数理解析研究所講究録
第1916巻 2014年 196-212

冪幾何と超幾何関数

A power geometry and hypergeometric functions

吉澤 真太郎*
Shintaro Yoshizawa
御殿場 基礎科学研究会
Gotemba Theoretical Science Research

§1. 序

‘冪幾何’ という用語は従来の専門用語ではなく, 私が目指している研究方針を表したものであり, 関数の「冪化」, 「変形」, 「(最適化理論の) 双対」を中心視点とし, 応用数理の中で, 解析・幾何・代数的手法を用いて純粋数理を考え, 必要に応じその結果を, 応用数理に還元したいとの思いを込めている.

冪幾何研究の動機は大きく2つある. 1つめの動機は, 1996年頃から「確率分布はどのように生み出されたのか? (確率分布の起源)」という素朴な疑問から出発している. 今日, 確率分布族は情報幾何の研究 [2] によって, 空間であるとの認識が確立されているので, 「空間の起源は何か?」と少々大げさなテーマとも読み取れる.

確率分布族を構成する方法に関し, 私が関心のあるものを, 以下いくつかあげる.

(i) 最大尤度原理とそれを達成する平均の定義による方法,

(ii) 有理関数のパラメータを特定し、有限測度を構成する方法,

(iii) 周波数領域で常微分方程式の解として構成する方法.

(i) は Gauss (1809), Poincaré(1912), Keynes(1911) などが考察している. 測定値の算術平均, 幾何平均, 調和平均が与える誤差法則が論じられた. Keynes の研究を, 松縄 (1994) は現代の視点から更に発展させている [14]. (ii) は統計学では Pearson(1895) が, 有理関数の常微分方程式 (対数尤度の微分を有理関数に設定) によって確率分布族を導出するシス

---

*E-mail address: yzw2003@mail.goo.ne.jp

テム (Pearson system) を提案した．数理制御の分野では, Pearson system は有理関数の幾何として更に一般化され, Riemann 球面から Grassmann 多様体に値をとる有理写像の指数定理にまで発展した [7]. 最後の (iii) は, 解析幾何の視点から興味深い発展が望めるのではないかと私は考えている．Meixner による母関数に基づく直交多項式族の導出 [15] に始まり, Laha 及び Lukacs は, 条件付き 2 次回帰問題をモデル化した非線形常微分方程式の係数パラメータを特定することで Meixner class を確率分布関数として特徴づけた [12]. 私は, Laha 及び Lukacs の非線形常微分方程式の観察と, 北海道大学での研究集会「Schwarz 微分をめぐって (1999)」に参加し, Schwarz 方程式と確率分布関数との関連に着目するに至った．

さて, 冪幾何研究の 2 つめの動機は, 行列の固有値（或いは特異値）, 行列の逆行列や行列分解などを, 正方とは限らない行列に値をとる力学系（以下, 行列力学系と呼ぶ）により求める問題から生起した．基本となる力学系は, Von Neumann(1937) が考察した最適化問題:「行列 A,B を対称行列とし, $n\times n$ 行列の特殊直交群 $SO(n)$ 上の関数 $f(X)=\mathrm{tr}(AXBX^T)$ の極値を求める」に対し, Brockett[5] は 2 重 Lax 形式の力学系を関数 f を特殊直交群のキリング形式に関する勾配流として導出し, 対称行列 A のアナログ固有値計算流としての性質や, 固有値のソーティング流としての性質を明らかにした [5]. 時定数の対称行列 B を固有値が相異なる対角行列と設定し, 時定数の対称行列 A の固有値を求める為に, Brockett（[5],[6]）が導出した特殊直交群上の勾配流は下記の常微分方程式である：

$$\frac{dX}{dt}=AXB-XBX^TAX,\ X\in SO(n). \tag{1}$$

ここで X^T は行列 X の転置を表す．変数を $L=XBX^T$ と置き換えると対称行列上の常微分方程式となる：

$$\frac{dL}{dt}=[L,[L,A]], \tag{2}$$

ここで, $[Z_1,Z_2]=Z_1Z_2-Z_2Z_1$ とする．計算機に実装するには方程式 (2) は, 定義空間が線形なので, 方程式 (1) より容易である．しかし, 方程式 (1) の定義空間は, 対称行列 A,B を正定値に制限すれば, 正方行列全体にまで拡張しても勾配流であることを証明することができる．更に, 行列 X を縦長の $n\times\ k(k\le n)$ の長方形にすると, 正定値対称行列 A の k 個の大きな固有値, 固有ベクトルを同時に計算できる勾配流が構成可能である．

事実 1. ([24])

行列 X を $n\times k(k\le n)$ の実成分からなる長方形行列とし ($X\in\mathbb{R}^{n\times k}$) , 行列 A,B をそれぞれ $n\times n,\ k\times k$ の正定値対称行列とする．接ベクトル $V_i\in T_X\mathbb{R}^{n\times k}$ に対し,Riemann 計量

を $\langle V_1, V_2 \rangle = \mathrm{tr}(AV_1BV_2^T)$ により定義する．この Riemann 計量に関して，ポテンシャル関数

$$f(X) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\{(AXBX^T)^2\} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2XB^2X^T) \tag{3}$$

の負の勾配流は

$$\frac{dX}{dt} = AXB - XBX^TAX,\ X \in \mathbb{R}^{n\times k} \tag{4}$$

となり，更に行列 B が対角行列の時，旗多様体はアトラクタかつ不変多様体となる．もし，行列 B が単位行列ならば行列 X のランク保存力学系となり，初期値 $X(0)$ をフルランク，即ち，$\mathrm{rank}X(0) = k$ にとると，Stiefel 多様体 $St(n,k)$ が不変多様体，即ち，$X(t) \in St(n,k), t \in [0,\infty)$ となる．

最適化理論において，ポテンシャル関数が陽に表示できれば，その双対ポテンシャルも考察することは自然である．行列 B が単位行列の場合，方程式 (4) は，行列 A の k 次元主部分空間（k 個の大きな固有値に対応するベクトルが生成する不変部分空間）を求める流れとなる．2004 年当時，$B = I$ とするポテンシャル関数 (4) の Legendre 双対関数の勾配流は k 次元マイナー部分空間（k 個の小さな固有値に対応する固有ベクトルが生成する不変部分空間）を求める力学系となる，との予想があり (Problem3.9., [4])，肯定的に解決された [25]．一般の正定値対称行列 B に対しては，未解決である（多価関数を 1 価関数化するにあたり行列 B が障害になる）．

正定値対称行列 A の k 個の大きな固有値及び固有ベクトルを求めるポテンシャル関数は他にもある．興味深いことに行列変数の関数を冪化し，解析変形する（解析的に捩じる）ことで，正定値対称行列 A の k 個の大きな固有値及び固有ベクトルを求めるポテンシャル関数と正定値対称行列 A の k 個の小さい固有値及び固有ベクトルを求めるポテンシャル関数とを実数の 1 パラメータ α で繋ぐことができる．一例をあげる：

$$g_\alpha(X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^TAX) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\frac{(X^TX+B)^\alpha - I}{\alpha}\right\},\ X \in \mathbb{R}^{n\times k}, \tag{5}$$

ここで，行列 A, B は正定値対称行列とする．$\alpha \to 2$ の時，正定値対称行列 A の k 個の大きな固有値及び固有ベクトルを求める勾配流のポテンシャル関数，$\alpha \to 0$ の時，正定値対称行列 A の k 個の小さな固有値及び固有ベクトルを求める勾配流のポテンシャル関数，となる．

ポテンシャル関数 (3) もポテンシャル関数 (5) においても，k 個の大きな固有値及び固有ベクトルを求める勾配流のポテンシャル関数は，凸関数の差（Difference of Convex 関数：DC 構造）を備えている．ただし，ポテンシャル関数 (5) において，k 個の小さな固有値及

び固有ベクトルを求める勾配流のポテンシャル関数は, DC 構造とはなっていない. マイナー部分空間を求める勾配流は主部分空間を求める勾配流と異なるトポロジー問題がある [13]. 関数族 (5) を含めた関数族の性質の研究は今後の課題である.

なお, 情報幾何 [2] における Gauss 分布関数が備えるポテンシャル関数は, 平均パラメータ, 分散パラメータで見れば, DC 構造を備えている. 指数型分布族に於いては, ポテンシャル関数を正準変数（e 座標）または期待値変数（m 座標）で見ると DC 関数を凸化できることが双対接続構造の自然さを引き出している. Gauss 分布の行列確率変数 X の要素を実数, 複素数, 四元数, 八元数とした時のパラメータ空間の幾何及びその冪幾何研究のテーマも今後の課題であり, 緒に就いたばかりである [22].

最後に, 冪幾何の 2 つの研究動機が Schwarz 方程式によって繋がる局面があることについて触れておく. 方程式 (4) は行列 X の初期値を旗多様体に設定すれば, 変数の置き換え $L = XBX^T$ によって, 行列 Riccati 微分方程式となる. 行列値の Schwarz 微分を考えることで, 行列 Schwarz 方程式と行列 Riccati 方程式との対応関係によって, 固有値や特異値等の力学系を深く理解し, 新たな古典あるいは量子情報処理アルゴリズムなどの設計指針を生み出すべく, 研究に取り組んでいる.

次節以降の内容は以下の通り.

§ 2. Schwarz 方程式の生成,

§ 3. Schwarz ダイバージェンス（核関数と Schwarz 微分）,

§ 4. 行列力学系と行列 Schwarz 方程式.

本研究テーマは, 発展途上でありますが, 研究会「統計多様体の幾何学の新展開」にて講演の機会を与えてくださった研究代表者, 松添 博先生及び関係機関の方々に厚く御礼申し上げます.

§2. Schwarz 方程式の生成

確率分布の起源を演繹的に探るアプローチとして, Laha-Lukacs が考察した非線形 ODE (Ordinary Differential Equation) を振返り, Schwarz 微分との関係, 及び, 擬微分作用素による冪幾何の課題（構想）について触れる. また, 実験的アプローチとして, 関数を冪乗する操作を反復し（確率密度関数の候補となる関数族を作成）, その結果から Schwarz 方程式を生成し, 冪関数と Schwarz 方程式との関係を具体的に探索する.

§2.1. Laha-Lukacs の非線形 ODE

実数上の確率分布関数を $F(x)$, 確率密度関数を $f(x)$ とし*1, その特性関数を $\phi(t)$ とする．即ち,

$$\phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}xt}dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}xt}f(x)dx.$$

定理 1. ([12]) 非線形 ODE(6) 及びその解の判別式 $\triangle$ により, Meixner class は特徴付られる.

$$(1-a)\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)'-a\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2=\sqrt{-1}b\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)-c. \tag{6}$$

ここで, a,b,c は実数, $\phi'=\frac{d\phi}{dt}$ である．$\triangle=b^2-4ac$ とすると,

(i) $\triangle=0$

 (a) $a=b=0$ ならば $f(x)$ は Gauss 分布,

 (b) $a\neq 0,\ b\neq 0$ ならば $f(x)$ は Gamma 分布.

(ii) $0<\triangle$

 (a) $a=0,\ b<0,\ 0<c$ ならば $f(x)$ は Poisson 分布,

 (b) $a\neq 0$ ならば c の符号に応じて $f(x)$ は二項または負の二項分布.

(iii) $\triangle<0$

 (a) $0<a<1$ ならば $f(x)$ は Meixner 超幾何分布,

 (b) $a=1$ ならば Cauchy 分布となる.

メモ 1. $\varphi(t)=\int^t\phi(s)ds$ とすると式 (6) は式 (7) となる.

$$(1-a)\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'-a\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2=\sqrt{-1}b\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)-c. \tag{7}$$

式 (7) の左辺は, $a=1/3$ とすると Schwarz 微分 $\{\varphi;t\}=\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2$ を 2/3 倍したものになる．$\psi=\phi'/\phi$ と変数変換すると, 式 (6) は, 明らかに ψ の Riccati 方程式となる．つまり陽に解ける方程式となる.

事実 2. ([3]) $p(x,t)=ax^2+bx+c$ とすると式 (6) は式 (8) と同値になる：

$$\phi(t)\frac{d^2}{dt^2}\log\phi(t)=-\int_{\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}tx}p(x,t)f(x)dx. \tag{8}$$

---

*1 確率分布関数は Lebesgue 測度 dx による Radon-Nikodym 微分可能とする.

課題 1. 式 (8) の右辺にある関数 $p(x,t)$ は振動積分の振幅関数[*2]の様なものである．この関数 $p(x,t)$ を変数 x の 2 次関数を特別な場合として含む冪関数とし, 振幅関数と確率分布の双対幾何構造との対応関係を調べる．また, 変数 x を行列変数にした場合も研究する．

§2.2. 多重冪化による Schwarz 方程式の生成

偏った分布のデータで, 正規性を仮定した分析を行いたい時, データを正規分布（Gauss 分布）に近づける Box-Cox 変換がある．具体的には変換 $L_\alpha(x)=(1-x^\alpha)/\alpha$ によって偏った分布をもつ確率変数 x を Gauss 分布に近づけるような α を推定しデータを変換する．更に, q 対数関数, q 指数関数をそれぞれ, $0<x$ に対し, $\log_q(x)=(x^{1-q}-1)/(1-q)$, $0\leqq 1+(1-q)x$ に対し, $\exp_q(x)=\{1+(1-q)x\}^{1/(1-q)}$ とすると, 以下の等式が成立する．

$$\lim_{\alpha\to 0} L_\alpha(x)=-\log(x),\quad \lim_{q\to 1}\log_q(x)=\log(x),\quad \lim_{q\to 1}\exp_q(x)=\exp(x).$$

冪関数族を反復捩じり操作（反復 L_α 変換) を行い, 変形多重冪関数族を作成し, 作成した関数族の Schwarz 微分を計算することで, 具体的な Schwarz 方程式を生成する．

変形多重冪関数族の例を示す（冪乗の中は非負とする）:

$$L_a(x)=t \quad\Rightarrow\quad x=\begin{cases}(1-at)^{1/a}, & (a\neq 0),\\ \exp(-t), & (a=0).\end{cases} \tag{9}$$

$$L_b(L_a(x))=t \quad\Rightarrow\quad x=\begin{cases}\{1-a(1-bt)^{1/b}\}^{1/a}, & (a,b\neq 0),\\ \exp\{-(1-bt)^{1/b}\}, & (a=0,b\neq 0).\\ \{1-a\exp(-t)\}^{1/a}, & (a\neq 0,b=0).\\ \exp\{-\exp(-t)\}, & (a=0,b=0).\end{cases} \tag{10}$$

更に,

定義 1. 変形多重冪関数族を次式で定義する：

$$(L_{a_n}\circ\cdots\circ L_{a_2}\circ L_{a_1})(x)=(L_{b_m}\circ\cdots\circ L_{b_2}\circ L_{b_1})(t).$$

ここで, a_i,b_i は実数とする．冪乗の中が非負となるように変数 t の範囲を適切に決め, x について解いた時, $x\in\mathfrak{F}^{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}(t)$ と表記する．

すると以下のような関数族の系列を作ることができる．

[*2] 例えば, 擬微分作用素, 熊ノ郷 準著, 岩波書店, p42 参照.

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\mathfrak{F}^{0,2}(t) \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{F}^{1,2}(t) \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{F}^{2,2}(t) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\mathfrak{F}^{0,1}(t) \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{F}^{1,1}(t) \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{F}^{2,1}(t) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\mathfrak{F}^{0,0}(t) \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{F}^{1,0}(t) \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{F}^{2,0}(t) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

定義 2. $x \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}(t)$ に対し, $\{x;t\}$ は $\mathfrak{S}^{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}(t)$ の要素とする．即ち, $\{x;t\} \in \mathfrak{S}^{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}(t)$ と表す.

定理 2. [H.Schwarz(1872)] Gauss 超幾何方程式*3

$$\frac{d^2z}{d^2t} + \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)t}{t(1-t)}\frac{dz}{dt} - \frac{\alpha\beta}{t(1-t)}z = 0$$

（α,β,γ は複素数）に対する Schwarz 方程式は,Gauss 超幾何方程式の独立解 $z_1(t),z_2(t)$ の比を $s(t) = z_1(t)/z_2(t)$ とすると

$$\{s;t\} = \frac{1-\lambda^2}{2t^2} + \frac{1-\mu^2}{2(1-t)^2} + \frac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{2t(1-t)}$$

となる．ここで, $\lambda = 1-\gamma, \mu = \gamma-\alpha-\beta, \nu = \alpha-\beta$ である.

事実 3. $x = \{1-a(1-b(pt+q))^{1/b}\}^{1/a} \in \mathfrak{F}^{2,0}(pt+q)$,（$p,q$ は実数で $p \neq 0$）のパラメータを特別な値に設定すると, Gauss 超幾何方程式から決まる Schwarz 微分族に属す．実際,

$$\{x;t\} = \frac{p^2\left\{(a^2b^2-1)(-bpt-bq+1)^{2/b}+2a(1-b^2)(-bpt-bq+1)^{1/b}+b^2-1\right\}}{2(bpt+bq-1)^2\{a(-bpt-bq+1)^{1/b}-1\}^2}$$

となり, $b=1$ の時, 分母は t の 4 次関数, 分子は t の 2 次関数となっている．更に $ap=-1, q=1$ とすると確認できる.

メモ 2. $a = \pm 1, b = 0, p = 1, q = 0$ のとき, $\{x;t\} = -1/2$ となる.

課題 2. 関数族 $\mathfrak{F}^{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ に対し, Schwarz 微分族 $\mathfrak{S}^{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ を考え, Schwarz 微分族間 $\{\mathfrak{S}^{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}\}_{n,m}$ の構造を調べる.

*3 Schwarz 微分及び Gauss 超幾何関数について, [23],[19] など参照.

課題 3. 行列ゼータ $M_\alpha(X) = (X^{-\alpha} - 1)/\alpha$, ここで X は正方行列, α は実数とする. 行列ゼータの変形多重冪行列を作り, Schwarz 方程式の性質を調べる. 作用素ゼータ及び行列ゼータに関して, 例えば [8] を参照.

最後に, 簡単で特殊な Schwarz 方程式の一般解を冪変形し, その Schwarz 微分を考える.

事実 4. $\{x;t\} = -2k^2$, （k は実数の定数）, とすると一般解は

$$x(t) = \frac{a\exp(kt) + b\exp(-kt)}{c\exp(kt) + d\exp(-kt)},\ ad - bc \neq 0, \tag{11}$$

となる. 一般解の指数部分を冪変形し,

$$x_\tau(t) = \frac{a(1+\tau kt)^{1/\tau} + b(1-\tau kt)^{1/\tau}}{c(1+\tau kt)^{1/\tau} + d(1-\tau kt)^{1/\tau}},\ ad - bc \neq 0, \tag{12}$$

Schwarz 微分を求めると以下のようになる：

$$\{x_\tau;t\} = \frac{2(\tau^2-1)k^2}{(\tau kt+1)^2(\tau kt-1)^2}. \tag{13}$$

メモ 3. 式 (13) の結果は, 関数論でよく知られている単葉性の条件 Nehari[16], Hille[9] や擬共形拡張の条件 Ahlfors-Weil[1] との関係が興味深い.

課題 4. 方程式 (11) は, 「完備 Riemann 多様体で, Ricci 曲率が Riemann 計量に比例し, かつ負ならば射影不変擬距離は定数倍を除いて与えられた Riemann 計量から得られる距離と一致する」（小林 [10]）の証明において使用された. 変形 Schwarz 方程式 (13) に対応する幾何学的意味*4は何か.

§3. Schwarz ダイバージェンス（核関数と Schwarz 微分）

行列に値を取る Schwarz 微分は, 数理物理において Gelfand 及び Fuchs の Viasoro 代数の発見 1967（Ovsienko-Tabachnikov [17], 7 章など参照）, 幾何学的最適制御理論の流れを汲む研究（Zelikin [26], Agrachev らの研究 : Paiva-Durán [18] の文献参照）や, 関数論の流れを汲む B.Schwarz*5[20] が, 私の知る限りにおいて出発点と考えている.

この節では, 上述の研究とは異なったアプローチで Schwarz 微分を核関数との関係で振返り, 一つの自然な考え方で行列値 Schwarz 微分を導出する. 以下, 節の概要を述べる.

---

*4 文献 [11] のアファイン接続の節を参照.

*5 Binyamin Schwarz, Nehari の指導の下, ワシントン大学にて Ph.D 取得 (1954).

情報幾何ではダイバージェンスが基本的役割をはたす．凸関数から構成されるBregmanダイバージェンスを，凸かつ単調関数 f の対数平均変化率によって見直すことで，Schwarzダイバージェンスを定義する．Schwarzダイバージェンスを定義するにあたり，Schwarz汎関数を，関数 f の定義閾の直積集合上に定義し，その対角集合上でSchwarz汎関数がSchwarz微分となるように特徴付けられる．最後に行列値のSchwarz微分を行列Schwarz汎関数によって構成する．

§3.1. Schwarz ダイバージェンス

I を実数の空でない開区間とし，関数 f は3回以上連続微分可能な関数であり，区間 I 上で狭義凸とする．この時，$I\times I$ 上の関数，Bregmanダイバージェンス $D_f(x,y)$ は凸最適化の基本であり，以下の事実が良く知られている：

事実 5.

$$D_f : I\times I \ni (x,y) \mapsto f(x)-f(y)-\partial_y f(y)(x-y) \in [0,\infty) \tag{14}$$

とすると，下記 (i),(ii),(iii) が成り立つ．

(i) $D_f(x,y) = f(x)+f^*(w)-x\cdot w,$

(ii) $0 \le D_f(x,y),$

(iii) $D_f(x,y)=0 \Rightarrow x=y.$

ここで，$w=\partial_y f(y)$ とし，f^* はLegendre双対関数とする．

関数 f はBregmanダイバージェンスの条件を満たし，かつ単調とする．このとき，Schwarzダイバージェンス D_f^S を以下のように定義すると下記事実がわかる．

事実 6.

$$D_f^S : I\times I \ni (x,y) \mapsto 1/(x-y)-\partial_y f(y)/\{f(x)-f(y)\} \in [0,\infty) \tag{15}$$

とすると，下記 (i),(ii),(iii) が成り立つ．

(i) $0 \le D_f^S(x,y),$

(ii) $D_f^S(x,y)=0 \Rightarrow x=y,$

(iii) $\partial_x D_f^S(x,y) = \partial_{xy}^2 K_f(x,y),\ x\neq y.$

ここで，$K_f(x,y)=\log\{(f(x)-f(y))/(x-y)\},\ x\neq y$ とする．

$K_f(x,y)$ を対数Löwner核と呼び，$\partial_{xy}^2 K_f(x,y)$ をSchwarz汎関数と呼ぶことにする．

次の等式 $\overset{*}{=}$ の部分の事実は良く知られている[*6]：

事実 7.

$$\partial_{xy}^2 K_f(x,y) = \frac{\partial_x f(x)\partial_y f(y)}{(f(x)-f(y))^2} - \frac{1}{(x-y)^2} \overset{*}{=} \frac{1}{6}\{f;x\}, \quad (y \to x). \tag{16}$$

この事実から, D_f^S を Schwarz ダイバージェンスと呼ぶことにした.
Löwner 行列[*7] と Schwarz 汎関数との関係を述べる為, Löwner 行列の定義を述べる.

定義 3. 実関数 f は (a,b) 上で定義されていて, $x_1,x_2,\ldots,x_n \in (a,b)$ は相異なるとする. $n\times n$ 行列 $L^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n;f)$ を以下のように定義する：

$$L^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n;f) = \begin{cases} (f(x_i)-f(x_j))/(x_i-x_j), & (i \neq j), \\ f'(x_i), & (i=j). \end{cases} \tag{17}$$

この時, Löwner 行列と Schwarz 汎関数とは次の関係がある.

事実 8.

$$\partial_{xy}^2 K_f(x,y)\cdot(f(x)-f(y))^2 = \det L^{(2)}(x,y;f). \tag{18}$$

§3.2. 行列値 Schwarz 微分

行列 Schwarz 微分を行列 Schwarz 汎関数によって定義する為, 単調行列関数の定義から始める.

定義 4. 開区間 I で定義された実数値連続関数 $f(t)$ とすべての固有値を区間 I に持つエルミート行列に対して $f(A)$ が定義できる. この行列関数が, すべての次数（サイズ）の行列 A,B に対して, $A \le B \Rightarrow f(A) \le f(B)$ を満たしている時, $f(t)$ は単調行列関数と呼ばれる.

注意 1. 実数全体で定義された実数値連続関数 $f(t)$ が, 2×2 のすべてのエルミート行列に対して単調行列関数ならば, f はアファイン関数になることが知られている ([21],P87).

定義 5. 固有値を (a,b) に持つエルミート行列 X,Y と単調増加関数 f に対し, 行列変数対数 Löwner 核関数 $K_f(X,Y)$ を以下のように定義する：

$$K_f(X,Y) = 6\cdot\log\left\{(f(X)-f(Y))(X-Y)^{-1}\right\}. \tag{19}$$

---

*6 例えば, 共形場理論入門, 山田康彦著, 倍風館, P63.
*7 例えば, [21], P92.

この時, 滑らかな曲線 $\{X(t)\}$ とし, $\partial_{ts}^2 K_f(X(t),X(s)) = \frac{\partial^2 K_f}{\partial_t \partial_s}(X(t),X(s))$ の Taylor 展開を考え, $t \to s$ とした時の行列値を, 関数 f の行列 Schwarz 微分 $S(Z(t))$ または $\{Z;t\}$ とする. ただし, $X, X', X'', \ldots$ は, 互いに可換とする.

この時, 次を得る.

$$S(Z(t)) = \left\{(Z'(t))^{-1}Z''(t)\right\}' - \frac{1}{2}\left\{(Z'(t))^{-1}Z''(t)\right\}^2,$$

ここで, $Z = Z(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \det Z(t) \neq 0, (t \in I)$.

§4. 行列力学系と Schwarz 方程式

行列 Schwarz 方程式は, Hamilton システムを通して行列 Riccati 方程式との関連がある ([26], [27]). この節では, Riccati 方程式に変換できる正定値対称行列 A の主部分空間を計算する力学系,

$$\frac{dX}{dt} = (I - XX^T)AX, \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{20}$$

と行列 Schwarz 方程式との関係, 及び, 行列 Schwarz 微分自体の性質を調べる.

命題 1 (Zelikin, [27]). 行列 A 及び B は対称とする. もし, $Z(t)$ が次の行列 Schwarz 方程式の解とすると,

$$S(Z(t)) = 2(B(t) - A'(t)), \tag{21}$$

新たな行列変数 W,

$$W(t) = -\frac{1}{2}(Z'(t))^{-1}Z'' - A(t) \tag{22}$$

は, Riccati 方程式 (23) の解となる.

$$\frac{dW}{dt} = -B - AW - WA - W^2. \tag{23}$$

逆に, もし, W が Riccati 方程式 (23) の解ならば, 式 (22) を満たす任意の関数 $Z(t)$ は, 行列 Schwarz 方程式 $S(Z(t)) = 2(B(t) - A'(t))$ の解となる.

□

主部分空間流から変換された行列 Riccati 方程式と命題 1 の Riccati 方程式との対応関係を付ける為, 次の 2 つの変数変換を考える.

$$N = -2A^{\frac{1}{2}}XX^TA^{\frac{1}{2}} \quad 及び \quad L = 2A^{\frac{1}{2}}XX^TA^{\frac{1}{2}}.$$

すると, 式 (20) は, それぞれ以下のタイプの方程式に変換される.

$$\frac{dN}{dt} = AN + NA + N^2, \tag{24}$$

$$\frac{dL}{dt} = AL + LA - L^2. \tag{25}$$

事実 9. 次の結果を得る.

(i) $N = \frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A$ とすると, 方程式 (24) は方程式 $S(Z) = -2A^2$ と同値になる.

(ii) $L = -\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' + A$ とすると, 方程式 (25) は方程式 $S(Z) = 2A^2$ と同値になる.

証明.

$$N' = -\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z''(Z')^{-1}Z'' + \frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'''.$$

$$\begin{aligned} N^2 &= \left\{\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A\right\}\left\{\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A\right\} \\ &= \frac{1}{4}(Z')^{-1}Z''(Z')^{-1}Z'' - \frac{1}{2}(Z')^{-1}Z''A - \frac{1}{2}A(Z')^{-1}Z'' + A^2 \end{aligned}$$

こうして, 次の式を得る：

$$\begin{aligned} N' - N^2 &= -\frac{3}{4}\left\{(Z')^{-1}Z''\right\}^2 + \frac{1}{2}(Z')^{-1}Z''' + \frac{1}{2}(Z')^{-1}Z''A + \frac{1}{2}A(Z')^{-1}Z'' - A^2 \\ &= \frac{1}{2}S(Z) + A^2 + NA + AN. \end{aligned}$$

以上で (i) が示せた. (ii) も (i) と同様に示すことができる. □

次に, 行列 W が正則の時, $(Z')^{-1}Z''$ と W とが逆数関係にあった場合, 事実 9 の結果はどうなるかを調べる.

事実 10. 行列 A は, 時変または時定数とし, 変数 $(Z')^{-1}Z''$ と変数 W の関係を

$$\det(W) \neq 0, \quad W = W(t) = \left\{-\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A\right\}^{-1}$$

とする. その時, 次の結果を得る.

$$\frac{dW}{dt} = I + AW + WA \iff S(Z) = -2(A^2 + A'), \tag{26}$$

$$\frac{dW}{dt} = I + AW + WA + WA^2W \iff S(Z) = -2A', \tag{27}$$

$$\frac{dW}{dt} = I + AW + WA + W(A^2 + A')W \iff S(Z) = 0. \tag{28}$$

証明.

$$\frac{dW}{dt} = -\left\{-\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A\right\}^{-1}\left\{-\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A\right\}'\left\{-\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A\right\}^{-1}$$
$$= -W\left\{-\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A\right\}' W,$$

ここで,

$$\left\{-\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A\right\}' = \frac{1}{2}(Z')^{-1}Z''(Z')^{-1}Z'' - \frac{1}{2}(Z')^{-1}Z''' - A'.$$

下記方程式 (a),(b) を $\frac{dW}{dt} = -W\left\{-\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A\right\}' W$ に代入すると,

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{2}(Z')^{-1}Z''(Z')^{-1}Z'' = 2W^{-2} + 2W^{-1}A + 2AW^{-1} + 2A^2,$$

$$\text{(b)}\quad -\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z''' = -\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z''' + \frac{3}{4}\left\{(Z')^{-1}Z''\right\}^2 - \frac{3}{4}\left\{(Z')^{-1}Z''\right\}^2$$
$$= -\frac{1}{2}S(Z) - \frac{3}{4}\left\{(Z')^{-1}Z''\right\}^2,$$

ここで,

$$-\frac{3}{4}\left\{(Z')^{-1}Z''\right\}^2 = -3W^{-2} - 3W^{-1}A - 3AW^{-1} - 3A^2,$$

次の結果を得る.

$$\frac{dW}{dt} = I + AW + WA + W\left\{A^2 + A' + \frac{1}{2}S(Z)\right\}W.$$

□

変数 W と変数 $(Z')^{-1}Z''$ が, 次の分数変換（Cayley 変換の類似）の関係にある場合を調べる.

事実 11. $\det\left\{\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' + A\right\} \neq 0$, $\det(A) \neq 0$ とする.

$$W = W(t) = -\left\{\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' - A\right\}\left\{\frac{1}{2}(Z')^{-1}Z'' + A\right\}^{-1}$$

とする時, 行列 W の微分と Schwarz 微分 $S(Z)$ との関係は次式で与えられる.

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4}(I+W)S(Z)A^{-1}(I+W) - \frac{1}{2}(I-W)A(I-W) + \frac{1}{2}A'(I-W)A^{-1}(I+W). \quad (29)$$

式 (29) より, 次の結果を得る.

$$\frac{dW}{dt} = -A - WAW + \frac{1}{2}A'(I-W)A^{-1}(I+W) \iff S(Z) = 2A^2,$$
$$\frac{dW}{dt} = AW + WA + \frac{1}{2}A'(I-W)A^{-1}(I+W) \iff S(Z) = -2A^2,$$
$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2}(I-W)A(I-W) + \frac{1}{2}A'(I-W)A^{-1}(I+W) \iff S(Z) = 0.$$

証明. 省略. □

最後に, 行列 Schwarz 微分を Fanning frame の観点から考察する.

定義 6. ([18])
$\mathbb{R}^{2n}$ の n 次元部分空間の滑らかな曲線 $c(t)$ が, Fanning であるとは, 各時刻 t で接ベクトル $\dot{c}(t)$ が, $c(t)$ から商空間 $\mathbb{R}^{2n}/c(t)$ への可逆な線形写像であるときをいう. Fanning $c(t)$ は, frame によって得ることができる. もし, $\mathscr{A}(t)$ がランク n の $2n \times n$ 行列の滑らかな曲線 ($\mathscr{A}$ が frame であることの定義) とする時, $\mathscr{A}$ の列ベクトルによって生成される n 次元部分空間の曲線が, Fanning となる為の必要十分条件は, $2n \times 2n$ の行列 $(\mathscr{A}, \dot{\mathscr{A}})$ が, t のすべての値で正則であることによって与えられる. したがって, 行列 $(\mathscr{A}, \dot{\mathscr{A}})$ が正則となる行列 $\mathscr{A}$ を Fanning frame と呼ぶ.

Pavia-Durán[18] では, '行列 Schwarz 微分' は, 2 階の行列微分方程式の係数によって与えられ, Fanning frame の Schwarz 微分について特徴付け (Theorem3.4., [18]) し, Fanning frame を特定すると, '行列 Schwarz 微分' が, 行列 Schwarz 微分 $\{(Z')^{-1}Z''\}' - 1/2\{(Z')^{-1}Z''\}^2$ と一致することを指摘している.

次の定理は, Fanning frame $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} I \\ Z \end{pmatrix}$ を定義する行列 Z に対して, 行列 Schwarz 微分 $\{(Z')^{-1}Z''\}' - 1/2\{(Z')^{-1}Z''\}^2$ を定義し, Fanning frame による $\mathbb{R}^{2n}$ の線形変換として与えられる基本自己準同型写像 $\mathscr{F}(t)$ を用いて, 基本自己準同型 $\mathscr{F}$, Fanning frame $\mathscr{A}$ 及び行列 Schwarz 微分 $\{Z;t\}$ の関係を特徴付けしたものである[*8].

定理 3. $2n \times 2n$ の行列 $\mathscr{F}(t)$ は Fanning frame, $\mathscr{A}$ によって定義された式 (30) による基本自己準同型写像とする.

$$\mathscr{F}(t) = (\mathscr{A}(t), \dot{\mathscr{A}}(t)) \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathscr{A}(t), \dot{\mathscr{A}}(t))^{-1} \tag{30}$$

[*8] Theorem3.4.([18]) とは前提条件が異なる.

ここで,

$$\dot{\mathscr{A}} = \frac{d\mathscr{A}}{dt}, \quad \mathscr{A}(t) = \begin{pmatrix} I \\ Z \end{pmatrix}, \quad \{Z;t\} = (Z'^{-1}Z'')' - \frac{1}{2}(Z'^{-1}Z'')^2.$$

この時, 次の方程式が成り立つ：

$$\left(\frac{d\mathscr{F}(t)}{dt}\right)^2 \mathscr{A}(t) = 2\mathscr{A}(t)\{Z;t\}. \tag{31}$$

証明. 省略. □

課題 5. 基本自己準同型 $\mathscr{F}$ を定義する行列 $\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を冪零行列, 及び, Fanning frame$\mathscr{A}$ を定義する単位行列 I を対称行列 A などに一般化した時, 方程式 (31) は, 行列 A に対して, どのような性質を持つかを調べる.

参考文献

[1] Ahlfors, L. and Weil, G., A uniqueness theorem for Beltrami equations, *Proc. Amer.Math.Soc.* , **13** (1962), 975–978.

[2] Amari. S. and Nagaoka, H., Methods of Information Geometry, Oxford University Press, (2000).

[3] Bolger, E. M. and Harkness, W. L., Characterization of some distributions by conditional moments, *Ann. Math. Stat.* , **36(2)** (1965), 703–705.

[4] Blondel, V. and Megretski, A.(Eds.), Unsolved problems in mathematical systems and control theory, Princeton University Press, Princeton and Oxford (2004).

[5] Brockett, R. W., Dynamical systems that sort lists, diagonalize matrices and solve linear programming problems, *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control* , **Vol.1** (1988), 799–803.

[6] Brockett, R. W., Least squares matching problems, *Linear Algebra and Its Applications* , **122-124** (1989), 761–777.

[7] Byrnes, C. I., On a theorem of Hermite and Hurwitz, *Linear Algebra and Its Applications.* , **50** (1983), 61–101.

[8] Forman, R., Functional determinants and geometry, *Invent. Math.* , **88** (1987), 447–493.

[9] Hille, E., Remark on a paper by Zeev Nehari , *Bull. Amer.Math.Soc.* , **55** (1949), 552–553.

[10] Kobayashi, S., Projective invariant metric for Einstein spaces, *Nagoya Math. J.* , **73** (1979), 171–174.

[11] Kobayashi, S., 射影構造と不変距離, 数学（日本数学会）, **34** (1982), 211–221.

[12] Laha, R. G. and Lukacs, E., On a problem connected with quadratic regression, *Biometrika* , **47** (1960), 335–343.

[13] Manton, J., Helmke, U. and Mareels, I. M. I., A dual purpose principal and minor component flow, *System and Control Letters* , **54** (2005), 759–769.

[14] Matsunawa, T., Origin of distributions, *Proc.Inst.Statist.Math.* , **42(2)** (1994), 197–214(in Japanese).

[15] Meixner, J., Orthogonale polynomsysteme mit einer besonderen gestalt der erzeugenden funktion, *J. London Math. Soc.* , **9** (1934), 6–13.

[16] Nehari, Z., The Schwarzian derivative and schlicht functions , *Bull. Amer.Math.Soc.* , **55** (1949), 545–551.

[17] Ovsienko, V. and Tabachnikov, S., Projective differential geometry old and new: From Schwarzian derivative to cohomology of diffeomorphism groups, Cambridge University Press (2004).

[18] Paiva, J. C. Á and Durán, C. E., Geometric invariants of fanning curve, *Advances in Applied Math.* , **42(3)** (2009), 290–312.

[19] Sasaki, T. and Yoshida, M., Around the Schwarzian derivatives (in Japanese); Schwarz 微分を巡って, 数学のたのしみ, 「数学セミナー」別冊（日本評論社）, **24** (2001), 107–121.

[20] Schwarz, B., Disconjyugacy of complex second-order matrix differential systems, *J. Ďanalyse Mathematique* , **36** (1979), 244–273.

[21] Simon, B., Convexity: An Analytic Viewpoint, Cambridge University Press (2011).

[22] Suzuki, T. and Yoshizawa, S., A dual geometry on indefinite inner product spaces （不定値計量空間の双対幾何）, 本講究録, (2014).

[23] Yoshida, M., Schwarz プログラム, 数学（日本数学会）, **40(1)** (1988), 36–48.

[24] Yoshizawa, S., Helmke, U. and Starkov, K., Convergence analysis for principal component flows, *Int. J. Appl.Math.Comput.Sci.* , **11** (2001), 223–236. Corrections to 'Convergence analysis for principal component flows', *ibid* , **12** (2002), 299.

[25] Yoshizawa, S., 'Legendre dualities between matrix subspace flows' in *Mathematical System Theory, Festschrift in Honor of Uwe Helmke on the Occasion of his Sixtieth Birthday, Hüper, K. and Trumpf, J. (Eds.)* , CreateSpace, (2013), 471–478.

[26] Zelikin M.I., Control Theory and Optimization I. Encyclopaedia of Mathematical Science, 86, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2000).
[27] Zelikin M.I., Geometry of cross ratio. arXiv:math/0701500v1 [math.AP], (2007).