【49】

氏名	下村宏彰（しもむらひろあき）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第427号
学位授与の日付	昭和52年1月24日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学専攻
学位論文題目	**Linear transformation of quasi-invariant measure** （準不変測度の線型変換）
論文調査委員	（主査）教授 吉沢尚明　教授 池部晃生　教授 渡辺信三

論文内容の要旨

本申請論文の目的は，無限次元の空間（たとえばヒルベルト空間等）における測度の基本的性質を明らかにすることである。このような測度は確率過程や統計力学で基本的であると共に，理論物理学の場の理論等にも現れている。

この様な具体的な測度の問題を統一的に扱うための理論的な基礎付けが，この20年程の間にかなり研究された。特にヒルベルト空間における測度の完全加法性については，I. Gelfand を始め，Minlos その他の数多くの研究があるが，本申請論文では測度の不変性が主要なテーマとして研究されている。

本論文では次の様な設定の下に理論が展開されている：一般に線型位相空間をX，その中の測度をm，Xの稠密な部分空間をEとするとき，Eの要素aによるXの平行移動（$x \to x+a$）に伴って，$m_a(B)=m(B+a)$ によって新たに測度 m_a が定義される。この m_a がEのどのaに対しても，もとのmと相互に絶対連続（これを同値という）であるとき，mをE-準不変と呼ぶ。このような一般的な設定と共に，X，Eおよびmに対して，それぞれ適当な条件を附加した時に，詳しい結果が，特にmの構成，XとEの構造について得られている。

本論文で扱われている問題は次の3種類に大別される。

1．一般論。主要な理論は無限次元空間Xを数列全体の作る空間，すなわち R^∞ とした場合に展開されているが，これは特殊な制限ではなく，むしろ複雑な事情を明白にするのに有効である。この場合にEを有限数列の作る部分空間とすると，R^∞ 上のすべての E-準不変測度mは次のように表される：(1°)m についてある測度 μ が存在して，mは $\mu * G_\alpha$ と同値である。ここに $\alpha=(\alpha_n), \alpha_n>0$，また，$G_\alpha$ は1次元のガウス測度 $\exp(-u^2/2\alpha_n)\, du/\sqrt{2\pi\alpha_n}$ の直積である。（＊は測度の重畳を表す。）

E-準不変測度が，さらにエルゴード的である場合が応用上興味がある。（例えば場の理論におけるBose場の交換関係の表現や，さらに一般の群の表現の構成の場合等。）これについても申請者は一般的な条件を与えている。

2.　測度の変換等。やや詳細な結果を得るために，申請者はX上の測度について，l^2–連続という概念を導入している。このために，先ずmに対して特性函数φを次のように定義する：Xの任意のxとEの任意のaに対して，$\varphi(a)=\exp(i(a, x))m(dx)$。この$\varphi(a)$はEの上の函数であるが，これが，$l^2$の内積で連続な場合に，mを$l^2$–連続と称する。この様なmに対して，E–準不変性の条件を調べたのち，次の結果を得ている（これはフーリエ変換に関する Riemann の定理に相当するものである）：

(2°)mがl^2–準不変かつl^2–連続ならば，その特性函数は，l^2の中で$|a|\to\infty$のとき$\varphi(a)\to 0$となる。

またこのような測度mに対して，Xの線型作用素Sによる変換m_Sを考えることができるが，これについて，エルゴード性等を考察している。

3.　直積型の測度。測度mが実数軸上の測度の直積である場合は，mのかなり詳しい構造が調べられている。

以上が申請論文の主要な内容であるが，申請者は参考論文においても種々の興味ある結果を得ている。その1つは，準不変であってもガウス測度と本質的に異なるものの構成である。これは従来種々の場合にしばしば挙げられていた問題であるが，申請者はその具体的な例を与えている。また線型空間でない無限次元空間，特にヒルベルト空間の回転群等に不変測度が存在するか否かは重要な問題であるが，申請者はこの群に対して，独自の方法で不変測度の存在を示している。

論文審査の結果の要旨

申請論文の目的は，無限次元空間における準不変測度と呼ばれるものの研究である。ユークリッド空間における普通の面積や体積が合同図形については等しいということは，極めて基本的なことであるが，無限次元の場合にこのことのどの程度の類似が成立するか等についての研究が，この目的である。

申請者の研究の特質は，従来個々の場合に別々の理論として研究されてきたものを，統一的な設定の下で一般的に考察したことであるが，また別に具体的な新しい例を発見して理論の対象を豊富にもしている。以下に申請論文における研究の特質を具体的に挙げる。

(1)　実数の数列の空間 R^∞ を基礎において一般論を展開したこと。これはヒルベルト空間等を基礎におくより技術的に簡明であるのみでなく，より一般的な結果を導ける点からも有効な着想である。この設定の下で，従来の各論の内容を統一したことは，広い知識と深い洞察によるものである。

(2)　任意のE–準不変測度の構造を示した申請者の定理は一般的であると共に，具体的なガウス測度を用いて記述していることは興味深い。またこの基本定理を導くために申請者の用いた（測度の間の）滑らかさの比較のための計量は，他にも応用の予想される技術である。

(3)　従来この方面の結果は特にヒルベルト空間の場合に集中して得られていたが，これをl^2–連続な測度という形でまとめたことにより，申請者の設定に深い内容を持たせることができた。申請者は，これらの研究が無限次元空間の上に函数解析的な理論（例えば変換群の表現の構成等）を展開する場合の基礎として役立つことを期待している旨を表明しているが，l^2–連続かつ準不変測度の特性函数に対して得られた若干の結果は，このようなものの一例として興味深いものである。

以上は申請論文に含まれる特質であるが，この他，申請者が参考論文において示した次の2つの結果も

重要である：ヒルベルト空間の回転群の不変測度の存在を Cayley 変換を用いて証明しているが，これは独創的な方法である。また，ガウス測度と実質的に異なる準不変測度を具体的に構成しているが，これは従来しばしば基本的な問題としてその重要性が指摘されていた問題である。

以上のように，申請者の研究は準不変測度を扱うに当って生じる無限次元に固有の困難を克服して，統一的な基礎付けを行ったものである。このことはこの方面の理論への特に重要な貢献であると考えられる。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。