数理解析研究所講究録
第 1925 巻 2014 年 1-14

有限群の対称テンソル積表現と交代テンソル積表現の指標

九州大学大学院数理学府 田村 朋之
Tomoyuki Tamura
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

概要

有限群の複素数体上有限次元表現が与えられた時, 任意の自然数 n に対して n 次対称テンソル積空間と n 次交代テンソル積空間への表現が与えられる. 本講演では λ-ring の概念を用い, この二つの表現の指標について述べる. 具体的には 1 次元表現, 表現の制限, 誘導表現における計算の他, 二つの表現の既約分解と与えられた表現によっては重複度が一致することがある場合について述べる. また剰余群への自然な作用による表現においては, 対称・交代テンソル積表現が元の表現の直和でかける場合があることについて触れる.

1 序章

G を有限群とする. G の $\mathbb{C}$ 上有限次元表現 $\rho : G \to GL(V)$ が与えられた時, 任意の整数 $i = 0, 1, 2, \ldots$ に対し二つの表現が, それぞれ任意の $g \in G$ と $v_1, \ldots,\ v_i \in V$ に対し次の関係式を満たすように定義される.

- 対称テンソル積空間 $S^i(V)$ への表現である対称テンソル積表現 $S^i\rho : G \to GL(S^i(V))$,

$$S^i\rho(g)(v_1 \cdots v_i) := (\rho(g)v_1) \cdots (\rho(g)v_i).$$

- 交代テンソル積空間 $\bigwedge^i(V)$ への表現である交代テンソル積表現 $\Lambda^i\rho : G \to GL(\bigwedge^i(V))$,

$$\Lambda^i\rho(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_i) := (\rho(g)v_1) \wedge \cdots \wedge (\rho(g)v_i).$$

この 2 つの表現について, その指標, つまりとある基底についての表現行列のトレースの具体的な値は何かという問題がある. また, 両方とも完全可約かつ有限次元であることから各既約成分ごとの重複度が有限かつ一意に定まるが, この具体的な値は何か, という問題がある. この解決について, λ-ring と呼ばれる可換環の構造を G の類関数全体の集合 $CF(G)$ に定義し解決するという手法が存在する. これは D.Knutson [2] によるものであり, Knutson は具体例として 3 次対称群 S_3 の 2 次既約表現の交代テンソル積表現の指標を計算を行っている (Example 3.3).

本稿では Knutson のこの手法に基づき, pre-λ-ring を用いていくつかの表現の対称・交代テンソル積表現について考察する. pre-λ-ring とは λ-ring のもつ λ-operation の条件を少し弱めた概念であり, 本稿では pre-λ-ring の概念のみで議論を進める. 第 2 章では pre-λ-ring の定義や各 operation, 準同型写像等の定義を述べ, また, これらを用いることで対称・交代テンソル積表現を求めることができることを述べる. 第 3 章では対称・交代テンソル積表現の指標値及び既約成分毎の重複度について母関数を定義し, これを用いることで指標値や重複度が見やすくなることを述べる. そして 1 次元表現, 表現の制限, 誘導表現, 剰余群への自然な作用における表現について考察する. 第 4 章では異なる二つの既約表現における重複度が一致する場合があることについて述べる.

尚, 本稿で用いる有限群 G の表現は全て複素数体上有限次元表現であるとし, G の指標もこのような表現の指標であるとする.

2 pre-λ-ring と表現の指標

この章では準備として, 本稿で用いる可換環の性質及び巾級数環における指数・対数写像, 対数微分等について述べる. そして pre-λ-ring の概念と表現の指標との関わりを説明し, これを用いることで対称・交代テンソル積表現の指標や重複度が求めることができることを述べる. 詳しくは [2], [4] 等を参照されたい.

以降, R を単位元 1 をもつ可換環, $R[[t]]$ を t を変数とする, R の元を係数とする 1 変数巾級数環とする. また, 任意の $f \in R[[t]]$ に対し, $f' \in R[[t]]$ を f の変数 t に関する微分と定義する.

2.1 可換環と多項式環

この節では本稿で用いる可換環及び巾級数環の性質を述べる.

可換環 R が $\mathbb{Z}$-torsion-free であるとは, 0 でない整数 n と $r \in R$ に対し $nr = 0$ ならば $r = 0$ となるときを言う. また可換環 R が $\mathbb{Q}$-algebra であるとは, 環準同型写像 $\mathbb{Q} \to R$ が備わっているときを言う. 明らかに可換環 R は $\mathbb{Q}$-algebra ならば $\mathbb{Z}$-torsion-free である. 本稿においては次章において, 序章で述べた $CF(G)$ を $\mathbb{Q}$-algebra として用いていく.

集合 $\Lambda(R)$ を, $R[[t]]$ の元であって定数項が 1 であるものの全体と定義する. この集合は [4] において universal-λ-ring と呼ばれ, 可換環, 特に λ-ring の構造が定義される. $\Lambda(R)$ は巾級数の乗法 (可換環としての加法として定義する) により可換群となる.

対数微分の写像 $\dfrac{d}{dt}\log : \Lambda(R) \to R[[t]]$ を, 任意の $f \in \Lambda(R)$ に対し $\dfrac{d}{dt}\log(f) := f'f^{-1}$ と定義する. これは実関数における対数微分の計算結果をそのまま定義として用いている. 写像 $\dfrac{d}{dt}\log$ は $\Lambda(R)$ の乗法から $R[[t]]$ の加法への準同型写像であり, さらに R が $\mathbb{Q}$-algebra ならば全単射である.

可換環 R_1, R_2 の環準同型写像 $F : R_1 \to R_2$ が与えられた時, 写像 $F_\Lambda : R_1[[t]] \to R_2[[t]]$ を $F_\Lambda(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i) := \sum_{i=0}^{\infty} F(a_i)t^i$ $(a_i \in R)$ と定義する. この写像 F_Λ は $R_1[[t]]$ から $R_2[[t]]$ への環準同型写像であるほか, 対数微分の写像と可換である. つまり $F_\Lambda(\Lambda(R_1)) \subset \Lambda(R_2)$ であり, かつ $\Lambda(R_1)$ 上で $\dfrac{d}{dt}\log \circ F_\Lambda = F_\Lambda \circ \dfrac{d}{dt}\log$ が成り立つ.

最後に, 指数・対数写像と巾級数同士の巾について述べる. R を $\mathbb{Q}$-algebra としたとき, 任意の $f \in tR[[t]], g \in \Lambda(R), h \in R[[t]]$ に対し巾級数 $\exp(f) \in \Lambda(R), \log(g) \in tR[[t]], g^h \in \Lambda(R)$ を,

$$\exp(f) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}, \quad \log(g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(g-1)^n}{n}, \quad g^h := \exp(h\log(g))$$

と定義する. exp, log の定義については $f, g-1 \in tR[[t]]$ であり, つまり両者ともに定数項が 0 であるので無限和が確かに意味を持つ. また $h\log(g) \in tR[[t]]$ であるので g^h も意味を持つ.

本稿では特に g^h の方を次章の誘導表現の節で用いる. 指数・対数写像については exp は $tR[[t]]$ の加法から $\Lambda(R)$ の乗法へ, log は $\Lambda(R)$ の乗法から $tR[[t]]$ の加法への, それぞれ同型写像であり, お互いに逆写像の関係を持つ. また, 任意の $g \in \Lambda(R), h_1, h_2 \in R[[t]]$ に対して $g^{h_1+h_2} = g^{h_1}g^{h_2}, (g^{h_1})^{h_2} = g^{h_1 h_2}$ が成り立ち, 対数微分については $r \in R$ とすると, $\dfrac{d}{dt}\log g^r = rg'g^{-1}$ が成り立つ.

2.2 pre-λ-ring の定義

この節では pre-λ-ring の定義等を述べる.

可換環 R は以下の 3 条件を満たす写像の族 $\lambda^n : R \to R$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が備わっているとき, pre-λ-ring と言う.

- 任意の $r \in R$ に対し, $\lambda^0(r) = 1$ である.
- λ^1 は R 上の恒等写像である.
- 任意の $n \geq 0$ と $r, s \in R$ に対し, $\lambda^n(r+s) = \sum_{i+j=n} \lambda^i(r)\lambda^j(s)$ が成り立つ.

pre-λ-ring における写像 λ^n 達を λ-operation と言う. pre-λ-ring R とその元 $r \in R$ に対し, $\lambda_t(r) \in \Lambda(R)$ を

$$\lambda_t(r) := \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(r)t^i$$

と定義する. λ-operation の性質から, 任意の $r, s \in R$ に対し $\lambda_t(r+s) = \lambda_t(r)\lambda_t(s)$ が成り立つ.

任意の自然数 n に対し, n-th Adams operation $\psi^n : R \to R$ を, 任意の $r \in R$ に対し次の等式が成り立つように定義する.

$$\psi_{-t}(r) = -t\frac{d}{dt}\log \lambda_t(r).$$

但し $\psi_t(r) := \sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(r)t^n$ と定義する. 左辺はこの式の t に $-t$ を代入したものである.

pre-λ-ring における Adams operation は全て R の加法における準同型写像であり, ψ^1 は R 上の恒等写像である. さらに定義より, 任意の自然数 n と $r \in R$ に対し, Newtons formula と呼ばれる次の等式が成り立つ.

$$\psi^n(r) - \lambda^1(r)\psi^{n-1}(r) + \cdots + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(r)\psi^1(r) = (-1)^{n+1}n\lambda^n(r). \tag{2.1}$$

任意の整数 $i \geq 0$ に対し, 写像 $S^i : R \to R$ を任意の $r \in R$ に対し

$$S_t(r) := 1/\lambda_{-t}(r)$$

と定義する. 但し $S_t(r) := \sum_{i=0}^{\infty} S^i(r)t^i$ と定義する. このように定義された写像 S^i 達を symmetric powers operation という. この言葉は [3] のものを用いている. symmetric powers operation も λ-operation と同様, 任意の $r, s \in R$ に対し $S_t(r+s) = S_t(r)S_t(s)$ が成り立つ.

pre-λ-ring R_1, R_2 における環準同型写像 $f : R_1 \to R_2$ が λ-operation を交換するとき, 即ち任意の整数 $i \geq 0$ に対し

$$f \circ \lambda^i = \lambda^i \circ f$$

が成り立つとき, pre-λ-homomorphsim という. 明らかに pre-λ-ring 上の恒等写像は pre-λ-homomorphism である他, pre-λ-homomorphsim 同士の合成写像もまた pre-λ-homomorphism である. また, pre-λ-ring 間の環準同型写像 $f : R_1 \to R_2$ について λ-operation を交換することと symmetric powers operation を交換すること (任意の整数 $i \geq 0$ に対し $f \circ S^i = S^i \circ f$ となること) は同値である. また, f が λ-operation を交換するならば Adams operation を交換する (任意の自然数 n に対し $f \circ \psi^n = \psi^n \circ f$ となる) であり, f の値域である R_2 が $\mathbb{Z}$-torsion-free ならばこの逆も成り立つ.

pre-λ-ring R の部分環 R' が R の pre-λ-subring であるとは, 任意の整数 $i \geq 0$ と $r \in R'$ に対し $\lambda^i(r) \in R'$ が成り立つことと定義する. 本稿ではこれを簡単に "λ-operation で閉じている" という言い方をしたい.

準同型写像の時と同様, pre-λ-ring の部分環について λ-operation で閉じていることと symmetric powers operation で閉じていることは同値である. さらに λ-operation で閉じているならば Adams operation でも閉じており, R が $\mathbb{Z}$-torsion-free ならば逆も成り立つ. また, pre-λ-subring の, pre-λ-homomorphism による像はまた pre-λ-suburing になる.

以降, 簡単のために pre-λ-homomorphsim を λ-homomorphsim と, pre-λ-subring を λ-subring と略記する.

2.3 pre-λ-ring と表現の指標

この節では先程述べた pre-λ-ring と表現の指標との関係について述べ, 対称・交代テンソル積表現の指標がそれぞれ symmetric powers operation と λ-operation を用いて表すことができることを述べる. 以降, G を有

限群とする.

集合 $R(G)$ を G の表現環, つまり G の既約表現の同型同値類全体から生成される自由加群とする. この集合は交代テンソル積表現に由来する形で λ-operation を定義することにより pre-λ-ring の構造が定義される. 具体的には $[V]$ を G の表現のある同値類とすると, 任意の整数 $i \geq 0$ に対して $\lambda^i([V]) = [\bigwedge^i(V)]$ が成り立つように定義する.

次に $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ を G から $\mathbb{C}$ への写像全体の集合とする. $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ は次の加法, 乗法, スカラーを以て $\mathbb{C}$-algebra, 特に $\mathbb{Q}$-algebra の構造を持つ.

$$(f_1 + f_2)(g) := f_1(g) + f_2(g), \quad (f_1 f_2)(g) := f_1(g) f_2(g), \quad (cf)(g) := cf(g).$$

但し, $f_1, f_2 \in \mathrm{Map}(G, \mathbb{C}), c \in \mathbb{C}, g \in G$ とする. この演算による零元, 単位元はそれぞれ $0, 1$ への定置写像である. この集合 $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ に pre-λ-ring の構造を定義する. それには次の Proposition を用いる.

Proposition 2.1 ([2], p.51)**.** 集合 S を $\mathbb{Q}$-algebra で, 次の条件を満たす写像の族 $\psi^n : S \to S$ $(n \geq 0)$ が備わっているとする.

- 写像 ψ^1 は S 上の恒等写像である.
- 任意の自然数 n に対し写像 ψ^n は加法についての準同型写像である.

このとき, 集合 S は写像 ψ^n を n-th Adams operation とするような pre-λ-ring の構造を一意に持つ.

Remark 2.2. Proposition 2.1 にあるような写像 ψ^n 達を備えた可換環 S は [2] において pre-ψ-ring と定義される. [2] では可換環 R が標数 0 の体を含み, かつ ψ-ring と呼ばれる, pre-ψ-ring であってさらに写像 ψ^n について条件を加えた構造を持つならば λ-ring の構造を導入することまで述べているが, 本稿では $\mathbb{Q}$-algebra でかつ pre-ψ-ring である可換環は pre-λ-ring の構造を持つことを述べるに留める.

任意の自然数 n に対し, $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ 上に写像 $\psi^n : \mathrm{Map}(G, \mathbb{C}) \to \mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ を次の式が成り立つように定義する.

$$\psi^n(f)(g) := f(g^n). \tag{2.2}$$

但し, $f \in \mathrm{Map}(G, \mathbb{C}), g \in G$ とする. これにより, $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ は pre-λ-ring (実際には λ-ring) の構造が定義される. また, 集合 $CF(G)$ を G から $\mathbb{C}$ への類関数全体と定義すると, $CF(G)$ は $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ の λ-subring となる. その理由は $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ が $\mathbb{Q}$-algebra であることから Adams operation で閉じることを示せばよい.

この pre-λ-ring の構造が定義された二つの集合 $R(G)$, $CF(G)$ 間の写像 $X : R(G) \to CF(G)$ を表現の指標が対応するように定義すると, 次の定理が成り立つ.

Theorem 2.3 ([2] p.84)**.** 写像 X は λ-homomorphism である.

Cororally 2.4. $\{V\}$ を G の表現の同型同値類の一つとすると, 任意の整数 $i \geq 0$ に対し $\lambda^i \circ X(\{V\}) = X(\{\bigwedge^i(V)\}, \quad S^i \circ X(\{V\}) = X(\{S^i(V)\})$ が成り立つ.

即ち, V を G の有限次元表現でその指標を χ とすると, その i 次対称テンソル積表現 $S^i(V)$ の指標は $S^i(\chi)$, i 次交代テンソル積表現 $\Lambda^i(V)$ の指標は $\lambda^i(\chi)$ である.

3 対称・交代テンソル積表現の指標の計算

G を有限群とし, $\chi_1, \ldots, \chi_k$ を G の全ての既約指標とする. この章ではこれまでの考察を用い, G のいくつかの指標 χ に対し対称・交代テンソル積表現の指標 $S^i(\chi), \lambda^i(\chi)$ と各既約指標についての重複度を考察する.

3.1 節では対称・交代テンソル積表現の指標の値及び重複度についての母関数の定義を行い, 3.2 節では 1 次元指標, 3.3 節では指標の制限との関わり, 3.4 節では誘導指標での計算と剰余群への自然な作用によって生じる表現の指標について述べる.

任意の $f_1, f_2 \in \mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ に対し $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ 上の内積を,

$$\langle f_1, f_2 \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) f_2(g^{-1})$$

とすると, 任意の指標 χ は $\chi = \langle \chi_1, \chi \rangle_G \chi_1 + \cdots + \langle \chi_k, \chi \rangle_G \chi_k$ と書くことができるので, 重複度については $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ の元として $S^i(\chi), \lambda^i(\chi)$ で $g \in G$ を移した $S^i(\chi)(g)$, $\lambda^i(\chi)(g)$ がどのような値になるのかが問題になる. 但し $\lambda^i(\chi), S^i(\chi)$ は共に類関数であるから, G の各共役類の代表元のみを考えればよい.

3.1 重複度の母関数

この節では対称・交代テンソル積表現の指標の値及び既約分解における重複度が i についての母関数を用いることで表示が簡潔になることを述べる.

各 $g \in G$ を移す環準同型写像を $E_g : \mathrm{Map}(G, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ を $E_g(f) := f(g)$ $(f \in \mathrm{Map}(G, \mathbb{C}))$ と定義する.

Definition 3.1. 任意の $f \in \mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$, $g \in G$ に対し, $\lambda_t(f)(g), S_t(f)(g) \in \Lambda(\mathbb{C})$ を

$$\lambda_t(f)(g) := E_{g\Lambda}(\lambda_t(f)) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(f)(g) t^i, \quad S_t(f)(g) := E_{g\Lambda}(S_t(f)) = \sum_{i=0}^{\infty} S^i(f)(g) t^i \tag{3.1}$$

と定義する.

定義から $\lambda_t(f)(g), S_t(f)(g)$ はそれぞれ $\lambda^i(f)(g), S^i(f)(g)$ の i についての母関数である. symmetric powers operation の定義と合わせると, 明らかに

$$S_t(f)(g) = 1/\lambda_{-t}(f)(g) \tag{3.2}$$

が任意の $f \in \mathrm{Map}(G, \mathbb{C}), g \in G$ に対して成り立つ.

Definition 3.2. 任意の $f_1, f_2 \in \mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ に対し, $\langle f_1, \lambda_t(f_2) \rangle_G, \langle f_1, S_t(f_2) \rangle_G \in \mathbb{C}[[t]]$ を

$$\begin{aligned} \langle f_1, \lambda_t(f_2) \rangle_G &:= \sum_{i=0}^{\infty} \langle f_1, \lambda^i(f_2) \rangle_G t^i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \lambda_t(f_2)(g^{-1}), \\ \langle f_1, S_t(f_2) \rangle_G &:= \sum_{i=0}^{\infty} \langle f_1, S^i(f_2) \rangle_G t^i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) S_t(f_2)(g^{-1}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

と定義する.

χ を G の指標とする. 任意の整数 $i \geq 0$ に対し $\lambda^i(\chi)$ と $S^i(\chi)$ を求めるにあたり, $\lambda_t(\chi), S_t(\chi)$ は (3.3) 用いることで

$$\begin{aligned} \lambda_t(\chi) &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\chi) t^i = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \langle \chi_j, \lambda^i(\chi) \rangle_G t^i \right) \chi_j = \sum_{j=1}^{k} \langle \chi_j, \lambda_t(\chi) \rangle_G \chi_j, \\ S_t(\chi) &= \sum_{i=0}^{\infty} S^i(\chi) t^i = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \langle \chi_j, S^i(\chi) \rangle_G t^i \right) \chi_j = \sum_{j=1}^{k} \langle \chi_j, S_t(\chi) \rangle_G \chi_j. \end{aligned} \tag{3.4}$$

と書くことができる. $\langle \chi_j, S_t(\chi) \rangle_G, \langle \chi_j, \lambda_t(\chi) \rangle_G$ はそれぞれ対称・交代テンソル積表現の既約指標 χ_j についての重複度の母関数を表している.

$\lambda^i(\chi), S^i(\chi)$ の値及び重複度の計算は, これら i についての母関数 $\lambda_t(\chi)(g), S_t(\chi)(g), \langle\chi_j, S_t(\chi)\rangle_G, \langle\chi_j, \lambda_t(\chi)\rangle_G$ を計算し, その t^i 各係数を見ることでも計算することが可能である. 母関数を用いることは交代テンソル表現の場合は勿論のこと, i が増加するごとに表現の次数が増加する対称テンソル積表現において特に有効である.

Example 3.3. 3 次対称群 S_3 の 2 次既約指標について, その対称テンソル積表現の指標値及び重複度についての母関数を考える. S_3 の共役類及び既約指標表は次のとおりである.

$$C_1 = \{(1)\},\ C_2 = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\},\ C_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

2 次既約表現 χ_3 について考える. λ-operation の定義から $\lambda^0(\chi_3) = \chi_1$, $\lambda^1(\chi_3) = \chi_3$ は明らかである. 2 次交代テンソル積表現の指標を表す $\lambda^2(\chi_3)$ については序章で述べた通り [2] p.95 で述べられており, (2.1) を $n = 2$ として用い, (2.2) と上記の既約指標表を用いることで $\lambda^2(\chi_3) = \chi_2$ を得る.

次に対称テンソル積表現の指標について $S_t(\chi_3)$ を考える. 上記の計算結果より $\lambda_t(\chi_3) = \chi_1 + \chi_3 t + \chi_2 t^2$ であるから S_3 の共役類の代表元を移すと

$$\lambda_t(\chi_3)((1)) = (1+t)^2,\quad \lambda_t(\chi_3)((1\ 2)) = 1 - t^2,\quad \lambda_t(\chi_3)((1\ 2\ 3)) = 1 - t + t^2$$

となる. 対称テンソル積表現の指標値の母関数は (3.2) を用いて

$$S_t(\chi_3)((1)) = \frac{1}{(1-t)^2},\quad S_t(\chi_3)((1\ 2)) = \frac{1}{1-t^2},\quad S_t(\chi_3)((1\ 2\ 3)) = \frac{1}{1+t+t^2} \tag{3.5}$$

と書くことができる. よって (3.3), (3.5) を用いることで対称テンソル積表現についての重複度の母関数

$$\begin{aligned}
\langle\chi_1, S_t(\chi_3)\rangle_{S_3} &= \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{3}{1-t^2} + \frac{2}{1+t+t^2}\Big) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)},\\
\langle\chi_2, S_t(\chi_3)\rangle_{S_3} &= \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{3}{1-t^2} + \frac{2}{1+t+t^2}\Big) = \frac{t^3}{(1-t^2)(1-t^3)},\\
\langle\chi_3, S_t(\chi_3)\rangle_{S_3} &= \frac{1}{6}\Big(\frac{2}{(1-t)^2} - \frac{2}{1+t+t^2}\Big) = \frac{t}{(1-t)(1-t^3)}
\end{aligned}$$

を得る.

3.2 1 次元表現

χ_1 を自明表現の指標 ($\mathrm{Map}(G,\mathbb{C})$ の単位元と等しい) とする. この節では χ が 1 次元表現の指標である場合に $\lambda_t(\chi), S_t(\chi)$ を計算する.

まず $i \geq 2$ なら $\lambda^i(\chi) = 0$ であるから $\lambda_t(\chi) = \chi_1 + \chi t$ を得る. また $S_t(\chi) = \chi_1/(\chi_1 - \chi t) = \sum_{i=0}^{\infty} \chi^i t^i$ であるから, 任意の整数 $i \geq 0$ に対し $S^i(\chi) = \chi^i$ を得る.

Example 3.4. S_3 の 1 次元表現 χ_1,χ_2 について考える (Example 3.3 参照). 計算すると,

$$\begin{aligned}
&\lambda_t(\chi_1) = \chi_1 + \chi_1 t,\quad S_t(\chi_1) = \frac{1}{1-t}\chi_1,\\
&\lambda_t(\chi_2) = \chi_1 + \chi_2 t,\quad S_t(\chi_2) = \chi_1 + \chi_2 t + \chi_1 t^2 + \chi_2 t^3 + \cdots = \frac{1}{1-t^2}\chi_1 + \frac{t}{1-t^2}\chi_2
\end{aligned}$$

となる.

3.3 指標の制限

H を G の部分群とすると, 指標の定義域を G から H へ制限する環準同型写像 $\mathrm{Res}^G_H : \mathrm{Map}(G,\mathbb{C}) \to \mathrm{Map}(H,\mathbb{C})$ が与えられる. 表現の指標の制限と λ-operation との関係について次が成り立つ.

Theorem 3.5. 写像 Res^G_H は λ-homomorphism である.

Proof. 写像の値域が $\mathbb{Q}$-algebra であることから, Adams operation を交換することを示す. 任意の自然数 $n, f \in \mathrm{Map}(G,\mathbb{C})$, $h \in H$ に対し $\psi^n \circ \mathrm{Res}^G_H(f)(h) = \mathrm{Res}^G_H(f)(h^n) = f(h^n) = \psi^n(f)(h) = \mathrm{Res}^G_H \circ \psi^n(f)(h)$ となるので $\psi^n \circ \mathrm{Res}^G_H = \mathrm{Res}^G_H \circ \psi^n$ が成り立つ. 即ち写像 Res^G_H は Adams operation を交換するので λ-homomorphism である. □

この主張の強みは対称・交代テンソル積表現の指標値の計算をより位数の小さな群の上で行うことができる点にある.

Example 3.6. S_3 の指標 χ' を $\chi'((1)) = 4, \chi'((1\ 2)) = 0, \chi'((1\ 2\ 3)) = 1$ と定義する $(\chi' := \chi_1 + \chi_2 + \chi_3)$. この指標について $\lambda_t(\chi')((1\ 2))$ を上記の Theorem 3.5 を用いて計算する.

S_3 の部分群 H を $(1), (1\ 2)$ の 2 元のみからなる集合と定義する. H は 2 次巡回群と同型であり, その既約指標表は次の通りである.

	(1)	(1 2)
γ_1	1	1
γ_2	1	-1

指標 χ' を H に制限すると, $\mathrm{Res}^{S_3}_H \chi' = 2\gamma_1 + 2\gamma_2$ であるから, Theorem 3.5 及び 1 次指標における計算結果より

$$\begin{aligned}
\lambda_t(\chi')((1\ 2)) &= \mathrm{Res}^{S_3}_{H\ \Lambda}(\lambda_t(\chi))((1\ 2)) \\
&= \lambda_t(\mathrm{Res}^{S_3}_H \chi')((1\ 2)) \\
&= \lambda_t(2\gamma_1 + 2\gamma_2)((1\ 2)) \\
&= ((\gamma_1 + \gamma_1 t)^2(\gamma_1 + \gamma_2 t)^2)((1\ 2)) = (1+t)^2(1-t)^2
\end{aligned}$$

を得る.

3.4 誘導指標

この節では H を G の部分群, $\theta \in CF(H)$ とする. $\mathrm{Ind}^G_H\theta \in CF(G)$ を次のように定義する.

$$\mathrm{Ind}^G_H\theta = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}(\theta^\circ)^x. \tag{3.6}$$

但し, 写像 $\theta^\circ \in \mathrm{Map}(G,\mathbb{C})$ については

$$\theta^\circ(h) = \begin{cases} \theta(h) & (\text{if } h \in H), \\ 0 & (\text{if } h \notin H). \end{cases}$$

と定義し, 任意の $f \in \mathrm{Map}(G,\mathbb{C}), x \in G$ に対し $f^x \in \mathrm{Map}(G,\mathbb{C})$ を $f^x(g) := f(x^{-1}gx)$ $(g \in G)$ と定義する.

θ が H の表現の指標である場合, $\mathrm{Ind}^G_H\theta$ は θ を指標に持つ表現の, G への誘導表現の指標である. この節では $\mathrm{Ind}^G_H\theta$ について $\lambda_t(\mathrm{Ind}^G_H\theta)$ 及び $S_t(\mathrm{Ind}^G_H\theta)$ の計算を, $\lambda_t(\theta)$ と $S_t(\theta)$ を用いて述べる.

そして部分群 $N = H$ が正規部分群である場合に, 計算がある程度簡略化されること, $\lambda^n(\mathrm{Ind}_N^G\theta)(g), S^n(\mathrm{Ind}_N^G\theta)(g)$ が 0 となるような $g \in G$ と自然数 n の組がいくつか特定できること, そして有限群 G の剰余群 G/N への自然な作用についての表現の対称・交代テンソル積表現が, 元の表現の直和で表される場合があること, 以上の 3 点を述べる.

Lemma 3.7. 任意の $x \in G$ に対し, 対応 $f \to f^x$ は $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ における λ-homomorphism である.

Proof. 証明のアイデアは Theorem 3.5 と同じで, 対応の値域が $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ で特に $\mathbb{Q}$-algebra であることから $\psi^n(f^x) = (\psi^n(f))^x$ が任意の自然数 n で成り立つことを示す. 任意の $g \in G$ に対し, 計算すると $\psi^n(f^x)(g) = f^x(g^n) = f(x^{-1}g^nx) = f((x^{-1}gx)^n) = ((\psi^n(f))^x(g)$ を得る. □

Definition 3.8. G の元 g に対し, $O_H(g)$ を $g^k \in H$ を満たす最小の自然数 k と定義する.

Lemma 3.9. 任意の $g \in G$ に対し, $k = O_H(g)$ とすると次の二つの式が成り立つ.

$$\lambda_t(\theta^\circ)(g) = \left(\lambda_{-(-t)^k}(\theta)(g^k)\right)^{\frac{1}{k}}, \quad S_t(\theta^\circ)(g) = \left(S_{-(-t)^k}(\theta)(g^k)\right)^{\frac{1}{k}}$$

Proof. 証明のアイデアは, 写像 $\dfrac{d}{dt}\log : \Lambda(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}[[t]]$ が全単射であることを用い, 両辺を対数微分し一致することを見る. 計算すると,

$$-t\frac{d}{dt}\log\lambda_t(\theta^\circ)(g) = \sum_{i=1}^{\infty}\psi^i(\theta^\circ)(g)(-t)^i = \sum_{i=1}^{\infty}\psi^i(\theta)(g^k)(-t)^{ik},$$

$$-t\frac{d}{dt}\log\left(\lambda_{-(-t)^k}(\theta)(g^k)\right)^{\frac{1}{k}} = (-t)^k\frac{\lambda_{-(-t)^k}(\theta)(g^k)'}{\lambda_{-(-t)^k}(\theta)(g^k)} = \sum_{i=1}^{\infty}\psi^i(\theta)(g^k)(-t)^{ik}$$

となり一致する. $S_t(\theta^\circ)(g)$ はこの結果と (3.2) を用いることで導くことができる. □

Lemma 3.7, Lemma 3.9 を用いることで $\lambda_t(\mathrm{Ind}_H^G\theta)$ 及び $S_t(\mathrm{Ind}_H^G\theta)$ を求めることができる.

Theorem 3.10. G の H による剰余類分解を $G = \bigcup_{x\in T} xH$ とすると, 任意の $g \in G$ に対し,

$$\lambda_t(\mathrm{Ind}_H^G\theta)(g) = \prod_{x\in T}\left(\lambda_{-(-t)^{O_H(x^{-1}gx)}}(\theta)((x^{-1}gx)^{O_N(x^{-1}gx)})\right)^{\frac{1}{O_N(x^{-1}gx)}},$$

$$S_t(\mathrm{Ind}_H^G\theta)(g) = \prod_{x\in T}\left(S_{-(-t)^{O_H(x^{-1}gx)}}(\theta)((x^{-1}gx)^{O_N(x^{-1}gx)})\right)^{\frac{1}{O_N(x^{-1}gx)}}$$

が成り立つ.

Proof. 先ず任意の $h \in H$ に対し $(\theta^\circ)^h = \theta^\circ$ であるので, (3.6) より $\mathrm{Ind}_H^G\theta = \sum_{x\in T}(\theta^\circ)^x$ を得る. これを λ_t で移すと, 加法から乗法への準同型性及び Lemma 3.7 より

$$\lambda_t(\mathrm{Ind}_H^G\theta)(g) = \prod_{x\in T}\lambda_t((\theta^\circ)^x)(g) = \prod_{x\in T}\lambda_t(\theta^\circ)(x^{-1}gx) \tag{3.7}$$

を得る. よって (3.7) に Lemma 3.9 を用いることで証明することができる. $S_t(\mathrm{Ind}_H^G\theta)(g)$ は上記とほぼ同じように, もしくは (3.7) を (3.2) を代入し, Lemma 3.9 を用いることで示すことができる. □

実際に用いる場合は Theorem 3.10 を直接用いるよりも (3.7) と Lemma 3.9 を併せて用いた方が扱いやすいかもしれない.

Example 3.11. $G = S_3,\ H = \{(1),(1\ 2)\}$, θ を H の自明指標とする. S_3 の H による剰余類分解を $S_3 = (1\ 2)H \cup (1\ 3)H \cup (2\ 3)H$ とすると, (3.7) より任意の $\sigma \in S_3$ に対し

$$\lambda_t(\mathrm{Ind}_H^{S_3}\theta)(\sigma) = \big(\lambda_t(\theta^\circ)((1\ 2)\sigma(1\ 2))\big)\big(\lambda_t(\theta^\circ)((1\ 3)\sigma(1\ 3))\big)\big(\lambda_t(\theta^\circ)((2\ 3)\sigma(2\ 3))\big)$$

を得る. $\lambda_t(\theta) = \theta(1+t)$ かつ $O_H((1\ 2)) = 1, O_H((2\ 3)) = O_H((1\ 3)) = 2, O_H((1\ 3\ 2)) = 3$ であるから,

$$\begin{aligned}
\lambda_t(\mathrm{Ind}_H^{S_3}\theta)((1)) &= (1+t)^3,\\
\lambda_t(\mathrm{Ind}_H^{S_3}\theta)((1\ 2)) &= \big(\lambda_t(\theta^\circ)((1\ 2))\big)\big(\lambda_t(\theta^\circ)((2\ 3))\big)\big(\big(\lambda_t(\theta^\circ)((1\ 3))\big)\\
&= (1+t)(1-(-t)^2)^{\frac{1}{2}}(1-(-t)^2)^{\frac{1}{2}} = (1+t)(1-t^2),\\
\lambda_t(\mathrm{Ind}_H^{S_3}\theta)((1\ 2\ 3)) &= \big(\lambda_t(\theta^\circ)((1\ 3\ 2))\big)\big(\lambda_t(\theta^\circ)((1\ 3\ 2))\big)\big(\lambda_t(\theta^\circ)((1\ 3\ 2))\big)\\
&= ((1-(-t)^3)^{\frac{1}{3}})^3 = 1+t^3.
\end{aligned}$$

となる.

Remark 3.12. $\lambda_t(\mathrm{Ind}_H^G(\theta)), S_t(\mathrm{Ind}_H^G(\theta))$ の計算は G の H による剰余類分解の代表元の取り方に依存しない. 任意の $g,x,y \in G$ に対し $y^{-1}x \in H$ ならば $O_H(x^{-1}gx) = O_H(y^{-1}gy)$ が成り立ち, $k = O_H(x^{-1}gx) = O_H(y^{-1}gy)$ とおくと $\theta((x^{-1}g^kx)^i) = \theta((y^{-1}g^ky)^i)$ が任意の自然数 i に対し成り立つ. このことと (2.1) を用いて, 数学的帰納法により $\lambda^i(\theta)(x^{-1}g^kx) = \lambda^i(\theta)(y^{-1}g^ky)$ が任意の自然数 i に対して成り立つ. これは $\lambda_t(\theta^\circ)(x^{-1}gx) = \lambda_t(\theta^\circ)(y^{-1}gy)$ を意味する.

Example 3.11 から見てもわかるように, $\mathrm{Ind}_H^G(\theta)$ での計算には任意の $g,x \in G$ に対し $O_H(x^{-1}gx)$ を逐一求める必要がある. これは H が G の正規部分群であるときにはある程度簡略化される.

Lemma 3.13. N を G の正規部分群とすると, 任意の $g,x \in G$ に対し $O_N(g) = O_N(x^{-1}gx)$ が成り立つ.

Lemma 3.13 より, 部分群 H が正規部分群なら Theorem 3.10 における各 $O_H(x^{-1}gx)$ を計算する手間を省くことができる. また G の正規部分群 N の類関数 θ について $\mathrm{Ind}_N^G(\theta)$ は $g \notin N$ ならば 0 となる性質をもつが, $\lambda^n(\mathrm{Ind}_N^G\theta), S^n(\mathrm{Ind}_N^G\theta)$ にも同様のことが言える場合が存在することを示すことができる.

Theorem 3.14. g を G の元とし, 自然数 n が $O_N(g)$ と互いに素であるとすると, $\lambda^n(\mathrm{Ind}_N^G\theta)(g) = 0$ かつ $S^n(\mathrm{Ind}_N^G\theta)(g) = 0$ が成り立つ. 特に 自然数 n が剰余群 G/N の位数と互いに素ならば, N に含まれない任意の $g \in G$ に対して $\lambda^n(\mathrm{Ind}_N^G\theta)(g) = 0,\quad S^n(\mathrm{Ind}_N^G\theta)(g) = 0$ が成り立つ.

Proof. λ-operation の場合のみに示す. Lemma 3.13 を Theorem 3.10 に用いることで

$$\lambda_t(\mathrm{Ind}_N^G)(g) = \prod_{x\in T} \lambda_{-(-t)^{O_N(g)}}(\theta)(xg^{O_N(g)}x^{-1})^{\frac{1}{O_N(g)}}$$

を得るので, この式の t^n の係数を見ることで示すことができる. 特に自然数 n が G/N の位数と互いに素ならば, $g \in G$ が N に含まれないとき $O_N(g)$ は 1 でない $|G/N|$ の約数となるので $\lambda^n(\mathrm{Ind}_N^G\theta)(g) = 0$ を得る. □

最後に, 有限群 G の剰余群 G/N への自然な作用によって生ずる表現の指標について考察する.

Example 3.15. Π を G の G/N への自然な作用によって生ずる表現の指標とする. Π は N の自明な指標の G への誘導指標と等しい. 任意の $g \in G$ に対して $\lambda_t(\Pi)(g), S_t(\Pi)(g)$ を計算すると,

$$\lambda_t(\Pi)(g) = (1-(-t)^{O_N(g)})^{\frac{|G/N|}{O_N(g)}}, \quad S_t(\Pi)(g) = (1-t^{O_N(g)})^{-\frac{|G/N||}{O_N(g)}}.$$

となる. さらに剰余群 G/N の位数と互いに素な自然数 n に対し,

$$\lambda^n(m\Pi) = \frac{1}{|G/N|}\binom{m|G/N|}{n}\Pi, \quad S^n(m\Pi) = \frac{1}{|G/N|}\binom{m|G/N|+n-1}{n}\Pi.$$

が任意の自然数 m に対し成り立つ.

Proof. 証明の方針は G の任意の既約指標 χ_j $(j=1,\ldots,k)$ に対して両辺の重複度が一致することを見る. 既約指標 χ_j についての交代テンソル積表現の重複度母関数 $\langle \chi_j, \lambda_t(\chi)\rangle_G$ は

$$\langle \chi_j, \lambda_t(\chi)\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_j(g)(1-(-t)^{O_N(g)})^{\frac{m|G/N|}{O_N(g)}}$$

と書くことができる. $|G/N|$ と互いに素な自然数 n に対し, 両辺の t^n の係数を見る. N が $O_N(g)=1$ であるような $g\in G$ の全体であること, 指標 Π は N の上では G/N の位数をとりその他では 0 をとることに注目すると,

$$\langle \chi_j, \lambda^n(\chi)\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in N}\chi_j(g)\binom{m|G/N|}{n} = \langle \chi_j, \frac{1}{|G/N|}\binom{m|G/N|}{n}\Pi\rangle_G$$

を得る. 対称テンソル積表現の場合も同様に示すことができる. □

4 重複度の母関数の一致

この章では, 前章で定義した対称・交代テンソル積表現の各既約成分ごとの重複度の母関数が一致する場合について考える.

例えば, 4 次交代群 A_4 の 3 次既約表現 τ_4 について, その対称・交代テンソル積表現の重複度の母関数を前章の方法に従って求める. A_4 の既約指標表は次の通りである ([1] p.277 より).

	(1)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 3 2)
τ_1	1	1	1	1
τ_2	1	1	ω	ω^2
τ_3	1	1	ω^2	ω
τ_4	3	-1	0	0

但し, ω は 1 の原始 3 乗根であるとする. 計算すると,

$$\lambda_t(\tau_4) = (1+t^3)\tau_1 + 0\tau_2 + 0\tau_3 + (t+t^2)\tau_4.$$
$$S_t(\tau_4) = \frac{1-t^2+t^4}{(1-t^2)^2(1-t^3)}\tau_1 + \frac{t^2}{(1-t^2)^2(1-t^3)}\tau_2 + \frac{t^2}{(1-t^2)^2(1-t^3)}\tau_3 + \frac{t}{(1+t)^2(1-t^3)}\tau_4.$$

を得る. この式より $\langle \tau_2, \lambda_t(\tau_4)\rangle_{A_4} = \langle \tau_3, \lambda_t(\tau_4)\rangle_{A_4}(=0), \langle \tau_2, S_t(\tau_4)\rangle_{A_4} = \langle \tau_3, S_t(\tau_4)\rangle_{A_4}$ が成り立つことを見ることができるが, 何故成り立つのかという疑問が発生する. このように, 表現の指標によっては対称・交代テンソル積表現の, 異なる既約指標についての重複度母関数が一致する場合が存在する. この条件等を把握することで, 重複度の母関数の計算が簡略になると予想される. この章ではこの条件を考察するために $\mathrm{HMR}(G,G')$ なる集合を考え, これに属する元と, 重複度母関数の一致の関係を述べる.

G を有限群, $\chi_1,\ldots,\chi_k$ を G の全ての既約指標としたとき, 集合 $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ を G の既約指標から生成される加法群と定義する.

$$Cl_{\mathbb{Z}}(G) := \left\{\sum_{i=1}^{k} n_i\chi_i \mid n_i\in\mathbb{Z}\right\}$$

第 2 章で述べた指標を対応させる写像 $X: R(G)\to CF(G)$ は Theorem 2.3 より λ-homomorphism である. $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ は $\mathrm{Im}(X)$ と等しく, 特に $CF(G)$ の λ-subring である.

4.1 定義について

この考察にあたり, 次の集合を定義する.

Definition 4.1. G, G' を有限群とする. 集合 $\mathrm{HMR}(G, G')$ を, 次の 2 条件を満たす λ-homomorphism $F : Cl_{\mathbb{Z}}(G) \to Cl_{\mathbb{Z}}(G')$ の全体と定義する.

- 任意の $f_1, f_2 \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ に対し, $\langle f_1, f_2 \rangle_G = \langle F(f_1), F(f_2) \rangle_{G'}$ が成り立つ.
- θ を G の指標とすると, $F(\theta)$ は G' の指標である.

簡単のため, $\mathrm{HMR}(G, G)$ を $\mathrm{HMR}(G)$ と記す.

集合 $\mathrm{HMR}(G, G')$ については次の性質が成り立つ.

Proposition 4.2. G, G' を有限群とすると集合 $\mathrm{HMR}(G, G')$ について次の 3 つの性質が成り立つ.

(1) χ を G の既約指標とすると, 任意の $F \in \mathrm{HMR}(G, G')$ に対して $F(\chi)$ は G' の既約指標となる. 特に $\mathrm{HMR}(G, G')$ は有限集合である.

(2) χ を G の既約指標, θ を G の指標とすると,

$$\langle \chi, \lambda_t(\theta) \rangle_G = \langle F(\chi), \lambda_t(F(\theta)) \rangle_{G'}, \ \langle \chi, S_t(\theta) \rangle_G = \langle F(\chi), S_t(F(\theta)) \rangle_{G'} \tag{4.1}$$

が任意の $F \in \mathrm{HMR}(G, G')$ に対して成り立つ.

(3) $\mathrm{HMR}(G)$ は写像の合成により単位元を持つ半群となる. 特にその乗法群 $\mathrm{HMR}(G)^{\times}$ は有限群である.

(4.1) は, 指標 θ の既約指標 χ_j についての重複度母関数が指標 $F(\theta)$ の既約指標 $F(\chi)$ の重複度母関数が一致していることを意味する. このことから適当な $\mathrm{HMR}(G, G')$ の元をとることで重複度母関数の一致をみることができる. そこで, この集合 $\mathrm{HMR}(G, G')$ の構造がどのようなものかが問題になる.

4.2 有限群の自己同型群との関係

G, G' を有限群とする. この節では集合 $\mathrm{HMR}(G, G')$ に含まれる具体的な元を調べるため, 群の間の全射準同型写像, または自己同型写像を考察する.

Definition 4.3. 写像 $\pi : G' \to G$ を全射準同型写像とする. このとき, 写像 $\pi^* : Cl_{\mathbb{Z}}(G) \to Cl_{\mathbb{Z}}(G')$ を $\pi^*(f) = f \circ \pi$ と定義する. 但し, $f \in Cl_{\mathbb{Z}}(G')$ である.

任意の $f \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ に対し $\pi^*(f) \in Cl_{\mathbb{Z}}(G')$ であることは次より従う. f を G の既約指標, $\rho : G \to GL(V)$ を G の表現で指標が f であるとすると, $\pi^*(f)$ は G' の表現 $\rho \circ \pi$ の指標として与えられる. 写像 π^* が環準同型写像であることは明らかなのでこれより任意の $f \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ に対して $\pi^*(f) \in Cl_{\mathbb{Z}}(G')$ であることが従う.

Lemma 4.4. G を有限群としたとき, G の恒等写像 id_G について $\mathrm{id}_G^* = \mathrm{id}_{Cl_{\mathbb{Z}}(G)}$ が成り立つ. また, G, G', G'' を有限群, $\pi_1 : G \to G', \pi_2 : G' \to G''$ を全射準同型写像とすると $(\pi_2 \circ \pi_1)^* = \pi_1^* \circ \pi_2^*$ が成り立つ.

Proof. 恒等写像については定義より明らかである. また任意の $f \in Cl_{\mathbb{Z}}(G'')$ に対し, $(\pi_2 \circ \pi_1)^*(f) = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = \pi_1^* \circ \pi_2^*(f)$ となる. □

Theorem 4.5. 任意の全射準同型写像 $\pi : G' \to G$ に対し $\pi^* \in \mathrm{HMR}(G, G')$ である.

特に $G = G'$ とおくと, $\pi : G \to G$ は G の自己同型写像であり, $\pi^* \in \mathrm{HMR}(G)^{\times}$ である. これにより G の

自己同型写像 π から π^* へ対応させる写像 $\iota:\mathrm{Aut}(G)\to\mathrm{HMR}(G)^\times$ が構成されるが, これは反準同型写像である.

Proof. 写像 π^* は環準同型写像なので, λ-homomorphism であることは Adams operation を交換することから従う. 任意の自然数 n と $f\in Cl_{\mathbb{Z}}(G), g\in G$ に対し $\psi^n\circ\pi^*(f)(g)=f(\pi(g^n))=f(\pi(g)^n)=\pi^*\circ\psi^n(f)(g)$ より確かに成り立つ. 写像 π^* が指標を指標へ移すことは先程示した通りで, 内積については任意の $f_1,f_2\in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ に対し,

$$\begin{aligned}\langle\pi^*(f_1),\pi^*(f_2)\rangle_{G'}&=\frac{1}{|G'|}\sum_{g\in G'}f_1(\pi(g))f_2(\pi(g)^{-1})\\&=\frac{1}{|G'|}\frac{|G'|}{|G|}\sum_{\alpha\in G}f_1(\alpha)f_2(\alpha^{-1})=\langle f_1,f_2\rangle_G\end{aligned}$$

となるので, $\pi^*\in\mathrm{HMR}(G,G')$ を得る.

特に $G=G'$ の時は自己同型写像 f について, Lemma 4.4 より $\pi^*(f)\circ\pi^*(f^{-1})=\pi^*(f^{-1}\circ f)=\pi^*(\mathrm{id}_G)=\mathrm{id}_{Cl_{\mathbb{Z}}(G)}$ となるので $\pi^*(f)\in\mathrm{HMR}(G)^\times$ であり, 逆元は $\pi^*(f^{-1})$ である. $\square$

これにより $\mathrm{HMR}(G)^\times$ の元として G の自己同型写像を ι で移した元を考えることができる. 写像 ι は全射であるかどうかは定かではないため, これだけで $\mathrm{HMR}(G)^\times$ の構造を調べつくしているとは言い難い. $\mathrm{HMR}(G)^\times$ のみならず, $\mathrm{HMR}(G,G')$ に他にどのような元が存在するかは今後の課題である.

しかし G が有限アーベル群の時は次の Theorem より $\mathrm{HMR}(G)^\times$ の構造を調べる問題は G の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ を調べる問題へと移り変わる.

Theorem 4.6. G を有限アーベル群とすると, 写像 $\iota:\mathrm{Aut}(G)\to\mathrm{HMR}(G)^\times$ が反同型写像となる.

証明のアイデアは, 写像 ι が単射になることと, 有限集合である $\mathrm{Aut}(G),\mathrm{HMR}(G)^\times$ の位数が一致することを述べる.

4.3 λ-subring とその基底

重複度母関数が一致する情報を得る手立てとして, $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ の λ-subring を求め, その $\mathbb{Z}$ 上基底を G の既約指標を用いて記述する方法が存在する. この節では, そのような 2 種類の λ-subring を $\mathrm{HMR}(G,G')$ を用いて求める.

Theorem 4.7. H を $\mathrm{HMR}(G)^\times$ の部分群とすると H は $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ に自然に作用する. この作用による $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ の各軌道について, 既約指標を含む軌道はその全ての元が既約指標である. 集合 I_H を, この作用による固定元全体と定義する.

$$I_H:=\{\theta\in Cl_{\mathbb{Z}}(G)\ \mid\ F(\theta)=\theta\text{ for }F\in H\}$$

この集合について次が成り立つ.

(1) 集合 I_H は $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ の λ-subring である.

(2) $X_1,\ldots,X_m$ を, 既約指標を含む軌道の全体とし, 各 $i=1,2,\ldots,m$ に対し σ_i を次のように定義する.

$$\sigma_i=\sum_{\chi\in X_i}\chi$$

このとき, $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\}$ は I_H の $\mathbb{Z}$ 上基底となる.

このことから, G の既約指標 χ_1,χ_2 が同じ軌道に属していれば (4.1) より任意の $\theta\in I_H$ に対して $\langle\chi_1,\lambda_t(\theta)\rangle_G=\langle\chi_2,\lambda_t(\theta)\rangle_G,\langle\chi_1,S_t(\theta)\rangle_G=\langle\chi_2,S_t(\theta)\rangle_G$ が成り立つ.

Proof. (1) $\mathrm{HMR}(G)^\times$ の定義から H に属する各写像が λ-homomorphism であるので明らかである.

(2) G の全ての既約指標を改めて $\chi_1, \ldots, \chi_k$ とおく. これらは特に $\mathbb{C}$ 上線形独立であるので $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ は $\mathbb{Z}$ 上線形独立である. 次に任意の $\theta \in I_H$ に対し特に $\theta = \sum_{i=1}^k c_i\chi_i (c_i \in \mathbb{Z})$ と書くことができる. 既約指標 χ_i, χ_j が H の作用により同じ軌道に属しているとすると $F(\chi_i) = \chi_j$ なる $F \in H$ が存在するが, $F(\theta) = \theta$ であるから両辺の χ_j の係数をみることで $c_i = c_j$ を示すことができる. よって, θ は $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ 達の整数和で書くことができる. □

Theorem 4.8. G, G' を有限群とし, $\pi : G' \to G$ を全射準同型写像とすると 写像 $\pi^* \in \mathrm{HMR}(G, G')$ は λ-monomorphism である. さらに集合 $\mathrm{Im}(\pi^*)$ は $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ と λ-ring として同型な $Cl_{\mathbb{Z}}(G')$ の λ-subring であり, $\chi_1, \ldots, \chi_k$ を G の全ての既約指標とすると $\mathrm{Im}(\pi^*)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底として $\{\pi^*(\chi_1), \ldots, \pi^*(\chi_k)\}$ をとることができる.

Proof. 写像 π^* が λ-homomorphism であることは先程示した通りで, $\pi : G' \to G$ が全射であることから π^* が単射であることは即座に従う. $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ は $\mathbb{Z}$ 上基底として $\{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ がとれるから, これの λ-homomorphism π^* による像 $\mathrm{Im}(\pi^*)$ の $\mathbb{Z}$ 上基底として $\{\pi^*(\chi_1), \ldots, \pi^*(\chi_k)\}$ をとることができる.

□

4.4 例

Example 4.9. この章の冒頭で述べた, 4 次交代群 A_4 の 3 次既約指標 τ_4 及び $Cl_{\mathbb{Z}}(A_4)$ の λ-subring について考える.

写像 $\pi : A_4 \to A_4$ を $\pi(\sigma) = (1\ 2)\sigma(1\ 2)$ と定義する. 但し $\sigma \in A_4$ である. 明らかに π は A_4 の自己同型群であり, 写像 $\pi^* \in \mathrm{HMR}(A_4)^\times$ について

$$\pi^*(\tau_1) = \tau_1,\ \pi^*(\tau_2) = \tau_3,\ \pi^*(\tau_3) = \tau_2,\ \pi^*(\tau_4) = \tau_4$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}\langle \tau_2, \lambda_t(\tau_4)\rangle_{A_4} &= \langle \pi^*(\tau_2), \lambda_t(\pi^*(\tau_4))\rangle_{A_4} = \langle \tau_3, \lambda_t(\tau_4)\rangle_{A_4},\\ \langle \tau_2, S_t(\tau_4)\rangle_{A_4} &= \langle \pi^*(\tau_2), S_t(\pi^*(\tau_4))\rangle_{A_4} = \langle \tau_3, S_t(\tau_4)\rangle_{A_4}\end{aligned}$$

を得ることができる.

さらに, $\mathrm{HMR}(A_4)^\times$ の部分群 H を $H = \{\mathrm{id}_{\mathrm{HMR}(A_4)^\times}, \pi^*\}$ とおくと, 集合 I_H の基底として $\{\tau_1,\ \tau_2{+}\tau_3,\ \tau_4\}$ をとることができる.

最後に, A_4 は正規部分群 $Y = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ を持つ. 写像 $\pi_1 : A_4 \to A_4/Y$ を自然な射影とすると, $\mathrm{Im}(\pi_1^*) \subset Cl_{\mathbb{Z}}(A_4)$ は $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ を $\mathbb{Z}$ 上基底にもつ $Cl_{\mathbb{Z}}(A_4)$ の λ-subring である. このことは, A_4 の指標 χ が $\langle \tau_4, \chi\rangle_{A_4} = 0$ を満たすならば $\langle \tau_4, \lambda_t(\chi)\rangle_{A_4} = \langle \tau_4, S_t(\chi)\rangle_{A_4} = 0$ が成り立つことを意味している.

参考文献

[1] 近藤 武, 岩波講座 基礎数学 代数学 i 群論 III, 岩波書店, 1977

[2] Donald Knutson, λ-Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group, Lecture Notes in Math., Vol. 308, Springer-Verlag, Berlin, 1973

[3] Maria Ronco, Free Lie algebra and lambda-ring structure, Bull. Austral. Math. Soc. Vol.50 (1994), 373-382

[4] Donald Yau, Lambda-rings, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010