 $g(t)$ は加振波形、 w_0 はビームの幅を定めるスポット径、 $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数である．これに対して、線源で励起された波動は η 軸近傍において平面波として伝搬すると近似し^{[22], [23]}、さらに $x_3 = x_3^0$ 上に線源が連続的に並んでいると仮定すると、式(5.52)は

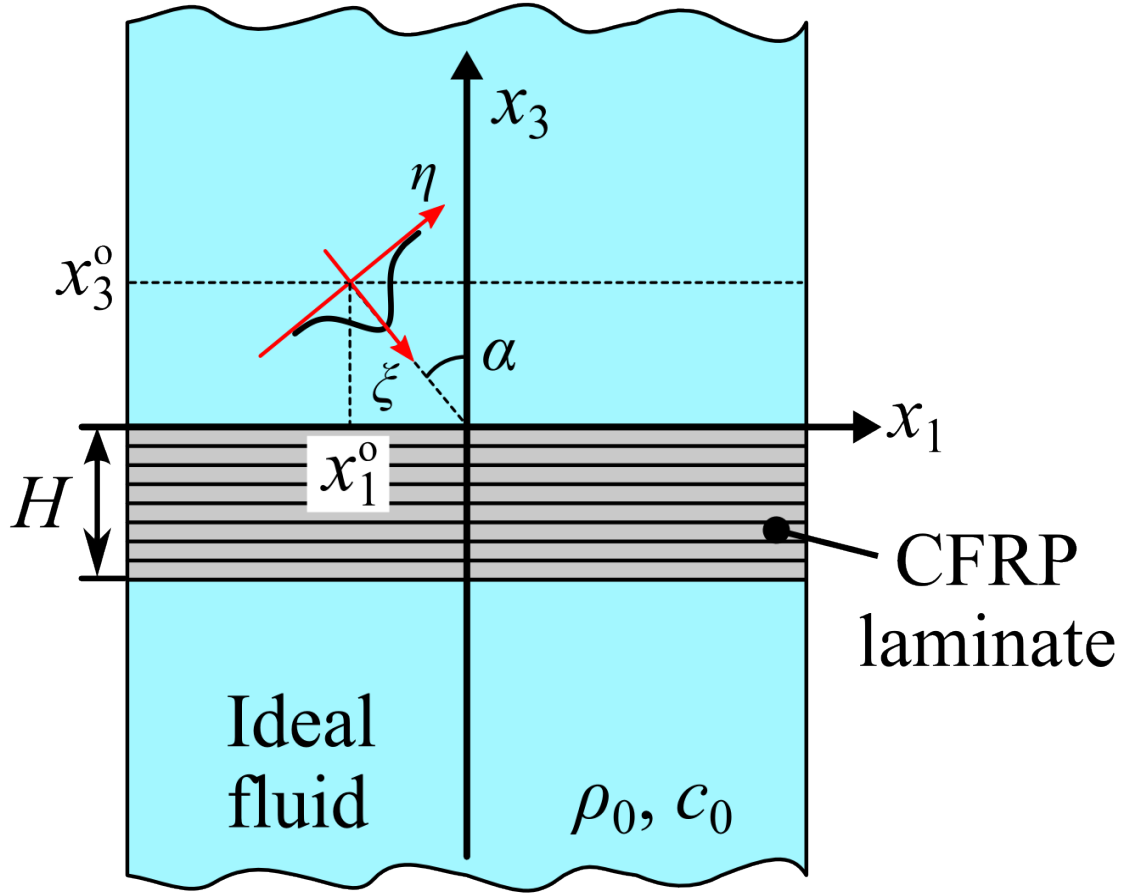


Fig. 5.10 A schematic of Gaussian beam excitation.

$x_1 - x_3$ 座標系において以下のように書き直せる.

$$\psi(t, x_1, x_3) = g(t) \frac{1}{\sqrt{\pi} w_0} \exp \left[- \left(\frac{\cos \alpha}{w_0} \right)^2 (x_1 - x_1^0)^2 \right] \exp[-ik_0(x_1 - x_1^0) \sin \alpha] \delta(x_3 - x_3^0). \quad (5.53)$$

ここで, $k_0 = \omega/c_0$ (ω : 角周波数) は流体中での波数を表す. 式(5.53)は, $x_3 = x_3^0$ 上に並ぶ線源を遅延 ($\exp[-ik_0(x_1 - x_1^0) \sin \alpha]$) を与えて加振することにより ξ 軸方向に伝搬するガウシアンビームを励起することを示している.

次に, t および x_1 に関する二次元フーリエ変換および逆変換を以下で定義する.

$$\hat{F}(\omega, k_{x1}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 F(t, x_1) \exp\{-i[k_{x1}(x_1 - x_1^0) - \omega t]\}, \quad (5.54a)$$

$$F(t, x_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_{x1} \hat{F}(\omega, k_{x1}) \exp\{i[k_{x1}(x_1 - x_1^0) - \omega t]\}. \quad (5.54b)$$

ここで、 k_{x1} は波数の x_1 方向成分である．式(5.53)を式(5.51)右辺に代入し，両辺を二次元フーリエ変換すると以下の式が得られる．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k_{x3}^2\right) \hat{\Phi}(\omega, k_{x1}, x_3) = -\hat{g}(\omega) \frac{1}{\cos \alpha} \exp\left\{-\left[\frac{w_0(k_0 \sin \alpha - k_{x1})}{2 \cos \alpha}\right]^2\right\} \delta(x_3 - x_3^0). \quad (5.55)$$

ここで、 k_{x3} は波数の x_3 方向成分であり，

$$k_{x3}^2 = k_0^2 - k_{x1}^2, \quad (5.56)$$

で与えられる．また，

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) \exp(i\omega t), \quad (5.57)$$

は加振波形 $g(t)$ の時間に関するフーリエ変換を表す．

一方で，一次元ヘルムホルツ方程式の基本解のうち点源からの外向き伝搬に対応する解は，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \beta^2\right) G(x_3, x_3^0) = -\delta(x_3 - x_3^0), \quad \beta^2 > 0, \quad (5.58a)$$

$$G(x_3, x_3^0) = \begin{cases} \frac{i}{2\beta} \exp(i\beta|x_3 - x_3^0|), & \beta \neq 0, \\ \frac{1}{2}|x_3 - x_3^0|, & \beta = 0, \end{cases} \quad (5.58b)$$

で与えられる^[24]．ここでは x_3 の負方向に伝搬するガウシアンビーム ($0 \leq \alpha < \pi/2$) を考えるため $\text{Re}[k_{x3}] > 0$, $\text{Im}[k_{x3}] = 0$ ($-k_0 < k_{x1} < k_0$) と仮定すると，式(5.58)より式(5.55)の解は

$$\hat{\Phi}(\omega, k_{x1}, x_3) = \frac{\hat{g}(\omega)}{2 k_{x3} \cos \alpha} \exp\left\{-\left[\frac{w_0(k_0 \sin \alpha - k_{x1})}{2 \cos \alpha}\right]^2\right\} \exp(ik_{x3}|x_3 - x_3^0|), \quad (5.59)$$

となる．式(5.49)，(5.54b)，(5.59)より完全流体中での変位は以下の形で与えられる．

$$u_1(t, x_1, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-k_0}^{k_0} dk_{x1} \hat{U}_1(\omega, k_{x1}, x_3) \exp\{i[k_{x1}(x_1 - x_1^0) - \omega t]\}, \quad (5.60a)$$

$$u_3(t, x_1, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-k_0}^{k_0} dk_{x1} \hat{U}_3(\omega, k_{x1}, x_3) \exp\{i[k_{x1}(x_1 - x_1^0) - \omega t]\}. \quad (5.60b)$$

ここで,

$$\hat{U}_1(\omega, k_{x1}, x_3) = \frac{\hat{g}(\omega)k_{x1}}{2k_{x3}\cos\alpha} \exp\left\{-\left[\frac{w_0(k_0\sin\alpha - k_{x1})}{2\cos\alpha}\right]^2\right\} \exp(ik_{x3}|x_3 - x_3^0|), \quad (5.61a)$$

$$\hat{U}_3(\omega, k_{x1}, x_3) = \frac{\hat{g}(\omega)\text{sgn}(x_3 - x_3^0)}{2\cos\alpha} \exp\left\{-\left[\frac{w_0(k_0\sin\alpha - k_{x1})}{2\cos\alpha}\right]^2\right\} \exp(ik_{x3}|x_3 - x_3^0|), (x_3 \neq x_3^0), \quad (5.61b)$$

であり, $\text{sgn}(\cdot)$ は符号関数である. なお, 式(5.59)は $x_3 = x_3^0$ において x_3 に関して微分可能でないため, 式(5.61b)は $x_3 \neq x_3^0$ としている.

次に, Fig. 5.10 に示すように $-H \leq x_3 \leq 0$ に積層板が配置されていると仮定すると, 入射波, 反射波および透過波の変位は以下で与えられる.

入射波 ($0 < x_3 < x_3^0$) :

$$u_1^{\text{inc}}(t, x_1, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-k_0}^{k_0} dk_{x1} \hat{U}_1^{\text{inc}}(\omega, k_{x1}, x_3) \exp\{i[k_{x1}(x_1 - x_1^0) - \omega t]\}, \quad (5.62a)$$

$$u_3^{\text{inc}}(t, x_1, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-k_0}^{k_0} dk_{x1} \hat{U}_3^{\text{inc}}(\omega, k_{x1}, x_3) \exp\{i[k_{x1}(x_1 - x_1^0) - \omega t]\}, \quad (5.62b)$$

$$\hat{U}_1^{\text{inc}}(\omega, k_{x1}, x_3) = \frac{\hat{g}(\omega)k_{x1}}{2k_{x3}\cos\alpha} \exp\left\{-\left[\frac{w_0(k_0\sin\alpha - k_{x1})}{2\cos\alpha}\right]^2\right\} \exp[ik_{x3}(x_3^0 - x_3)], \quad (5.62a)$$

$$\hat{U}_3^{\text{inc}}(\omega, k_{x1}, x_3) = \frac{\hat{g}(\omega)}{2\cos\alpha} \exp\left\{-\left[\frac{w_0(k_0\sin\alpha - k_{x1})}{2\cos\alpha}\right]^2\right\} \exp[ik_{x3}(x_3^0 - x_3)]. \quad (5.62b)$$

反射波 ($x_3 > 0$) :

$$u_1^{\text{ref}}(t, x_1, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-k_0}^{k_0} dk_{x1} \hat{U}_1^{\text{ref}}(\omega, k_{x1}, x_3) \exp\{i[k_{x1}(x_1 - x_1^0) - \omega t]\}, \quad (5.63a)$$

$$u_3^{\text{ref}}(t, x_1, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-k_0}^{k_0} dk_{x1} \hat{U}_3^{\text{ref}}(\omega, k_{x1}, x_3) \exp\{i[k_{x1}(x_1 - x_1^0) - \omega t]\}, \quad (5.63b)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_1^{\text{ref}}(\omega, k_{x1}, x_3) \\ = \frac{R(\omega, k_{x1})\hat{g}(\omega)k_{x1}}{2k_{x3}\cos\alpha} \exp\left\{-\left[\frac{w_0(k_0\sin\alpha - k_{x1})}{2\cos\alpha}\right]^2\right\} \exp[ik_{x3}(x_3^0 + x_3)], \end{aligned} \quad (5.63c)$$

$$\hat{U}_3^{\text{ref}}(\omega, k_{x1}, x_3) = \frac{R(\omega, k_{x1})\hat{g}(\omega)}{2\cos\alpha} \exp\left\{-\left[\frac{w_0(k_0\sin\alpha - k_{x1})}{2\cos\alpha}\right]^2\right\} \exp[ik_{x3}(x_3^0 + x_3)]. \quad (5.63d)$$

透過波 ($x_3 < -H$) :

$$u_1^{\text{tra}}(t, x_1, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-k_0}^{k_0} dk_{x1} \hat{U}_1^{\text{tra}}(\omega, k_{x1}, x_3) \exp\{i[k_{x1}(x_1 - x_1^0) - \omega t]\}, \quad (5.64a)$$

$$u_3^{\text{tra}}(t, x_1, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-k_0}^{k_0} dk_{x1} \hat{U}_3^{\text{tra}}(\omega, k_{x1}, x_3) \exp\{i[k_{x1}(x_1 - x_1^0) - \omega t]\}, \quad (5.64b)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_1^{\text{tra}}(\omega, k_{x1}, x_3) \\ = \frac{T(\omega, k_{x1})\hat{g}(\omega)k_{x1}}{2k_{x3}\cos\alpha} \exp\left\{-\left[\frac{w_0(k_0\sin\alpha - k_{x1})}{2\cos\alpha}\right]^2\right\} \exp[ik_{x3}(x_3^0 - x_3)], \end{aligned} \quad (5.64c)$$

$$\hat{U}_3^{\text{tra}}(\omega, k_{x1}, x_3) = \frac{T(\omega, k_{x1})\hat{g}(\omega)}{2\cos\alpha} \exp\left\{-\left[\frac{w_0(k_0\sin\alpha - k_{x1})}{2\cos\alpha}\right]^2\right\} \exp[ik_{x3}(x_3^0 - x_3)]. \quad (5.64d)$$

ここで、 $R(\omega, k_{x1})$ および $T(\omega, k_{x1})$ は、5.2節のスティフネスマトリクス法により求めた単一周波数および単一 x_1 方向波数成分(単一入射角度)における複素振幅反射・透過率(式(5.36))を表す。なお、式(5.10)で述べたように流体の音速および周波数が既知の場合は、引数として入射角度を与えることと x_1 方向波数成分を与えることは等価である。

式(5.62)–(5.64)により求めた、一方向強化CFRP積層板(16層)に対するガウシアンビームの反射・透過挙動の具体例を以下に示す。ここでは線源における加振波形を

$$g(t) = \exp\left[-\frac{(t - t_0)^2}{2\sigma^2}\right] \cos(2\pi ft), \quad (5.65)$$

で与える。ここで $t_0 = 0.50 \mu\text{s}$, $\sigma = 0.05 \mu\text{s}$, $f = 8 \text{ MHz}$ とする。このときの $g(t)$ およびそ

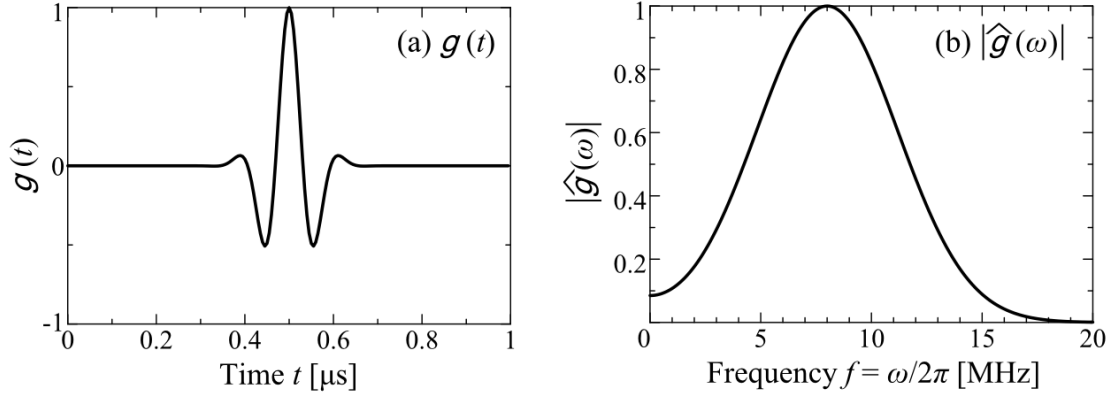


Fig. 5.11 (a) The excitation waveform and (b) its amplitude spectrum for the computation of Gaussian beam propagation.

の振幅スペクトル $|\hat{g}(\omega)|$ を Fig. 5.11 に示す. Figure 5.11(b)より, 加振波形はおおよそ 0~18 MHz の周波数成分を含むことがわかる. 外部完全流体 (水) および積層板の材料定数は Table 5.1 (p. 90) の値を使用し, ビームの入射角度は $\alpha = 10^\circ$, スポット径は $w_0 = 3 \text{ mm}$, 入射面角度は $\varphi = 45^\circ$, 層間界面剛性は $K_N = 1 \text{ GPa}/\mu\text{m}$, $K_T = 0.1 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ とする. また, 線源の位置は $x_3^0 = 5 \text{ mm}$ とする. このときのガウシアンビームの変位場

$$u(t, x_1, x_3) = \begin{cases} \sqrt{(u_1^{\text{inc}})^2 + (u_3^{\text{inc}})^2 + (u_1^{\text{ref}})^2 + (u_3^{\text{ref}})^2}, & 0 < x_3 < x_3^0, \\ \sqrt{(u_1^{\text{tra}})^2 + (u_3^{\text{tra}})^2}, & x_3 < -H, \end{cases} \quad (5.66)$$

を Fig. 5.12 に示す. Figure 5.12 を見ると, $x_3^0 = 5 \text{ mm}$ の線源を遅延を与えながら加振することで斜めに伝搬するガウシアンビームが励起され, それが積層板で反射・透過する様子が確認できる. なお, 式(5.62)–(5.64)における連続二次元フーリエ逆変換は, 実際は離散二次元フーリエ逆変換を行っている. この場合, x_1 方向に周期性を仮定していることになるため, Fig. 5.12(j)から確認できるように, 計算領域左右端 ($x_1 = \pm 10 \text{ mm}$) が周期境界になる.

5.5.2 平面調和波の透過特性との比較

次に, ガウシアンビームを入射した場合の振幅透過率を求め, 平面調和波入射時の透過率と比較する. Figure 5.13 に示すように, 積層板を透過したガウシアンビームを $(x_1, x_3) = (x_1^R, x_3^R) = ((H + x_3^0) \tan \alpha, -H - x_3^0)$ に設置した探触子で受信する状況を考える. 受信機を中心軸が ξ 軸と等しくなるように設定すると, 受信機表面 ($\xi = (x_3^0 - x_3^R) / \cos \alpha$) における変位の ξ 方向成分 u_ξ は $x_3 = x_3^R$ における透過波変位を用いて以下で与えられる.

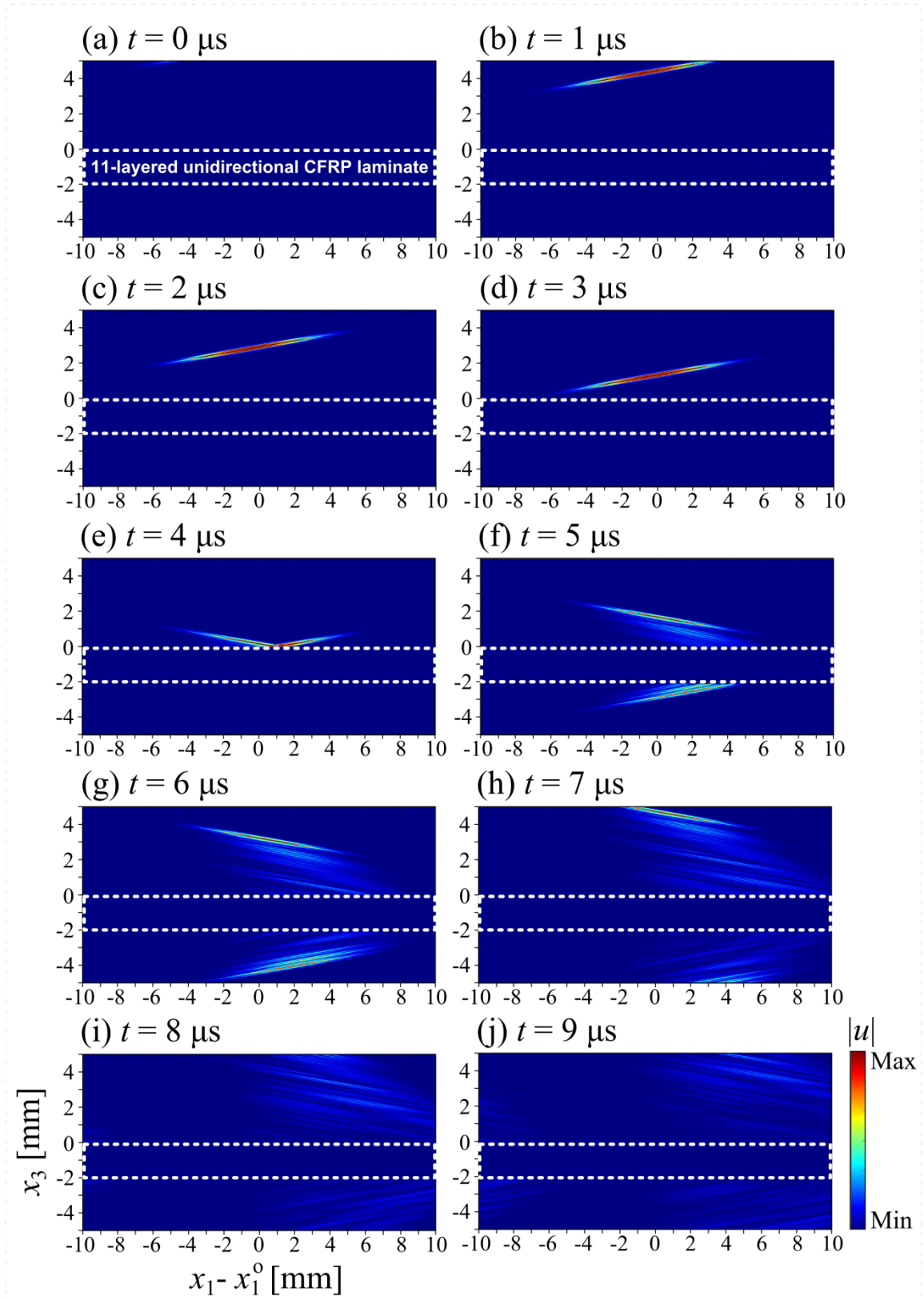


Fig. 5.12 Snapshots of Gaussian beam propagation for a 16-layered unidirectional CFRP laminate immersed in water.

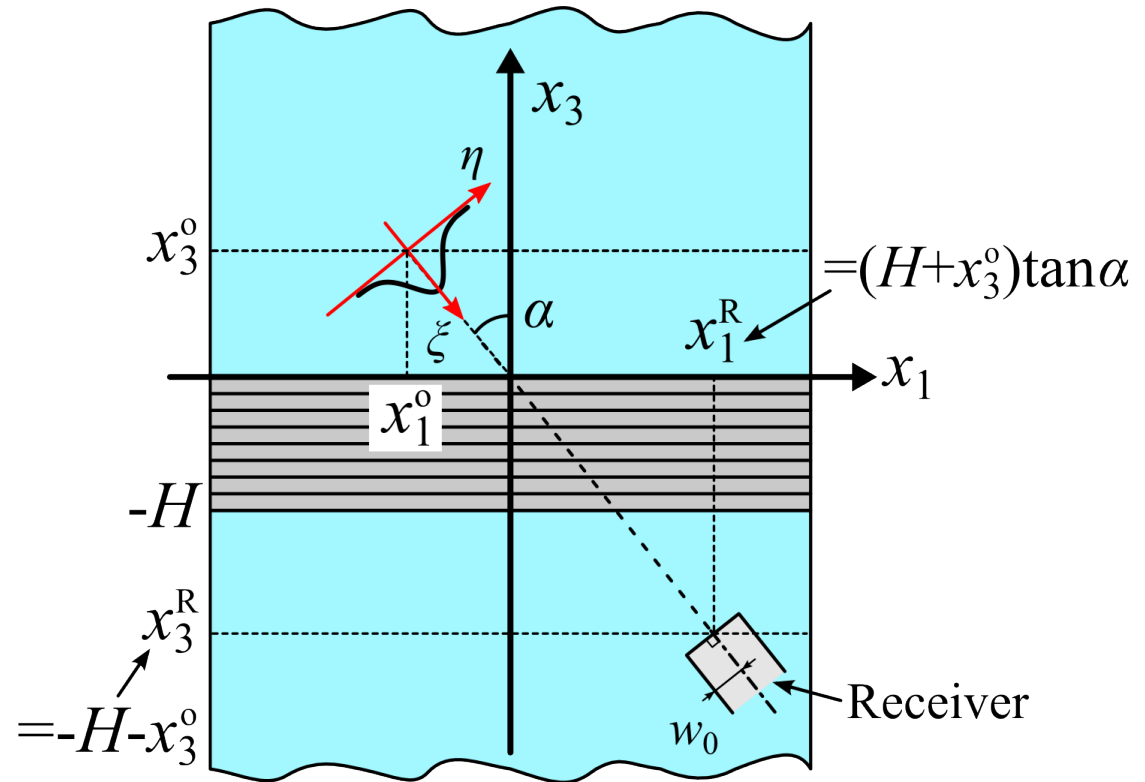


Fig. 5.13 A schematic of reception of transmitted Gaussian beam.

$$\begin{aligned}
u_\xi(t, \eta, \xi) \Big|_{\xi = \frac{(x_3^0 - x_3^R)}{\cos \alpha}} &= u_1^{\text{tra}} \left(t + \frac{(x_1 - x_1^R) \sin \alpha}{c_0}, x_1, x_3 \right) \Big|_{x_1 = x_1^R + \frac{\eta}{\cos \alpha}, x_3 = x_3^R} \sin \alpha \\
&+ u_3^{\text{tra}} \left(t + \frac{(x_1 - x_1^R) \sin \alpha}{c_0}, x_1, x_3 \right) \Big|_{x_1 = x_1^R + \frac{\eta}{\cos \alpha}, x_3 = x_3^R} \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

ここで、受信機表面近傍において波動は平面波として伝搬すると仮定して遅延時間 $((x_1 - x_1^R) \sin \alpha / c_0)$ を計算している. 探触子の受信特性をスポット径 w_0 のガウス関数で表現し, 探触子の幅を $2w_0$ とすると, 受信機によって観測される時間波形 $u^{\text{Rec}}(t)$ は, 受信機表面に沿って式(5.67)を積分することで, 以下のように与えられる.

$$u^{\text{Rec}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}w_0} \int_{-w_0}^{w_0} d\eta \, u_\xi(t, \eta, \xi) \Big|_{\xi = \frac{(x_3^0 - x_3^{\text{R}}) \exp \left[-\left(\frac{\eta}{w_0}\right)^2 \right]}{\cos \alpha}}. \quad (5.68)$$

一例として、ビーム入射角度 $\alpha = 5^\circ$ 、 $x_3^0 = 6 \text{ mm}$ としたときの $x_3 = x_3^R$ における透過波変位と時間および x_1 の関係を Fig. 5.14 に示す. なお、ここでは Table 5.2 に示す複素弾性率を使用することでプライの粘弾性特性を考慮しており、また入射面角度を $\varphi = 90^\circ$ としている. その他のパラメータおよび加振波形は Fig. 5.12 に用いた値と同様である. Figure 5.14(a)は、

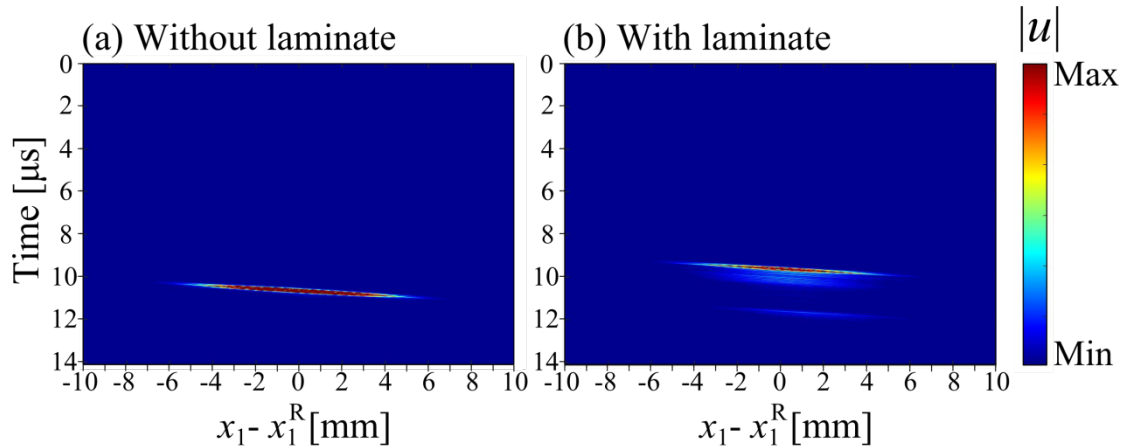


Fig. 5.14 Displacement field of transmitted Gaussian beam at $x_3 = x_3^R = -8.09$ mm in the (a) absence and (b) presence of a 16-layered unidirectional CFRP laminate.

Table 5.2 Complex elastic constants of ply (transverse isotropy with x_1 as fiber direction is assumed.) (GPa).

C_{11}	$81.5 - 2.90i$
C_{13}	$4.9 - 0.33i$
C_{33}	$15.2 - 0.29i$
C_{44}	$3.2 - 0.14i$
C_{66}	$6.9 - 0.24i$

積層板が無い状態で水中のみを伝搬したときの変位場を表し、Fig. 5.14(b)は16層の一方向強化 CFRP 積層板がある場合の変位場を表す。Figure 5.14 を見ると、Fig. 5.14(a)より Fig. 5.14(b)の方が透過波の到達時刻が速い。これは水中よりも積層板中の方が超音波伝搬速度が速いためである。また、ガウシアンビームが斜めに伝搬するため、 x_3 を固定した場合 $x_1 - x_1^R$ が小さい方が波の到達時刻が速くなる。

これらの変位場に対して式(5.68)により求めた時間波形を Fig. 5.15(a)に示す。積層板がある場合の波形において $9.5 \mu\text{s}$ 付近に見られる波が積層板を透過して受信点に直接到達した波であり、 $11.5 \mu\text{s}$ 付近に見られる波は、積層板中を1.5往復した波に対応している。Figure 5.15(a)の波形をフーリエ変換して求めた振幅スペクトルを Fig. 5.15(b)に示し、スペクトルの比を取ることで求めた振幅透過率を Fig. 5.15(c)に示す。Figure 5.15(c)の 8 MHz および 16 MHz 付近に透過率が低下している周波数帯が確認できる。なお、周波数の増加とともに透過率が低下傾向を示しているが、これはプライの粘弾性による減衰の影響である。

上記ガウシアンビーム透過率の計算を、様々なビーム入射角度および入射面角度に対して行った結果を Fig. 5.16 に示す。また、ステイフネスマトリクス法 (式(5.36b)) により求めた平面調和波入射時の透過率を Fig. 5.16 に合わせて示す。例えば、Figs. 5.16(a), (b)の入

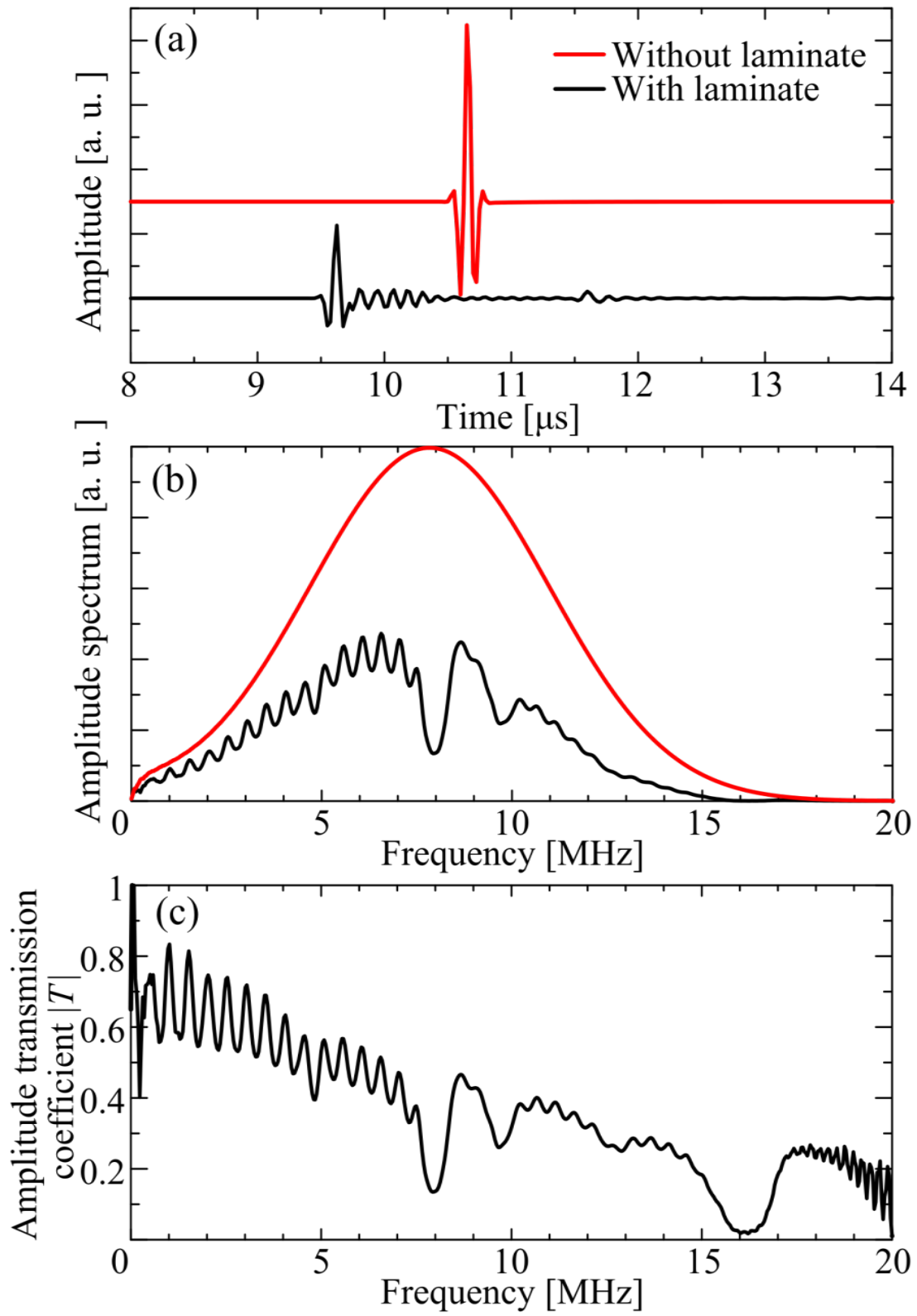


Fig. 5.15 (a) Transmitted waveforms of a Gaussian beam with the angle of incidence 5° , (b) their amplitude spectra, and (c) amplitude transmission spectrum.

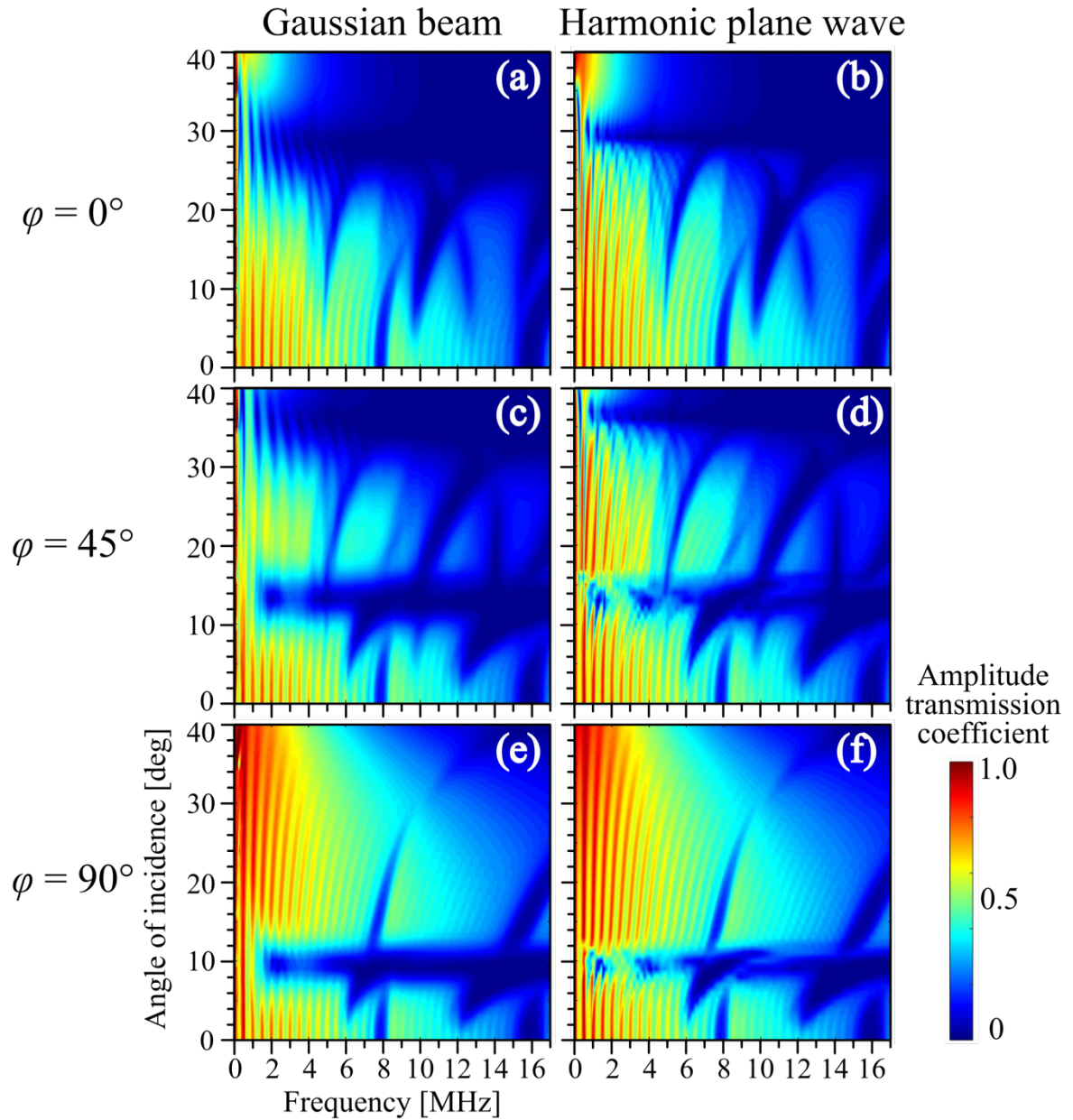


Fig. 5.16 The variation of amplitude transmission coefficient of a 16-layered unidirectional CFRP laminate with the frequency and angle of incidence for different angles for plane of incidence ($\phi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$) when the incident wave is a Gaussian beam and a harmonic plane wave.

射角度 $\leq 10^\circ$ および周波数 8 MHz 近傍のように、平面調和波入射時に見られるストップバンドがガウシアンビームに基づく透過率においても確認できる。したがって、実際の測定において空間的・時間的な有限幅を有する超音波ビームを用いても、5.3 節、5.4 節で議論したストップバンドが測定可能であると考えられる。一方で、Figs. 5.16(e), (f) を比較すると、例えば入射角度 10° 付近および周波数 ≤ 6 MHz において両者に違いが見られる。この要因と

して、式(5.68)の積分範囲を有限区間としている（受信機が空間的に有限幅を有している）点が挙げられる。また、Fig. 5.15(a)のガウシアンビーム透過波形において、図に示す時間範囲では透過波振幅が十分小さくなるまで低下していることがわかる。そのため、この波形から求めた振幅スペクトル（Fig. 5.15(b)）は、無限積分区間で時間フーリエ変換した結果とほぼ同等であると考えられる。したがって、ガウシアンビームと平面調和波の比較において、ビームの有する有限な時間幅が及ぼす影響はほとんどないと考えられる。

5.6 測定値との比較

本節では、一方向強化 CFRP 積層板に対する斜角入射超音波の振幅透過率を測定し、理論値との比較を行う。

5.6.1 実験方法

ここでは、第 4 章の実験的検討で使用したのと同じ測定装置を用いて斜角入射超音波の測定を行う。4.2 節で示した測定装置概略図を再度 Fig. 5.17 に示す。本測定では、 X, Y, Z の三軸を固定した状態で、 θ 軸と φ 軸を変化させることで斜角入射超音波の透過波を測定する。具体的には、探触子から発生した超音波ビームは、被験体を透過後、被験体下部に設置した音響ミラーで反射され、被験体を下側から再度透過した後、送信機と同じ探触子で受信される。これは、第 1 章でも紹介した 2 回透過法（Fig. 1.4(b)）である。音響ミラーは

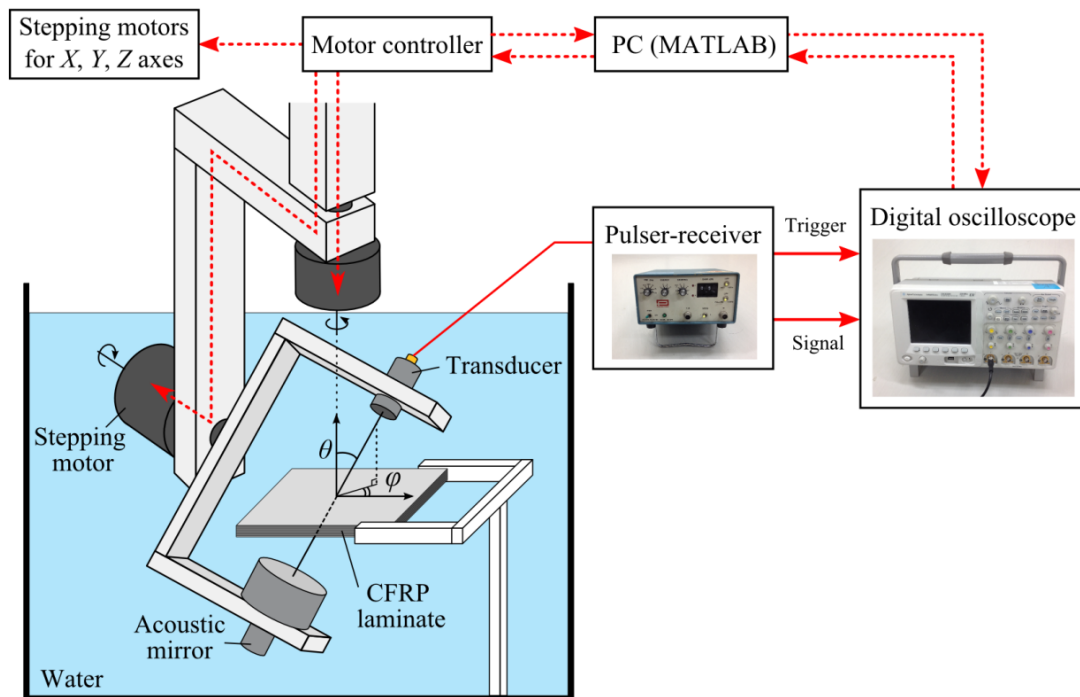


Fig. 5.17 A schematic of the experimental set-up for ultrasonic double-through transmission measurement.

研磨加工した表面をもつ円柱形状のステンレス鋼であり、直径 50 mm、厚さは 30 mm である。直径は水 - 被験体境界におけるビームの屈折の影響を受けないように十分大きくしており、厚さはミラー底面からの反射波が測定結果に影響を及ぼさないように十分長くしている。超音波がミラー中を厚さ方向に 1 往復するのにおよそ 10 μ s かかるため、2 回透過波の測定では最初に到達する信号から最大で 10 μ s の時間長さを測定している。また、 θ , φ 軸はどちらも 5 相ステッピングモータで制御しており、最小角度移動量は θ , φ 軸ともに 0.0036°である。

$\theta = 0^\circ$ の設定および被験体の位置調整は次のようにして行った。

- (1) はじめに、被験体が無い状態で θ をおよそ 180°回転させて、Fig. 5.17 のミラーと探触子の位置が逆転した状態にする。
- (2) 全体を Z 軸正方向に移動させて、ミラーを水の外に出す。
- (3) 探触子から水面に向かって超音波を送信し、水 - 空気境界からの反射波振幅が最大となるような θ を求める。
- (4) θ 軸を -180°回転させた点を $\theta = 0^\circ$ として設定する。
- (5) 被験体を設置し、表面反射波の到達時刻が被験体表面全体に渡って等しくなるように被験体固定用治具の調整を行い、被験体を水平に設置する。

試験片は、厚さ約 0.19 mm のプライ 11 層からなる一方向強化 CFRP 積層板 (板厚 2.09 mm) を用いる。母材はエポキシ樹脂 (三菱レイヨン #340, 130°C 硬化タイプ)、強化材は炭素繊維 (三菱レイヨン TR30, 直径 7 μ m, 繊維含有率 60.6 %) である。超音波探触子は公称中心周波数 10 MHz の水浸用探触子 (Insight, IS1013R) を用いる。

5.6.2 一方向強化 CFRP 積層板における振幅透過率の周波数および入射角度依存性

Figure 5.17 の測定系に対して、積層板が無い状態で測定した参照波形 (水中で探触子 - ミラー間を 1 往復した波) およびその振幅スペクトルを Fig. 5.18 に示す。なお、波形測定時のサンプリング周波数は 100 MHz であり、加算平均回数は 100 としている。Figure 5.18(b) より、参照波形は 9 MHz 近傍にピークを有する広帯域の波であり、探触子から発生する超音波も同程度の周波数帯域を有していると考えられる。

次に、積層板を水中に設置し、様々な入射角度 θ および入射面角度 φ ($\varphi = 0^\circ$ は繊維に垂直な面に対応) で測定した 2 回透過波の振幅を Fig. 5.19 に示す。Figure 5.19 を見ると、CFRP の異方性の影響により、透過波は入射角度 θ のみならず入射面角度 φ にも依存することが確認できる。Figure 5.19(a)において約 80 μ s に到達する波が、積層板を直接 2 回透過した波であり、それ以降に続く波が積層板内部 (層間界面および積層板 - 水境界) で多重反射した後に到達する波である。また Fig. 5.19(b)の $\theta = 26^\circ$ 付近は準縦波臨界角に対応しており、これより大きな入射角度では、積層板内部を準横波として透過した波が測定される。そし

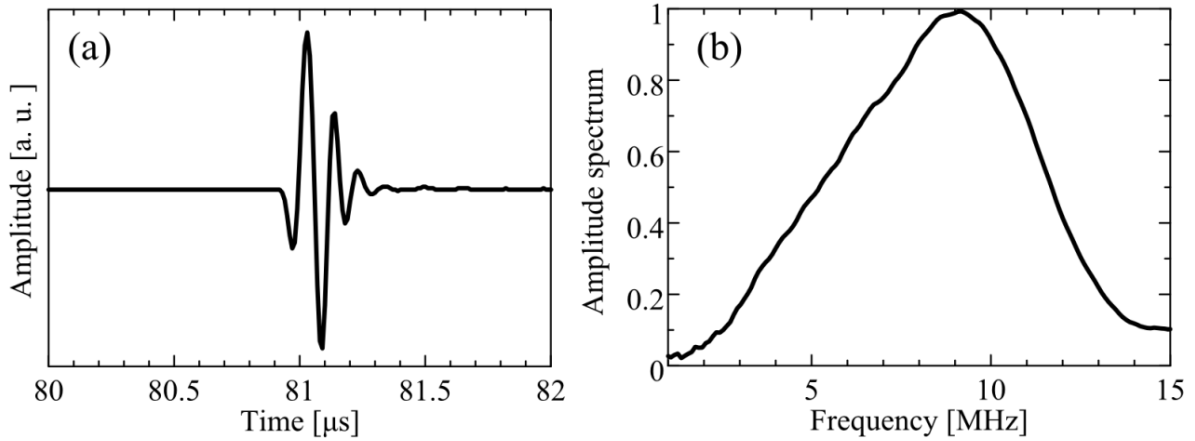


Fig. 5.18 (a) Reference waveform measured by the 10 MHz transducer and (b) its amplitude spectrum.

て準横波は準縦波に比べ材料中での伝搬速度が遅いため、 $\theta \geq 26^\circ$ では透過波の到達時刻が遅くなる。その他の φ における結果についても、臨界角が φ によって変化する点を考慮すれば同様の説明ができる。その中でも特に Fig. 5.19(c)では、 $\theta = 16^\circ$ 付近の準縦波臨界角に加えて、 $\theta = 34^\circ$ 付近に伝搬速度が速い準横波の臨界角も現れている。つまり、 $\theta \leq 16^\circ$ では準縦波、 $16^\circ \leq \theta \leq 34^\circ$ では伝搬速度の速い準横波、 $\theta \geq 34^\circ$ では伝搬速度の遅い準横波として材料中を伝搬した波が透過波として測定される。

Figure 5.19 の波形を 79~88 μs の区間でフーリエ変換し、Fig. 5.18(b)の参照スペクトルで除して求めた透過率を Fig. 5.20 および Fig. 5.21 に示す。なお、本節では 2 回透過波を測定しているため、そこから算出される結果は振幅透過率の 2 乗 $|T|^2$ である。また、スティフネスマトリクス法 (式(5.36b)) により求めた透過率の理論値を Figs. 5.20, 5.21 に合わせて示す。これらの理論値は、Table 5.1 および Table 5.2 の値と層間界面垂直剛性 $K_N = 2.8 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ 、接線剛性 $K_T = 0.8 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ として計算した結果である。計算で用いた材料定数の中で、プライ複素弾性率 (独立なパラメータ 10 個) と層間界面剛性 (独立なパラメータ 2 個) については、透過率の測定値 (Figs. 5.20(a), (d), (g), (j), (m), Figs. 5.21(a), (d)) と理論値の誤差二乗和が最小になるように最適化することで求めた。なお最適化にはネルダー・ミード法 (滑降シンプレックス法) ^[25] を用いた。プライ複素弾性率に関しては、積層板の総体的な特性ではあるものの Hosten and Castaings^[26]により評価された一方向強化 CFRP 積層板の複素弾性率と比較して、十分妥当な値であると考えられる。層間界面垂直剛性 K_N に関しては、第 4 章の実験的検討で評価した値と比較して十分妥当であると考えられる。接線剛性 K_T に関しては、CFRP 積層板の接線剛性を評価した研究が報告されていないため直接的な比較対象が存在しない。一方で界面剛性の比 $K_T/K_N = 0.27$ に関して見ると、Fraisie ら^[27]が評価した 2 枚のガラス板間のエポキシ接着層界面剛性比 $K_T/K_N = 0.23$ と近くなることから、 $K_T = 0.8 \text{ GPa}/\mu\text{m}$ は十分妥当な値であると考えられる。また、Figs. 5.20, 5.21 に、層間界面を完

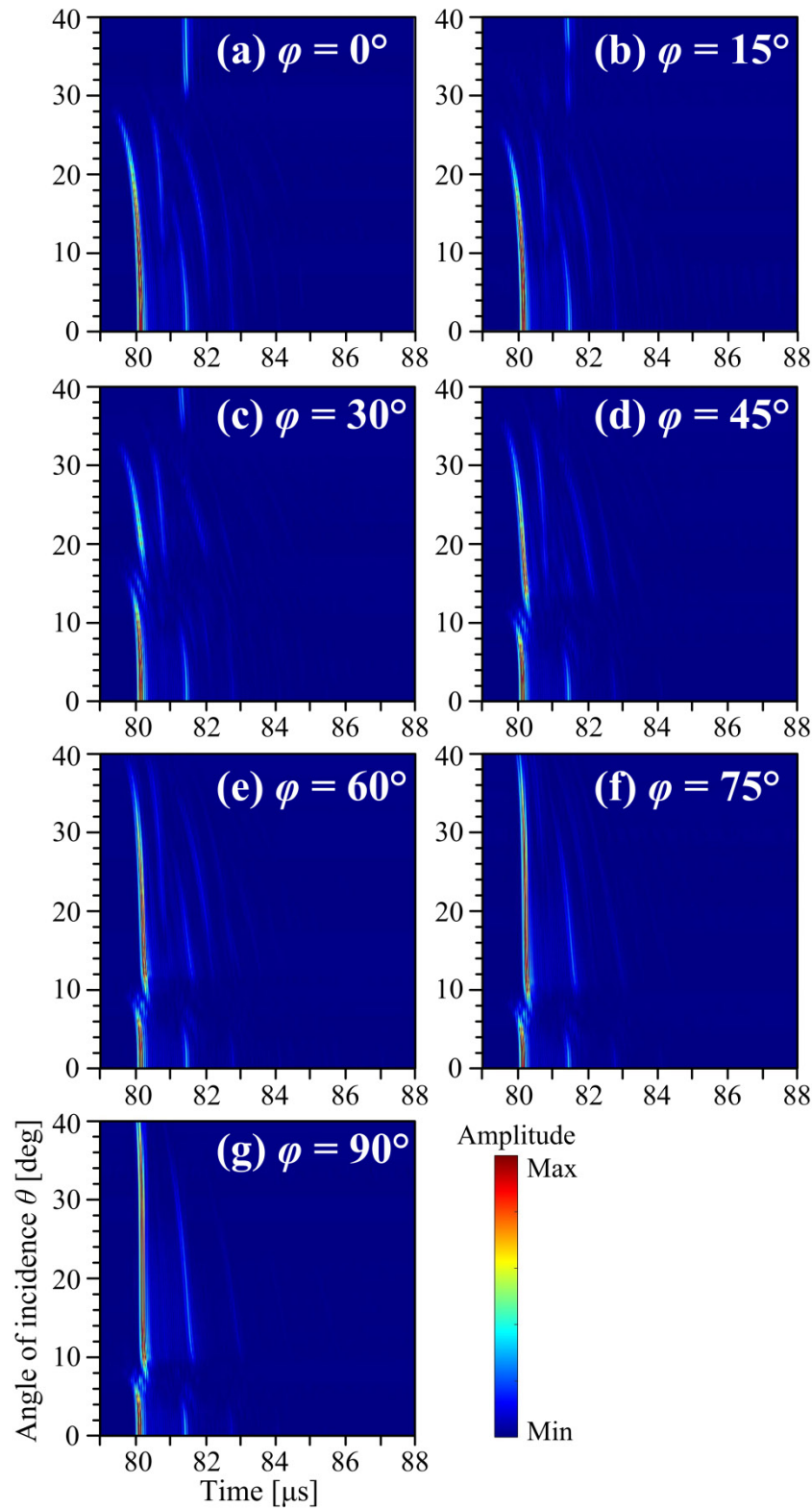


Fig. 5.19 The variation of amplitude of measured transmitted waves for the 11-layered unidirectional CFRP laminate specimen with the angle of incidence θ when the angle for plane of incidence ϕ is (a) 0° , (b) 15° , (c) 30° , (d) 45° , (e) 60° , (f) 75° , and (g) 90° .

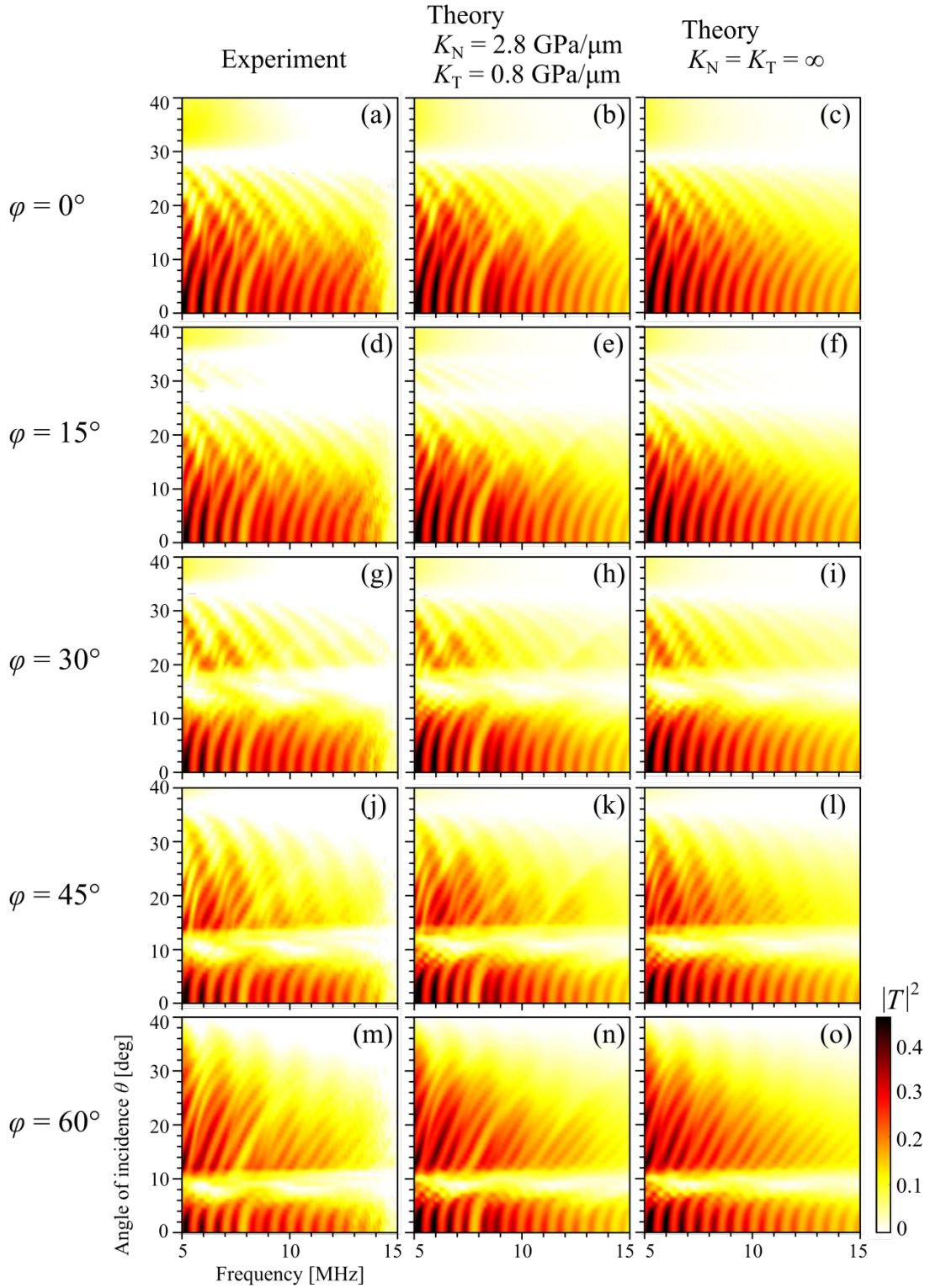
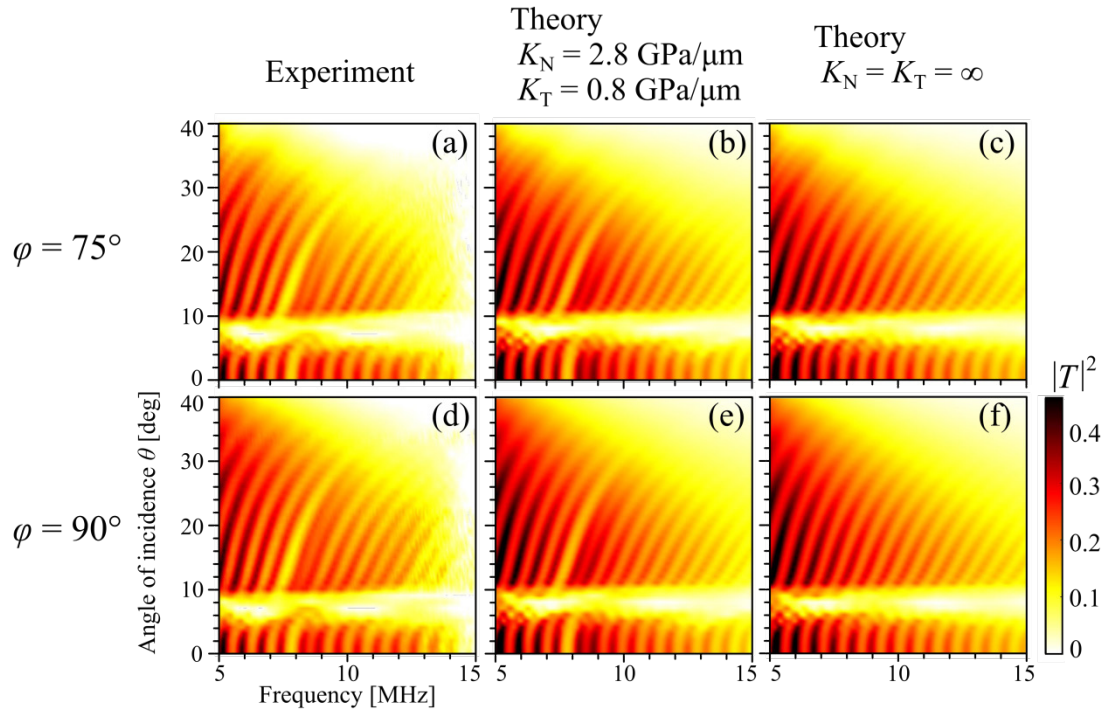


Fig. 5.20 Experimental and theoretical squared amplitude transmission coefficients of the 11-layered unidirectional CFRP laminate specimen for various frequencies and angles of incidence with $\varphi = 0^\circ$, 15° , 30° , 45° , and 60° , together with the theoretical results for the perfect bonding of interlayer interfaces.


 Fig. 5.21 The same as Fig. 5.20, but with $\varphi = 75^\circ$ and 90° .

全接着状態 ($K_N = K_T = \infty$) と仮定した場合の理論値も合わせて示す。

測定結果において、例えば Figure 5.20(a) の $\theta = 30^\circ$ 付近や Fig. 5.20(m) の $\theta = 8^\circ$ 付近など、広い周波数帯で透過率が低下している領域は、Fig. 5.19 の説明でも述べたように準縦波・準横波の臨界角に起因している。この傾向は、界面剛性を考慮した場合 (Figs. 5.19, 5.20 の 2 列目) と考慮しない場合 (3 列目) どちらの理論でも良好に再現されている。これは、臨界角 (厳密にはフロケ波の臨界角) が水の音響特性とプライ弾性率でほぼ決まるためである。また、測定結果において透過率が周波数方向に振動している様子が確認できるが、これは第 2 章の垂直入射超音波伝搬解析でも述べたように、積層数が有限であることに起因する。この傾向に関しても界面剛性を考慮するか否かに関わらず理論により比較的良好に再現されている。さらに、Fig. 5.20(d) の 8 MHz 近傍などのように狭い周波数帯で透過率が低くなっている領域 (ストップバンド) が測定結果に見られる。これらの発生挙動を理論と比較すると、層間界面の影響を無視した場合にはストップバンドが再現されていない。これは、一方向積層で $K_N = K_T = \infty$ の場合、層間界面において波動散乱が一切生じないためである。一方で、層間界面の影響を考慮した理論では測定結果に見られるストップバンド発生挙動が良好に再現されていることがわかる。

5.7 第 5 章の結言

本章では、CFRP 積層板の斜角入射超音波透過特性に関して理論的検討を行った。はじめに、層間にスプリング界面を有する積層板の斜角入射超音波の反射・透過率の計算法を定式化した。そして、一方向強化 CFRP 積層板の斜角入射超音波透過率に及ぼす層間界面剛性、周波数、入射角度の影響を考察した。次に、無限積層構造中を伝搬するフロケ波の分散関係を導出し、有限積層構造の透過率と比較することでストップバンド発生挙動を考察した。また、入射波としてガウシアンビームを用いたときの透過率を計算し、平面調和波入射による透過率と比較することで、ビームの空間的・時間的有限幅が透過特性に及ぼす影響を考察した。最後に一方向強化 CFRP 積層板の斜角入射超音波透過率を測定し、理論値との比較を行った。その結果、以下のことを示した。

- (1) 一方向強化 CFRP 積層板の透過特性は、層間界面剛性および周波数に強く依存し、その依存性は入射角度に伴い変化する。これは、材料中を伝搬するバルク波モードの数が入射角度とともに変化するためである。また、透過スペクトルにおいて透過率が著しく低下する周波数帯が形成され、それらの発生位置や幅が層間界面剛性および入射角度に依存する。
- (2) 無限積層構造中を伝搬するフロケ波がストップバンドに入るとき、そこでは必ずブラッグ反射が生じている。そしてストップバンドには、単一のフロケ波モードのみで形成される場合と二つのモードが組み合わさって形成される場合の 2 種類がある。フロケ波のストップバンドと有限積層構造の透過率が低下する周波数帯が良好に対応することから、有限積層構造の場合においても層間界面での波動散乱によるブラッグ反射が生じ、ストップバンドが形成される。
- (3) 入射波が空間的・時間的に有限幅を有する場合でも、透過スペクトルにおいて平面調和波入射時と同様のストップバンドが形成される。
- (4) 11 層の一方向強化 CFRP 積層板に対して測定した斜角入射超音波透過率においてストップバンドが確認でき、その発生挙動（周波数、入射角度、入射面角度への依存性）が層間界面の影響を考慮した理論により良好に再現される。

5.8 第 5 章の参考文献

- [1]. W. T. Thomson, "Transmission of elastic waves through a stratified solid medium," *Journal of Applied Physics* Vol. **21** (1950), pp. 89–93.
- [2]. N. A. Haskell, "The dispersion of surface waves on multilayered media," *Bulletin of the*

- Seismological Society of America* Vol. **43** (1953), pp. 17–34.
- [3]. A. H. Nayfeh, “The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **89**, No. 4 (1991), pp. 1521–1531.
 - [4]. Y. Lu and J. D. Achenbach, “Effects of random deviations in interface properties on the propagation of ultrasound in thick composites,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **90**, No. 5 (1991), pp. 2576–2585.
 - [5]. Y. Lu, “Effects of random fluctuations in ply mechanical properties on ultrasound propagation in a laminated solid layer,” *Ultrasonics* Vol. **30**, No. 5 (1992), pp. 289–295.
 - [6]. J. W. Dunkin, “Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies,” *Bulletin of the Seismological Society of America* Vol. **55**, No. 2 (1965), pp. 335–358.
 - [7]. L. Knopoff, “A matrix method for elastic wave problems,” *Bulletin of the Seismological Society of America* Vol. **54**, No. 1 (1964), pp. 431–438.
 - [8]. B. F. Schwab, “Surface-wave dispersion computations: Knopoff’s method,” *Bulletin of the Seismological Society of America* Vol. **60**, No. 5 (1970), pp. 1491–1520.
 - [9]. R. C. Y. Chin, G. W. Hedstrom, and L. Thigpen, “Matrix methods in synthetic seismograms,” *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* Vol. **77** (1984), pp. 483–502.
 - [10]. A. K. Mal, “Guided waves in layered solids with interface zones,” *International Journal of Engineering Science* Vol. **26**, No. 8 (1988), pp. 873–881.
 - [11]. M. J. S. Lowe, “Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* Vol. **42**, No. 4 (1995), pp. 525–542.
 - [12]. L. Wang and S. I. Rokhlin, “Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media,” *Ultrasonics* Vol. **39** (2001), pp. 413–424.
 - [13]. S. I. Rokhlin and L. Wang, “Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media: Stiffness matrix method,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **112**, No. 3 (2002), pp. 822–834.
 - [14]. W. L. Bond, “The mathematics of the physical properties of crystals,” *Bell System Technical Journal* Vol. **22**, No. 1 (1943), pp. 1–72.
 - [15]. A. Pilarski and J. L. Rose, “A transverse-wave ultrasonic oblique-incidence technique for interfacial weakness detection in adhesive bonds,” *Journal of Applied Physics* Vol. **63**, No. 2 (1988), pp. 300–307.
 - [16]. A. Boström and G. Wickham, “On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **10**, No.4 (1991), pp. 139–149.
 - [17]. S. I. Rokhlin and Y. J. Wang, “Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction

- with an interface between two solids,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **89**, No. 2 (1991), pp. 503–515.
- [18]. L. Wang and S. I. Rokhlin, “Ultrasonic wave interaction with multidirectional composites: modeling and experiment,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **114**, No. 5 (2003), pp. 2582–2895.
- [19]. A. M. B. Braga and G. Herrmann, “Floquet waves in anisotropic periodically layered composites,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **91**, No. 3 (1992), pp. 1211–1227.
- [20]. C. Potel, J. –F. Belleval, and Y. Gargouri, “Floquet waves and classical plane waves in an anisotropic periodically multilayered medium: Application to the validity domain of homogenization,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **97**, No. 5 (1995), pp. 2815–2825.
- [21]. L. Wang and S. I. Rokhlin, “Floquet wave homogenization of periodic anisotropic media,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **112**, No. 1 (2002), pp. 38–45.
- [22]. T. Tamir and H. L. Bertoni, “Lateral displacement of optical beams at multilayered and periodic structures,” *Journal of the Optical Society of America* Vol. **61**, No. 10 (1971), pp. 1397–1413.
- [23]. S. Zeroug and L. B. Felsen, “Nonspecular reflection of beams from liquid-solid interfaces,” *Journal of Nondestructive Evaluation* Vol. **22**, No. 314 (1992), pp. 263–278.
- [24]. P. K. Kythe, *Green’s Functions and Linear Differential Equations: Theory, Applications, and Computation* (Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2011).
- [25]. J. A. Nelder and R. Mead, “A simplex method for function minimization,” *Computer Journal* Vol. **7** (1965), pp. 308–313.
- [26]. B. Hosten and M. Castaings, “Transfer matrix of multilayered absorbing and anisotropic media. Measurements and simulations of ultrasonic wave propagation through composite materials,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **94**, No. 3 (1993), pp. 1488–1495.
- [27]. P. Fraisse, F. Schmit, and A. Zarembowitch, “Ultrasonic inspection of very thin adhesive layers,” *Journal of Applied Physics* Vol. **72**, No. 8 (1992), pp. 3264–3271.

第6章 結論

6.1 本論文の結論

近年の航空宇宙分野をはじめとする CFRP 積層板の適用拡大に伴い、超音波非破壊検査の重要性が増している。特に CFRP 積層板の層間界面特性（層間樹脂リッチ領域の特性）の非破壊評価は構造健全性や信頼性を保証するうえできわめて重要であり、その評価法の確立は喫緊の課題である。ところが既往の研究では、積層板を構成するプライ同士を完全接着状態と仮定した超音波伝搬特性の理論的・実験的検討がほとんどであり、層間界面特性が超音波伝搬特性に及ぼす影響に関する系統的な研究および、層間界面特性を直接的かつ定量的に評価する手法はこれまでに報告されていなかった。

そこで本研究では、CFRP 積層板の薄い層間樹脂リッチ領域をスプリング界面でモデル化することで、層間界面特性が超音波伝搬特性に及ぼす影響の理論的検討を行った。そして、超音波スペクトロスコーピーを用いた層間界面特性の評価法を提案した。

第 2 章では、CFRP 積層板の垂直入射超音波反射特性の理論解析を行った。一次元伝達マトリクス法とフロケの定理を用いて超音波振幅反射率の計算法を定式化し、反射率が 4 個の無次元パラメータ（無次元周波数 Ω 、積層数 N 、プライと層間界面の剛性比 Λ 、プライと半無限媒質の音響インピーダンス比 Ξ ）によって支配されることを示した。さらに、反射スペクトルにおいて反射率が厳密に零となる点が必ず複数個存在し、その個数および周波数が無次元パラメータ N 、 Λ 、 Ξ に依存することを示した。

第 3 章では、第 2 章で得た知見をふまえて、垂直入射超音波の反射スペクトル極点周波数分布を用いた CFRP 積層板の層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度の評価法を提案した。そして、その適用可能性に関して検討を行い、以下のことを示した。

- (1) 反射スペクトルの一つ目のパスバンドに加えて、二つ目のパスバンドにある極点周波数も含めて評価を行うことで、層間界面垂直剛性とプライ縦波速度を一意に定めることが可能である。
- (2) 本手法は、層間界面垂直剛性の大きな領域を除いて、層間界面垂直剛性とプライ縦波速度を感度良く評価することが可能である。
- (3) 積層板を構成するプライが未知の粘弾性特性を有する場合でも、本手法により層間界面垂直剛性とプライ縦波速度が評価可能である。
- (4) 実際の測定で得られるような過渡的反射波形に対しても、フーリエ変換により反射スペクトル極点周波数分布を求めた後に本手法を適用することで、層間界面垂直剛性と

プライ縦波速度が評価可能である。

- (5) 層間界面垂直剛性が界面ごとにばらついている場合でも、本手法によりそれらをおおよそ平均した値を評価することができる。

先行研究で行われている CFRP 積層板の材料特性評価では、層間界面とプライの特性を合わせた積層板の総体的特性が評価されていた。それに対して本章で提案した評価法は、層間の特性とプライの特性を個別に評価することができ、従来法では困難であった層間特性の直接的・定量的評価が可能である。また、先行研究で行われている単一スプリング界面や二重スプリング界面などの界面剛性評価に比較して、本手法は積層数に制約を設けておらず、任意の積層数を有する積層板に対して適用可能である。

第 4 章では、第 3 章で提案した評価手法に関して実験的検討を行った。はじめに、CFRP 直交積層板に対して提案手法を適用し層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度を評価した。そして試験片の断面観察や先行研究の報告値と比較することで、本手法による同定値の妥当性を示した。次に、温水中で吸水させた一方向強化 CFRP 積層板に対して本手法を適用することで、層間界面垂直剛性およびプライ縦波速度に及ぼす吸水の影響に関して考察を行った。その結果、積層板の温水浸漬時間の増加とともに層間界面垂直剛性とプライ縦波速度の両者が低下することがわかった。また、吸水前に比べてプライ縦波速度は高々 3 % 程度しか変化しなかったのに対して層間界面垂直剛性はおよそ 30 % 近く変化し、プライの特性に比べて層間特性の方が吸水の影響を受けやすいことがわかった。

第 5 章では、CFRP 積層板の斜角入射超音波伝搬特性の理論的検討を行った。はじめに層間にスプリング界面を有する積層板に対する斜角入射超音波反射・透過率の計算法を定式化した。次に一方向強化 CFRP 積層板の振幅スペクトルに関して考察することで、振幅透過率が著しく低下する周波数帯が形成されること、またその幅や位置が層間界面剛性や入射角度に強く依存することを示した。そしてこれらの領域が、無限積層構造中を伝搬するフロケ波がストップバンドとなる周波数帯と良好に対応することを示し、有限積層構造中でもブラッグ反射が生じた結果ストップバンドが形成されることを明らかにした。また、ガウシアンビームを入射波としたときの振幅透過率を理論的に計算した結果、入射波が空間的・時間的有限幅を有する場合でも透過スペクトルにストップバンドが形成されることがわかった。最後に一方向強化 CFRP 積層板に対する測定値と理論値を比較し、測定値においてもストップバンドが確認されること、そしてその発生挙動（入射角度や入射面角度依存性）が理論により良好に再現されることを示した。

6.2 将来の展望

本論文第 3 章で確立した垂直入射超音波反射スペクトルによる層間界面垂直剛性および

プライ縦波速度の評価では、すべてのプライおよびすべての界面が同じもしくは互いに近い特性を有すると仮定し、その平均的な値を評価した。これに加えて、ある特定の界面の健全性が低下している場合にその位置や界面剛性を非破壊評価可能な手法の確立が今後の課題として挙げられる。本論文で提案した評価法では、反射波形のすべてをフーリエ変換して得たスペクトルに着目して評価を行っているため、時間に関する情報はすべて失われている。そのため、健全性が損なわれた特定の界面の位置に関する情報を得るためには、例えば時間 - 周波数解析などを用いて時間に関する情報を保持しながら評価を行う必要があると考えられる。また、特定の界面が他と著しく異なる界面剛性を有する場合に反射スペクトルに及ぼす影響に関しても検討を行う必要がある。このような評価手法が確立できれば、例えば航空宇宙産業や自動車産業で近年利用されている CFRP 積層板同士を接着フィルムにより二次接着した構造物の接着界面健全性評価などに応用できると考えられる。

また、ある特定の界面だけではなく、すべての界面やプライで異なる界面剛性や縦波速度を有している場合に、その積層方向への分布を評価可能な手法の確立が次なる課題として挙げられる。本論文でも取り扱った吸水した CFRP 積層板の場合、吸水前と飽和吸水率においては材料特性は積層方向にほぼ一様であると考えられる。一方で、その間の吸水過程では、積層板表面もしくは底面に近い部分ほど中心部分より局所的な吸水率が大きいと予想され（フィックの法則）、層間やプライの材料特性も積層方向に分布している（中心部に比べて表面・底面近傍ほど界面剛性・プライ縦波速度が低下する）と考えられる。本論文第 4 章ではそれらの積層方向への平均的な値を評価したが、もしそれらの分布状態を非破壊評価できれば、吸水による材料特性評価を理解する上でさらに有用な知見が得られると期待できる。

第 5 章で述べた斜角入射超音波伝搬解析では、一方向強化 CFRP 積層板に着目して検討を行った。一方で、直交積層板や擬似等方積層板といった積層構成に関しても斜角入射超音波伝搬特性の理論的検討が必要であると考えられる。特にプライごとに繊維方向が異なる場合は、プライ同士が完全接着状態であったとしても（層間樹脂リッチ領域の影響を無視したとしても）、隣接するプライの音響インピーダンスの差異により層間で波動散乱が生じる。したがって、一方向積層の場合には見られないストップバンド発生挙動が予想され、その理論的解明は重要な課題であると考えられる。これらの斜角入射超音波伝搬特性が明らかになれば、CFRP 積層板の層間界面接線剛性を評価可能な非破壊評価法の確立につながると期待できる。

また、本論文では積層板の特定の限られた領域の界面剛性評価に着目したが、今後の展開として、積層板を長手方向に伝搬する準ラム波の伝搬特性（分散関係）を活用することで、積層板の広範囲の界面剛性を高効率に評価可能な手法の確立も課題として挙げられる。

本論文 3.4.2 節において述べたように、第 3 章で提案した評価手法は層間界面垂直剛性が完全接着状態に近い場合にそれを敏感に評価することが困難である。これは、例えば CFRP

積層板の長期運用に伴う層間界面の損傷（吸湿や紫外線による劣化など）を考えた場合に、界面剛性が健全状態から十分低下して初めてそれらを検知できるということを意味する。したがって、次なる課題として、層間界面健全性が低下し始めた早期段階においてそれらを検出できる非破壊評価法の確立が挙げられる。この課題の解決策として非線形超音波法の適用が考えられる。

非線形超音波法は、材料中における非線形な波動伝搬特性に着目して材料健全性評価を行う手法である^[1]。例えば、第1章 Fig. 1.6(b) (p. 10) で示したような固体間不完全接触界面に対して大振幅の超音波を入射した場合、界面の部分接触による非線形な開閉口挙動（縦波の圧縮相は界面を部分透過し引張相は反射する）に起因して、入射波（基本波）周波数の整数倍周波数を有する高調波が発生する。そして高調波の発生挙動は界面の接触状態によって敏感に変化するため、高調波を測定することで従来の基本波反射・透過特性に基づく検査では精密評価困難な場合（界面が完全接着状態に近くなり基本波反射・透過率がほとんど変化しない場合）においても敏感に界面接触状態を評価できる可能性がある。CFRP 積層板の層間樹脂リッチ領域においても、例えば劣化による樹脂の応力-ひずみ関係の微弱な非線形性の変化や、集積したマイクロクラックの開閉口挙動などに起因して高調波が発生すると予想される。これらの高調波を観測することで、層間界面健全性が低下し始めた早期段階で高感度に損傷が評価できる可能性がある。

固体間接触部や層間樹脂リッチ領域などの不完全界面における高調波発生挙動に関して理論解析や数値解析を行う場合、界面を非線形なスプリング界面でモデル化することができる^{[2]-[8]}。そして、単一界面問題や二重界面問題^{[9], [10]}における高調波発生挙動に関してはこれまでに理論的・実験的研究が行われている。一方で、多重非線形界面における高調波の発生・伝搬特性に関する研究はこれまでに報告がなされていない。積層板のように界面数が複数になる場合、各界面で発生した高調波は積層構造の影響を受けながら伝搬した後観測されるため、最終的に反射・透過波として測定される高調波は単一界面問題では見られない強い周波数依存性を示すと考えられる。そのため、多重界面における高調波発生・伝搬の理論的把握は極めて重要な課題であり、これらが解明できれば、非線形超音波法を用いた CFRP 積層板の高感度層間界面健全性評価法の確立につながると期待できる。

6.3 第6章の参考文献

- [1]. 日本非破壊検査協会, 「特集 非線形超音波法による非破壊検査・評価」, 非破壊検査 Vol. **56**, No. 6 (2007).
- [2]. C. Pecorari, “Nonlinear interaction of plane ultrasonic waves with an interface between rough surfaces in contact,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **113**, No. 6 (2003), pp. 3065–3072.
- [3]. S. Biwa, S. Nakajima, and N. Ohno, “On the acoustic nonlinearity of solid-solid contact with

- pressure-dependent interface stiffness,” *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* Vol. **71**, No. 4 (2004), pp. 508–515.
- [4]. C. Pecorari and M. Poznic, “On the linear and nonlinear acoustic properties of dry and water-confining elasto-plastic interfaces,” *Proceedings of the Royal Society London A* Vol. **462** (2006), pp. 769–788.
- [5]. S. Biwa, S. Hiraiwa, and E. Matsumoto, “Experimental and theoretical study of harmonic generation at contacting interface,” *Ultrasonics* Vol. **44** (2006), pp. e1319–e1322.
- [6]. J. –Y. Kim, A. Baltazar, J. W. Hu, and S. I. Rokhlin, “Hysteretic linear and nonlinear acoustic responses from pressed interfaces,” *International Journal of Solids and Structures* Vol. **43**, No. 21 (2006), pp. 6345–6452.
- [7]. J. –Y. Kim and J. –S. Lee, “A micromechanical model for nonlinear acoustic properties of interfaces between solids,” *Journal of Applied Physics* Vol. **101** (2007), 043501.
- [8]. T. Nam, T. Lee, C. Kim, K. –Y. Jhang, and N. Kim, “Harmonic generation of an obliquely incident ultrasonic wave in solid-solid contact interfaces,” *Ultrasonics* Vol. **52** (2012), pp. 778–783.
- [9]. D. Yan, B. W. Drinkwater, and S. A. Neild, “Measurement of the ultrasonic nonlinearity of kissing bonds in adhesive joints,” *NDT&E International* Vol. **42**, No. 5 (2009), pp. 459–466.
- [10]. D. Yan, S. A. Neild, and B. W. Drinkwater, “Modelling and measurement of the nonlinear behavior of kissing bonds in adhesive joints,” *NDT&E International* Vol. **47** (2012), pp. 18–25.

付録

付録 A 式 (2.32) の導出

ここでは, 2.3 節で述べた以下の式(2.32)

$$\mathbf{H}^N = \frac{\sin(N\zeta h)}{\sin(\zeta h)} \mathbf{H} - \frac{\sin[(N-1)\zeta h]}{\sin(\zeta h)} \mathbf{I}, \quad (2.32)$$

の導出について説明する.

はじめに, 本文中で述べた式(2.31)

$$\mathbf{H}^2 - 2\cos(\zeta h)\mathbf{H} + \mathbf{I} = 0, \quad (2.31)$$

の両辺に $\mathbf{H}^{N-1}$ を掛けることで以下の関係が得られる.

$$\mathbf{H}^{N+1} - 2\cos(\zeta h)\mathbf{H}^N + \mathbf{H}^{N-1} = 0. \quad (A.1)$$

次に, 式(A.1)を以下のように書き換える.

$$\mathbf{H}^{N+1} - a\mathbf{H}^N = b(\mathbf{H}^N - a\mathbf{H}^{N-1}). \quad (A.2)$$

ここで,

$$a = \exp(i\zeta h), \quad b = \exp(-i\zeta h), \quad (A.3)$$

である. 式(A.2)は次のように展開することができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{N+1} - a\mathbf{H}^N &= b(\mathbf{H}^N - a\mathbf{H}^{N-1}) \\ &= b^2(\mathbf{H}^{N-1} - a\mathbf{H}^{N-2}) \\ &\quad \vdots \\ &= b^{N-1}(\mathbf{H}^2 - a\mathbf{H}) \\ &= b^N(\mathbf{H} - a\mathbf{I}). \end{aligned} \quad (A.4)$$

また, 式(A.2)は

$$\mathbf{H}^{N+1} - (a+b)\mathbf{H}^N + ba\mathbf{H}^{N-1} = 0, \quad (A.5)$$

と書くことができるため, a と b は交換可能であることがわかる. したがって式(A.4)は,

$$\mathbf{H}^{N+1} - b\mathbf{H}^N = a^N(\mathbf{H} - b\mathbf{I}), \quad (A.6)$$

と書くこともできる. パスバンド ($-1 < G(\Omega) < 1$) では常に $a \neq b$ が成立するため, 式(A.4) と(A.6)の差を取ると $\mathbf{H}^N$ は

$$\mathbf{H}^N = \frac{a^N - b^N}{a - b} \mathbf{H} - \frac{a^N b - ab^N}{a - b} \mathbf{I}, \quad (\text{A.7})$$

と表される. 式(A.3)を式(A.7)に代入することで,

$$\mathbf{H}^N = \frac{\sin(N\zeta h)}{\sin(\zeta h)} \mathbf{H} - \frac{\sin[(N-1)\zeta h]}{\sin(\zeta h)} \mathbf{I}, \quad (\text{A.8})$$

となり, 式(2.32)が導出される.

付録 B 非定常動弾性有限要素法の定式化

ここでは、ケルビン・フォークト型粘弾性を含む非定常動弾性問題に対する二次元平面ひずみ有限要素法の定式化を述べる。なお、以下では総和規約を使用する。

Figure B.1 に示すような体積 V および面積 S を有する系に対して、以下の微小変位動弾性問題の基礎方程式（運動方程式、応力 - ひずみ関係式、ひずみ - 変位関係式）および力学的・幾何学的境界条件を考える。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - F_i^0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.1})$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \eta_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (\text{B.2})$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (\text{B.3})$$

$$T_i = T_i^0 \quad \text{on } S^\sigma, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.4})$$

$$u_i = u_i^0 \quad \text{on } S^u, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{B.5})$$

ここで、 σ_{ij} は応力テンソル、 ρ は質量密度、 u_i は変位、 F_i^0 は既知体積力、 C_{ijkl} は弾性係数テンソル、 η_{ijkl} は粘性係数テンソル、 ε_{kl} は微小ひずみテンソル、 T_i^0 は既知表面力、 u_i^0 は既知変位、 S^σ および S^u は表面力および変位が規定されている表面を表す。式(B.1)と(B.4)より以下の式が成り立つ。

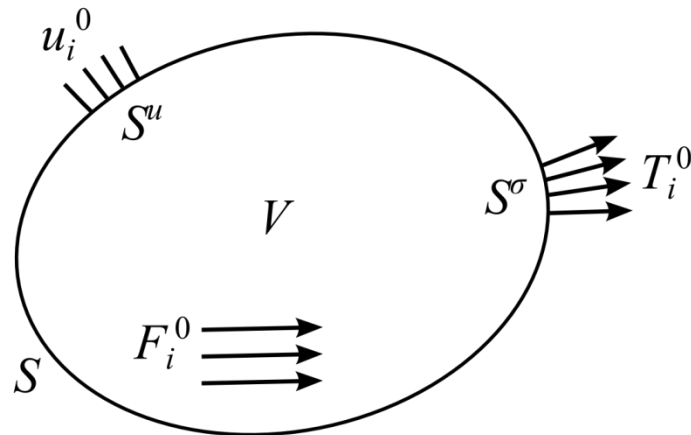


Fig. B.1 An elastic body of volume V .

$$-\int_V \delta u_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i^0 - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) dV + \int_{S^\sigma} \delta u_i (T_i - T_i^0) dS = 0. \quad (\text{B.6})$$

ここで, δu_i は仮想変位であり, 変位境界条件 (式(B.5)) を乱さないように,

$$\delta u_i = 0 \quad \text{on } S^u, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.7})$$

とする. 式(B.6)左辺左側積分の第一項を変形すると以下のようになる.

$$\begin{aligned} \int_V \delta u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV &= \int_V \frac{\partial (\delta u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} dV - \int_V \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \\ &= \int_S \delta u_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_V \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\delta u_j)}{\partial x_i} \right) \sigma_{ij} dV \\ &= \int_{S^\sigma} \delta u_i T_i dS - \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ここで, n_j は系表面における外向き単位法線ベクトル, $\delta \varepsilon_{ij}$ は仮想変位によるひずみを表す. なお, 式(B.8)の式変形ではガウスの発散定理とコーシーの関係式を用いた. 式(B.8)より, 式(B.6)は以下の形に書き直せる.

$$\int_V \left(\delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} + \delta u_i \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) dV = \int_V \delta u_i F_i^0 dV + \int_{S^\sigma} \delta u_i T_i^0 dS. \quad (\text{B.9})$$

ここで, $x_1 - x_2$ 平面における二次元平面ひずみ問題を考え, ベクトルを以下で定義する.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^0 = \begin{pmatrix} F_1^0 \\ F_2^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^0 = \begin{pmatrix} T_1^0 \\ T_2^0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

このとき, 応力 - ひずみ関係式(B.2)は,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{E} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}, \quad (\text{B.11})$$

と書ける. ここで行列 $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ はフォークト表記を用いて,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{26} \\ \text{sym} & & C_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{16} \\ & \eta_{22} & \eta_{26} \\ \text{sym} & & \eta_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

で与えられる.

式(B.10)と(B.11)より、式(B.9)は以下のように書ける.

$$\int_V \left(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \delta \mathbf{u}^T \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}^0 dV + \int_{S^\sigma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}^0 dS. \quad (\text{B.13})$$

ここで上付き添え字 “T” は転置を表す. 次に, 解析対象 V を有限要素に分割し, 有限要素内における変位ベクトル $\mathbf{u}$ を, 節点ベクトル $\mathbf{U}^e$ を用いて,

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U}^e, \quad (\text{B.14})$$

と仮定する. ここで $\mathbf{N}$ は形状関数 (内挿関数) 行列を表す. このとき, 有限要素内のひずみベクトルは

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{U}^e = \mathbf{B} \mathbf{U}^e, \quad (\text{B.15})$$

と表せる. ここで,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

であり, $\mathbf{B}$ はひずみ - 変位行列である.

式(B.14)と(B.15)より、式(B.13)は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} \sum \delta \mathbf{U}^{eT} \left(\int_{V^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \frac{d^2 \mathbf{U}^e}{dt^2} + \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \frac{d \mathbf{U}^e}{dt} + \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{U}^e \right. \\ \left. - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{F}^0 dV - \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{T}^0 dS \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

ここで, Σ は全要素に関する足し合わせを表し, V^e および S^e は有限要素の体積および表面を表す. ある一つの要素に注目すると, $\delta \mathbf{U}^e$ の任意性から以下の運動方程式が得られる.

$$\mathbf{M}^e \frac{d^2 \mathbf{U}^e}{dt^2} + \mathbf{C}^e \frac{d \mathbf{U}^e}{dt} + \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e. \quad (\text{B.18})$$

ここで, $\mathbf{M}^e$ は要素質量行列, $\mathbf{C}^e$ は要素減衰行列, $\mathbf{K}^e$ は要素剛性行列, $\mathbf{F}^e$ は要素の節点に作用する外力ベクトルであり, それぞれ以下で表される.

$$\mathbf{M}^e = \int_{V^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \quad (\text{B.19a})$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV, \quad (\text{B.19b})$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad (\text{B.19c})$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{F}^0 dV + \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{T}^0 dS. \quad (\text{B.19d})$$

式(B.18)を全要素に関して足し合わせることで、解析領域全体での運動方程式

$$\mathbf{M}^G \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + \mathbf{C}^G \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{K}^G \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (\text{B.20})$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{M}^G$ はグローバル質量行列、 $\mathbf{C}^G$ はグローバル減衰行列、 $\mathbf{K}^G$ はグローバル剛性行列、 $\mathbf{U}$ は全節点変位ベクトル、 $\mathbf{F}$ は全節点力ベクトルを表す。

付録 C 四次ルンゲ・クッタ法による陽的時間積分の定式化

ここでは、動的有限要素解析における運動方程式

$$\mathbf{M}^G \frac{d^2 \mathbf{U}(t)}{dt^2} + \mathbf{C}^G \frac{d \mathbf{U}(t)}{dt} + \mathbf{K}^G \mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (3.17)$$

の陽的時間積分の計算法を示す。

全節点速度ベクトル $\mathbf{V}(t)$ を導入し、式(3.17)を連立一階微分方程式の形に書き直すと以下のようになる。

$$\frac{d \mathbf{V}(t)}{dt} = (\mathbf{M}^G)^{-1} [\mathbf{F}(t) - \mathbf{K}^G \mathbf{U}(t) - \mathbf{C}^G \mathbf{V}(t)], \quad (C.1a)$$

$$\frac{d \mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{V}(t). \quad (C.1b)$$

このとき、四次ルンゲ・クッタ法を用いると時間ステップ Δt 経過後の変位および速度は以下のように計算される。

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (C.2a)$$

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{U}(t) + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{m}_1 + 2\mathbf{m}_2 + 2\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4). \quad (C.2b)$$

ここで、ベクトル $\mathbf{k}_j$, $\mathbf{m}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) は以下で与えられる。

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{V}(t), \quad (C.3a)$$

$$\mathbf{k}_1 = (\mathbf{M}^G)^{-1} [\mathbf{F}(t) - \mathbf{K}^G \mathbf{U}(t) - \mathbf{C}^G \mathbf{m}_1], \quad (C.3b)$$

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{V}(t) + \mathbf{k}_1 \frac{\Delta t}{2}, \quad (C.3c)$$

$$\mathbf{k}_2 = (\mathbf{M}^G)^{-1} \left\{ \mathbf{F}(t) - \mathbf{K}^G \left[\mathbf{U}(t) + \mathbf{m}_1 \frac{\Delta t}{2} \right] - \mathbf{C}^G \mathbf{m}_2 \right\}, \quad (C.3d)$$

$$\mathbf{m}_3 = \mathbf{V}(t) + \mathbf{k}_2 \frac{\Delta t}{2}, \quad (\text{C.3e})$$

$$\mathbf{k}_3 = (\mathbf{M}^G)^{-1} \left\{ \mathbf{F}(t) - \mathbf{K}^G \left[\mathbf{U}(t) + \mathbf{m}_2 \frac{\Delta t}{2} \right] - \mathbf{m}_3 \right\}, \quad (\text{C.3f})$$

$$\mathbf{m}_4 = \mathbf{V}(t) + \mathbf{k}_3 \Delta t, \quad (\text{C.3g})$$

$$\mathbf{k}_4 = (\mathbf{M}^G)^{-1} \{ \mathbf{F}(t) - \mathbf{K}^G [\mathbf{U}(t) + \mathbf{m}_3 \Delta t] - \mathbf{C}^G \mathbf{m}_4 \}. \quad (\text{C.3h})$$

付録 D 一般化セルフコンシステントモデルによる有効媒質近似

繊維方向 (x_1 方向) に関して横等方性を有する繊維と等方性母材から成る繊維強化複合材料を考えると、繊維に垂直方向に関する有効媒質の弾性率 C_{22} , C_{44} は以下で与えられる.

$$C_{22} = K_{23} + \mu_{23}, \quad (D.1a)$$

$$C_{44} = \mu_{23}. \quad (D.1b)$$

ここで、 K_{23} は有効媒質の $x_2 - x_3$ 平面における平面ひずみ体積弾性率、 μ_{23} は $x_2 - x_3$ 平面内のせん断弾性率である. 一般化セルフコンシステントモデル^{[1], [2]}を用いると、 K_{23} は以下で与えられる.

$$K_{23} = A_m + \frac{V_f}{\frac{1}{A_f - A_m} + \frac{1 - V_f}{A_m + \mu_m}}. \quad (D.2)$$

ここで、 V_f は繊維体積含有率、 μ_m は母材のせん断弾性率であり、

$$A_m = \frac{\mu_m}{1 - 2\nu_m}, \quad A_f = \frac{\mu_{23f}}{1 - 2\nu_{23f}}, \quad (D.3)$$

である. ここで、 ν_m は母材のポアソン比、 μ_{23f} および ν_{23f} は繊維の $x_2 - x_3$ 面内におけるせん断弾性率およびポアソン比である.

一方で、 μ_{23} は以下の二次方程式の解として与えられる.

$$B_1 \left(\frac{\mu_{23}}{\mu_m} \right)^2 + 2B_2 \left(\frac{\mu_{23}}{\mu_m} \right) + B_3 = 0. \quad (D.4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} B_1 &= 3V_f(1 - V_f)^2 \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} - 1 \right) \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} + \eta_f \right) \\ &+ \left[\left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} + \eta_f \right) \eta_m - \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \left[V_f \eta_m \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} - 1 \right) - \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} \eta_m + 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (D.5a)$$

$$\begin{aligned}
 B_2 = & -3V_f(1-V_f)^2 \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} - 1 \right) \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} + \eta_f \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} \eta_m + \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} - 1 \right) V_f + 1 \right] \left[(\eta_m - 1) \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} + \eta_f \right) - 2 \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \\
 & + \frac{V_f}{2} (\eta_m + 1) \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} - 1 \right) \left[\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} + \eta_f + \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right],
 \end{aligned} \tag{D.5b}$$

$$\begin{aligned}
 B_3 = & 3V_f(1-V_f)^2 \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} - 1 \right) \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} + \eta_f \right) \\
 & + \left[\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} \eta_m + \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} - 1 \right) V_f + 1 \right] \left[\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} + \eta_f + \left(\frac{\mu_{23f}}{\mu_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right],
 \end{aligned} \tag{D.5c}$$

であり,

$$\eta_m = 3 - 4\nu_m, \quad \eta_f = 3 - 4\nu_{23f}, \tag{D.6}$$

である.

付録 E 異方性弾性体中での波数を求める六次方程式 (5.15)の係数

5.2.3 節で述べた，プライ中を伝搬するバルク波の波数を求める式

$$\beta_1 k_3^6 + \beta_2 k_3^4 + \beta_3 k_3^2 + \beta_4 = 0, \quad (5.15)$$

の係数 β_j ($j = 1, 2, 3, 4$)は，以下で与えられる．

$$\beta_1 = C_{33}(C_{44}C_{55} - C_{45}^2), \quad (E.1)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & (C_{11}k_0^2 \sin^2 \theta - \rho\omega^2)C_{33}C_{44} + (C_{66}k_0^2 \sin^2 \theta - \rho\omega^2)C_{33}C_{55} \\ & + (C_{55}k_0^2 \sin^2 \theta - \rho\omega^2)(C_{44}C_{55} - C_{45}^2) + [2C_{45}(C_{36} + C_{45})(C_{13} + C_{55}) \\ & - 2C_{16}C_{33}C_{45} - C_{44}(C_{13} + C_{55})^2 - C_{55}(C_{36} + C_{45})^2]k_0^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (E.2)$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = & [2(C_{13} + C_{55})(C_{36} + C_{45}) - C_{33}C_{16}]C_{16}k_0^4 \sin^4 \theta \\ & - [(C_{11}k_0^2 \sin^2 \theta - \rho\omega^2)(C_{36} + C_{45})^2 + (C_{66}k_0^2 \sin^2 \theta - \rho\omega^2)(C_{13} + C_{55})^2 \\ & + 2(C_{55}k_0^2 \sin^2 \theta - \rho\omega^2)C_{11}C_{45}]k_0^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (E.3)$$

$$\begin{aligned} \beta_4 = & [(C_{11}k_0^2 \sin^2 \theta - \rho\omega^2)(C_{66}k_0^2 \sin^2 \theta - \rho\omega^2) - C_{16}^2 k_0^4 \sin^4 \theta] \\ & \times (C_{55}k_0^2 \sin^2 \theta - \rho\omega^2). \end{aligned} \quad (E.4)$$

付録F フロケ波特性方程式 (5. 40) および式 (5. 41) の導出

ここでは, 5.4.1 節で述べたフロケ波数を求める方程式

$$A_3 \cos(3\zeta h_u) + A_2 \cos(2\zeta h_u) + A_1 \cos(\zeta h_u) + A_0 = 0, \quad (5.40)$$

およびその係数

$$A_3 = \det(\mathbf{K}_{21}), \quad (5.41a)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} [\det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{21})] - \det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11}), \quad (5.41b)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} [\det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21}) - \det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}) + \det(\mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12})] - 2\det(\mathbf{K}_{21}), \quad (5.41c)$$

$$A_0 = \frac{1}{4} [\det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12})] - A_2, \quad (5.41d)$$

の導出を行う.

本文中で述べた以下の式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_U) \\ \mathbf{t}(Z_L) \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(Z_U) \\ \mathbf{u}(Z_L) \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_U) \\ \mathbf{u}(Z_U) \end{pmatrix} = \exp(i\zeta h_u) \begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_L) \\ \mathbf{u}(Z_L) \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

を用いることで, 次の関係式が得られる.

$$[\mathbf{K}_{21} \exp(i\zeta h_u) - \mathbf{K}_{12} \exp(-i\zeta h_u) + \mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11}] \mathbf{u}(Z_U) = \mathbf{0}. \quad (F.1)$$

式(F.1)において, $\mathbf{u}(Z_U)$ が非自明解を持つためには,

$$\det[\mathbf{K}_{21} \exp(i\zeta h_u) - \mathbf{K}_{12} \exp(-i\zeta h_u) + \mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11}] = 0, \quad (F.2)$$

を満たす必要がある. ここで, 式(F.2)左辺に現れる 3×3 行列を, 列ベクトルを用いて

$$\mathbf{K}_{21} \equiv [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad (\text{F.3})$$

$$\mathbf{K}_{12} \equiv [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3], \quad (\text{F.4})$$

$$\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11} \equiv \mathbf{M} \equiv [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3], \quad (\text{F.5})$$

と表し、さらに

$$X = \exp(i\zeta h_u), \quad (\text{F.6})$$

とすると、式(F.2)は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} & \det[\mathbf{K}_{21}\exp(i\zeta h_u) - \mathbf{K}_{12}\exp(-i\zeta h_u) + \mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11}] \\ &= \det[\mathbf{a}_1 X - \mathbf{b}_1 X^{-1} + \mathbf{m}_1, \mathbf{a}_2 X - \mathbf{b}_2 X^{-1} + \mathbf{m}_2, \mathbf{a}_3 X - \mathbf{b}_3 X^{-1} + \mathbf{m}_3] \\ &= B_1 X^3 + B_2 X^2 + B_3 X + B_4 + B_5 X^{-1} + B_6 X^{-2} + B_7 X^{-3} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

ここで、

$$B_1 = \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad (\text{F.8a})$$

$$B_2 = \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{m}_3] + \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{a}_3] + \det[\mathbf{m}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad (\text{F.8b})$$

$$\begin{aligned} B_3 &= -\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] - \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3] - \det[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \\ &\quad + \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3] + \det[\mathbf{m}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{m}_3] + \det[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{a}_3], \end{aligned} \quad (\text{F.8c})$$

$$\begin{aligned} B_4 &= -\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{m}_3] - \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{b}_3] - \det[\mathbf{b}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{a}_3] \\ &\quad - \det[\mathbf{b}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{a}_3] - \det[\mathbf{m}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] - \det[\mathbf{m}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3] \\ &\quad + \det[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3], \end{aligned} \quad (\text{F.8d})$$

$$\begin{aligned} B_5 &= \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] + \det[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] + \det[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3] \\ &\quad - \det[\mathbf{b}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3] - \det[\mathbf{m}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{m}_3] - \det[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{b}_3], \end{aligned} \quad (\text{F.8e})$$

$$B_6 = \det[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{m}_3] + \det[\mathbf{b}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{b}_3] + \det[\mathbf{m}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3], \quad (\text{F.8f})$$

$$B_7 = -\det[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3], \quad (\text{F.8g})$$

である.

一方で,

$$\begin{aligned}
 & \det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{21}) \\
 &= \det[\mathbf{m}_1 + \mathbf{a}_1, \mathbf{m}_2 + \mathbf{a}_2, \mathbf{m}_3 + \mathbf{a}_3] + \det[\mathbf{m}_1 - \mathbf{a}_1, \mathbf{m}_2 - \mathbf{a}_2, \mathbf{m}_3 - \mathbf{a}_3] \\
 &= 2\{\det(\mathbf{M}) + \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] + \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{a}_3] + \det[\mathbf{m}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]\},
 \end{aligned} \tag{F.9}$$

より,

$$B_2 = \frac{1}{2} [\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{21})] - \det(\mathbf{M}), \tag{F.10a}$$

となる. 同様にして以下の関係が成り立つ.

$$B_1 = \det(\mathbf{K}_{21}), \tag{F.10b}$$

$$\begin{aligned}
 B_3 &= \frac{1}{2} [\det(\mathbf{K}_{21} + \mathbf{M}) + \det(\mathbf{K}_{21} - \mathbf{M})] - \det(\mathbf{K}_{21}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} [\det(\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{21})] + \det(\mathbf{K}_{12}),
 \end{aligned} \tag{F.10c}$$

$$\begin{aligned}
 B_4 &= \frac{1}{2} [\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12})] \\
 &\quad - \frac{1}{2} [\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{21})] + \det(\mathbf{M}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} [\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{12}) + \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{12})] + \det(\mathbf{M}),
 \end{aligned} \tag{F.10d}$$

$$\begin{aligned}
 B_5 &= \frac{1}{2} [\det(\mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{12}) + \det(\mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12})] - \det(\mathbf{K}_{21}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} [\det(\mathbf{K}_{12} + \mathbf{M}) + \det(\mathbf{K}_{12} - \mathbf{M})] + \det(\mathbf{K}_{12}),
 \end{aligned} \tag{F.10e}$$

$$B_6 = \frac{1}{2} [\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{12}) + \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{12})] - \det(\mathbf{M}), \tag{F.10f}$$

$$B_7 = -\det(\mathbf{K}_{12}). \quad (\text{F.10g})$$

次に、無限周期構造のユニットセルの伝達マトリックスを $\mathbf{H}$ とするとき、ユニットセル上下面での変位と応力は以下のように関係づけられる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_U) \\ \mathbf{u}(Z_U) \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(Z_L) \\ \mathbf{u}(Z_L) \end{pmatrix}. \quad (\text{F.11})$$

伝達マトリックス $\mathbf{H}$ の固有値は、ある 3 個の組とそれらの逆数の計 6 個で構成されること^[3]を考慮し、 $\mathbf{H}$ の固有値を

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, \quad (\text{F.12})$$

とすると、 $\mathbf{H}$ の固有多項式 $\phi(\lambda)$ は、

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_3} \right), \quad (\text{F.13})$$

となる。式(F.13)右辺を展開し λ の次数ごとに整理すると以下のようになる。

$$\phi(\lambda) = \lambda^6 - I_1 \lambda^5 + I_2 \lambda^4 - I_3 \lambda^3 + I_2 \lambda^2 - I_1 \lambda + 1. \quad (\text{F.14})$$

ここで、

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}, \quad (\text{F.15a})$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_3 \lambda_1} + \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_3 + \lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{\lambda_3} + 3, \quad (\text{F.15b})$$

$$I_3 = 2I_1 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_3 \lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3 \lambda_1} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (\text{F.15c})$$

である。式(5.39)と(F.11)より $X = \exp(i\zeta h_u)$ は伝達マトリックス $\mathbf{H}$ の固有値となるため、 X は $\mathbf{H}$ の固有多項式を満たす。したがって

$$\phi(X) = X^6 - I_1 X^5 + I_2 X^4 - I_3 X^3 + I_2 X^2 - I_1 X + 1 = 0, \quad (\text{F.16})$$

と書くことができ、式(F.16)に X^{-3} を掛けることで、

$$X^3 - I_1 X^2 + I_2 X - I_3 + I_2 X^{-1} - I_1 X^{-2} + X^{-3} = 0, \quad (\text{F.17})$$

となる.

式(F.7), (F.10), (F.17)より以下の関係が得られる.

$$\det(\mathbf{K}_{21}) = -\det(\mathbf{K}_{12}), \quad (\text{F.18a})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{21})] - \det(\mathbf{M}) \\ &= \frac{1}{2} [\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{12}) + \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{12})] - \det(\mathbf{M}), \end{aligned} \quad (\text{F.18b})$$

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{K}_{21} + \mathbf{M}) + \det(\mathbf{K}_{21} - \mathbf{M}) - \det(\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{21}) - \det(\mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{21}) \\ &= \det(\mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{12}) + \det(\mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12}) - \det(\mathbf{K}_{12} + \mathbf{M}) - \det(\mathbf{K}_{12} - \mathbf{M}). \end{aligned} \quad (\text{F.18c})$$

ここで, 式(F.18b)より,

$$\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{21}) = \det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{12}) + \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{12}) - \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{21}), \quad (\text{F.19})$$

となり, 式(F.19)より式(F.18c)は以下の形になる.

$$\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{12}) = \det(\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{21}). \quad (\text{F.20})$$

式(F.18)–(F.20)を用いることで, 式(F.7)は, 以下の形に書き直せる.

$$A_3 \cos(3\zeta h_u) + A_2 \cos(2\zeta h_u) + A_1 \cos(\zeta h_u) + A_0 = 0. \quad (\text{F.21})$$

ここで,

$$A_3 = \det(\mathbf{K}_{21}), \quad (\text{F.22a})$$

$$A_2 = \frac{1}{2} [\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{M} - \mathbf{K}_{21})] - \det(\mathbf{M}), \quad (\text{F.22b})$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} [\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{21}) - \det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{12}) + \det(\mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12})] \\ &\quad - 2\det(\mathbf{K}_{21}), \end{aligned} \quad (\text{F.22c})$$

$$A_0 = \frac{1}{4} [\det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{21}) + \det(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12})] - A_2, \quad (\text{F.22d})$$

である. 式(F.22)に $\mathbf{M} = \mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{11}$ を代入することで, フロケ波数を求める方程式(5.40)およ

びその係数を与える式(5.41)が導出される.

付録 G ストップバンド発生条件式 (5.46) の導出

ここでは、5.4.1 節で述べたフロケ波のストップバンド発生条件

$$\operatorname{Re}[\zeta_\alpha]h_u/\pi + \operatorname{Re}[\zeta_\beta]h_u/\pi = 2n, \quad (5.46)$$

の導出について説明する.

はじめに、本文中で述べた式(5.43)

$$\zeta = \frac{2m\pi + \arg(X)}{h_u} - i \frac{\ln(X)}{h_u}, \quad (5.43)$$

より、フロケ波数の x_3 方向成分 ζ を以下の形で仮定する.

$$\zeta = \frac{2m\pi + a + ib}{h_u}. \quad (G.1)$$

ここで、 $-\pi \leq a \leq \pi$ と b は実数である. このとき式(5.44)

$$X^2 - \eta X + 1 = 0, \quad (5.44)$$

は以下の形で書き直すことができる.

$$\cosh b \cos a - i \sinh b \sin a = \frac{\eta}{2}. \quad (G.2)$$

フロケ波のバンド構造は、 η の値にしたがって以下の四つの場合に分類することができる.

$$(a) \quad |\operatorname{Re}[\eta]| < 2, \quad \operatorname{Im}[\eta] = 0, \quad (G.3)$$

$$(b) \quad |\operatorname{Re}[\eta]| = 2, \quad \operatorname{Im}[\eta] = 0, \quad (G.4)$$

$$(c) \quad |\operatorname{Re}[\eta]| > 2, \quad \operatorname{Im}[\eta] = 0, \quad (G.5)$$

$$(d) \quad \operatorname{Im}[\eta] \neq 0. \quad (G.6)$$

(a)の場合 ($|\operatorname{Re}[\eta]| < 2, \operatorname{Im}[\eta] = 0$)

式(G.2)は以下の形に帰着する.

$$a = \pm \cos^{-1} \left(\frac{\operatorname{Re}[\eta]}{2} \right), \quad (G.7)$$

$$b = 0. \quad (\text{G.8})$$

ここで、式(G.7)の“±”は、 x_3 の正方向および負方向に伝搬するフロケ波の組に対応する。式(G.1)と(G.8)よりフロケ波数 ζ は実数となり、これはストップバンドの外側（パスバンド）に対応する。

(b)の場合 ($|\text{Re}[\eta]| = 2, \text{Im}[\eta] = 0$)

式(G.2)は以下の形に帰着する。

$$a = \begin{cases} 0, & \text{if } \text{Re}[\eta] = 2, \\ \pi, & \text{if } \text{Re}[\eta] = -2, \end{cases} \quad (\text{G.9})$$

$$b = 0. \quad (\text{G.10})$$

これは、単一のフロケ波モードによるストップバンドとパスバンドの境界に対応する。

(c)の場合 ($|\text{Re}[\eta]| > 2, \text{Im}[\eta] = 0$)

式(G.2)は以下の形に帰着する。

$$a = \begin{cases} 0, & \text{if } \text{Re}[\eta] > 2, \\ \pi, & \text{if } \text{Re}[\eta] < -2, \end{cases} \quad (\text{G.11})$$

$$b = \ln \left[\frac{|\text{Re}[\eta]|}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Re}[\eta]}{2} \right)^2 - 1} \right] \neq 0. \quad (\text{G.12})$$

式(G.1), (G.11), (G.12)より、これは単一のフロケ波モードによるストップバンドに対応し、 $\alpha = \beta$ としたときの式(5.46)が導かれる。

(d)の場合 ($\text{Im}[\eta] > 0$)

式(G.2)より以下の関係が導かれる。

$$a \neq 0, \quad a \neq \pi, \quad (\text{G.13})$$

$$b \neq 0. \quad (\text{G.14})$$

ここで、Braga and Herrmann^[4]によると、式(5.44)および(5.45)

$$X^2 - \eta X + 1 = 0, \quad (\text{5.44})$$

$$A_3\eta^3 + A_2\eta^2 + (A_1 - 3A_3)\eta + 2(A_0 - A_2) = 0, \quad (5.45)$$

から $X = X_0$ が解として求められたとき、その逆数および複素共役 ($1/X_0$ および X_0^*) も必ず式(5.44)と(5.45)を満足する。なお、Braga and Herrmann^[4]はプライ同士が完全接着状態であると仮定しているが、この性質は層間にスプリング界面を導入した場合においても成立する。上記性質を用いると、ユニットセルの伝達マトリクスの不変量 (付録 F, 式(F.15)) が全て実数になる。そして付録 F で示したように、式(5.45)左辺の係数はこれらの不変量だけで表すことができるため、式(5.45)は実係数三次方程式となる。したがって、式(5.45)の解 $\eta = \eta_0$ が求められたとき、その複素共役 $\eta = \eta_0^*$ も必ず式(5.45)の解になる。ここで、 $\eta = \eta_0$ から求めたフロケ波数を

$$\zeta_\alpha = \frac{2m\pi + a + ib}{h_u}, \quad (G.15)$$

とすると、 $\eta = \eta_0^*$ に対応するフロケ波のうち ζ_α と同じ x_3 方向に伝搬するモードの波数 ζ_β は必ず以下の形を取る。

$$\zeta_\beta = \frac{2l\pi - a + ib}{h_u}. \quad (G.16)$$

ここで、 l は整数であり m と異なってもかまわない。式(G.13)–(G.16)より、これは二つの異なるフロケ波モードが同時にストップバンドに入ることを表し、 $\alpha \neq \beta$ としたときの式(5.46)が導かれる。

付録の参考文献

- [1]. Z. Hashin and B. W. Rosen, “The elastic moduli of fiber-reinforced materials,” *Journal of Applied Mechanics* Vol. **31**, No. 2 (1964), pp. 223–232.
- [2]. R. M. Christensen and K. H. Lo, “Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* Vol. **27**, No. 4 (1979), pp. 315–330.
- [3]. A. H. Nayfeh, “The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **89**, No. 4 (1991), pp. 1521–1531.
- [4]. A. M. B. Braga and G. Herrmann, “Floquet waves in anisotropic periodically layered composites,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **91**, No. 3 (1992), pp. 1211–1227.

本研究に関連する論文および発表

定期刊行誌掲載論文

1. Y. Ishii and S. Biwa, “Ultrasonic evaluation of interlayer interfacial stiffness of multilayered structures,” *Journal of Applied Physics* Vol. **111**, Issue 8 (2012), 084907.
2. Y. Ishii and S. Biwa, “Evaluation of interlayer interfacial stiffness and layer wave velocity of multilayered structures by ultrasonic spectroscopy,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **136**, No. 1 (2014), pp. 183–191.
3. Y. Ishii and S. Biwa, “Transmission of ultrasonic waves at oblique incidence to composite laminates with spring-type interlayer interfaces,” *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **138**, No. 5 (2015), pp. 2800–2810.

国際会議発表

1. Y. Ishii and S. Biwa, “Acoustic harmonic generation in a multilayered structure with nonlinear interfaces,” *Nonlinear Acoustics, State-of-the-Art and Perspectives: 19th International Symposium on Nonlinear Acoustics* (eds. T. Kamakura and N. Sugimoto) (Tokyo, May 2012); *AIP Conference Proceedings* Vol. **1474** (2012), pp. 223–226.
2. S. Biwa and Y. Ishii, “Analysis of acoustic harmonic generation in a solid with multiple nonlinear interfaces,” 166th Meeting of the Acoustical Society of America (San Francisco, December 2013), *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. **134**, No. 5, Pt. 2 (November 2013), p. 4104.
3. Y. Ishii and S. Biwa, “Ultrasonic evaluation of interlayer interfacial stiffness and ply wave velocity of CFRP laminate,” *Proceedings of the Fourth Asian Conference on Mechanics of Functional Materials and Structures* (eds. S. Ueda and Y. Uetsuji) (Nara, October 2014), pp. 123–124.
4. Y. Ishii and S. Biwa, “Effects of interlayer interfacial stiffness on ultrasonic propagation in composite laminates at oblique incidence,” *Proceedings of the 2015 ICU International Congress on Ultrasonics* (ed. N. F. Declercq) (Metz, May 2015), *Physics Procedia* Vol. **70** (2015), pp. 372–375.

国内会議発表

1. 石井陽介, 琵琶志朗, 「積層複合材料における超音波伝搬挙動に及ぼす層間界面の影響」, M&M2011 材料力学カンファレンス講演論文集, OS1716, 北九州 (九州工業大学), 2011 年 7 月 17 日.
2. 石井陽介, 琵琶志朗, 「超音波反射スペクトル解析による積層複合材料の層間界面剛性の評価」, 第 48 回日本航空宇宙学会関西・中部支部合同秋季大会論文集, A32, 神戸 (神戸市産業振興センター), 2011 年 11 月 25 日.
3. 石井陽介, 琵琶志朗, 「CFRP 積層板の超音波反射特性に関する理論的検討と層間界面剛性の評価」, 第 19 回超音波による非破壊評価シンポジウム講演論文集, pp. 147-148, 東京 (東京工業大学), 2012 年 1 月 27 日.
4. 石井陽介, 琵琶志朗, 林 高弘, 「超音波スペクトロスコーピーによる CFRP 積層板の構成層弾性率および層間界面剛性の評価」, 第 4 回日本複合材料合同会議講演論文集, 2A-04, 東京 (東京大学), 2013 年 3 月 8 日.
5. 石井陽介, 琵琶志朗, 倉石 晃, 林 高弘, 「CFRP 積層板の超音波反射特性に及ぼすポロシティの影響」, M&M2013 材料力学カンファレンス講演論文集, OS0615, 岐阜 (岐阜大学), 2013 年 10 月 13 日.
6. 石井陽介, 琵琶志朗, 「CFRP 積層板の超音波伝搬特性に及ぼす層間樹脂リッチ領域の影響」, 第 5 回日本複合材料会議講演論文集, 1D-11, 京都 (キャンパスプラザ京都), 2014 年 3 月.
7. 石井陽介, 琵琶志朗, 「CFRP 積層板における斜角入射超音波伝搬特性の理論的検討」, M&M2014 材料力学カンファレンス講演論文集, OS1710, 福島 (福島大学), 2014 年 7 月 19 日.
8. 石井陽介, 琵琶志朗, 「吸湿した CFRP 積層板の層間界面剛性およびプライ縦波速度の超音波スペクトロスコーピーによる評価」, 第 6 回日本複合材料会議, 1B-11, 東京 (東京理科大学), 2015 年 3 月 4 日.
9. 石井陽介, 琵琶志朗, 「CFRP 積層板の超音波透過スペクトルにおけるバンドギャップ発生挙動の理論的検討」, 日本機械学会材料力学部門若手シンポジウム 2015 講演論文集, 21, 伊勢 (神宮会館), 2015 年 8 月 11 日.
10. 石井陽介, 琵琶志朗, 「CFRP 積層板の層間特性評価に向けた斜角入射超音波伝搬挙動の理論的検討」, M&M2015 材料力学カンファレンス講演論文集, OS1525-422, 東京 (慶應義塾大学), 2015 年 11 月 22 日.

謝辞

本論文に関係する研究は、著者が学部4回生時から取り組んだ研究をまとめたものです。本研究の遂行にあたり、6年もの間終始多大なるご指導、ご厚情を賜りました京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻の琵琶志朗教授に謹んで御礼申し上げます。

京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻の北條正樹教授、ならびに同専攻の西脇眞二教授には、本論文をご高覧いただき多くの貴重なご指導、ご助言を賜りました。ここに厚く御礼申し上げます。

京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻の林高弘准教授には、研究の遂行にあたり多大なご助言、ご教示を賜りました。深く御礼申し上げます。

京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻の北條正樹教授、ならびに同専攻の西川雅章准教授には、著者の博士課程前後期課程連携教育プログラム（融合工学コース 応用力学分野）における副指導教員として、ご助言、ご教示を賜りました。また、本論文第4章4.3節で示したCFRP積層板の顕微鏡断面観察では両先生の研究室の実験設備を拝借しました。また断面観察のための試験片研磨方法やマイクロスコープの使用方法など多大なるご教示を賜りました。ここに深く御礼申し上げます。

京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻の松田直樹助教には、私が研究室に配属されて以来、研究に関する相談に加え事務書類の書き方や科研費の使用方法などさまざまな面でご厚情賜りました。先生の支えなくしては、このように学位論文として研究成果をまとめることも無理であったと思います。ここに深く感謝の意を表します。

機能構造力学研究室の博士後期課程の森直樹君には、ゼミでの研究発表や日常会話を通じて大変貴重なご助言を頂きました。優秀な後輩がいてくれたからこそ私もここまで頑張ってきたと実感しております。深く御礼申し上げます。

独立行政法人日本学術振興会には、博士後期課程在学中の3年間特別研究員DC1として採用していただき、多大なる経済的援助を受けました。また、本研究の遂行に当たり、日本学術振興会研究費補助金（課題番号：25-1754, 25289005, 15K13833）の助成を賜りました。ここに感謝の意を表します。

私がここまで研究生活を続けてこられたのは、友人の精神的支えがあったからこそだと思います。特に、北野智朗君、堀内健吾君、丸山智也君、鷲尾和也君にはこれまで大変お世話になりました。ここに深く御礼申し上げます。

最後に、私が博士後期課程進学を希望したときも私の意見を尊重し、温かく応援し支え続けてくださった家族、石井義久様、石井規美代様、松尾真衣様に心から感謝申し上げます。

2016年1月 石井 陽介

本論文に関連する著作権について

本論文第2章の内容は、主に以下の論文の内容をまとめたものである。

- 著者：Yosuke Ishii and Shiro Biwa
- タイトル：Ultrasonic evaluation of interlayer interfacial stiffness of multilayered structures
- 掲載誌：Journal of Applied Physics Vol. **111**, Issue 8, 084907
- 発行年月日：2012 年 4 月 15 日
- 出版社：American Institute of Physics (<https://www.aip.org/>)
- アブストラクト URL：<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/111/8/10.1063/1.4704692>

第3章および第4章4.2節, 4.3節の内容は、主に以下の論文の内容をまとめたものである。

- 著者：Yosuke Ishii and Shiro Biwa
- タイトル：Evaluation of interlayer interfacial stiffness and layer wave velocity of multilayered structures by ultrasonic spectroscopy
- 掲載誌：The Journal of the Acoustical Society of America Vol. **136**, No. 1, pp. 183–191
- 発行年月：2014 年 7 月
- 出版社：American Institute of Physics (<https://www.aip.org/>)
- アブストラクト URL：<http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/136/1/10.1121/1.4881920>

第5章の内容は、主に以下の論文の内容をまとめたものである。

- 著者：Yosuke Ishii and Shiro Biwa
- タイトル：Transmission of ultrasonic waves at oblique incidence to composite laminates with spring-type interlayer interfaces
- 掲載誌：The Journal of the Acoustical Society of America Vol. **138**, No. 5, pp. 2800–2810
- 発行年月：2015 年 11 月
- 出版社：American Institute of Physics (<https://www.aip.org/>)
- アブストラクト URL：<http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/138/5/10.1121/1.4934265?aemail=author>