

氏名	矢野環 <small>のたまき</small>
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第460号
学位授与の日付	昭和52年5月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学専攻
学位論文題目	<b>On the theory of b-functions</b> (b函数の理論について)

論文調査委員 (主査) 教授 佐藤幹夫 教授 山口昌哉 教授 吉沢尚明

### 論文内容の要旨

この論文は、解析的超曲面の特異点の研究において重要な意味をもつ不変量である b 函数についての基礎的な研究を集約したものである。

b 函数 (b 多項式とも言う) の概念は、1960年代の初期に佐藤幹夫が概均質ベクトル空間の理論のなかで、関連する a 函数、c 函数とともに導入した概念であるが、その後70年代に入り、柏原正樹、I. N. Bernstein, B. Malgrange らの研究により、超曲面の特異点を特性づける不変量として、Milnor, Brieskorn, Arnold, Pham らの局所モノドロミーの理論との密接な関連から、その重要性が広く認識されるようになったものである。

b 函数の最も簡単な一例は、円錐曲面、即ち  $n$  変数の斉次2次多項式たとえば  $f(x) = X_1^2 + \dots + x_n^2$  によって  $f(x) = 0$  で与えられる超曲面のそれである。このとき、 $P$  を  $n$  変数のラプラシアン  $\Delta$  の  $1/4$  とすれば、 $P \cdot f^{s+1} = (s+1)(s+n/2)f^s$  となるが、このときの右辺に現れる係数  $(s+1)(s+n/2)$  が円錐曲面の b 多項式に他ならない。そしてそれは、円錐曲面が原点においてもつ特異点 (即ち錐の頂点) の性質を特性づけていると考えられる。同様に、一般の解析的超曲面  $f(x) = 0$  についても、 $Pf^{s+1} = b(s)f^s$  をみたす微分作用素  $P$  と、 $s$  の多項式  $b(s)$  とがあり、そのうち  $b(s)$  の次数最小のものが定まるが、これをこの超曲面の b 多項式又は b 函数とよぶ。この b 函数の零点 (上例では  $s = -1/2$  と  $s = -n/2$ ) が、Milnor らの局所モノドロミーと関係をもつのである。一般の解析的超曲面の b 函数に関して、その存在と、その零点がすべて負の有理数であることをふくめ、ごく基礎的な性質が柏原、Bernstein の研究により確立されてはいるが、体系的理論として発展するにはなお多くを将来の研究に俟たねばならない状況にある。

本論文は、まずこれらの散在する結果を整理して一貫した体系的記述を与える。そして、申請者によって導入され、シンプレックス型と名付けられた、特殊な、しかし quasi-homogeneous 多項式とよばれる場合よりはるかに一般的な、ある重要な多項式  $f$  のクラスを設定し、これに属する  $f$  により与

えられる解析的超曲面のうちの多くの実例について、 $b$  関数を実際に算出している。さらに、 $b$  関数の一般論に関連して佐藤・柏原が述べた一つの予想が実は正しくないことを示す反例を与え、なおそのほかにも  $b$  関数に関連した他の新しい諸結果をも与えている。

これらの諸結果、とくに本論文の相当の部分占める具体例の計算は、申請者の修士論文において与えた quasi-homogeneous の場合の  $b$  関数の決定(本論文 §12) および quasi-homogeneous でないいくつかの場合についての  $b$  関数の決定をもふくんで、さらに申請者による以後の継続的な研究の中で蓄積されて来たものであり、実例の極めて乏しい現状において極めて貴重な資料と言わねばならず、かねてヨーロッパおよび国内の研究者よりその発表を期待されていたものである。

参考論文もすべてこの主題に関連した問題を扱ったものである。

### 論文審査の結果の要旨

申請者はこの申請論文において、一貫して解析的超曲面の  $b$  関数に関する理論的および具体的研究を行っており、ことにその具体的諸例に関する豊富な研究は、全く他にその例を見ない著しいものである。

$b$  関数の研究は、それが局所モノドロミーと密接に関連し、かつそれを精密化するものであること、そして特異点の研究においてホロノームな微分方程式系の理論 (micro-local calculus) を用いる途を与えることから、Arnold, Bernstein, Malgrange, Pham, Lê らを始め、多くの特異点の研究者の注目と関心をあつめるようになったが、局所モノドロミーの理論、あるいは代数多様体とその特異点の研究が一般にそうであったごとく、 $b$  関数の場合にも具体的に与えられた場合についてその計算を遂行することは多くの場合に困難が極めて大きく、計算がなされたのはごく単純な場合に限られていた状況であった。 $b$  関数の理論の場合には、その上、まとまった形の論文自体極めて不備な状況であった。そのような状況の中で、申請者が、 $b$  関数と局所モノドロミーの関連が注目され始めた1973年、修士課程在学時より、一貫してこの問題に取り組む、追求し、すぐれた洞察に支えられた着実な計算によってよく多くの困難を克服して、なお限られた場合とは言え多くの著しい実例の計算に成功して来たことは、申請者の重要な業績として第一に特記すべきことであろう。申請者はこの分野においては、現在柏原正樹氏とともに第一人者と目される。おそらく  $b$  関数に関して現在最も豊富な具体的結果を有していると思われる。その蓄積した資料は、上記の人々らの関心をよび、今回の体系的な論文完成の以前から注目を受け、その資料の入手が求められていたものである。今回の申請論文は、これらの学界の要望をみたまのとして喜ばしい。

この申請論文中にふくまれている申請者による他の諸結果も極めて興味ぶかい。たとえば、 $b$  関数の一般論の中でかつて佐藤と柏原により予想されていた命題が、一般に成立たぬことを、反例によって示し、その機構を分析している。これは、将来の一般論の発展のためにも重要な知見である。又、 $b$  関数に対する一般的な join formula を、局所モノドロミーのそれに対応するものとして与えている。また、主論文の前半において、 $b$  関数の理論を整理して見通しのよい体系的記述を始めて与え、さらに、 $b$  関数の計算のための具体的方法についても詳しく与えてあることも、この論文のこの分野における基

本的文献としての価値を高めるものである。

以上を要約すれば本論文は 特異点の研究に対する  $b$  関数による新しいアプローチにおいて 基本的な  
労作であり, その新しい豊富な結果によってこの分野の研究に寄与するところが大きい。

よって, 本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。