数理解析研究所講究録
第1925巻2014年31-38

アフィン球等質空間への可視的作用とその応用

東京大学大学院数理科学研究科　田中 雄一郎*
Yuichiro Tanaka
Graguate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

2014年6月25日

概要

はじめに、複素簡約代数群の作用する滑らかなアフィン球代数多様体に対して、コンパクト実形の作用が可視的であることを示す。同様の手法により、簡約型 Gelfand 対 (G, H) に対する、カルタン分解（KAK 分解）の一般化を与える。最後に、G/H 上の調和解析へのカルタン分解の応用について述べる。

1 導入

本稿で紹介する結果の動機づけとなっているのは、小林俊行氏による複素多様体に対する可視的な作用の理論です [Ko05]。この理論の目的は、リー群の無重複表現の統一的扱いとなっています。ここでは、次のように無重複表現を定義します。

定義 1.1. G を局所コンパクト群、V を G のユニタリ表現とする。このとき、

$$V \text{は無重複表現} \Leftrightarrow \mathrm{End}_G(V) \text{は可換}$$

このように定義すると、ユニタリ表現 V が無限次元で連続スペクトラムを含む場合にも通用します。また V がユニタリでなくても完全可約な有限次元表現である場合には、「V の既約分解に各既約表現が高々一度ずつしか現れない」という通常の定義と同値になります。以下に、「有限次元」、「無限次元で離散スペクトラム」、「無限次元で連続スペクトラム」であるような無重複表現の例をそれぞれ一つずつ挙げます。

例 1.2 (無重複表現).
- (対称テンソル積表現) $U(n) \curvearrowright S^k(\mathbb{C}^n)$
- ($GL_k - GL_n$ 双対性) $U(k) \times U(n) \curvearrowright \mathrm{Poly}[M(k, n; \mathbb{C})]$
- (リーマン対称空間上の L^2 空間) $GL(n, \mathbb{R}) \curvearrowright L^2(GL(n, \mathbb{R})/O(n))$

*本研究は日本学術振興会特別研究員奨励費（24・6877）及び数物フロンティア・リーディング大学院プログラムからの助成を受けています。

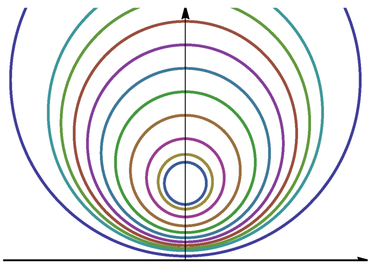
表現が無重複であるというのは強い要請ですが、現在までに数多くの無重複表現の例が知られており、上で挙げたのはその内のほんの一例です。この無重複表現は様々な観点から研究が行われていますが、表現の現れる場面の多様さに相俟ってその無重複性の証明法もまた個性的です [GS, HW, Ka, St, VK, Wo]。この状況にあって、無重複表現の統一的扱いをその目的とし、小林氏は複素多様体への可視的な作用の理論を導入しました。実際この理論を用いることで、例えば前述の 3 つの例のように散在して（既に無重複であることが）知られていた表現の無重複性に対する新しい証明を系統的に与えることができるのみならず、新たな無重複表現の発見もなされています [Ko98, Ko04, Ko05, Ko07b, Ko08]。以下に、強可視的な作用の定義を述べます：

定義 1.3 ([Ko05])**.** リー群 G が複素多様体 X に正則に作用しているとする。ある X の部分多様体 S であって次の条件を満たすものが存在するとき、G の作用は**強可視的**であるという。
・$X' := G \cdot S$ は X の開集合である。
・X' の反正則微分同相写像 σ が存在して、σ は $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$ を満たし、各 G-軌道を保つ。
上の状況で、G の作用は S-**可視的**であるともいう。この用語は S が単に部分集合である場合にも用いる。

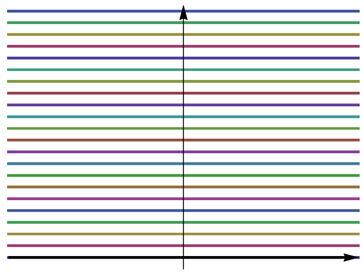
この定義 1.3 において、1 つ目の条件は「S がある程度大きくなければならない」と要請していますが、逆に 2 つ目の条件は「S がある程度小さくなければならない」と要請していることに注意して下さい。S のことを（強）可視的作用のスライスと呼ぶことにします。

次に示すのは強可視的な作用の典型的な例です。以下の 2 つの例では複素多様体 X として上半平面 $\mathbb{H}$ を考えます。いずれの場合でも、スライス S として虚軸の正の部分 $\sqrt{-1}\mathbb{R}_+$ を、反正則微分同相写像 σ として $\sigma(z) = -\bar{z},\ z \in \mathbb{H}$ を取ることができます。

群 $G = SO(2)$ の上半平面への一次分数変換による作用



群 $G = \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ の上半平面　への一次分数変換による作用



可視的な作用の理論の枠組みで具体的な表現の無重複性を示す際には、次に挙げる小林氏の定理（[Ko13]）が用いられます。

定理 1.4 ([Ko13])**.** G をリー群、X を連結な複素多様体、$\mathcal{W} \to X$ を G 同変な X 上の正則エルミートベクトル束とする。また、V を G のユニタリ表現とする。このとき以下に挙げる条件が満たされるならば、V は無重複である。

1 V は正則切断の空間 $\mathcal{O}(X, \mathcal{W})$ に G-連続に埋め込まれる。

2 (底空間) 底空間への作用 $G \curvearrowright X$ は S-可視的である。

3 (ファイバー) ファイバーにおける固定化部分群の表現は無重複である
　　+ いくつかの compatibility に関する条件。

この定理はユニタリ表現が無限次元である場合や、既約分解に連続スペクトラムが現れる場合にも適用でき、「無重複」は定義 1.1 において定められた意味と解釈します。定理 1.4 から、リー群の複素多様体への可視的な作用があれば無重複表現の存在が期待できます：

$$\boxed{\text{可視的}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\text{無重複}}$$

これに対し、それではこの逆は成り立つのか？と問うのは自然なことであろうと思われます。即ち、

問題： 無重複表現があれば、複素多様体への可視的な作用が存在するか？

$$\boxed{\text{無重複}} \quad \overset{??}{\rightsquigarrow} \quad \boxed{\text{可視的}}$$

「この考えは正しいであろう」という立場に立つと、無重複定理を糸口にリー群自身の新しい構造定理（一般化カルタン分解）を得られることが期待できます [Ko07a, Ko07b, Sa10a, Sa10b]（また、半単純群の対称対に関する分解については [Fl, Ho, Ma95a, Ma95b, Ma97]）。これを念頭に、次節では複素多様体として球代数多様体 [VK] を考え、実際、複素簡約型球等質空間に対して Flensted-Jensen 分解 [Fl] の一般化が成り立つことを見ます。その際の証明の応用として、3 節では Gelfand 対 (G, H) に対して KAK 分解の一般化を与え、この分解を G/H 上の調和解析の問題に応用します。

2 アフィン球多様体への可視的な作用

$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ を連結複素簡約代数群 $G_{\mathbb{C}}$ の球代数多様体とします（即ち、$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上に Borel 部分群の開軌道が存在する）。G を $G_{\mathbb{C}}$ の連結な実形とし、$H := G \cap H_{\mathbb{C}}$ とします。このとき (G, H) は Gelfand 対になる（即ち、$L^2(G/H)$ が無重複になる）ことが知られています [AV]。G の H を含む極大コンパクト群を K、A_0 を極大 split 可換部分群とし、この A_0 について放物型部分群 $P_0 = M_0A_0N_0$ を取ります。本稿では、リー群に対応するリー環は小文字のドイツ文字で表すこととします。

補題 2.1. $K = M_0H$ が成り立つ。

Proof. $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が球代数多様体であること及び G/H が極大な全実部分多様体であることより、

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{m}_{0,\mathbb{C}} + \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}} + \mathfrak{n}_{0,\mathbb{C}}$$

なる $k \in K$ が存在する。実の部分を取ることで、

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{h} + \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{n}_0$$

を得る。これは H が $G/P_0 \simeq K/M_0$ に開軌道を持つことを示しているので、$K = M_0H$ となる。 □

補題 2.2. $(M_0, M_0 \cap H)$ もまた簡約型 Gelfand 対であり、$M_0/(M_0 \cap H)$ は連結である。

Proof. 先の補題 2.1 と同様に

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{b}_{\mathfrak{m}_{0,\mathbb{C}}} + \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}} + \mathfrak{n}_{0,\mathbb{C}}$$

なる $k \in K$ が存在する。ただし、$\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}_{0,\mathbb{C}}}$ は $\mathfrak{m}_{0,\mathbb{C}}$ の Borel 部分代数である。補題 2.1 より $K = M_0 H$ であったから、$k = m \in M_0$ としてよい。ゆえに、

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_{0,\mathbb{C}} &= \mathfrak{m}_{0,\mathbb{C}} \cap \mathrm{Ad}(m)\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{b}_{\mathfrak{m}_{0,\mathbb{C}}} \\ &= \mathrm{Ad}(m)(\mathfrak{m}_{0,\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) + \mathfrak{b}_{\mathfrak{m}_{0,\mathbb{C}}}\end{aligned}$$

を得る。よって $(M_0, M_0 \cap H)$ は簡約型 Gelfand 対である [AV]。連結性は K/H のそれより従う。 □

命題 2.3. $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形による可視的作用がある。

Proof. G をコンパクトとし、H を含むような G の対称部分群は存在しないと仮定する。すると、[Br, Mi, Kr, Ya] による分類結果から、次の 2 つの場合しかない（中心は無視して考える）[Wo]：

$$(G, H) = (Spin(7), G_2),\ (G_2, SU(3)).$$

この 2 つの場合は、[Sa09] の結果を用いることで可視的作用の存在を示すことができる。

G は非コンパクトであるかもしくは、コンパクトでありかつ H を含む G の対称部分群 G^{τ} が存在する、と仮定する。コンパクトである場合は、コンパクト対称対 (G, H^{τ}) の非コンパクトリーマン双対 (G^d, G^{τ}) を考えることで、やはり補題 2.2 を適用でき、簡約型 Gelfand 対 $(M_0, M_0 \cap H)$ を得る。U を $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形とする（G がコンパクトのときは G 自身)。以下では、G がコンパクトであるときには $K = G^{\tau}$、A_0 を G^d の極大 split 可換部分群、とする。今、Flensted-Jensen 分解 $G_{\mathbb{C}} = UA_0K_{\mathbb{C}}$ に補題 2.1 を適用することで $G_{\mathbb{C}} = UA_0(M_{0,\mathbb{C}}H_{\mathbb{C}})$ が得られる。次元に関する帰納法から、分解 $M_{0,\mathbb{C}} = U_{M_{0,\mathbb{C}}}A_{M_{0,\mathbb{C}}}(M_{0,\mathbb{C}} \cap H_{\mathbb{C}})$ があるとすると、

$$\begin{aligned}G_{\mathbb{C}} &= UA_0(U_{M_{0,\mathbb{C}}}A_{M_{0,\mathbb{C}}}(M_{0,\mathbb{C}} \cap H_{\mathbb{C}}))H_{\mathbb{C}} \\ &= U(A_0 A_{M_{0,\mathbb{C}}})H_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

となる。ゆえに U は $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に可視的に作用する。 □

主結果 2.4. X を $G_{\mathbb{C}}$ の滑らかなアフィン球代数多様体とする。X には $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形による可視的作用がある。

Proof. Luna の slice 定理 [Lu] により、問題は簡約型球等質空間の場合と無重複線形空間の場合とに帰着される。前者は先の命題 2.3 から、後者は [Sa09, Sa11] から従う。 □

3 Gelfand 対に対する KAK 分解と調和解析への応用

(G, H) を G/H が連結であるような簡約型 Gelfand 対（G が実簡約群、H がコンパクト部分群で、$L^2(G/H)$ が無重複）とします。また、G の H を含む極大コンパクト群を K、A_0 を極大 split 可換部分群とし、この A_0 について放物型部分群 $P_0 = M_0A_0N_0$ を取ります。$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ によって $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環を表します。

補題 3.1. $G = HA_0M_0H$ が成り立つ。

Proof. 前節の 1 つ目の補題 2.1 からただちに従う。 □

命題 3.2. G の可換部分群 A が存在し、$G = HAH$ が成り立つ。

Proof. 証明は前節の命題2.3と同様であるので省略する（Flensted-Jensen分解の代わりに、通常の KAK 分解を用いる)。 □

命題 3.3. G/H 上の帯球関数は

$$E(\phi,\lambda)(g) := \int_H a^{\rho_0+\lambda}(hg)\phi(m(hg))dh$$

という形で与えられる。ただし、ϕ は $M_0/(M_0\cap H)$ 上の帯球関数であり、$m(g)$ $(g\in G)$ は $g = namh$ と表示した場合の m のこととする（$n\in N_0, a\in A_0, m\in M_0, h\in H$）。この分解は一意的でないので写像にはならないが、$M_0/(M_0\cap H)$ 上の帯球関数の $(M_0\cap H)$-不変性から、$E(\phi,\lambda)$ は関数として矛盾なく定義されることに注意する。また、$\lambda\in\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ である。

Proof. 証明は、[He00] をなぞる。まず、$E(\phi,\lambda)$ が帯球関数であることを見る。f が G/H 上の帯球関数であるとは、以下の3つの条件を満たすことであることに注意する。

- f は両側 H 不変である。
- f は G/H 上の G-不変微分作用素のなす環 $D(G/H)$ に関する同時固有関数である((G,H) が Gelfand 対であることより、$D(G/H)$ は可換である)。
- $f(e)=1$ である。

$E(\phi,\lambda)$ の両側 H-不変性は、定義より従う。$E(\phi,\lambda)(e)=1$ は $\phi(e)=1$ から分かる。微分作用素に関する同時固有関数であることは、ϕ が $D(M_0/(M_0\cap H))$ に関する同時固有関数であること及び、分解 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{n}_0\mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{a}_o)\mathcal{U}(\mathfrak{m}_0) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}$ から分かる（H-不変であれば $(M_0\cap H)$-不変であることに注意する)。

逆に、G/H 上の帯球関数が $E(\phi,\lambda)$ の形をしていることを見る。これは、G の既約ユニタリ表現の K-有限部分が $P_0 = M_0A_0N_0$ からの誘導表現

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma\otimes\lambda\otimes 1)\\ &= \{f: G\to W_\sigma | f(namg) = a^{\rho_0+\lambda}\sigma(m)f(g), n\in N_0, a\in a_0, m\in M_0, g\in G\}\end{aligned}$$

の中に実現できること及び（(σ, W_σ) は M_0 の有限次元既約表現、λ は $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ の元で、1 は N_0 の自明表現)、H がコンパクトであることから積分によって $\mathrm{Ind}_{P_0}^G W_\sigma$ から $C^\infty(H\backslash G)$ への G-絡作用素を構成できることから従う [Wa88, Wa92]。 □

注意 3.4. この記事では簡約型のゲルファンド対について議論しましたが、講究録の855番と895番の菊地克彦先生の記事 [Ki93, Ki95] においては、非簡約型のゲルファンド対が扱われています。また、ゲルファンド対の基本的なことについては、例えば [Wo] を参照して下さい。

謝辞　講演の機会を与えて下さった世話人の橋本康史先生に、心より感謝申し上げます。

参考文献

[Ak] D. Akhiezer, Spherical Stein manifolds and the Weyl involution. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 59 (2009), no. 3, 1029–1041.

[AV] D. Akhiezer and E. Vinberg, Weakly symmetric spaces and spherical varieties. Transform. Groups 4 (1999), no. 1, 3–24.

[Br] M. Brion, Classification des espaces homogenes spheriques. (French) [Classification of spherical homogeneous spaces] Compositio Math. **63** (1987), no. 2, 189–208.

[Fl] M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces. Ann. of Math. (2) 111 (1980), no. 2, 253–311.

[GS] V. Guillemin and S. Sternberg, Multiplicity-free spaces. J. Differential Geom. 19 (1984), no. 1, 31–56.

[He00] S. Helgason, Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Corrected reprint of the 1984 original. Mathematical Surveys and Monographs, 83. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xxii+667 pp. ISBN: 0-8218-2673-5.

[Ho] B. Hoogenboom, Intertwining functions on compact Lie groups, CWI Tract, **5**. Stichting Mathematisch Centrum, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, (1984).

[HW] A. T. Huckleberry and T. Wurzbacher, Multiplicity-free complex manifolds, Math. Ann., **286** (1990), 261–280.

[Ka] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, J. Algebra, **64** (1980), 190–213.

[Ki93] K. Kikuchi, Gel'fand pairs associated with nilpotent Lie groups. (Japanese) Problems on structure and representations of Lie groups (Japanese) (Kyoto, 1993). Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 855 (1993), 31–47.

[Ki95] K. Kikuchi, Positive definiteness of K-spherical functions on solvable Lie groups. (Japanese) Noncommutative analysis on homogeneous spaces (Japanese) (Kyoto, 1994). Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 895 (1995), 81–97.

[Ko98] 小林俊行, Multiplicity free theorem in branching problems of unitary highest weight modules, 表現論シンポジウム 1997 報告集, (1998), 9–17.

[Ko04] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of GL(n), visible actions on flag varieties, and triunity, Acta Appl. Math., **81**, (2004), 129–146.

[Ko05] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **41**, (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

[Ko07a] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(\mathrm{U}(n_1) \times \mathrm{U}(n_2) \times \mathrm{U}(n_3)) \backslash \mathrm{U}(n) / (\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$, J. Math. Soc. Japan, **59**, (2007), 669–691.

[Ko07b] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, Transform. Groups, **12**, (2007), 671–694.

[Ko08] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restriction of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, in: Representation Theory and Automorphic Forms, Progr. Math., Birkhäuser, Boston, (2008), 45–109, math. RT/0607002.

[Ko13] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles in: Lie groups; structure, actions and representations, in Honor of Josehp A. Wolf on the occasion of his 75th birthday, Progress in Mathematics **306**, Birkhäuser, Boston, 2013, math. RT/0607004.

[Kr] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, Compositio Math., **38** (1979), 129–53.

[Li] P. Littelmann, On spherical double cones, J. Algebra, **166**, (1994), 142-157.

[Lu] D. Luna, Slices etales. (French) Sur les groupes algebriques, pp. 81–105. Bull. Soc. Math. France, Paris, Memoire 33 Soc. Math. France, Paris, 1973.

[Ma95a] 松木敏彦, 代数群の 2 つの involution に関する両側剰余類分解 II, 等質空間上の非可換解析学 (京都, 1994), 数理解析研究所 講究録, No. **895**, (1995), 98–113.

[Ma95b] T. Matsuki, Double coset decomposition of algebraic groups arising from two involutions. I, J. Algebra, **175**, (1995), 865–925.

[Ma97] T. Matsuki, Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions, J. Algebra, **197**, (1997), 49–91.

[Mi] I. V. Mikityuk, Integrability of invariant Hamiltonian systems with homogeneous configuration spaces. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **129** (171) (1986), no. 4, 514–534, 591.

[Sa09] A. Sasaki, Visible action on irreducible multiplicity-free spaces, Int. Math. Res. Not. IMRN, (2009), no. **18**, 3445–3466.

[Sa10a] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, Geom. Dedicata, **145**, (2010), 151–158.

[Sa10b] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $\mathrm{SU}(2n+1) \setminus \mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C}) / \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **17**, (2010), 201–215.

[Sa11] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, Int. Math. Res. Not. IMRN, (2011), no. **4**, 885–929.

[St] J. R. Stembridge, Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters, Represent. Theory, **7**, (2003), 404–439 .

[VK] É. B. Vinberg and B. N. Kimel'fel'd, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, Funct. Anal. Appl., **12**, 1978, 168–174.

[Wa88] N. R. Wallach, Real reductive groups. I. Pure and Applied Mathematics, 132. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988. xx+412 pp.

[Wa92] N. R. Wallach, Real reductive groups. II. Pure and Applied Mathematics, 132-II. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992. xiv+454 pp.

[Wo] J. A. Wolf, Harmonic Analysis on Commutative Spaces, Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., 2007.

[Ya] O. S. Yakimova, Gelfand pairs. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universitat Bonn, Bonn, 2004. Bonner Mathematische Schriften [Bonn Mathematical Publications], 374. Universitat Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, 2005. front matter+ii+95 pp.

東京大学大学院数理科学研究科
東京都目黒区駒場 3-8-1
〒 153-8914
E-mail: yuichiro@ms.u-tokyo.ac.jp