| | |
|---|---|
| 氏　　　名 | 米　谷　文　男（まい　たに　ふみ　お） |
| 学位の種類 | 理　学　博　士 |
| 学位記番号 | 論　理　博　第 703 号 |
| 学位授与の日付 | 昭 和 55 年 9 月 24 日 |
| 学位授与の要件 | 学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当 |
| 学位論文題目 | The method of linear operators for square integrable differentials on open Riemann surfaces and its applications<br>（開リーマン面上の二乗可積分な微分に対する線形作用素の方法とその応用） |
| 論文調査委員 | （主　査）教 授 楠　幸 男　　教 授 溝 畑　茂　　教 授 渡 辺 信 三 |

## 論 文 内 容 の 要 旨

開リーマン面上の調和函数或いはアーベル微分を構成する方法として，de Rham，Weyl 等による直交分解を利用する方法と，交代法に基づく Sario の作用素的方法がある。申請者は本論文において，この二つを融合したような一つの新しい方法によって基本的な調和微分の存在定理を与え，これを用いて関連した諸結果を拡張統一し併せて応用を示した。

開リーマン面$R$上で二乗可積分な複素（調和）微分のなすヒルベルト空間を夫々 $\Gamma$（及び $\Gamma_h$）とする。$\Gamma$ の部分空間 $X=\Gamma_x+\Gamma_{eo}$（$\Gamma_x$ は $\Gamma_h$ の任意の部分空間，$\Gamma_{eo}$ は台がコンパクトな $C^\infty$ 関数 $f$ の微分 $df\in\Gamma$ の全体の閉被）及び閉集合 $F\in R$ を固定したとき，任意の $\omega\in X$ に対して次のような $\omega_x^F\in X$ を対応させる；$\omega_x^F$ は$F$上で$\omega$と一致し，$F$の外部では$X$の元の中で最小のノルムをもつ。$\omega_x^F$ は$F$の外部では（複素）調和になる。申請論文ではまずこの作用素 $\omega\to\omega_x^F$ の性質，とくに$X$及び$F$を動かしたときの変化を詳しく調べている。一般に，$R-F$ で調和な$R$上の微分$\theta$に対して次の条件をみたす$R$上の調和微分$\omega$を（$X, F, \theta$）－主微分（principal differential）という；

$$\omega-\theta\in X,\ (\omega-\theta)_x^F=\omega-\theta.$$

与えられた特異性をもつ主微分の存在と一意性について一般な定理を証明している。便宜上やや特殊化した形でその結果をあげる：

存在定理　$S$は$R$上の孤立点集合，$F$は円環 $\{1/2\leq|z|\leq1\}$ に等角同値な$R$上の閉集合で $S\cap F=\phi$ とし，$\theta$は高々$S$上に特異点をもつ $(R-F)\cup(\partial F)$ 上の調和微分で $\int_{\partial F}\theta=\int_{\partial F}\theta^*=0$（$\theta^*$ は$\theta$の共役微分）とすれば，$\theta$は $R-S$ 上の $C^1$ 級閉微分に拡張されその$\theta$に対して（$X, F, \theta$）主微分が存在する。このような主微分は $\sigma_x^F=\sigma$ なる $\sigma\in\Gamma_x$ を除いて一意的に定まる。

この定理によって古典論の第1，第2及び第3種の基本微分に対応する主微分の存在が分る。

主微分の一般的性質として，(1) $\Gamma_h$ の任意の部分空間$Y$に対して$Y$の周期再生微分はある主微分で表わされること，(2)一点でのみ特異性をもつ主微分の特異点のまわりの展開係数のある極値性について論じて

いる。

次に応用のためにまず主微分$\varphi$に対して有理型微分 $\varphi+i\varphi^*$ がまた一つの主微分になるための空間 $\Gamma_x$ に対する十分条件を示した。例えば $\Gamma_x=(\Gamma_x^{\perp})^*$ ($\Gamma_x^{\perp}$ は $\Gamma_x$ の $\Gamma_h$ における直交補空間)。ついで次の性質をみたす空間 $\Gamma_x$ が存在することを示す。(i) $\Gamma_x=\bar{\Gamma}_x=(\Gamma_x^{\perp})^*$, (ii) $\Gamma_x(\in\Gamma_h)$ の元は$R$上のすべての分離サイクル及び $A_i$-サイクルに沿って周期0をもつ。但し $\{A_i,B_i\}_{i=1}^g$ は$R$の標準近似に関するホモロジー基底 (mod $\partial R$)。このような $\Gamma_x$ を一つ固定する。また$R$上に集積しない互いに素な局所円板 $V_n$ の合併 $G=\cup V_n$ を固定するとき，$R$上の有理型微分$\psi$がコンパクト集合及び$G$の外部で $\psi=\omega$, $\omega\in X=\Gamma_x+\Gamma_{eo}$ と書けるならば$\psi$は$X$挙動をもつと定義される。函数$f$が$X$挙動をもつとは $df$ がそうであることとする。このとき，$G$上に因子$\delta$を与え，$X$挙動をもち$\delta$の multiple である有理型微分（但し極は有限個）の空間$D$と，$X$挙動をもち $\delta^{-1}$ の multiple である有理型函数の空間$S$に関する一つの双対定理を示した。証明には主微分の諸性質と楠の方法が使われている。とくに$R$の種数$g$が有限かつ$\delta$が有限因子のときその双対定理から古典的リーマン・ロッホの定理と同じ公式 $\dim S=\dim D+\deg\delta-g+1$ が導かれる。

参考論文は，開リーマン面の理想境界における調和函数の一般化された法線微分を定義して調和測度の特徴付けを研究したもの，Hardy 族の函数の極値問題や申請論文の先駆をなす二乗可積分な調和微分の研究等いずれも独立に興味ある結果を含んでいる。

## 論文審査の結果の要旨

開リーマン面上の調和（或いは解析）函数やアーベル微分の存在定理では，単にそれらの存在だけでなく或種の境界条件或いは境界近傍での挙動をもつものの存在が問題である。直交分解法や交代法はこの種の研究に基本的役割を果たすが今日ではこのような制限つきの存在定理やその証明方法はいくつか知られている。これに対して申請者の存在定理は前述のように，従来のものと違って函数ではなく複素微分に作用する線形作用素を定義しその性質と直交分解を巧妙に利用して導かれたものであり，これによって申請者が導入した主微分と称するある極値性をもつ調和微分が構成された。

本論文ではこの存在定理をはじめ主微分に対する顕著な諸性質を見出し，関連した種々の結果を整理統一しまた一般化した。これらの着想と手法は非凡であり高く評価される。

申請者の理論の大きい目標は本論文にその応用として論じている開リーマン面上のリーマン・ロッホの定理の一定式化であろう。同定理は楠理論以来その一般化が多く研究されているが，いずれも考察する有理型微分及び函数の実部に対する制限，正規化のためそれらのある実ベクトル空間の間の双対定理として定式化されており，その空間が複素ベクトル空間になるのは面の境界が非常に小さいときに限る。これに対して申請者は，内容の要旨で述べたようにある特定な空間$X$に対し$X$挙動をもつ有理型微分及び函数のある複素ベクトル空間の間の双対定理を与えたことは注目に値するものである。なお従来のものに較べて$X$挙動をもつ函数や微分の境界挙動は非常に複雑で幾何学的意味が不明である。しかしこのことは今後に新しい問題を提供したともいえる。

以上のように本論文に展開された申請者の方法と諸結果は包括的でかつ新しいものを含んでおり，この方面の研究の発展に寄与するところ大であると考える。

よって，申請論文は理学博士の学位論文として価値があるものと認める。