

等質開凸錐の基本相対不変式

九州大学大学院・数理学研究院 中島 秀斗^{*1} (Hideto NAKASHIMA)
Faculty of Mathematics,
Kyushu University

概要

等質開凸錐は基本相対不変式の正值集合として記述され、その基本相対不変式は Vinberg 多項式から既約因子を順次帰納的に取り出していくことで得られる。本稿では、Vinberg 多項式と等質開凸錐の構造情報から得られる非負整数を用いて、基本相対不変式を一斉に表示する公式が得られたことを報告したい。

序文.

等質開凸錐はクランと呼ばれる非結合的代数で単位元を持つものと、同型を除き 1 対 1 に対応している (Vinberg [9]). Ω を階数 r の等質開凸錐とし、 V を Ω に対応するクランでその単位元を e_0 とする。このとき、基本相対不変式と呼ばれる既約多項式 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ ($x \in V$) が存在し、 Ω はそれらの正值集合

$$\Omega = \{x \in V; \Delta_1(x) > 0, \dots, \Delta_r(x) > 0\}$$

として記述されることが知られている (cf. Ishi [3]). クラン V の左乗法作用素 L_x ($x \in V$) からなる集合を $\mathfrak{h} := \{L_x; x \in V\}$ とすると、 \mathfrak{h} は分裂可解 (下三角型) な Lie 環となる。 \mathfrak{h} に対応する連結かつ単連結な Lie 群を $H := \exp \mathfrak{h}$ とすると、 H は Ω に単純推移的に作用する。ここで Ω 上の関数 f が H -相対不変であるとは、 H のある 1 次元表現 $\chi: H \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $f(hx) = \chi(h)f(x)$ ($h \in H, x \in \Omega$) が成り立つこととする。このとき χ は、 h の対角成分 h_{11}, \dots, h_{rr} と実数 $\tau_1, \dots, \tau_r \in \mathbb{R}$ を用いて $\chi(h) = (h_{11})^{2\tau_1} \cdots (h_{rr})^{2\tau_r}$ とかける。冪数を並べたベクトル $\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \mathbb{R}^r$ を H -相対不変関数 f の指数という。基本相対不変式 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ は H -相対不変な既約多項式であるので、それぞれ指数 $\underline{\sigma}_j = (\sigma_{j1}, \dots, \sigma_{jr}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ ($j = 1, \dots, r$) を持ち、これらを並べた行列

$$\sigma = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_r \end{pmatrix} = (\sigma_{jk})_{1 \leq j, k \leq r}$$

^{*1} 日本学術振興会特別研究員 PD (課題番号 25・4998)

を Ω の指数行列と呼ぶ. クラン V は原始冪等元の直交系 c_1, \dots, c_r に関する正規分解 $\bigoplus_{1 \leq j \leq k \leq r} V_{kj}$ を持ち, V の部分空間 $E^{[k]}, V^{[k]} (k = 1, \dots, r-1)$ をこの分解を用いて

$$E^{[k]} := \bigoplus_{m>k} V_{mk}, \quad V^{[k]} := \bigoplus_{k<l \leq m} V_{ml}$$

と定義する. また内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を通して V に双対クラン積 ∇ を $\langle x \nabla y | z \rangle = \langle y | x \Delta z \rangle$ ($x, y, z \in V$) により定義すると, $(V^{[k]}, \nabla)$ は (V, ∇) の部分クランになっている. $V^{[k]}$ から $E^{[k]}$ 上の線型変換全体のなす空間 $\mathcal{L}(E^{[k]})$ への写像 $\mathcal{R}^{[k]}$ を $\mathcal{R}^{[k]}(x_k)\xi_k := \xi_k \nabla x_k$ ($x_k \in V^{[k]}, \xi_k \in E^{[k]}$) により定義すると, $(\mathcal{R}^{[k]}, E^{[k]})$ は $V^{[k]}$ の双対クラン $(V^{[k]}, \nabla)$ の自己共役表現 (定義 1.2) になっている. そこで $\mathcal{R}^{[k]}$ を $\epsilon^{[k]}$ -表現 ($\epsilon^{[k]} \in \{0, 1\}^{r-k}$; 定義 1.3 参照) とすると, Ω の指数行列 σ は以下で計算される (定理 3.1):

$$\sigma = \mathcal{E}_{r-1} \mathcal{E}_{r-2} \cdots \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_k := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon^{[k]} & I_{r-k} \end{pmatrix}.$$

また $D_1(x), \dots, D_r(x)$ を Vinberg [9] において定義された多項式 (本稿では Vinberg 多項式と呼ぶ) とする. Vinberg 多項式は H -相対不変な多項式であり, $x \in \Omega$ が与えられたときに方程式 $x = h e_0$ を満たす $h \in H$ を求める際に現れる. 基本相対不変式は Vinberg 多項式から順次帰納的に既約因子を取り出していくことにより得られる (Ishi [3]) ことが知られていたが, 本稿ではより強い, 基本相対不変式を一斉に与える公式 (定理 3.2)

$$(0.1) \quad \Delta_1(x) = D_1(x), \quad \Delta_j(x) = \frac{D_j(x)}{\prod_{i<j} D_i(x)^{-\sigma_{ji} + \sigma_{j,i+1} + \cdots + \sigma_{jj}}} \quad (j = 2, \dots, r)$$

を与える. Vinberg 多項式から既約因子を取り出すことは, 具体例においては例 3.4 のようにすぐできることもあるが, この結果は一般論の枠内で理論的に明示公式を得ていることに意義があり, 基本相対不変式の一般論を展開していく過程において大きな貢献をすることが期待される. また Vinberg [9, p. 397] にあるように, 連続パラメータを持つ互いに線型同値でない 11 次元の既約等質錐が存在するが, それらの代数構造は既に Vinberg 多項式に取り込まれていて, 基本相対不変式を求める手続きはそれらに共通する次元情報のみ依存し, パラメータには依存していないことを (0.1) が示しているところも興味深い.

1 等質開凸錐とクラン

有限次元実ベクトル空間 V がクラン (コンパクトな正規左対称代数) であるとは, V に双線型な積 Δ が定義されており, 次の 3 条件を満たすことをいう:

- (C1) $[L_x, L_y] = L_{x \Delta y - y \Delta x} \quad (x, y \in V)$,
- (C2) ある $s \in V^*$ が存在して, $s(x \Delta y)$ が V の内積を定める,
- (C3) L_x の固有値はすべて実数である.

ただし, L_x は左乗法作用素 $L_x y := x \Delta y$ である. 一般にはクランは非結合的, 非可換であり, 単位元の存在も仮定しない. (C2) を満たす $s \in V^*$ を認容線型形式と呼び, クランの右乗法作用素を $R_x y := y \Delta x$ とする.

Ω を正則な等質開凸錐とする. また Ω に対応するクランを (V, Δ) とし, その単位元を e_0 とする. クラン V の左乗法作用素全体のなす空間を $\mathfrak{h} := \{L_x; x \in V\}$ とすると, \mathfrak{h} はクラン積の条件 (C1) および (C3) により分裂可解 Lie 環となる. \mathfrak{h} に対応する連結かつ単連結な Lie 群を H で表す. このとき単位元 e_0 を通る H -軌道は等質開凸錐 Ω と一致し, さらに H は Ω に単純推移的に作用する. 等質錐 Ω の階数が r のとき, 互いに直交する r 個の原始冪等元 c_1, \dots, c_r が存在し, これらに付随して V は次のように直和分解される:

$$(1.1) \quad V = \bigoplus_{1 \leq j \leq k \leq r} V_{kj}, \quad \begin{cases} V_{jj} := \mathbb{R}c_j & (j = 1, \dots, r), \\ V_{kj} := \{x \in V; L_{c_i}x = \frac{1}{2}(\delta_{ij} + \delta_{ik})x, R_{c_i}x = \delta_{ij}x\}. \end{cases}$$

この分解を正規分解という. 正規分解に則して, 次の乗法則が成立する:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} V_{ji} \Delta V_{lk} &= \{0\} \text{ (if } i \neq k, l), & V_{kj} \Delta V_{ji} &\subset V_{ki}, \\ V_{ji} \Delta V_{ki} &\subset V_{jk} \text{ or } V_{kj} & \text{(according to } j \geq k \text{ or } j \leq k). \end{aligned}$$

H は分裂可解 Lie 群であるので, $h \in H$ は正数 $h_{jj} > 0$ ($j = 1, \dots, r$) と $v_{kj} \in V_{kj}$ ($1 \leq j < k \leq r$) を用いて, $T_j := (2 \log h_{jj})L_{c_j}$ および $L_j := \sum_{k>j} L_{v_{kj}}$ とおけば, 次のように表現できる:

$$h = (\exp T_1)(\exp L_1)(\exp T_2) \cdots (\exp L_{r-1})(\exp T_r).$$

以下では, 正数 h_{11}, \dots, h_{rr} を $h \in H$ の対角成分と呼ぶ.

Ω 上の関数 f が H に関して相対不変であるとは, H のある 1 次元表現 $\chi: H \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $h \in H, x \in \Omega$ に対して $f(hx) = \chi(h)f(x)$ をみたすこととする. ここで Ishi [3] より, H -相対不変な既約多項式 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ が存在して, 任意の H -相対不変な多項式はこれらの冪積でかける. この既約多項式たちを等質錐 Ω (または対応するクラン V) の基本相対不変式という. 基本相対不変式の順番は c_1, \dots, c_r に依存して取るものとする (cf. Ishi [3]). H -相対不変関数 f に対応する 1 次元表現 χ は, $h \in H$ の対角成分 h_{11}, \dots, h_{rr} と実数 $\tau_1, \dots, \tau_r \in \mathbb{R}$ を用いて $\chi(h) = (h_{11})^{2\tau_1} \cdots (h_{rr})^{2\tau_r}$ のように書くことができる. このとき $\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \mathbb{R}^r$ を H -相対不変関数 f の指数と呼ぶ. 等質錐 Ω の基本相対不変式 $\Delta_j(x)$ は H -相対不変であったので, それぞれ指数 $\underline{\sigma}_j = (\sigma_{j1}, \dots, \sigma_{jr})$ を持つ. これらを縦に並べて $r \times r$ 行列 σ を構成する:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_r \end{pmatrix} = (\sigma_{jk})_{1 \leq j, k \leq r}.$$

この行列 σ を等質錐 Ω (または対応するクラン V) の指数行列と呼ぶ。基本相対不変式は多項式であり、また Ishi [3] の基本相対不変式の構成法より、 σ は対角成分が 1 で各成分が非負整数の下三角行列になる。

クラン V の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は認容線型形式 s_0 により与えられているとする。この内積を通して V に新しい積 ∇ を次のように定義する：

$$\langle x \nabla y | z \rangle = \langle y | x \Delta z \rangle \quad (x, y, z \in V).$$

このように定義すると (V, ∇) はクランとなり、クラン (V, Δ) の双対クランと呼ぶ。 (V, ∇) に対応する等質錐は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する Ω の双対錐 Ω^* である。クラン積 Δ と双対クラン積 ∇ の間には

$$x \Delta y + x \nabla y = y \Delta x + y \nabla x \quad (x, y \in V)$$

という関係式が成り立つ。また双対クラン積における乗法則は次のようになる：

$$(1.3) \quad \begin{aligned} V_{ji} \nabla V_{lk} &= \{0\} \quad (\text{if } j \neq k, l), \quad V_{ji} \nabla V_{kj} \subset V_{ki}, \\ V_{ki} \nabla V_{kj} &\subset V_{ji} \text{ or } V_{ij} \quad (\text{according to } i \leq j \text{ or } i \geq j). \end{aligned}$$

例 1.1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とおき、 $d = \dim \mathbb{K}$ とする。実ベクトル空間 $V = \text{Herm}(r, \mathbb{K})$ に積 Δ を以下で定義するとクランになる：

$$x \Delta y := \underline{x}y + y(\underline{x})^* \quad (x, y \in V).$$

ただし、 \underline{x} は行列 $x = (x_{ij})$ の下三角部分

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix}$$

である。クラン (V, Δ) に対応する等質開凸錐は正定値対称行列全体のなす空間となり、これは対称錐 (自己双対な等質開凸錐) である。その基本相対不変式は左上からの小行列式 $\Delta_k(x) = \det^{(k)}(x)$ ($k = 1, \dots, r$) である。クランの右乗法作用素 R_x の行列式は

$$\text{Det } R_x = \Delta_1(x)^d \cdots \Delta_{r-1}(x)^d \Delta_r(x) \quad (x \in V)$$

となり、確かに基本相対不変式 $\Delta_k(x)$ が全て現れている ([8])。また双対クラン積 ∇ は以下で与えられる：

$$x \nabla y := (\underline{x})^*y + y\underline{x} \quad (x, y \in V).$$

E を内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$ を持つ実ベクトル空間とし、 E 上の線型変換全体のなす空間を $\mathcal{L}(E)$ で表す。 V から $\mathcal{L}(E)$ への線型変換 φ に対して、 V の正規分解 $x = \sum_{j=1}^r x_{jj}c_j + \sum_{1 \leq j < k \leq r} x_{kj}$

を用いて, φ の上三角部分 $\overline{\varphi}$ と下三角部分 $\underline{\varphi}$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(x) &:= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r x_{jj} \varphi(c_j) + \sum_{1 \leq j < k \leq r} \varphi(c_j) \varphi(x_{kj}) \varphi(c_k), \\ \underline{\varphi}(x) &:= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r x_{jj} \varphi(c_j) + \sum_{1 \leq j < k \leq r} \varphi(c_k) \varphi(x_{kj}) \varphi(c_j).\end{aligned}$$

定義 1.2. 線型変換 $\varphi: V \rightarrow \mathcal{L}(E)$ が, $\varphi(e_0) = \text{id}_E$ かつ次の 2 条件

(R1) 任意の $x \in V$ に対して $\varphi(x)^* = \varphi(x)$ (自己共役),

(R2) $\varphi(x \nabla y) = \overline{\varphi}(x) \varphi(y) + \varphi(y) \underline{\varphi}(x)$ ($x, y \in V$)

を満たすとき, φ を双対クラン (V, ∇) の自己共役表現という.

E 上の自己共役な線型作用素全体のなす空間を $\text{Sym}(E)$ とすると, 例 1.1 と同様に $\text{Sym}(E)$ にクラン構造が入る. したがって (R2) は, φ がクラン (V, ∇) からクラン $(\text{Sym}(E), \nabla)$ へのクランの準同型であることを意味している.

自己共役表現 φ に付随してベクトル値の双線型写像 $Q: E \times E \rightarrow V$ を次で定義する:

$$\langle Q(\xi, \eta) | x \rangle = \langle \varphi(x) \xi | \eta \rangle_E \quad (\xi, \eta \in E, x \in V).$$

簡単のため $Q[\xi] := Q(\xi, \xi)$ とおき, その像を $Q[E] := \{Q[\xi]; \xi \in E\}$ で表す. ここで Q は Ω -positive である. すなわち 0 でない任意の $\xi \in E$ に対して $Q[\xi] \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ が成立する. また, $\varepsilon = {}^t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{0, 1\}^r$ に対して $c_\varepsilon := \varepsilon_1 c_1 + \dots + \varepsilon_r c_r$ とおき, c_ε を通る V 中の H -軌道を \mathcal{O}_ε で表す.

定義 1.3. 自己共役表現 φ に付随する 2 次形式の像 $Q[E]$ が, ある $\varepsilon \in \{0, 1\}^r$ に関する H -軌道 \mathcal{O}_ε の閉包 $\overline{\mathcal{O}_\varepsilon}$ に一致するとき, 表現 (φ, E) を ε -表現であるという.

すなわち ε -表現とは, 付随するベクトル値二次形式の像 $Q[E]$ が等質開凸錐 Ω に対してどのような位置にあるか, という情報を付与したものである. ここで自己共役表現 (φ, E) に付随して $\varepsilon(\varphi) \in \{0, 1\}^r$ を構成する. 簡単のため $l_j := \dim \varphi(c_j)E$ ($j = 1, \dots, r$), $d_{kj} := \dim V_{kj}$ ($1 \leq j < k \leq r$) とおき, $\mathbf{l}^{(j)} \in \mathbb{R}^r$ を帰納的に次のように定義する: まず $\mathbf{l}^{(1)} := {}^t(l_1, \dots, l_r)$ とする. 次に $i = 1, \dots, r-1$ に対して

$$(1.4) \quad \mathbf{l}^{(i+1)} := \begin{cases} \mathbf{l}^{(i)} - {}^t(0, \dots, 0, d_{i+1,i}, \dots, d_{ri}) & \text{if } l_i^{(i)} > 0, \\ \mathbf{l}^{(i)} & \text{if } l_i^{(i)} \leq 0 \end{cases}$$

とする. このとき $\varepsilon(\varphi) = {}^t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{0, 1\}^r$ を

$$(1.5) \quad \varepsilon_i := \begin{cases} 1 & \text{if } l_i^{(i)} > 0, \\ 0 & \text{if } l_i^{(i)} \leq 0 \end{cases} \quad (i = 1, \dots, r)$$

により定義する. Graczyk–Ishi [1] の結果と Ishi [2] の結果を用いると, 次が成り立つ.

命題 1.4. 任意の自己共役表現 (φ, E) は $\varepsilon(\varphi)$ -表現となる.

2 クランの帰納構造

Ω を正則な等質開凸錐とし, V を対応するクランでその単位元を e_0 とする. V の部分空間 E, W を正規分解 (1.1) を用いて

$$E = \bigoplus_{k \geq 2} V_{k1}, \quad W = \bigoplus_{2 \leq j \leq k \leq r} V_{kj}$$

により定義すると, V は

$$(2.1) \quad V = \mathbb{R}c_1 \oplus E \oplus W$$

のように直和分解される. V の一般元 x を $x = \lambda c_1 + \xi + w$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \xi \in E, w \in W$) のように表す. 双対クランの乗法則 (1.3) より (W, ∇) は (V, ∇) の部分クランになる. 同じく (1.3) より $E \nabla W \subset E$ が成り立つので, 次で定義される写像

$$(2.2) \quad \varphi(w)\xi := \xi \nabla w \quad (w \in W, \xi \in E)$$

は W から $\mathcal{L}(E)$ への線型変換となるが, より強く次が成り立つ.

命題 2.1. (φ, E) はクラン (W, ∇) の自己共役表現となる.

本稿の鍵となるのは, 等質開凸錐の基本相対不変式は, 対応するクランの右乗法作用素 R_x の行列式の既約因子としてすべて現れるという事実である (Ishi–Nomura [5]). 分解 (2.1) に関して, クラン積 Δ は次のように表される:

$$x \Delta y = (\lambda\mu)c_1 + (\mu\xi + \frac{1}{2}\lambda\eta + \varphi(w)\eta) + (Q(\xi, \eta) + w \Delta v).$$

ただし, $y = \mu c_1 + \eta + v \in V$ である. これよりクラン V の右乗法作用素 R_x は

$$R_x = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\xi & \lambda \text{id}_E & R_\xi \\ 0 & R_\xi & R_w^W \end{pmatrix}$$

のように行列表示される. ただし R_w^W はクラン W の右乗法作用素であり, 基底は c_1, E の基底, V の基底の順である. ここで R_x の行列式を R^W の行列式を用いて表すと, 次のようになる.

命題 2.2. $\text{Det } R_x = \lambda^{1+\dim E - \dim W} \text{Det } R_{\lambda w - \frac{1}{2}Q[\xi]}^W$.

この命題 2.2 と基本相対不変式はクランの右乗法作用素の既約因子としてすべて現れるという事実から、等質錐 Ω の基本相対不変式は、クラン W の基本相対不変式 $\Delta_2^W, \dots, \Delta_r^W$ を用いて λ と $\Delta_j^W(\lambda w - \frac{1}{2}Q[\xi])$ の既約因子で尽くされる。ここで $\varepsilon := \varepsilon(\varphi) \in \{0, 1\}^{r-1}$ 、すなわち表現 φ は ε -表現であるとする。

定理 2.3. 非負整数 $\alpha_2, \dots, \alpha_r$ をクラン W の指数行列 σ_W を用いて次で定義する：

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \sigma_W \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_2 \\ \vdots \\ 1 - \varepsilon_r \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_r \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^{r-1}.$$

このとき、等質錐 Ω の基本相対不変式 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ は以下で与えられる：

$$\Delta_1(x) = \lambda, \quad \Delta_j(x) = \lambda^{-\alpha_j} \Delta_j^W(\lambda w - \frac{1}{2}Q[\xi]) \quad (j = 2, \dots, r).$$

3 基本相対不変式の明示公式

前節の記号を引き続き用いる。定理 2.3 は指数行列の帰納構造を与える。すなわち、クラン V の指数行列を σ_V とすれば次が成り立つ：

$$(3.1) \quad \sigma_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_W \varepsilon & \sigma_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & I_{r-1} \end{pmatrix}.$$

ここで V の部分空間 $E^{[k]}, V^{[k]}$ を正規分解 (1.1) を用いて以下で定義する：

$$E^{[k]} := \bigoplus_{m>k} V_{mk}, \quad V^{[k]} := \bigoplus_{k<l \leq m \leq r} V_{ml} \quad (k = 1, \dots, r-1).$$

$k = 1$ とすれば、 $E^{[1]} = E, V^{[1]} = W$ である。 (W, ∇) が (V, ∇) の部分クランであったことと同様に、 $(V^{[k]}, \nabla)$ は (V, ∇) の部分クランとなり、命題 2.1 と同様に

$$\mathcal{R}^{[k]}(x_k)\xi_k := \xi_k \nabla x_k \quad (\xi_k \in E^{[k]}, x_k \in V^{[k]})$$

とすれば、 $(\mathcal{R}^{[k]}, E^{[k]})$ はクラン $(V^{[k]}, \nabla)$ の自己共役表現となる。ここで、 $\varepsilon^{[k]} := \varepsilon(\mathcal{R}^{[k]}) \in \{0, 1\}^{r-k}$ 、すなわち $\mathcal{R}^{[k]}$ は $\varepsilon^{[k]}$ -表現であると仮定し、 $r \times r$ 行列 \mathcal{E}_k を

$$\mathcal{E}_k := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{[k]} & I_{r-k} \end{pmatrix}$$

により定義する。式 (3.1) を順次各表現 $\mathcal{R}^{[k]}$ に適用していけば、次の定理を得る。

定理 3.1. $\sigma_V = \mathcal{E}_{r-1} \mathcal{E}_{r-2} \cdots \mathcal{E}_1$.

これより基本相対不変式を具体的に計算できる. V のノルムを $\|x\|^2 := \langle x|x \rangle$ とし, 与えられた $x \in V$ に対して

$$x^{(j)} := \sum_{k=j}^r x_{kk}^{(j)} c_k + \sum_{m>k \geq j} X_{mk}^{(j)} \in V^{[j-1]} \quad (j = 1, \dots, r; V^{[0]} := V)$$

を帰納的に以下のように定義する: まず $x^{(1)} := x$ とし, 次に $i = 1, \dots, r-1$ に対して

$$\begin{cases} x_{kk}^{(i+1)} & := x_{ii}^{(i)} x_{kk}^{(i)} - \frac{1}{2s_0(c_k)} \|X_{ki}^{(i)}\|^2 \quad (i < k \leq r), \\ X_{mk}^{(i+1)} & := x_{ii}^{(i)} X_{mk}^{(i)} - X_{mi}^{(i)} \Delta X_{ki}^{(i)} \quad (i < k < m \leq r) \end{cases}$$

とする. そして

$$D_j(x) := x_{jj}^{(j)} \quad (j = 1, \dots, r)$$

とすると, 各 $D_j(x)$ は H -相対不変な多項式となる. この $D_1(x), \dots, D_r(x)$ を本稿では Vinberg 多項式と呼ぶ (cf. Vinberg [9]). この多項式は与えられた $x \in \Omega$ に対して, 方程式 $x = he_0$ を満たす $h \in H$ を求める際に現れる. 実際 Vinberg [9, Chapter III, Section 3] にあるように, h の対角成分 h_{11}, \dots, h_{rr} は

$$(3.2) \quad h_{11}^2 = D_1(x), \quad h_{jj}^2 = D_1(x)^{-1} \cdots D_{j-1}(x)^{-1} D_j(x) \quad (j = 2, \dots, r)$$

と計算される. このことから, Ω は $D_1(x), \dots, D_r(x)$ の正值集合であることがわかる. また基本相対不変式は Vinberg 多項式から既約因子を順次帰納的に取り出していくことにより得られることから, $\Omega = \{x \in V; \Delta_1(x) > 0, \dots, \Delta_r(x) > 0\}$ という Ω の基本相対不変式の正值集合としての記述が得られる (cf. Ishi [3]). $x = he_0 \in \Omega$ とすると, 基本相対不変式は $h \in H$ の対角成分を用いて

$$\Delta_j(x) = (h_{11})^{2\sigma_{j1}} \cdots (h_{jj})^{2\sigma_{jj}} \quad (j = 1, \dots, r)$$

と記述されるので, 式 (3.2) と合わせれば次の定理を得る.

定理 3.2. Ω の指数行列を $\sigma_V = (\sigma_{jk})_{1 \leq j, k \leq r}$ とすれば, 基本相対不変式は次で与えられる:

$$\Delta_1(x) = D_1(x), \quad \Delta_j(x) = \frac{D_j(x)}{\prod_{i < j} D_i(x)^{-\sigma_{ji} + \sigma_{j,i+1} + \cdots + \sigma_{jj}}} \quad (j = 2, \dots, r).$$

注意 3.3. 分母に現れる冪数 $-\sigma_{ji} + \sigma_{j,i+1} + \cdots + \sigma_{jj}$ は非負整数になる.

Vinberg 多項式から基本相対不変式を求めるには, 順次帰納的に構成していく必要があったが (Ishi [3]), この定理 3.2 は基本相対不変式を一斉に与える公式になっており, より強い結果となっている.

例 3.4. V および Ω を例 1.1 のものとする. このとき Vinberg 多項式 $D_1(x), \dots, D_r(x)$ は

$$D_j(x) = \begin{cases} \det^{(j)} x & (j = 1, 2), \\ (\det^{(1)} x)^{2^{j-3}} (\det^{(2)} x)^{2^{j-4}} \cdots (\det^{(j-2)} x) (\det^{(j)} x) & (j \geq 3) \end{cases}$$

と計算される (cf. Ishi[3]). この場合は既約因子が $\det^{(j)} x$ ($j = 1, \dots, r$) であることは明らかであるので, 定理 3.2 の公式を確認できる. $\dim V_{kj} = \dim \mathbb{K} = d$ であるので, 式 (1.4) および式 (1.5) に従って $\varepsilon^{[k]}$ を計算すると, $\varepsilon^{[k]} = {}^t(1, 0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^{r-k}$ ($k = 1, \dots, r-1$) を得る. よって, V の指数行列は $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ i & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$ となり, $-\sigma_{ji} + \sigma_{j,i+1} + \cdots + \sigma_{jj} = j - i - 1$ なので, $j \geq 2$ のとき

$$\Delta_j(x) = D_j(x) (D_1(x)^{j-2} D_2(x)^{j-3} \cdots D_{j-2}(x)^1)^{-1} = \det^{(j)}(x)$$

となる.

参考文献

- [1] P. Graczyk and H. Ishi, *Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps*, J. Math. Soc. Japan, **66** (2014), 317–348.
- [2] H. Ishi, *Positive Riesz distributions on homogeneous cones*, J. Math. Soc. Japan, **52** (2000), 161–186.
- [3] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.
- [4] H. Ishi, *Representations of clans and homogeneous cones*, Vestnik Tambov University, **16** (2011), 1669–1675.
- [5] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domain and an orbit of a complex triangular group*, Math. Z., **259** (2008), 697–711.
- [6] T. Kimura, “Introduction to prehomogeneous vector spaces”, Transl. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., Providence, RI, **215**, (2002).
- [7] H. Nakashima, *Basic relative invariants of homogeneous cones*, J. Lie Theory **24** (2014), 1013–1032.
- [8] H. Nakashima and T. Nomura, *Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants*, Kyushu J. Math. **67** (2013), 163–202.
- [9] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.