数理解析研究所講究録
第 1920 巻 2014 年 99-112

正多角形の作図に関する教材研究のために

島根大学名誉教授 青山陽一 (Yoichi AOYAMA)
Professor Emeritus, Shimane University
岐阜大学名誉教授 中馬悟朗 (Goro CHUMAN)
Professor Emeritus, Gifu University

はじめに

これまで 4 回 ([1],[2],[3],[4]) に亘り正多角形の作図に関する教材研究について考察してきた. [1] では, 正多角形の作図に取組む理由を述べ, 正多角形のユークリッド作図の可能性に関する教材研究のために, ガロワ理論を基礎とする数学的内容についての事項を主に考察した. [2] では, 学生をユークリッド原論に触れさせるという実践についての報告様を主にしている. 後半で, 原論方式の正五角形の作図について要約を与えている. 現今は方程式を解き $\sqrt{5}$ の作図に帰着させる方法が扱われることが多いように見受けられるが, 教師になろうという人には原論方式の'底角が頂角の 2 倍である二等辺三角形の作図'に帰着させる方法も行って貰いたいとの思いからである. [3] は [2] に引続き, 学生にユークリッド原論を読ませるという実践について記したものである. 学校教育で扱われる幾何学を, その源泉に基づいて経験してもらうと共に, 論理の組立というものを味わって貰いたいとの思いで行ったものである. 後半では, 標識定木, 直角定木, 折り紙による角の三等分法 (3 種) を述べた. 現場で扱われることがあるので, ユークリッド作図以外の作図法にも触れておく必要があるだろう. [4] において, [3] の最後に述べた折り紙による角の三等分から発展させ, 折り紙作図についての教材研究を考察した. 折り紙作図の基本と正五角形の作図について述べた後, 折り紙による三次方程式の解法とそれを用いた正七角形の折り紙作図についてである.

今回は, §1 において [4] の折り紙による三次方程式の解法と正七角形の折り紙作図への補遺を記し, §2 において テープ結びによる正多角形の作成について考えてみることとした. 箸袋を結んで正五角形を作ったり, テープや紐を 1 回結んで正五角形を作り巻き付けて纏めることは, よくなされている. また, 児童・生徒に行わせることも可能である. 従って, この話題を無視する訳にもいかないであろう, ということで取上げることにした. 参照文献として, 坂口氏の論文 [5] と大野氏の論文 [6] を見ることとする. 小節 2.1 において, これら文献の内容を概観する. 幅が一定のテープに斜めに互い違いに線を引いて合同な等脚台形を作り, 線に沿って折り重ねて行き正多角形を作成するとの観点からの分析を小節 2.2 で行う. 結びの方法では奇数角形の場合だけであるが, この観点から偶数角形の場合も考えることにする.

なお, '正多角形の作図に関する教材研究について' は, 今回を持って一旦終りにさせて頂く.

§ 1. 文献 [4] への補遺

1.1 [4, §4. 三次方程式] への補遺

$b, c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$ として，方程式

$$z^3 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{1.1}$$

の考察に関連して.

点 $\mathrm{K}(-1, 0)$ を焦点とし 直線 $k : x = 1$ を準線とする

$$放物線\ \kappa\ :\quad x = -\frac{1}{4}y^2. \tag{1.2}$$

点 $\mathrm{L}(-c, -b+d)$ を焦点とし 直線 $l : y = -b - d$ を準線とする

$$放物線\ \lambda_v\ :\quad y = \frac{1}{4d}(x+c)^2 - b. \tag{1.3}$$

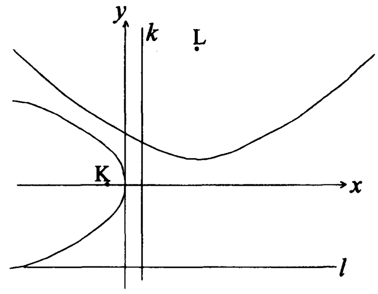


図 1.1: 放物線 κ と λ_v

κ と λ_v の共通接線を 計算で 求めたい.

$\kappa \ni (\eta, \zeta) \neq (0, 0)$ での κ の接線は

$$x = -\frac{\zeta}{2}y - \eta \quad \text{or} \quad y = -\frac{2}{\zeta}x + \frac{\zeta}{2} \tag{1.4}$$

である．直線 (1.4) が λ_v に接するための条件を，(1.4),(1.3) から重解条件で記述すると

$$\zeta^3 + 2b\zeta^2 + 4c\zeta + 8d = 0 \tag{1.5}$$

になる．(1.1) $\times$ 8 より

$$(2z)^3 + 2b(2z)^2 + 4c(2z) + 8d = 0 \tag{1.6}$$

を得る．従って，$\zeta = 2p$, $\eta = -p^2$（p は方程式 (1.1) の実数解）となる.
$\lambda_v \ni (\mu, \nu) \neq (-c, -b)$ での λ_v の接線は

$$y = \frac{\mu + c}{2d}x + \frac{c^2 - \mu^2}{4d} - b \quad \text{or} \quad x = \frac{2d}{\mu + c}y + \frac{\mu - c}{2} + \frac{2bd}{\mu + c} \tag{1.7}$$

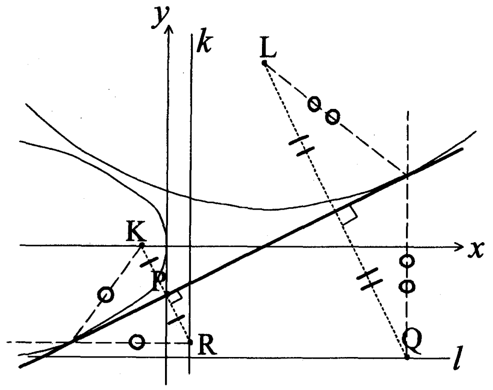
である．これが直線 (1.4) with $\zeta = 2p$, $\eta = -p^2$ と一致する条件は,

$$\mu = -\frac{2d}{p} - c \tag{1.8}$$

である．従って，κ と λ_v の共通接線は

$$y = -\frac{1}{p}x + p \tag{1.9}$$

である．ここに，p は方程式 (1.1) の実数解である．共通接線 (1.9) と放物線 κ との接点は $(-p^2, 2p)$，放物線 λ_v との接点は $(-\frac{2d}{p} - c, \frac{d}{p^2} - b)$ で，y 切片は p である．



K $(-1, 0)$
$k : x = 1$
L$(-c, -b + d)$
$l : y = -b - d$
R $(1, 2p)$
P $(0, p)$
Q $(\mu, -b - d)$
$$\mu = -\frac{2d}{p} - c$$

図 1.2: 共通接線 $y = -\frac{1}{p}x + p$

方程式 (1.1) の実数解 p を求める折り紙の図 1.3 と比べてみよう．

K $(-1, 0)$
$k : x = 1$
L$(-c, -b + d)$
$l : y = -b - d$
R $(1, 2p)$
P $(0, p)$
Q $(q, -b - d)$

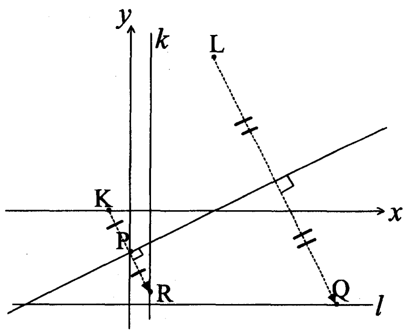


図 1.3: 折り紙による方程式 (1.1) の解法

図 1.3 の状況で，

$$p(q + c) = -2d \tag{1.10}$$
$$q = 2p^2 + 2bp + c \tag{1.11}$$

なる関係がある．これより，

$$p^3 + bp^2 + cp + d = 0 \tag{1.12}$$
$$q^3 + cq^2 + (4bd - c^2)q + 4bcd - c^3 - 8d^2 = 0 \tag{1.13}$$

が成立する．また，

$$\mu = q \tag{1.14}$$

となる．なお，直線 (1.7) が κ に接するための条件を (1.7),(1.2) から重解条件で記述すると，次の式が得られる．(1.13) と同じである．

$$\mu^3 + c\mu^2 + (4bd - c^2)\mu + 4bcd - c^3 - 8d^2 = 0 \tag{1.15}$$

1.2 [4, §5. 正七角形] への補遺

前小節に於いて，$b=1, c=-2, d=-1$ とした場合である．

点 $K(-1,0)$ を焦点とし 直線 $k: x=1$ を準線とする

$$\text{放物線 } \kappa \ : \quad x = -\frac{1}{4}y^2. \tag{1.16}$$

点 $L(2,-2)$ を焦点とし x 軸を準線とする

$$\text{放物線 } \lambda \ : \quad y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 - 1. \tag{1.17}$$

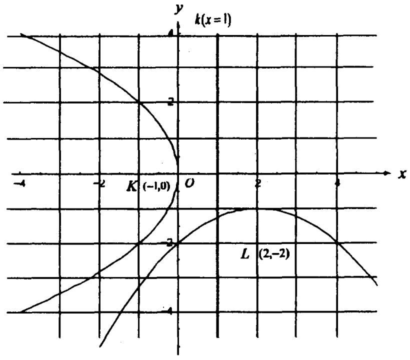


図 1.4: 放物線 κ と λ

κ と λ の共通接線は，

$$y = -\frac{1}{p}x + p \tag{1.18}$$

である．ここに，p は方程式

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0 \tag{1.19}$$

の解である．この方程式の解は

$$p_1 = 2\cos\frac{6\pi}{7} = -1.80194\cdots \tag{1.20}$$

$$p_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7} = -0.44504\cdots \tag{1.21}$$

$$p_3 = 2\cos\frac{2\pi}{7} = \quad 1.24698\cdots \tag{1.22}$$

である．

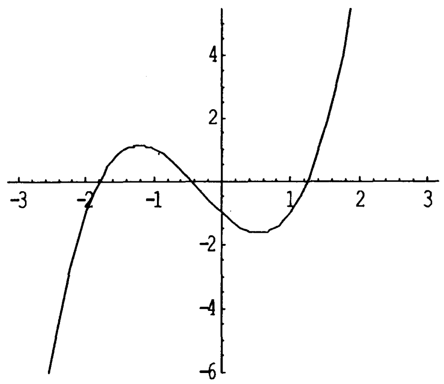


図 1.5: $y = x^3 + x^2 - 2x - 1$ のグラフ

共通接線 (1.18) と放物線 κ との接点は $(-p^2, 2p)$，放物線 λ との接点は $(2+\dfrac{2}{p}, -1-\dfrac{1}{p^2})$ で，y 切片は p である．

$$q = 2 + \frac{2}{p} \tag{1.23}$$

とおけば，q は

$$q^3 - 2q^2 - 8q + 8 = 0 \tag{1.24}$$

を充たす．(1.19) $\times\,(-8)$ より $(-2z)^3 - 2(-2z)^2 - 8(-2z) + 8 = 0$ を得る．従って，q が充たす方程式 (1.24) の解は $-2p_1$, $-2p_2$, $-2p_3$ である．p_i に対応する $q_i = 2 + \dfrac{2}{p_i}$ は，

$$q_1 = -2p_2 = -4\cos\frac{4\pi}{7} = 4\cos\frac{3\pi}{7} = 0.8900\cdots \tag{1.25}$$

$$q_2 = -2p_3 = -4\cos\frac{2\pi}{7} = 4\cos\frac{5\pi}{7} = -2.4939\cdots \tag{1.26}$$

$$q_3 = -2p_1 = -4\cos\frac{6\pi}{7} = 4\cos\frac{\pi}{7} = 3.6038\cdots \tag{1.27}$$

である．($p_1 < p_2 < 0 < p_3$ である．故に，$\frac{1}{p_2} < \frac{1}{p_1} < \frac{1}{p_3}$ で，$q_2 < q_1 < q_3$ である．また，$-2p_3 < -2p_2 < -2p_1$ である．従って，$q_2 = -2p_3$, $q_1 = -2p_2$, $q_3 = -2p_1$ となる．)

κ と λ の共通接線は

$$(-\infty, -\infty) \longrightarrow (-p_1^2, 2p_1) \longrightarrow (0, p_1) \longrightarrow (q_1, r_1) \longrightarrow (+\infty, +\infty) \tag{1.28}$$

$$(-\infty, -\infty) \longrightarrow (q_2, r_2) \longrightarrow (-p_2^2, 2p_2) \longrightarrow (0, p_2) \longrightarrow (+\infty, +\infty) \tag{1.29}$$

$$(-\infty, +\infty) \longrightarrow (-p_3^2, 2p_3) \longrightarrow (0, p_3) \longrightarrow (q_3, r_3) \longrightarrow (+\infty, -\infty) \tag{1.30}$$

の三本である．ここに，$q_i = 2 + \dfrac{2}{p_i}$，$r_i = -1 - \dfrac{1}{p_i^2}$．

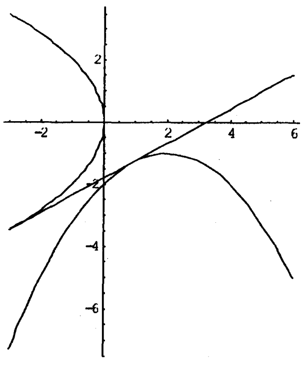


図 1.6: 共通接線 (1.28)

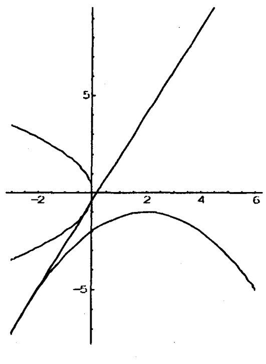


図 1.7: 共通接線 (1.29)

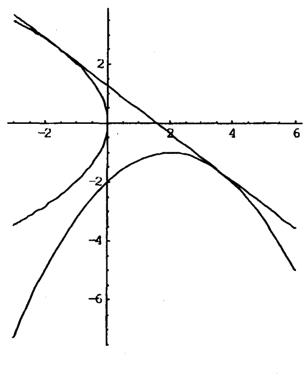


図 1.8: 共通接線 (1.30)

§2. テープ結びによる正多角形について

テープを弛みなく1回結びすると，5角形ができる(図2.1, 5角形ABCDE)が，

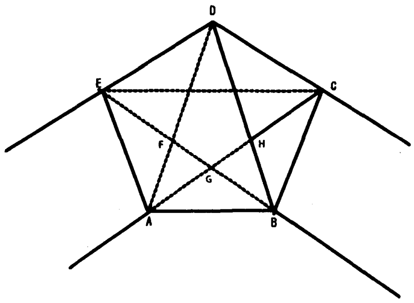


図2.1: 1回結び5角形

これが正五角形であることは良く知られているようである．しかし，その証明となるとポピュラーかどうか疑問が残る．旧制高校の入試問題にも出されたことがあるらしい．

この節では，テープ結びによる正多角形について少し考察してみることにする．この問題を教材の観点から扱った坂口氏の論文[5]と大野氏の論文[6]があるので，小節2.1でそれらの内容を概観し，少し付加する．なお，この稿では証明を与えることはしない．(‘(理想的に)結ぶ’ということは，均一性・同等性そして対称性を生み出す．故に，正多角形になることは，感覚的に諒解出来る．正多角形になるのは，自然の摂理．それを示す(説明する)のが，証明．こういう感じではないかとも想われる.) 小節2.2では，テープ結びによる正多角形の作成を“幅が一定のテープに斜めに互い違いに線を引いて合同な等脚台形を作り，引いた線を折り目として折り重ねて行き正多角形を作成する”ものとの観点から考えることにする．

2.1 テープ結びによる正多角形

坂口[5]と大野[6]から引用する.(図は省略する.)

坂口[5]から引用：

すし屋やレストランなどで、箸袋を結んで、さりげなく5角形を作っている人の姿を時たま見かけることがある。筆者もいつの頃からか見覚えて、割り箸に紙袋がついていると、ついそれを結んでみたくなる。

紙テープを図1のような仕方で結んで、ていねいに折りたたむと、図5のような5角形が出来る。紙テープをもう1回余分に廻して、図2のような仕方で結ぶと、図6のような7角形が出来る。さらにもう1回余分に廻して結ぶと、9角形が出来る。このようにして、一般に$2n+1$角形$(n \geqq 2)$が出来るのであるが、実はこれらの多角形はどれも皆正多角形であることが証明できる。

このようなことは既によく知られた事柄であろうと思っていたのに、今日まで筆者は書物の中でも談話の中でもこれらの事柄に一度も出逢ったこと

がない。そこで本紀要をかりてその証明を述べてみようと思う。証明は中学校の高学年や高等学校の生徒にもよく分る種類のものであるから、中学や高校の教材として取り上げることもできる。

大野 [6] から引用：

よく旅館などで出される丹前のヒモが，正五角形に折られているのをご存知と思います。あるいは，おみくじやわりばしの袋を結んでも正五角形ができあがります。生徒の多くは，このことを知っていますが，なぜ正五角形になるのかは，その理由はわからないようです。「さっそく証明を……」とすると，すぐにいやな顔を返してくるので，ここではもうひとひねりして，紙テープを使い，正七角形や正九角形を作らせてみましょう。図①のようにテープを結んでひっぱると正五角形になりますが，図②のように，もう1回テープを多くくぐらせて，ひっぱると正七角形ができあがります。正九角形を作るには，さらに1回多くテープをくぐらせてから，ひっぱればよいわけです。

紙テープの実験で，生徒を感動させた後「なぜ，テープを結ぶと正五角形や正七角形（はては正奇数角形？）ができるのか？」調べてみることにします。

[5] は証明のために次の二つの補題（補題 2.1,2.2）を与えている．[6] は「まずは，正五角形になることの証明から始めますが，その前に次の２題の証明問題に挑戦してもらいます。どちらも有名な問題ですが，シンプルでありながらしっかりとした論証の力が要求されます。」と述べて，次の二つの問題（補題 2.1,2.3）を与えている．

補題 2.1. ([5, 補題 1],[6, 問題 1]) １本のテープを斜めに折ると，重なった部分は折り目を底辺とする二等辺三角形である．(図 2.2)

～ テープとは，縁が平行な２直線で 厚さのない平面の帯とする．～

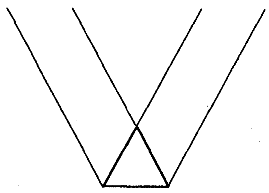


図 2.2: 補題 2.1

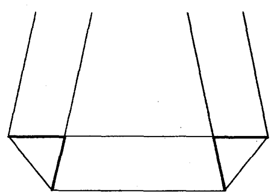


図 2.3: 補題 2.2

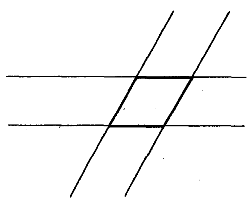


図 2.4: 補題 2.3

補題 2.2. ([5, 補題 2]) １本のテープを２箇所で折るとき，折り目の上に出来る２つの二等辺三角形は等辺が等しければ合同である．(図 2.3)

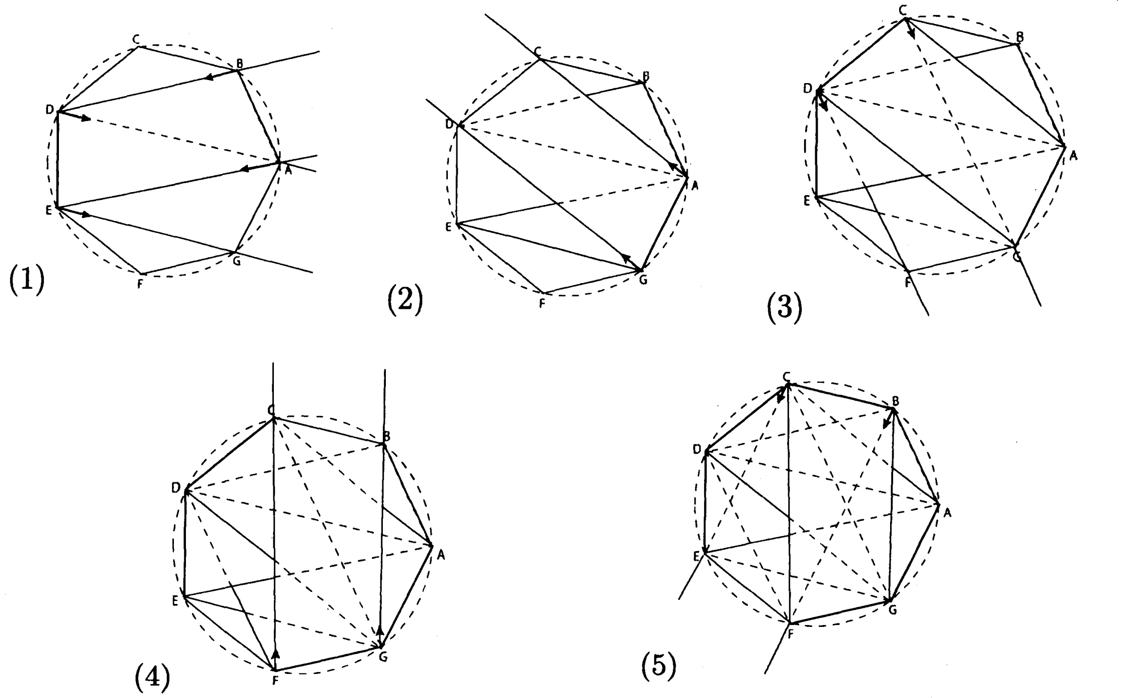
補題 2.3. ([6, 問題 2]) 幅の等しい２本のテープを斜めに重ねると，重なった部分は菱形である．(図 2.4)

そして，[5] では正五角形・正七角形になることの証明を与え，その後「さて、5角形と7角形の場合に用いた証明の手順は、出来る図形が9角形でも、11角形でも、一般に $2n+1$ 角形 ($n \geqq 2$) でも、全く同じようにたどることができる。従って、これらの場合にも全く同様に正多角形であることを証明できる。」と述べている．[6] では，正五角形になることの証明を与え，「正七角形の場合も，同様に証明できます。また，平行線の比を使う方法などもあります。」と述べている．

証明方法は，テープが重なって出来る二等辺三角形・平行四辺形・台形の共通部分，縁の平行性等から辺・角の相等関係を導き，円に内接する等辺多角形即ち正多角形であることを示すものである．

ところで，テープを折り結ぶ場合，1回結びなら大抵は出来るだろうが，2回結び・3回結びとなるとそう容易とも思えない．そこで，折り結び方の例を与えておくことにする．(上とは紙面のこちら側，下とは紙面の向こう側のことである．紙面上の上下ではない．)

2回結び – 正七角形を作る折り結び方： (点線による円は，補助のため描いてある．)



(1) AE,BD に沿ってテープを置く．DE を折り目として下へ折る．AG に向かう．
(2) AG を折り目として上へ折る．CD に向かう．
(3) CD を折り目として下へ折り，重なっているテープの下から2枚目上から3枚目となるように通す．GF に向かう．(ここで止めて結ぶのが1回結びである．cf. 図2.8)
(4) GF を折り目として上へ折る．BC に向かう．
(5) BC を折り目として下へ折る．重なっているテープの下から3枚目上から4枚目となるように通す．FE に向かう．

次小節で考察する等脚台形の連なり(折り目を付けて延ばしたテープ)で見たのが，図 2.5 である.(縦横比率や傾きは正確でない.)

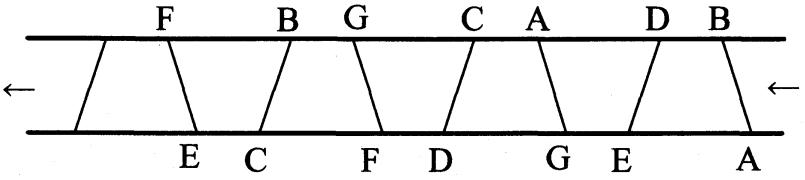
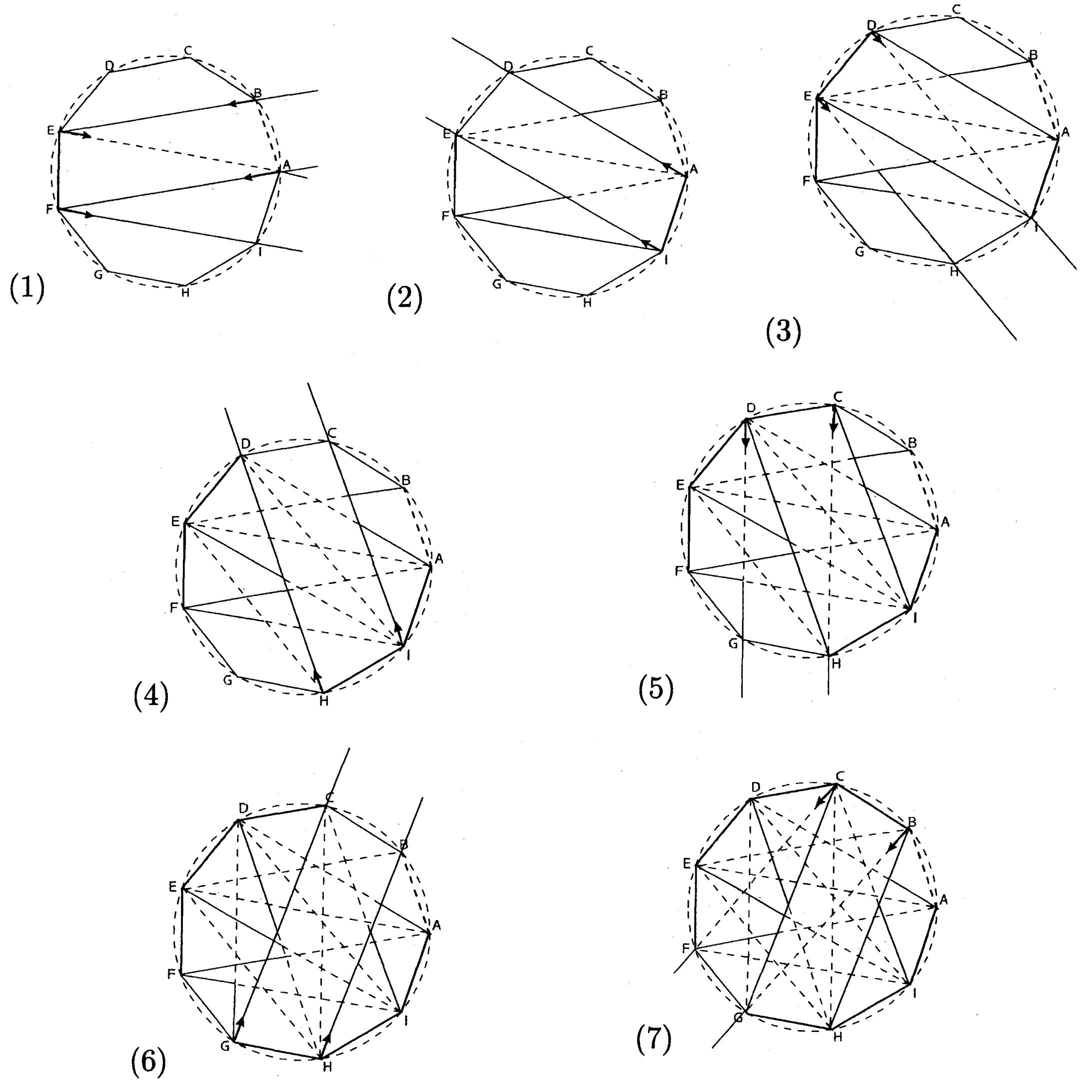


図 2.5: 正七角形を作るテープ（右から左へ見て下さい）

3回結び – 正九角形を作る折り結び方：（点線による円は，補助のため描いてある.）



(1) AF,BE に沿ってテープを置く．EF を折り目として下へ折る．A I に向かう.
(2) A I を折り目として上へ折る．DE に向かう.
(3) DE を折り目として下へ折り，重なっているテープの下から 2 枚目 上から 3 枚目となるように通す．I H に向かう.

(4) IH を折り目として下へ折る．CD に向かう．
(5) CD を折り目として下へ折り，重なっているテープの下から 3 枚目上から 4 枚目となるように通す．HG に向かう．
(6) HG を折り目として上へ折る．BC に向かう．
(7) BC を折り目として下へ折り，重なっているテープの下から 4 枚目上から 5 枚目となるように通す．GF に向かう．

次小節で考察する等脚台形の連なり (折り目を付けて延ばしたテープ) で見たのが，図 2.6 である．(縦横比率や傾きは正確でない．)

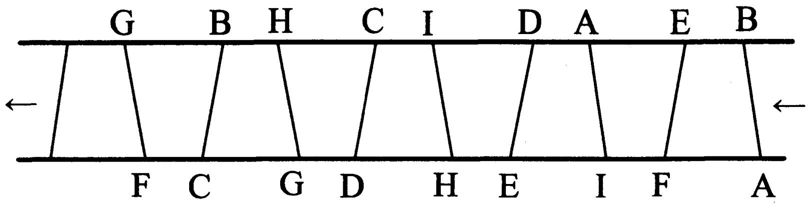


図 2.6: 正九角形を作るテープ（右から左へ見て下さい）

2.2 等脚台形に着目する

テープ結びで正多角形を作った後テープを延ばすと，図 2.7 のように斜めに互い違いに線が入り合同な等脚台形が連なったものになっている．入った線を折り目にして折って行くと正多角形が出来上がるということである．

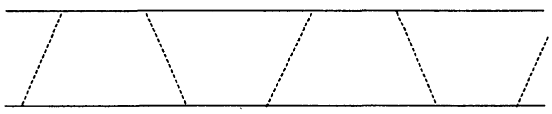


図 2.7: 等脚台形の連なり

正五角形の場合のステップを描いたのが図 2.8 である．(最初の AB と最後の DE のところを折る (or 切断する) と，正五角形の形が出来上がる．)

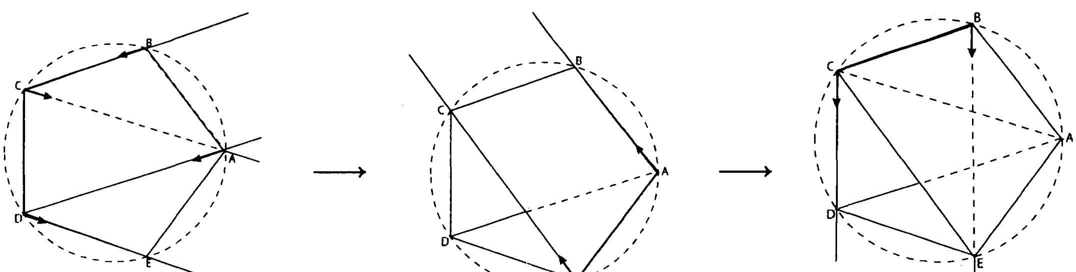


図 2.8: 正五角形を作る折り

— これ以降の図・表は，参照文献の後に載せている．—

等脚台形の脚（折り目線）が正多角形の辺，等脚台形の底辺と対角線が正多角形の最長対角線であり，底辺と 1 本の対角線で出来る二等辺三角形の頂角が π/m（正 m 角形として）となる．台形上部の点と対角線の対点を結ぶ線分が，次の台形の底辺になるように折ることになる．図 2.9 を見て頂きたい．

外接円の半径を 1 として，等脚台形の各部分の長さを記したものが表 2.1 である．

等脚台形の高さ＝テープの幅 を 1 として，他の部分の近似値を $3 \leq m \leq 17$ の場合に与えたものが表 2.2 である．

テープ結びでは奇数角形だけであるが，上述の "テープに斜めに互い違いに線が入り合同な等脚台形が連なったものを，入った線を折り目にして折って行き正多角形を作る．等脚台形の脚（折り目線）が正多角形の辺，等脚台形の底辺が正多角形の最長対角線" という観点から，偶数角形の場合も考えてみたのが，図 2.10 である．この場合，等脚台形の底辺＝最長対角線＝外接円の直径 である．台形上部の点と外接円の対称点を結ぶ線分が，次の台形の底辺になるように折ることになる．或いは，台形上部の点と底辺の中点を結ぶ線分が，次の台形の底辺の半分になるように．

外接円の半径を 1 として，等脚台形の各部分の長さを記したものが表 2.3 である．

等脚台形の高さ＝テープの幅 を 1 として，他の部分の近似値を $4 \leq m \leq 18$ の場合に与えたものが表 2.4 である．

図 2.10 において見られるように，偶数角形の場合は，奇数角形の場合と違って，折った行き先が一つ空いた所なので，$m/2$（正 m 角形として）が偶数の場合は一周するが，$m/2$ が奇数の場合は二つに分かれる．図 2.11,2.12 を参照して貰いたい．

参照文献

[1] 中馬悟朗・青山陽一： 正多角形の作図に関する教材研究の指導について，京都大学数理解析研究所講究録 1657(2009.9), 113–122.

[2] 青山陽一・中馬悟朗： 正多角形の作図に関する教材研究の指導について II，京都大学数理解析研究所講究録 1711(2010.9), 143–154.

[3] 青山陽一・中馬悟朗： 正多角形の作図に関する教材研究の指導について III，京都大学数理解析研究所講究録 1828(2013.3), 78–85.

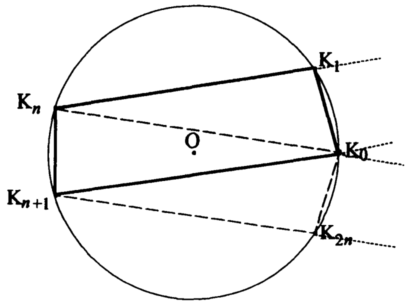
[4] 青山陽一・中馬悟朗： 折り紙作図を用いた教材研究のために～正五角形と正七角形をベースとして～，京都大学数理解析研究所講究録 1867(2013.12), 106–116.

[5] 坂口杲一： 紙テープを結んで出来る多角形について，飛火野（奈良教育大学数学研究会会誌刊行会）第二号 (1986.4), 31–34.

[6] 大野敏実：「おみくじ多角形」と「シャボン玉」授業，数学教育協議会 銀林浩編「数学教室」別冊 2, 実験数学のすすめ – 課題に取り組む楽しい授業 –, 国土社 (1993.2), 88–95.

正 m 角形の等脚台形 where $m = 2n + 1$ is an odd number ≥ 3

If $m = 3$, then 等脚台形の上辺 $= 0$, that is, 等脚台形 $\to$ 二等辺三角形.



等脚台形 $K_0K_1K_nK_{n+1}$

$K_0K_n = K_1K_{n+1} = K_0K_{n+1}$

$\angle K_nK_0K_{n+1} = \dfrac{\pi}{m}$

$\angle K_nK_{n+1}K_0 = \dfrac{(m-1)\pi}{2m}$

$\angle K_{n+1}K_nK_1 = \dfrac{(m+1)\pi}{2m}$

図 2.9: 正 m 角形の等脚台形 (m odd)

外接円半径	多角形の辺	台形の底辺	台形の上辺	台形の高さ
1	$2\sin\dfrac{\pi}{m}$	$2\cos\dfrac{\pi}{2m}$	$2\cos\dfrac{3\pi}{2m}$	$2\sin\dfrac{\pi}{m}\ \cos\dfrac{\pi}{2m}$

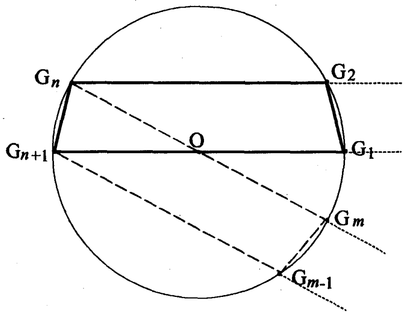
表 2.1: 等脚台形の各部分の長さ (正 m 角形, m odd)

m	外接円半径	多角形の辺	台形の底辺	台形の上辺	台形の高さ
3	0.666667	1.15470	1.15470	0	1
5	0.894427	1.05146	1.70130	1.05146	1
7	1.18202	1.02572	2.30476	1.84828	1
9	1.48445	1.01543	2.92380	2.57115	1
11	1.79298	1.01028	3.54947	3.26191	1
13	2.10464	1.00734	4.17858	3.93574	1
15	2.41811	1.00551	4.80973	4.59953	1
17	2.73275	1.00428	5.44219	5.25686	1

表 2.2: 等脚台形の高さ＝テープの幅＝ 1， 近似値

正 m 角形の等脚台形 where $m = 2n$ is an even number ≥ 4

If $m = 4$, then 等脚台形の上辺 $= 0$, that is, 等脚台形 $\rightarrow$ 二等辺三角形.



等脚台形 $G_1G_2G_nG_{n+1}$

$$OG_1 = OG_2 = OG_n = OG_{n+1}$$

$$\angle G_nOG_{n+1} = \frac{2\pi}{m}$$

$$\angle G_nG_{n+1}G_1 = \frac{(m-2)\pi}{2m}$$

$$\angle G_{n+1}G_nG_2 = \frac{(m+2)\pi}{2m}$$

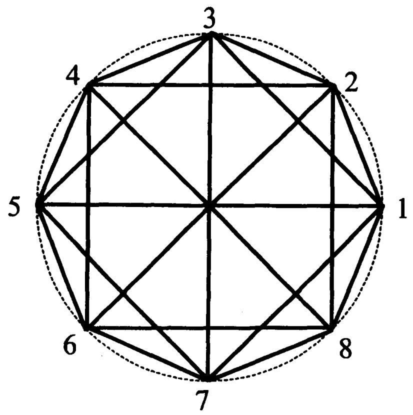
図 2.10: 正 m 角形の等脚台形（m even）

外接円半径	多角形の辺	台形の底辺	台形の上辺	台形の高さ
1	$2\sin\frac{\pi}{m}$	2	$2\cos\frac{2\pi}{m}$	$\sin\frac{2\pi}{m}$

表 2.3: 等脚台形の各部分の長さ（正 m 角形，m even）

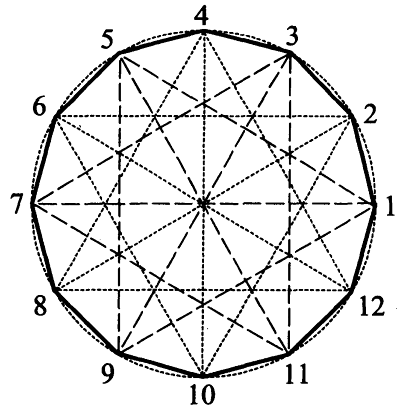
m	外接円半径	多角形の辺	台形の底辺	台形の上辺	台形の高さ
4	1.00000	1.41421	2.00000	0	1
6	1.15470	1.15470	2.30940	1.15470	1
8	1.41421	1.08239	2.82843	2.00000	1
10	1.70130	1.05146	3.40260	2.75276	1
12	2.00000	1.03528	4.00000	3.46410	1
14	2.30476	1.02572	4.60953	4.15304	1
16	2.61313	1.01959	5.22625	4.82843	1
18	2.92380	1.01543	5.84761	5.49495	1

表 2.4: 等脚台形の高さ＝テープの幅＝ 1，近似値

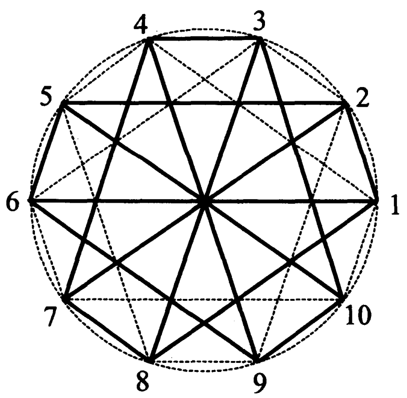


$$\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{5}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{7}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{5}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{1}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{3}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{7}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}$$

図 2.11: 正八角形↑, 正十二角形↓ $(\frac{m}{2}$ even$)$



$$\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{7}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{12}{11}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{5}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{9}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{7}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{12}{1}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{5}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{11}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{3}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{9}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}$$



$$\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{6}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{9}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{4}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{7}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{10}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{7}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{2}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{9}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{4}\to\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{1}$$

図 2.12: 正十角形 $(\frac{m}{2}$ odd$)$