数理解析研究所講究録
第 1964 巻 2015 年 113-124

On weakly separable extensions

岡山大学・大学院自然科学研究科 山中 聡 (Satoshi YAMANAKA)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

岡山大学・大学院自然科学研究科 池畑 秀一 (Shûichi IKEHATA)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

Abstract

非可換環上の分離拡大は幅広く研究されていたが, 最近, 浜口直樹と中島惇により分離拡大の一般化として弱分離拡大が導入された. 本論文では彼らが与えた結果を精密化および一般化することを目標とし, まず可換環上の弱分離多項式をその導関数および判別式により特徴付ける. さらに歪多項式環における多項式が弱分離的であるための必要十分条件を与え, これにより歪多項式環における分離性と弱分離性の差異を示す定理を与える.

1 序と準備

A/B を (単位元を共有する) 環拡大, M を両側 A-加群とする. 加法的な写像 $\delta : A \longrightarrow M$ が B-微分 (B-derivation) であるとは, $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ $(\forall x, y \in A)$ かつ $\delta(b) = 0$ $(\forall b \in B)$ が成り立つときにいう. さらにある適当な $m \in M$ により $\delta(x) = mx - xm$ $(\forall x \in A)$ となるとき, δ は内部的 (inner) であるという.

環拡大 A/B が分離的 (separable) であるとは, $a \otimes b \mapsto ab$ $(a, b \in A)$ で定められる $A \otimes_B A$ から A への A-A-準同型が分裂 (split) するときにいう. 分離拡大について, 次の補題は定義より直接的に示される.

補題 1.1. ([1, Satz 4.2]) 環拡大 A/B について, 次は同値である.
(1) A/B は分離拡大である.
(2) 任意の両側 A-加群 M について, A から M への B-微分はすべて内部的である.

[2] において中島惇と浜口直樹は分離拡大の一般化として次の定義を与えた.

定義 1.2. ([2, Definition 2.1]) 環拡大 A/B が弱分離的 (weakly separable) であるとは, A から A への B-微分がすべて内部的であるときにいう.

明らかに分離拡大は弱分離拡大である.

本研究は科研費 (基盤研究 (C) 234540049) の助成を受けたものである.

Bを環, ρをBの自己同型, Dをρ-微分(すなわちDはBの加法的な写像で$D(\alpha\beta) = D(\alpha)\rho(\beta) + \alpha D(\beta)$ ($\forall\alpha, \beta \in B$) をみたす) とする. このとき$B[X; \rho, D]$をその乗法が$\alpha X = X\rho(\alpha) + D(\alpha)$ ($\forall\alpha \in B$) で定まる歪多項式環とする. とくに$B[X; \rho] = B[X; \rho, 0]$ (自己同型型), $B[X; D] = B[X; 1, D]$ (微分型) と表す. また$B[X; \rho, D]_{(0)}$を$B[X; \rho, D]$におけるモニック多項式gで$gB[X; \rho, D] = B[X; \rho, D]g$をみたすもの全体とする. 任意の$f \in B[X; \rho, D]_{(0)}$について, $B[X; \rho, D]/fB[X; \rho, D]$は$B$上自由(free)な環拡大となる. このとき$f$が$B[X; \rho, D]$における分離多項式(resp. 弱分離多項式)であるとは, $B[X; \rho, D]/fB[X; \rho, D]$が$B$上分離的(resp. 弱分離的)であるときにいう.

ここで歪多項式環における分離多項式に関する基本的な結果を述べておこう. 歪多項式環における分離多項式は岸本量夫, 永原賢, 宮下庸一, および第二筆者により幅広く研究されてきた(参考文献参照). とくに永原は可換環上の分離多項式や歪多項式環における2次の分離多項式について徹底的に研究している. 永原は可換環上の分離多項式を次のように特徴づけた.

命題 1.3. ([10, Theorem 2.3]) Bを可換環, $f(X)$を$B[X]$におけるモニック多項式とする. このとき次は同値である.

(1) $f(X)$は$B[X]$において分離的である.
(2) $f(X)$の導関数$f'(X)$は$B[X]/(f(X))$において可逆である.
(3) $f(X)$の判別式$\delta(f(X))$はBにおいて可逆である.

一般の歪多項式環にける分離多項式について, 宮下庸一が与えた次の結果は最も基本的である.

命題 1.4. ([9, Theorem 1.8]) $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X; \rho, D]_{(0)}$, $A = B[X; \rho, D]/fB[X; \rho, D]$, $x = X + fB[X; \rho, D]$とする. このときfが$B[X; \rho, D]$において分離的であるための必要十分条件は, 適当な$h \in A$が存在して$\rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha$ ($\forall\alpha \in B$) かつ$\sum_{j=0}^{m-1} y_j h x^j = 1$が成り立つことである. ここで$y_j = x^{m-j-1} + x^{m-j-2}a_{m-1} + \cdots + xa_{j+2} + a_{j+1}$ $(0 \leq j \leq m-2)$ かつ$y_{m-1} = 1$とする.

最近, [13]において筆者らは$B[X; \rho]$と$B[X; D]$のそれぞれの場合において命題1.4の別証明を与えている.

[2]において, 浜口直樹と中島惇は可換環上の弱分離多項式や, 係数環が整域の場合の歪多項式環における弱分離多項式について調べた. 本論文の目標は浜口と中島が得た結果をより精密化および一般化することである. 第二章では可換環上の弱分離多項式$f(X)$を, その導関数$f'(X)$および判別式$\delta(f(X))$により特徴付ける. また第三章ではBが非可換環の場合の$B[X; \rho]$および$B[X; D]$それぞれにおいて, $B[X; \rho]_{(0)}$ (または$B[X; D]_{(0)}$) における多項式が弱分離的であるための必要十分条件を与える. さらに分離性と弱分離性の差異を示す定理を与える.

2 可換環上の弱分離多項式

この章では可換環上の弱分離多項式について考察する. 環拡大 A/B について, $(A\otimes_B A)^A = \{\mu \in A\otimes_B A \mid x\mu = \mu x\ (\forall x \in A)\}$ と定める. 良く知られているように, 環拡大 A/B が分離的であるための必要十分条件は, 適当な $\sum_j x_j \otimes y_j \in (A\otimes_B A)^A$ が存在して $\sum_j x_j y_j = 1$ となることである (cf. [3, Definition 2]). これに関連して, 可換環上の弱分離拡大について次が成り立つ.

補題 2.1. A/B を可換環拡大とする. このとき, 適当な $\sum_j x_j \otimes y_j \in (A\otimes_B A)^A$ が存在して $\sum_j x_j y_j$ が A における非零因子となるならば, A/B は弱分離拡大である.

証明. D を任意の A の B-微分とし, 適当な $\sum_j x_j \otimes y_j \in (A\otimes_B A)^A$ が存在して $\sum_j x_j y_j$ が A における非零因子であるとする. また以下の A-B-準同型を考える:

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes_B A & \longrightarrow & A\otimes_B A & \longrightarrow & A \\ x\otimes y & \longmapsto & x\otimes D(y) & \longmapsto & xD(y) \end{array}$$

このとき, 任意の $\alpha \in A$ について $\alpha \sum_j x_j \otimes y_j = \sum_j x_j \otimes y_j \alpha$ より

$$\alpha \sum_j x_j D(y_j) = \sum_j x_j D(y_j \alpha) = \sum_j x_j D(y_j)\alpha + \sum_j x_j y_j D(\alpha),$$

すなわち $\sum_j x_j y_j D(\alpha) = 0$ を得る. よって仮定から $D(\alpha) = 0$ となり, したがって A/B は弱分離的である. □

ここからは B を可換環とする. 多項式 $f(X) \in B[X]$ について, $f'(X)$ および $\delta(f(X))$ をその導関数および判別式とする. 命題 1.3 でみたように, $B[X]$ における分離多項式 $f(X)$ は $f'(X)$ および $\delta(f(X))$ の可逆性により特徴付けられている. これに関連して, [2, Theorem 3.1 and Corollary 3.2] において浜口直樹と中島惇は $B[X]$ における $f(X) = X^m - Xa - b$ という形の多項式について, 以下が同値であることを示した:

(1) $f(X) = X^m - Xa - b$ は $B[X]$ において弱分離的である.
(2) $f'(X)$ は $B[X]/(f(X))$ における非零因子である.
(3) $\delta(f(X))$ は B における非零因子である.

上記の結果を $B[X]$ における一般のモニック多項式の場合に拡張し, 次の結果を得た.

定理 2.2. B を可換環, $f(X)$ を $B[X]$ におけるモニック多項式とする. このとき次は同値である.

(1) $f(X)$ は $B[X]$ における弱分離多項式である.
(2) $f'(X)$ は $B[X]/(f(X))$ における非零因子である.
(3) $\delta(f(X))$ は B における非零因子である.

証明. [10, Theorem 1.3] において, (2) と (3) が同値であることはすでに知られている. ここでは (1) と (2) が同値であることを示す. $f(X) = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X]$, $A = B[X]/(f(X))$, $x = X + (f(X))$ とする.

(2) $\Longrightarrow$ (1) $f'(X)$ が $B[X]/(f(X))$ における非零因子であるとする. $y_j = x^{m-j-1} + x^{m-j-2}a_{m-1} + \cdots + xa_{j+2} + a_{j+1}$ $(0 \le j \le m-2)$ かつ $y_{m-1} = 1$ とすれば, [13, Lemma 2.1] (または [13, Lemma 3.1]) により

$$(A \otimes_B A)^A = \{\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j) \mid h \in A\}$$

が成り立つ. とくに $\sum_{j=0}^{m-1} y_j \otimes x^j \in (A \otimes_B A)^A$ である. また $f'(x) = \sum_{j=0}^{m-1} y_j x^j$ であることは容易に確かめられる. いま $f'(x)$ は A における非零因子なので, 補題 2.1 より $f(X)$ は $B[X]$ における弱分離多項式である.

(1) $\Longrightarrow$ (2) $f(X)$ を $B[X]$ における弱分離多項式とし, $g(x) = g(X) + (f(X)) \in A$ $(g(X) \in B[X])$ が $f'(x)g(x) = 0$ をみたすとする. このとき $D^*(X) = g(X)$ により定められる $B[X]$ の B-微分 D^* について, $f'(x)g(x) = 0$ より明らかに $D^*(f(X)) \in (f(X))$ である. よって D^* の自然な拡張として, A の B-微分 D で $D(x) = g(x)$ となるものが存在するが, $f(X)$ が弱分離的であることより $D(x) = g(x) = 0$ を得る. したがって $f'(x)$ は A における非零因子である. □

3 歪多項式環における弱分離多項式

[2] において, 浜口直樹と中島惇は係数環 B が整域の場合の歪多項式環 $B[X;\rho]$ および $B[X;D]$ における弱分離多項式について考察した. 本章では $B[X;\rho]$ と $B[X;D]$ それぞれの場合において彼らの結果を B が非可換環の場合へと拡張する.

本章を通して以下の記号を用いる:

$Z = B$ の中心.

$V_A(B) = \{x \in A \mid \alpha x = x\alpha \ (\forall \alpha \in B)\}$.

$B^\rho = \{\alpha \in B \mid \rho(\alpha) = \alpha\}$.

$B^D = \{\alpha \in B \mid D(\alpha) = 0\}$ かつ $Z^D = Z \cap B^D$.

3.1 自己同型型 $B[X;\rho]$ の場合

ここでは次のような形の $f \in B[X;\rho]_{(0)} \cap B^\rho[X]$ を考える:

$$f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 = \sum_{j=0}^{m} X^j a_j \quad (a_m = 1,\ m \ge 2).$$

このとき [4, Lemma 1.3] より $\alpha a_j = a_j\rho^{m-j}(\alpha)$ $(\forall\,\alpha\in B,\ 0\le j\le m-1)$ となることに注意しよう. $A=B[X;\rho]/fB[X;\rho]$, $x=X+fB[X;\rho]\in A$ とし, ρ の自然な拡張として得られる A の自己同型を $\tilde{\rho}$ とする (すなわち $\tilde{\rho}(\sum_{j=0}^{m-1}x^jc_j)=\sum_{j=0}^{m-1}x^j\rho(c_j)$ $(c_j\in B)$). また $V=V_A(B)$, $J_{\rho^k}=\{h\in A\,|\,\alpha h=h\rho^k(\alpha)\ (\alpha\in B)\}$ $(k\ge 1)$, $V^{\tilde{\rho}}=\{h\in V\,|\,\tilde{\rho}(h)=h\}$ とする. このとき以下のように定められる $V^{\tilde{\rho}}$-$V^{\tilde{\rho}}$-準同型 $\tau: J_\rho \longrightarrow J_{\rho^m}$ を考える:

$$\begin{aligned}\tau(h)&=x^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\tilde{\rho}^j(h)+x^{m-2}\sum_{j=0}^{m-2}\tilde{\rho}^j(h)a_{m-1}+\cdots x\{\tilde{\rho}(h)+h\}a_2+ha_1\\&=\sum_{k=0}^{m-1}x^k\sum_{j=0}^{k}\tilde{\rho}^j(h)a_{k+1}.\end{aligned}$$

まず最初に次の補題を示す.

補題 3.1. A の B-微分 δ について, $\delta(x)\in J_\rho$ かつ $\tau(\delta(x))=0$ が成り立つ.
逆に $\tau(g)=0$ をみたす $g\in J_\rho$ について, A の B-微分 δ で $\delta(x)=g$ となるものが存在する.

証明. δ を A の B-微分とする. このとき, 任意の $\alpha\in B$ について $\alpha\delta(x)=\delta(x)\rho(\alpha)$ となることは明らかである. また $\delta(x^k)=x^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{\rho}^i(\delta(x))$ $(k\ge 2)$ より

$$0=\delta(\sum_{k=0}^{m}x^ka_k)=\sum_{k=0}^{m-1}\delta(x^{k+1})a_{k+1}=\sum_{k=0}^{m-1}x^k\sum_{j=0}^{k}\tilde{\rho}^j(\delta(x))a_{k+1}=\tau(\delta(x))$$

を得る.

逆に $g=g_0+fB[X;\rho]\in J_\rho$ $(g_0\in B[X;\rho])$ が $\tau(g)=0$ をみたすとき, $\alpha g_0=g_0\rho(\alpha)$ $(\forall\,\alpha\in B)$ より $B[X;\rho]$ の B-微分 δ^* で $\delta^*(X)=g_0$ となるものが定められる. このとき $\tau(g)=0$ より $\delta^*(f)\in fB[X;\rho]$ が確かめられるので, δ^* の自然な拡張として A の B-微分 δ で $\delta(x)=g$ となるものが存在する. □

[2] において, B が整域の場合の $B[X;\rho]$ における弱分離多項式に関する必要十分条件が与えられた. この結果は B が非可換環の場合において次のように拡張される.

定理 3.2. $f=X^m+X^{m-1}a_{m-1}+\cdots+Xa_1+a_0\in B[X;\rho]_{(0)}\cap B^\rho[X]$ とする. このとき f が $B[X;\rho]$ において弱分離的であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\{g\in J_\rho\,|\,\tau(g)=0\}=\{x(\tilde{\rho}(h)-h)\,|\,h\in V\}.$$

証明. まず, 常に $\{g\in J_\rho\,|\,\tau(g)=0\}\supset\{x(\tilde{\rho}(h)-h)\,|\,h\in V\}$ が成り立つことに注意しておく. 実際, 任意の $h\in V$ について $\sum_{k=0}^{m-1}x^k(\tilde{\rho}^k(h)-\tilde{\rho}^m(h))a_k=0$ が成り立ち,

したがって

$$\begin{aligned}\tau(x(\tilde{\rho}(h)-h)) &= \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(x(\tilde{\rho}(h)-h))a_{k+1} \\ &= x^m \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{\rho}^j(\tilde{\rho}(h)-h) + \sum_{k=0}^{m-2} x^{k+1} \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(\tilde{\rho}(h)-h)a_{k+1} \\ &= (-\sum_{k=0}^{m-1} x^k a_k)(\tilde{\rho}^m(h)-h) + \sum_{k=1}^{m-1} x^k(\tilde{\rho}^k(h)-h)a_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} x^k(\tilde{\rho}^k(h)-\tilde{\rho}^m(h))a_k \\ &= 0\end{aligned}$$

となる.

$\{g \in J_\rho \,|\, \tau(g)=0\} = \{x(\tilde{\rho}(h)-h) \,|\, h \in V\}$ を仮定し, δ を任意の A の B-微分とする. 補題 3.1 より $\delta(x) \in J_\rho$ かつ $\tau(\delta(x))=0$ なので, 仮定より適当な $h \in V$ により $\delta(x) = x(\tilde{\rho}(h)-h) = hx - xh$ と表される. このとき任意の $w \in A$ について $\delta(w) = hw - wh$ が成り立つので δ は内部的であり, したがって f は $B[X;\rho]$ における弱分離多項式である.

逆に f が $B[X;\rho]$ における弱分離多項式であると仮定する. 任意の $p \in \{g \in J_\rho \,|\, \tau(g)=0\}$ について, 補題 3.1 より A の B-微分 δ で $\delta(x)=p$ をみたすものが存在する. このとき f が弱分離的であることより, 適当な $h \in V$ により $p = \delta(x) = hx - xh = x(\tilde{\rho}(h)-h) \in \{x(\tilde{\rho}(h)-h) \,|\, h \in V\}$ となる. □

定理 3.2 により, 浜口直樹と中島惇が与えた次の結果を得る.

系 3.3. ([2, Theorem 4.1.4 (ii)]) B を整域, m を ρ の位数, $f = X^m - u$ $(u \neq 0) \in B[X;\rho]_{(0)}$ とする. このとき f が $B[X;\rho]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\{b \in B \mid \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j(b) = 0\} = \{\rho(c) - c \,|\, c \in B\}.$$

証明. まず B が整域であることから, $J_\rho = \{xb \,|\, b \in B\}$ かつ $V = B$ であることが容易に確かめられる. $\tau(xb) = 0$ $(b \in B)$ のとき,

$$0 = \tau(xb) = x^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{\rho}^j(xb) = u \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j(b)$$

より $\sum_{j=0}^{m-1} \rho^j(b) = 0$ となる. よって定理 3.2 より結論を得る. □

定理 3.2 により, $B[X;\rho]$ における分離性と弱分離性の差異を次のように特徴付けることができる.

定理 3.4. ρ の位数を m, $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho]_{(0)} \cap B^\rho[X]$ とする. また $C(A)$ を A の中心, I_x を x によって定められる A の内部微分 (すなわち, $I_x(h) = hx - xh$ $(h \in A)$) とする. .

(1) f が $B[X;\rho]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は, $V^{\tilde{\rho}}$-$V^{\tilde{\rho}}$-準同型からなる次の列が完全系列となることである:

$$0 \longrightarrow C(A) \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{I_x} J_\rho \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{\rho}}.$$

(2) f が $B[X;\rho]$ における分離多項式であるための必要十分条件は, $V^{\tilde{\rho}}$-$V^{\tilde{\rho}}$-準同型からなる次の列が完全系列となることである:

$$0 \longrightarrow C(A) \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{I_x} J_\rho \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{\rho}} \longrightarrow 0.$$

証明. まず任意の $g \in J_\rho$ について, $\tilde{\rho}^j(g)a_j = ga_j$ $(0 \leq j \leq m-1)$ に注意すれば $\mathrm{Im}\,\tau \subset V^{\tilde{\rho}}$ であることが確かめられる.

(1) 定理 3.2 より自明である.

(2) 分離多項式は弱分離多項式であるので, 定理の主張を示すには $\mathrm{Im}\,\tau = V^{\tilde{\rho}}$ を示せば十分である. 命題1.4 より, f が $B[X;\rho]$ における分離多項式であるための必要十分条件は適当な $h \in A$ が存在して $\rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha$ $(\forall\, \alpha \in B)$ かつ $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h x^j = 1$ が成り立つことである. いま ρ の位数は m なので $h \in J_\rho$ であり, さらに $y_j x^j = \sum_{k=j}^{m-1} x^k a_{k+1}$ より,

$$1 = \sum_{j=0}^{m-1} y_j x^j \tilde{\rho}^j(h) = \sum_{j=0}^{m-1} \{\sum_{k=j}^{m-1} x^k a_{k+1}\} \tilde{\rho}^j(h) = \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(h) a_{k+1} = \tau(h)$$

を得る. これは $\mathrm{Im}\,\tau = V^{\tilde{\rho}}$ を意味する. □

注意 1. ここまで本章において $f \in B[X;\rho]_{(0)} \cap B^\rho[X]$ を仮定していたが, 一般的に $B[X;\rho]_{(0)}$ における多項式が常に $B^\rho[X]$ に含まれるとは限らない. これに関して, 例えば [4, Corollary 1.5] において, B が半単純環ならば $B[X;\rho]_{(0)}$ における多項式は常に $C(B^\rho)[X]$ ($C(B^\rho)$ は B^ρ の中心) に含まれることが示されている.

3.2 微分型 $B[X;D]$ の場合

ここからは B の標数を素数 p とし, 次のような p-多項式 $f \in B[X;D]_{(0)}$ を考える:

$$f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}} b_e + \cdots + X^p b_2 + X b_1 + b_0 = \sum_{j=0}^{e} X^{p^j} b_{j+1} + b_0 \ (b_{e+1} = 1).$$

ここで補題 [4, Lemma 1.5] より

$$b_0 \in B^D,\ b_{j+1} \in Z^D\ (0 \le j \le e-1),\ \sum_{j=0}^{e} D^{p^j}(\alpha) b_{j+1} = b_0\alpha - \alpha b_0 \quad (\forall \alpha \in B)$$

が成り立つことに注意しよう． $A = B[X;D]/fB[X;D]$, $x = X + fB[X;D] \in A$ とし, D の自然な拡張として得られる A の (内部) 微分を $\tilde{D}$ とする (すなわち $\tilde{D}(\sum_{j=0}^{p^e-1} x^j c_j) = \sum_{j=0}^{p^e-1} x^j D(c_j)$ $(c_j \in B)$). また $V = V_A(B)$, $V^{\tilde{D}} = \{v \in V \mid \tilde{D}(v) = 0\}$ とする．ここで以下のように定められる V から $V^{\tilde{D}}$ への $V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型 τ を考える:

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \tilde{D}^{p^e-1}(h) + \tilde{D}^{p^{e-1}-1}(h)b_e + \cdots + \tilde{D}^{p-1}(h)b_2 + hb_1 \\ &= \sum_{j=0}^{e} \tilde{D}^{p^j-1}(h) b_{j+1}.\end{aligned}$$

初めに A の B-微分に関する 2 つの補題を示す.

補題 3.5. δ が A の微分ならば, 次が成り立つ:

$$\delta(x^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x)) \quad (k \ge 2).$$

証明. 帰納法を用いて示す．まず $k = 2$ のときは明らかである．k のとき成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}\delta(x^{k+1}) &= \delta(x^k)x + x^k\delta(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} x^j \tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x))x + x^k\delta(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} x^j \left\{ x\tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) \right\} + x^k\delta(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} x^{j+1} \tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x)) + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} x^j \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + x^k\delta(x) \\ &= kx^k\delta(x) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j-1} x^j \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j} x^j \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^k(\delta(x)) + x^k\delta(x) \\ &= (k+1)x^k\delta(x) + \sum_{j=1}^{k-1}\left\{\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}\right\} x^j \tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^k(\delta(x))\end{aligned}$$

$$= (k+1)x^k\delta(x) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k+1}{j}x^j\tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^k(\delta(x))$$
$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}x^j\tilde{D}^{k-j}(\delta(x))$$

となり,結論を得る. □

補題 3.6. A の B-微分 δ について, $\delta(x) \in V$ かつ $\tau(\delta(x)) = 0$ が成り立つ.

逆に $\tau(g) = 0$ をみたす $g \in V$ について, A の B-微分 δ で $\delta(x) = g$ となるものが存在する.

証明. δ を A の B-微分とする. このとき任意の $\alpha \in B$ について $\alpha\delta(x) = \delta(x)\alpha$ となることは明らかである. また補題 3.5 より,

$$0 = \delta(\sum_{j=0}^{e} x^{p^j}b_{j+1} + b_0) = \sum_{j=0}^{e}\delta(x^{p^j})b_{j+1} = \sum_{j=0}^{e}\tilde{D}^{p^j-1}(\delta(x))b_{j+1} = \tau(\delta(x))$$

を得る.

逆は補題 3.1 の証明と同様である. □

[2] において, B が整域の場合の $B[X;D]$ における弱分離多項式に関する必要十分条件が与えられた. この結果は B が非可換環の場合において次のように拡張される.

定理 3.7. $f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}}b_e + \cdots + X^p b_2 + Xb_1 + b_0 \in B[X;D]_{(0)}$ とする. このとき f が $B[X;D]$ にいて弱分離的であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} = \tilde{D}(V).$$

証明. まず, 任意の $h \in V$ について $\sum_{j=0}^{e} D^{p^j}(h)b_{j+1} = 0$ であることより, 常に $\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} \supset \tilde{D}(V)$ が成り立つことに注意しておく.

$\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} = \tilde{D}(V)$ を仮定する. このとき任意の A の B-微分 δ に対し, 補題 3.6 より $\delta(x) \in \{g \in V \mid \tau(g) = 0\}$ である. よって適当な $h \in V$ により $\delta(x) = \tilde{D}(h) = hx - xh$ と表される. このとき, 任意の $w \in A$ について $\delta(w) = hw - wh$ であることは容易に確かめられる. よって δ は内部的であり, したがって f は $B[X;D]$ における弱分離多項式である.

逆に f が $B[X;D]$ における弱分離多項式であると仮定する. 任意の $p \in \{g \in V \mid \tau(g) = 0\}$ について, 補題 3.6 より A の B-微分 δ で $\delta(x) = p$ となるものが存在する. このとき f が弱分離的であることより, 適当な $h \in V$ により $p = \delta(x) = hx - xh = \tilde{D}(h) \in \tilde{D}(V)$ となる. □

定理 3.7 により, 浜口直樹と中島惇が与えた次の結果を得る.

系 3.8. ([2, Theorem 4.2.3]) B を素数標数 p の整域とし，$f = X^p + Xb_1 + b_0 \in B[X;\rho]_{(0)}$ とする．このとき f が $B[X;D]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は次が成り立つことである：

$$\{c \in B \mid D^{p-1}(c) + cb_1 = 0\} = D(B).$$

証明. 定理 3.7 より，上の系を示すには $V = B$ であることを示せば十分である．$h = \sum_{j=0}^{p-1} x^j c_j \in V$ とする．このとき任意の $\alpha \in B$ について $\alpha h = h\alpha$ であることより，

$$c_i\alpha = \sum_{j=i}^{p-1} \binom{j}{i} D^{j-i}(\alpha)c_j \quad (0 \leq i \leq p-1)$$

となる．とくに $c_{p-2}\alpha = \alpha c_{p-2} + (p-1)D(\alpha)c_{p-1}$ なので，B が整域であることより $c_{p-1} = 0$ を得る．これを繰り返すと $h = c_0 \in B$ となり，結論を得る． □

定理 3.7 により $B[X;D]$ における分離性と弱分離性の差異を次のように表すことができる．

定理 3.9. $f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}}b_e + \cdots + X^p b_2 + Xb_1 + b_0 \in B[X;D]_{(0)}$ とする．

(1) f が $B[X;D]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は，$V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型からなる次の列が完全系列となることである：

$$0 \longrightarrow V^{\tilde{D}} \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{\tilde{D}} V \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{D}}.$$

(2) f が $B[X;D]$ における分離多項式であるための必要十分条件は，$V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型からなる次の列が完全系列となることである：

$$0 \longrightarrow V^{\tilde{D}} \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{\tilde{D}} V \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{D}} \longrightarrow 0.$$

証明. (1) 定理 3.7 より明らかである．

(2) 分離多項式は弱分離多項式であるので，定理の主張を示すには $\operatorname{Im}\tau = V^{\tilde{D}}$ を示せば十分である．[4, Theorem 4.1] において示されているとおり，f が $B[X;D]$ において分離的であるための必要十分条件は，適当な $h \in V$ が存在して $\tau(h) = 1$ が成り立つことである．これは $\operatorname{Im}\tau = V^{\tilde{D}}$ を意味する． □

注意 2. ここまで B の標数を素数 p としてきたが，標数を仮定しない一般の環 B の場合でも同様の結果が成り立つと予想される．実際，$f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;D]_{(0)}$, $A = B[X;D]/fB[X;D]$, $x = X + fB[X;D]$ とするとき，

$$\tau(h) = \sum_{i=0}^{m-1} x^i \sum_{j=i}^{m-1} \binom{j+1}{i} \tilde{D}^{j-i}(h)a_{j+1} \quad (h \in V)$$

によって定められる $V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型 $\tau : V \longrightarrow A^{\tilde{D}}$ を考えれば，定理 3.7 に相当する結果として次が成り立つ．

命題 3.10. $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;D]_{(0)}$ とする. このとき f が $B[X;D]$ において弱分離的であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} = \tilde{D}(V).$$

同様に $B[X;D]$ における一般のモニック多項式についても, 分離性と弱分離性の差異を示す結果 (定理 3.9 に相当する結果) が得られると予想されるが, これはまだ証明に至っていない. この他に, 一般の歪多項式環 $B[X;\rho,D]$ のにおける弱分多項式の研究も, 今後の課題のひとつである,

参考文献

[1] S. Elliger, Über automorphismen und derivationen von ringen, *J. Reine Angew. Math.,* **277** 1975, 155–177.

[2] N. Hamaguchi and A. Nakajima, On generalizations of separable polynomials over rings, *Hokkaido Math. J.,* **42** 2013, no. 1, 53–68.

[3] K. Hirata and K. Sugano, On semisimple extensions and separable extensions over noncommutative rings, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 360–373.

[4] S. Ikehata, On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **22** 1980, 115–129.

[5] S. Ikehata, Azumaya algebras and skew polynomial rings, *Math, J. Okayama Univ.,* **23** 1981, 19–32.

[6] S. Ikehata, A note on separable polynomials of derivation type, *Int. J. Algebra,* **3** no.15, 2009, 707–711.

[7] S. Ikehata, On separable and H-separable polynomials of degree p in skew polynomial rings, *Int. J. Pure Appl. Math.,* **51** no. 1, 2009, 129–156.

[8] K. Kishimoto, On abelian extensions of rings. I, *Math. J. Okayama Univ.,* **14** 1970, 159–174.

[9] Y. Miyashita, On a skew polynomial ring, *J. Math. Soc. Japan,* **31** 1979, no. 2, 317–330.

[10] T. Nagahara, On separable polynomials over a commutative ring II, *Math. J. Okayama Univ.,* **15** 1972, 149–162.

[11] T. Nagahara, On separable polynomials of degree 2 in skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **19** 1976, 65–95.

[12] K. Sugano, Separable extensions and Frobenius extensions, *Osaka J. Math.* **7** (1970), 29–40.

[13] S. Yamanaka and S. Ikehata, An alternative proof of Miyasita's theorem in a skew polynomial rings, *Int. J. Algebra,* **21** 2012, 1011–1023.

[14] S. Yamanaka and S. Ikehata, On Galois polynomials of degree p in skew polynomial rings of derivation type, *Southeast Bull. Math.,* **37** 2013, 625–634.

[15] S. Yamanaka, On weakly separable polynomials and weakly quasi-separable polynomials over rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **58** 2016, to appear.

[16] 山中聡, 歪多項式環と種々の環拡大, 岡山大学大学院自然科学研究科博士論文, 2015年3月.

E-mail address : s_yamanaka@math.okayama-u.ac.jp
E-mail address : ikehata@ems.okayama-u.ac.jp