Upper bounds on the slope of certain fibered surfaces

（ある種のファイバー曲面のスロープ上限について）

榎園　誠*

概要

線織面や楕円曲面の巡回被覆で得られるファイバー曲面のスロープには 12 より小さい上限があることを説明する．

導入

本稿で扱う代数多様体は全て $\mathbb{C}$ 上で考える．射 $f\colon S \to B$ が**種数 g のファイバー曲面**であるとは，非特異射影曲面 S から非特異射影曲線 B への全射であって，一般ファイバーは種数 g の非特異射影曲線であるものとする．$K_f = K_S - f^*K_B$ を f の相対標準因子とする．ファイバー曲面の数値的な不変量として，次のようなものがある．

$$K_f^2, \quad e_f := \mathrm{deg} c_2(T_f), \quad \chi_f := \mathrm{deg} f_*\mathcal{O}(K_f),$$

ここで，$T_f = \Omega_{S/B}^{\vee}$ は f の相対接束である．これらの不変量に関して，次のことが知られている．但し，f は相対極小で $g \geq 2$ とする．

- (Noether) $12\chi_f = K_f^2 + e_f$.
- (Arakelov) K_f はネフである．
- (上野) $\chi_f \geq 0$ であり，$\chi_f = 0$ であることと f は局所自明，つまり正則ファイバー束であることは同値.
- (Segre) $e_f \geq 0$ であり，$e_f = 0$ であることと f のファイバーは全て非特異であることは同値.

本稿では断らない限り $f\colon S \to B$ は局所自明でない相対極小な種数 $g \geq 2$ のファイバー曲面であるとする．このとき上野の定理より $\chi_f > 0$ なので，二つの不変量の比 $\lambda_f := K_f^2/\chi_f$ が定義できる．これをファイバー曲面 f の**スロープ**という．スロープに関しては次の不等式が知られている．

*大阪大学大学院理学研究科博士課程 1 年　m-enokizono@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

- (スロープ不等式 [16]) $\dfrac{4(g-1)}{g} \le \lambda_f \le 12.$

一つ目の等号が成立するときは f の一般ファイバーが超楕円曲線の場合に限ることが知られている．二つ目の不等式は上記の事実から分かり，等号が成立することと f のファイバーが全て非特異（しかし局所自明ではない）なことは同値である．このようなファイバー曲面は**小平ファイバー曲面**と呼ばれる．最初の具体例は符号数が正の一般型曲面の例として小平先生により構成された [12]．ここでその構成法を荒く説明する（詳しくは [4] 又は [11] を参照）．

例 0.1 B, C を種数 2 以上の非特異代数曲線とする．直積 $B \times C$ 上の非特異な（既約でなくともよい）曲線 R で次の条件 (*) を満たすものが存在すると仮定する．

(*) ある自然数 $n \ge 2$ と $B \times C$ 上の直線束 L で $R \sim nL$（線形同値）なものが存在し，自然な射影 $R \to B$, $R \to C$ は全射，さらに $R \to B$ は不分岐．

このとき R を定める $L^{\otimes n}$ の大域切断により $\mathcal{A} := \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}_{B\times C}(-iL)$ に $\mathcal{O}_{B\times C}$-代数の構造が自然に入り，$S := \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_{B\times C}}(\mathcal{A})$ とおくと R で分岐する n 次巡回被覆 $S \to B \times C$ が構成できる．R は非特異なので S も非特異であり，第一射影 $B \times C \to B$ との合成 $f\colon S \to B$ はファイバー曲面となる．この f は小平ファイバー曲面である．実際，$R \to B$ は不分岐な全射なので f のファイバーは全て非特異であり，$R \to C$ の全射性からファイバーの複素構造は変形されていく．

この例では種数 3 の小平ファイバー曲面の例は構成できないが，種数 g の非特異射影曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_g$ が $g \ge 3$ ならば完備な曲線を含むという事実から，任意の $g \ge 3$ に対し種数 g の小平ファイバー曲面が存在することが分かる．しかし一般ファイバーが超楕円曲線のとき，小平ファイバー曲面は存在せず，次の不等式が成立する．

定理 0.2 ([17]) $f\colon S \to B$ を種数 g のファイバー曲面とする．一般ファイバーが超楕円曲線のとき，不等式

$$\lambda_f \le 12 - \frac{2g+1}{[g^2/4]}$$

が成立する．

この不等式は最良である．実際，任意の $g \ge 2$ に対し，不等式の等号を満たす種数 g の超楕円的なファイバー曲面が構成されている [14].

例 0.1 の小平ファイバー曲面の構成法は，種数 2 以上の（もっとも簡単な）ファイバー曲面 $B \times C \to B$ の巡回分岐被覆を取るというシンプルなものである．一方，超楕円的なファイバー曲面は線織面（種数 0 のファイバー曲面）の 2 重被覆を取ったものに他ならないが，定理 0.2 は線職面の 2 重被覆をどのように取っても（種数 g を固定すれば）スロープを 12 に近づけることができないことを言っている．しかし，例えば種数 3, 4 の非超楕円曲線は $\mathbb{P}^1$ の 3 重被覆であるから，種数 3, 4 の小平ファイバー曲面は（適当に底を変換すれば）線職面の 3 重被覆と見れる．これらから，例 0.1 の構成法で，$B \times C$ の代わりに

線織面や楕円曲面上の巡回被覆を考えることでも小平ファイバー曲面が構成できるのだろうかという問題が考えられる．本稿では，この問題に関し否定的な解答，つまり線織面や楕円曲面上の（単純な）巡回被覆では小平ファイバー曲面は構成できないということを，スロープの 12 より小さい上限を与えることにより説明する．本稿の詳細な内容は論文 [6], [7] にまとめてある．

謝辞　城崎代数幾何シンポジウムで講演の機会を与えて下さった世話人の大川先生，小林先生，藤野先生にお礼を申し上げます．私は JSPS KAKENHI No. 16J00889 から援助を受けています．

1　主結果

まず，ファイバー曲面の巡回被覆で得られるファイバー曲面のクラスを定義する．

定義 1.1 種数 g のファイバー曲面 $f\colon S\to B$ が (g,h,n) 型の **primitive cyclic covering fibration** であるとは，（相対極小とは限らない）種数 $h\geq 0$ のファイバー曲面 $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{W}\to B$ と n 次の巡回分岐被覆 $\widetilde{\theta}\colon \widetilde{S}\to \widetilde{W}$ があって，f が $\widetilde{f}:=\widetilde{\varphi}\circ\widetilde{\theta}$ の相対極小モデルであることとする．ここで，$\widetilde{\theta}$ の分岐因子 $\widetilde{R}$ は非特異で，$\exists \widetilde{L}\in \mathrm{Pic}(\widetilde{W})$ *s.t.* $\widetilde{R}\in|n\widetilde{L}|$, $\widetilde{S}=\mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_{\widetilde{W}}}\left(\bigoplus_{i=0}^{n-1}\mathcal{O}_{\widetilde{W}}(-i\widetilde{L})\right)$ と仮定する．

注意 1.2 (1) $\widetilde{\theta}\colon \widetilde{S}\to\widetilde{W}$ を一般ファイバーに制限した曲線の間の n 次巡回被覆の分岐点の個数を r とすると，これは n の倍数であり，Hurwitz の公式より次を満たす：

$$r=\frac{2(g-1-n(h-1))}{n-1}.$$

(2) 種数 g のファイバー曲面 f が超楕円的であることと $(g,0,2)$ 型の primitive cyclic covering fibration であることは同値．

(3) 一般に，種数 g の非特異曲線は種数 h の非特異曲線の 2 重被覆であるとき h-**超楕円曲線**という．0-超楕円曲線は超楕円曲線に他ならない．1-超楕円曲線のことを**双楕円曲線**ともいう．$g>4h+1$ のとき，種数 g のファイバー曲面 f が h-超楕円的（つまり一般ファイバー h-超楕円曲線）であることと $(g,h,2)$ 型の primitive cyclic covering fibration であることは同値. これは一般ファイバーの h-超楕円的対合が $g>4h+1$ のとき曲面の対合に拡張することから従う [5].

(4) 例 0.1 で構成した小平ファイバー曲面は (g,h,n) 型の primitive cyclic covering fibration である，ここで，h は C の種数である．

主結果は次のようになる．

定理 1.3 ([6], [7]) $f\colon S \to B$ を (g,h,n) 型の primitive cyclic covering fibration とし，$h=0$ 又は $h=1$ とする．このとき，次が成立する．

$$\lambda_f \leq 12 - \mu_{g,h,n}.$$

ここで，

$$\mu_{g,0,n} = \begin{cases} \dfrac{48n^2(r-1)}{(n-1)(n+1)(r^2-\delta n^2)} & (n \geq 4 \text{ かつ } r < n(n-1)) \\[2ex] \dfrac{48n(n-1)(r-1)}{n(n+1)r^2-8(2n-1)r+24n-\delta n^3(n+1)} & (n \geq 4 \text{ かつ } r \geq n(n-1)) \\[2ex] \dfrac{75}{17} & (n=3 \text{ かつ } g=4) \\[2ex] \dfrac{72(r-1)}{4r^2-15r+27-36\delta} & (n=3 \text{ かつ } g>4) \\[2ex] \dfrac{2g+1}{[g^2/4]} & (n=2) \end{cases}$$

$$\mu_{g,1,n} = \begin{cases} \dfrac{6n^2}{(n-1)(g-1)} & (n \geq 4 \text{ 又は } (g,n)=(4,3)) \\[2ex] \dfrac{24}{4g-17} & (n=3 \text{ かつ } g>4) \\[2ex] \dfrac{2}{g-2} & (n=2 \text{ かつ } g>2) \end{cases}$$

但し，r は注意 1.2 (1) のものであり，$\delta = \begin{cases} 0, & r \in 2n\mathbb{Z}, \\ 1, & r \notin 2n\mathbb{Z}. \end{cases}$

系として，双楕円的なファイバー曲面のスロープの上限を得る：

系 1.4 $f\colon S \to B$ を種数 $g>2$ のファイバー曲面とする．一般ファイバーが双楕円曲線のとき，不等式

$$\lambda_f \leq 12 - \frac{2}{g-2}$$

が成立する．

証明 $g>5$ ならば双楕円的な種数 g のファイバー曲面は $(g,1,2)$ 型の primitive cyclic covering fibration なので，定理 1.3 から直ちに従う．$g=3,4,5$ のときも，双楕円的な種

数 g のファイバー曲面 $f\colon S \to B$ に対し，適当な有限射 $B' \to B$ で底を変換すれば $(g,1,2)$ 型の primitive cyclic covering fibration$f'\colon S' \to B'$ が得られ，全てのファイバーは半安定にできる [3]．$8 < 12 - 2/(g-2)$ より $8 \le \lambda_f$ と仮定してよく，すると [15] より $\lambda_f \le \lambda_{f'}$ が成り立つので，定理 1.3 より主張が従う． $\square$

双楕円的な小平ファイバー曲面が存在しないことをモジュライの言葉で言い換えると次のようになる：

系 1.5 種数 g の双楕円曲線全てをパラメトライズする $\mathcal{M}_g$ の部分多様体 $\mathcal{B}_g$ は完備な曲線を含まない．

証明 完備な曲線 $B \subset \mathcal{B}_g$ が存在すると仮定する．有限被覆 $\mathcal{M}'_g \to \mathcal{M}_g$ で $\mathcal{M}'_g$ 上普遍族 $\mathcal{U}'_g \to \mathcal{M}'_g$ が存在するものを取る．B の $\mathcal{M}'_g$ への引き戻し B' へこの普遍族を制限し，必要ならば B' の特異点解消 $B'' \to B'$ で底を変換することで，双楕円的な小平ファイバー曲面 $f''\colon S'' \to B''$ を得る．よってスロープの 12 より小さい上限があることに矛盾． $\square$

2 $h = 1$ の場合

この節では primitive cyclic covering fibration f の不変量 K_f^2 や χ_f を巡回被覆を通して計算し，$h = 1$ の場合に有限個の退化ファイバー芽に局在化されることを見る．その後，定理 1.3 の証明の方針を説明する．$h = 0$ の場合も同様であるが，ここでは略す（詳しくは [6] を参照）．

$f\colon S \to B$ を (g,h,n) 型の primitive cyclic covering fibration とする．1 節で用いた定義や記号を用いる．$\varphi\colon W \to B$ を $\widetilde{\varphi}$ の相対極小モデル（の一つ）とする．点 $p \in B$ に対し，F_p, $\widetilde{F}_p$, Γ_p, $\widetilde{\Gamma}_p$ をそれぞれ f, $\widetilde{f}$, φ, $\widetilde{\varphi}$ の p 上のファイバー芽とする．自然な双有理射 $\widetilde{\psi}\colon \widetilde{W} \to W$ を blow-up の列で表す：

$$\widetilde{W} = W_N \xrightarrow{\psi_N} W_{N-1} \to \cdots \xrightarrow{\psi_2} W_1 \xrightarrow{\psi_1} W_0 = W.$$

ここで，各 $\psi_i\colon W_i \to W_{i-1}$ は点 $x_i \in W_{i-1}$ を中心とする blow-up である．$R_N = \widetilde{R}$ とおき，$i = 0, \ldots, N-1$ に対し $R_i = (\psi_{i+1} \circ \cdots \circ \psi_N)_* \widetilde{R}$ と定める．$R = R_0$ とおく．$i = 1, \ldots, N$ に対し，$E_i = \psi_i^{-1}(x_i)$, $m_i = \mathrm{mult}_{x_i}(R_{i-1})$ とおく．次の補題は簡単だが重要である．

補題 2.1 $i = 1, \ldots, N$ に対し，次が成立する．

(1) $m_i \in n\mathbb{Z}$ または $m_i \in n\mathbb{Z} + 1$ が成立．さらに，$m_i \in n\mathbb{Z}$ であることと $E_i \not\subset R_i$ であることは同値．

(2) $R_i = \psi_i^* R_{i-1} - n\left[\dfrac{m_i}{n}\right] E_i$ が成立．ここで，$[t]$ は t を超えない最大の整数．

(3) ある直線束 $L_i \in \mathrm{Pic}(W_i)$ が存在し，$R_i \sim nL_i$, $L_i = \psi_i^* L_{i-1} - \left[\dfrac{m_i}{n}\right] E_i$，$L_N = \widetilde{L}$ を満たす．

証明　$\mathrm{Pic}(W_N)=\psi_N^*\mathrm{Pic}(W_{N-1})\bigoplus\mathbb{Z}[E_N]$ なので，ある $L_{N-1}\in\mathrm{Pic}(W_{N-1})$ と $d_N\in\mathbb{Z}$ があり，$L_N:=\widetilde{L}=\psi_N^*L_{N-1}-d_NE_N$ が成立する．帰納的に，$L_{i-1}\in\mathrm{Pic}(W_{i-1})$ と $d_i\in\mathbb{Z}$ で $L_i=\psi_i^*L_{i-1}-d_iE_i$ を満たすものがとれる．$\widetilde{R}=R_N\sim nL_N=\psi_N^*(nL_{N-1})-nd_NE_N$ と $R_{N-1}=(\psi_N)_*R_N$ から，$R_{N-1}\sim nL_{N-1}$ が従う．帰納的に，$R_i\sim nL_i$ を得る．$E_i\not\subset R_i$ ならば R_i は R_{i-1} の固有変換であり，$m_i=R_iE_i=nd_i$ を得る．$E_i\subset R_i$ ならば R_i は被約なので R_i-E_i は R_{i-1} の固有変換であり，$m_i=(R_i-E_i)E_i=nd_i+1$ を得る．どちらの場合でも，$d_i=[m_i/n]$ である． □

blow-up の列 $\widetilde{\psi}=\psi_1\circ\cdots\circ\psi_N$ を，分岐跡 R の補題 2.1 を満たす特異点解消という見方をする．$n=2$ の場合は，今では標準解消と呼ばれているものに他ならない (cf. [9])．$n\geq 3$ のとき，補題 2.1 (1) から分かるように R の特異点の重複度には制限がついてしまうことに注意する．先に特異点を持った R から出発して，補題 2.1 のような特異点解消はいつでも出来るとは限らないのである．

　補題 2.1 より，

$$K_{\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\psi}^*K_\varphi+\sum_{i=1}^N\mathbf{E}_i, \tag{2.1}$$

$$\widetilde{L} = \widetilde{\psi}^*L-\sum_{i=1}^N\left[\frac{m_i}{n}\right]\mathbf{E}_i, \tag{2.2}$$

を得る．ここで，$L:=L_0$ であり，$\mathbf{E}_i$ は E_i の全変換である．$\widetilde{\theta}\colon\widetilde{S}\to\widetilde{W}$ は $\widetilde{R}\in|n\widetilde{L}|$ に沿って分岐する n 次の巡回被覆であるので，

$$\begin{aligned} K_{\widetilde{S}} &= \widetilde{\theta}^*\left(K_{\widetilde{W}}+(n-1)\widetilde{L}\right) \\ \chi(\mathcal{O}_{\widetilde{S}}) &= n\chi(\mathcal{O}_{\widetilde{W}})+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}j\widetilde{L}(j\widetilde{L}+K_{\widetilde{W}}) \end{aligned}$$

となり，従って

$$K_{\widetilde{f}}^2 = n(K_{\widetilde{\varphi}}^2+2(n-1)K_{\widetilde{\varphi}}\widetilde{L}+(n-1)^2\widetilde{L}^2), \tag{2.3}$$

$$\chi_{\widetilde{f}} = n\chi_{\widetilde{\varphi}}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}j\widetilde{L}(j\widetilde{L}+K_{\widetilde{\varphi}}). \tag{2.4}$$

が成立する．

定義 2.2 (特異点指数) (1) k を正の整数とする．以下，R の $p\in B$ 上の特異点とは曲線 R_i 達の特異点で p へうつるものを指すこととする．

$$\alpha_k(F_p)=\#\{R\text{ の }p\text{ 上の特異点で重複度は }kn\text{ または }kn+1\}$$

とおき，これを F_p の k 次の特異点指数と呼ぶ．一般ファイバー F_p に対し $\alpha_k(F_p)=0$ である．$\alpha_k=\sum_{p\in B}\alpha_k(F_p)$ とおく．

(2) 0 次の特異点指数 $\alpha_0(F_p)$ を次のように定義する：

$$D_1 := \sum \left(\widetilde{R}\text{ に含まれる }\widetilde{\varphi}\text{ に関し垂直な }(-n)\text{ 曲線}\right) \subset \widetilde{R}$$

とし，$\widetilde{R}_0 = \widetilde{R} - D_1$ とおく．$\widetilde{R}_0 = (\widetilde{R}_0)_h + (\widetilde{R}_0)_v$ を $\widetilde{\varphi}$ に関する水平成分と垂直成分への分解とする．このとき，

$$\alpha_0(F_p) = r - \#((\widetilde{R}_0)_h \cap \widetilde{\Gamma}_p) - e_p((\widetilde{R}_0)_v)$$

とおき，0 次の特異点指数と呼ぶ．但し，$e_p((\widetilde{R}_0)_v)$ は $(\widetilde{R}_0)_v$ の既約成分で $\widetilde{\varphi}$ により p へうつるものの位相的オイラー数の和である．

$$\alpha_0 := \sum_{p\in B} \alpha_0(F_p) = (K_{\widetilde{\varphi}} + \widetilde{R}_0)\widetilde{R}_0$$

が成立する．

(3)

$$\varepsilon(F_p) = \#\{\widetilde{F}_p\text{ に含まれる }(-1)\text{ 曲線}\}$$

とおき，$\varepsilon = \sum_{p\in B}\varepsilon(F_p)$ とする．実は，$\rho\colon \widetilde{S} \to S$ は無限に近い点を blow-up せず，この数 ε は $\rho\colon \widetilde{S} \to S$ の 1 点の blow-up 回数と一致することがいえる．

(2.1) と (2.2) より，

$$\begin{aligned}(K_{\widetilde{\varphi}} + \widetilde{R})\widetilde{R} &= \left(\widetilde{\psi}^*(K_\varphi + R) + \sum_{i=1}^{N}\left(1 - n\left[\frac{m_i}{n}\right]\right)\mathbf{E}_i\right)\left(\widetilde{\psi}^*R - n\left[\frac{m_i}{n}\right]\mathbf{E}_i\right)\\ &= (K_\varphi + R)R - \sum_{i=1}^{N} n\left[\frac{m_i}{n}\right]\left(n\left[\frac{m_i}{n}\right] - 1\right)\\ &= (K_\varphi + R)R - n\sum_{k\geq 1} k(nk-1)\alpha_k. \end{aligned} \tag{2.5}$$

が成り立つ．一方，

$$(K_{\widetilde{\varphi}} + \widetilde{R})\widetilde{R} = (K_{\widetilde{\varphi}} + \widetilde{R}_0)\widetilde{R}_0 + D_1(K_{\widetilde{\varphi}} + D_1) = \alpha_0 - 2\varepsilon \tag{2.6}$$

なので，

$$(K_\varphi + R)R = n\sum_{k\geq 1} k(nk-1)\alpha_k + \alpha_0 - 2\varepsilon \tag{2.7}$$

が成立する．$K_f^2 = K_{\widetilde{f}}^2 + \varepsilon$, $\chi_{\widetilde{f}} = \chi_f$, (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) より，

$$K_f^2 = nK_\varphi^2 + 2(n-1)K_\varphi R + \frac{(n-1)^2}{n}R^2 - \sum_{k\geq 1}((n-1)k-1)^2\alpha_k + \varepsilon \tag{2.8}$$

$$\chi_f = n\chi_\varphi + \frac{(n-1)(2n-1)}{12n}R^2 + \frac{n-1}{4}K_\varphi R - \frac{n(n-1)}{12}\sum_{k\geq 1}((2n-1)k^2 - 3k)\alpha_k \tag{2.9}$$

が成立する．(2.7), (2.8), (2.9) と Noether の公式より，

$$e_f = ne_\varphi + n\sum_{k\geq 1}\alpha_k + (n-1)\alpha_0 - (2n-1)\varepsilon \tag{2.10}$$

を得る．これは e_f の一つの局在化表示であるが，一方で e_f は別の局在化表示

$$e_f = \sum_{p\in B}(e_{\mathrm{top}}(F_p) - 2 + 2g)$$

を持つ．ここで，$e_{\mathrm{top}}(F_p)$ は F_p の位相的なオイラー数である．実際にこの 2 つの局在化表示は一致する．つまり，任意の $p \in B$ に対し，

$$e_{\mathrm{top}}(F_p) - 2 + 2g = ne_\varphi(\Gamma_p) + n\sum_{k\geq 1}\alpha_k(F_p) + (n-1)\alpha_0(F_p) - (2n-1)\varepsilon(F_p)$$

が成立する．ここで，$e_\varphi(\Gamma_p) = e_{\mathrm{top}}(\Gamma_p) - 2 + 2h$ である．

2.1　不変量の局在化

ここからは $h = 1$ と仮定する．$f\colon S \to B$ を $(g,1,n)$ 型の primitive cyclic covering fibration とする．$\varphi\colon W \to B$ は相対極小な楕円曲面なので，標準束公式より K_φ は

$$\left(\chi_\varphi + \sum_{p\in B}\left(1 - \frac{1}{m_p}\right)\right)\Gamma$$

と数値的に同値である．ここで，m_p は φ のファイバー Γ_p の重複度である．$p \in B$ に対し $\nu(F_p) = 1 - 1/m_p$ とおき，$\nu = \sum_{p\in B}\nu(F_p)$ とおく．このとき，$K_\varphi R = (\chi_\varphi + \nu)r$ とかける．これと (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) を組み合わせて，次を得る．

補題 2.3

$$\begin{aligned}
K_f^2(F_p) = &\sum_{k\geq 1}((n+1)(n-1)k - n)\,\alpha_k(F_p) + \frac{(n-1)^2}{n}(\alpha_0(F_p) - \varepsilon(F_p))\\
&+ \frac{(n+1)(n-1)r}{n}(\chi_\varphi(F_p) + \nu(F_p)) + \varepsilon(F_p).\\
\chi_f(F_p) = &\frac{1}{12}(n-1)(n+1)\sum_{k\geq 1}k\alpha_k(F_p) + \frac{(n-1)(2n-1)}{12n}(\alpha_0(F_p) - \varepsilon(F_p))\\
&+ \frac{(n+1)(n-1)r}{12n}(\chi_\varphi(F_p) + \nu(F_p)) + n\chi_\varphi(F_p)
\end{aligned}$$

とおくと，

$$K_f^2 = \sum_{p\in B}K_f^2(F_p), \quad \chi_f = \sum_{p\in B}\chi_f(F_p)$$

が成立する．ここで，$\chi_\varphi(F_p) := (1/12)e_\varphi(\Gamma_p)$ である．

こうして $h=1$ の場合に K_f^2, χ_f の局在化表示が得られた．これを用いて，次の**スロープ等式**と呼ばれる等式を得る．

定理 2.4 $f\colon S \to B$ を $(g,1,n)$ 型の primitive cyclic covering fibration とする．このとき，

$$K_f^2 = \frac{12(n-1)}{2n-1}\chi_f + \sum_{p\in B} \mathrm{Ind}(F_p),$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(F_p) :=& n\sum_{k\geq 1}\left(\frac{(n+1)(n-1)}{2n-1}k-1\right)\alpha_k(F_p) + \frac{n-1}{2n-1}\left((n+1)r-12n\right)\chi_\varphi(F_p)\\ &+\frac{(n+1)(n-1)r}{2n-1}\nu(F_p)+\varepsilon(F_p)\end{aligned}$$

である．さらに，$r \geq 12n/(n+1)$ のときこれは非負であり，特に

$$\frac{12(n-1)}{2n-1} \leq \lambda_f$$

が成立する．

非負の有理数値 $\mathrm{Ind}(F_p)$ のことをファイバー芽 F_p の**堀川指数**という．名前の由来は，堀川先生が種数 2 のファイバー曲面に対しスロープの下限からのずれを測る $\mathrm{Ind}(F_p)$ に相当する関数を構成したことによる [10]．種数 2 のファイバー曲面は $(2,0,2)$ 型の primitive cyclic covering fibration に他ならないが，一般に $(g,0,n)$ 型の場合も堀川指数 $\mathrm{Ind}(F_p)$ が定義できスロープ等式が得られる [6]．

一方，Hirzebruch の符号数定理 [8] から曲面 S の 4 次元実多様体としての位相不変量である符号数は $\mathrm{Sign}(S) = K_f^2 - 8\chi_f$ とかけるので，符号数も有限個の退化ファイバー芽に局在化される：

命題 2.5 $f\colon S \to B$ を $(g,1,n)$ 型の primitive cyclic covering fibration とする．このとき

$$\begin{aligned}\sigma(F_p) :=& K_f^2(F_p) - 8\chi_f(F_p)\\ =& n\sum_{k\geq 1}\left(\frac{(n+1)(n-1)}{3}k-1\right)\alpha_k(F_p) + \left(\frac{(n-1)(n+1)r}{3n}-8n\right)\chi_\varphi(F_p)\\ &+\frac{(n+1)(2n-1)}{3n}\varepsilon(F_p)+\frac{(n+1)(n-1)r}{3n}\nu(F_p)-\frac{(n+1)(n-1)}{3n}\alpha_0(F_p)\end{aligned}$$

とおくと，

$$\mathrm{Sign}(S) = \sum_{p\in B}\sigma(F_p)$$

が成立する．

この $\sigma(F_p)$ はファイバー芽 F_p の**局所符号数**とよばれる．局所符号数に関しては代数幾何，トポロジー双方の観点から多く研究されている．この方面のサーベイとして，[1], [2], [13] を挙げておく．

2.2 主結果の証明の方針

K_f^2 と χ_f の局在化表示があるので，定理 1.3 を証明するには $(12-\mu_{g,1,n})\chi_f(F_p)-K_f^2(F_p)$ がどんなファイバー芽 F_p に対しても非負であることを示せば良い．この値は $\alpha_k(F_p)$, $\varepsilon(F_p)$, $\nu(F_p)$, $\chi_\varphi(F_p)$ で表せることに注意する．非負性の証明は，これらの特異点指数の間の不等式をいくつか導き，それらを用いて行う．それらの不等式を導くためには，分岐跡 R の補題 2.1 を満たす特異点解消のプロセスの詳細な解析が必要であり，さらに多くの特異点指数を準備しなければならない．これ以上は煩雑になるためここでは略す．詳細は [7] に書いている．定理 1.3 の不等式は最良かどうかはまだ分かっていないが，$h=1$ の場合は $(12-\mu_{g,1,n})\chi_f(F_p)=K_f^2(F_p)>0$ となるファイバー芽 F_p は存在し，全て分類できる．そのため，ファイバー芽の不等式としては最良の不等式となっている．等号成立する例を構成するには，退化ファイバーは $(12-\mu_{g,1,n})\chi_f(F_p)=K_f^2(F_p)>0$ を満たすものだけであるような $(g,1,n)$ 型の primitive cyclic covering fibration を構成すれば良い．しかし現状どのように構成すれば良いか分からない．

参考文献

[1] 足利正・遠藤久顕，リーマン面の退化族の諸相，数学 **56** 巻，1 号 (2004), 49–72.

[2] T. Ashikaga and K. Konno, Global and local properties of pencils of algebraic curves, Algebraic Geometry 2000 Azumino, S. Usui et al. eds, 1-49, Adv. Stud. Pure Math. **36**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

[3] M. A. Barja and J. C. Naranjo, Extension of maps defined on many fibres, Dedicated to the memory of Fernando Serrano, Collect. Math. **49** (1998), 227–238.

[4] W. Barth, K. Hulek, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[5] M. Cornalba and L. Stoppino, A sharp bound for the slope of double cover fibrations, Michigan Math. J. **56** (2008), 551-561.

[6] M. Enokizono, Slopes of fibered surfaces with a finite cyclic automorphism, arXiv:1504.04106[math.AG], to appear in Michigan Math. J.

[7] M. Enokizono, Upper bounds on the slope of certain fibered surfaces, preprint.

[8] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Grundl. Math. Wiss. 131, Springer, Heidelberg, 1966.

[9] E. Horikawa, On deformations of quintic surfaces, Invent. Math. **31** (1975), no. 1, 43–85.

[10] E. Horikawa, Algebraic surfaces with a pencil of curves of genus two, in: *Complex Analysis and Algebraic Geometry, A Collection of Papers Dedicated to K. Kodaira, W. L. Baily, Jr. and T. Shioda eds.*, Iwanami Shoten, Publishers and Cambridge University Press (1977), 79–90.

[11] A. Kas, On deformations of a certain type of irregular algebraic surface, Amer. J. Math. **90** (1968), 789-804.

[12] K. Kodaira, A certain type of irregular algebraic surfaces, J. Anal. Math. **19** (1967), 207-215.

[13] Y. Kuno, Meyer functions and the signature of fibered 4-manifolds, arXiv:1204.1701.

[14] X.-L. Liu and S.-L. Tan, Families of hyperelliptic curves with maximal slopes, Sci. China Math. **56** (2013), 1743-1750.

[15] S.-L. Tan, On the invariants of base changes of pencils of curves, II, Math. Z. **222** (1996), 655–676.

[16] G. Xiao, Fibred algebraic surfaces with low slope, Math. Ann. **276** (1987), 449-466.

[17] G. Xiao, *Fibrations of Algebraic Surfaces* (in Chinese), Shanghai Publishing House of Science and Technology, 1992.