数理解析研究所講究録
第 1964 巻 2015 年 98-104

Linear cellular automata over commutative Artin rings

東洋大学総合情報学部

佐藤　忠一

Tadakazu Sato

Department of Information Science and Arts
Toyo University

1．　まえがき

セルオートマトンは各セルの状態集合は有限集合として議論され、それ故並列写像の単射性や全射性との間には顕著な関係があるがセルの状態集合を無限集合にまで広げると、セルオートマトンを線形に制限しても並列写像のこの関係が崩れてしまう。そこで、線形セルオートマトンの場合状態集合として、どのような無限環を選べば有限集合上のセルオートマトンと同じような議論ができるのかを調べた結果、可換なアルティン環上であれば有限集合上と同じ議論ができることを示す。さらに、線形並列写像の逆写像を求める過程で現れる線形局所関数の群について述べ、この群は局所関数のスコープ幅には無関係ですべて可換なアルティン環の単元の集合と同型になっていることを示す。また群の逆元と並列写像の逆写像との間の関係を明らかにする。

2．　諸定義と基本的性質

１次元セルオートマトンは４組$\langle Z,Q,n,f \rangle$で与えられる。ここで、Zは整数の集合で１次元セル空間、Qはセルがとる状態の有限集合、nは近傍のサイズ、fは$Q^n \to Q$なる写像で局所関数と呼ばれる。

写像　$c:Z \to Q$　を様相といい、様相の集合をQ^Zで表す。

並列写像$f_\infty : Q^Z \to Q^Z$は次のように定義される。

$$f_\infty(c_1)=c_2 \Leftrightarrow c_2(i)=f(c_1(i),\cdots,c_1(i+n-1)) \quad ({}^\forall i \in Z).$$

シフト写像$\sigma : Q^Z \to Q^Z$は以下のように定義される。

$$\sigma(c_1)=c_2 \Leftrightarrow c_2(i)=c_1(i+1) \quad ({}^\forall i \in Z)$$

並列写像の一般形は${}^\exists s \in Z,\quad \sigma^s f_\infty$で表せられる。シフト写像$\sigma$は全単射なので

並列写像の単射性、全射性はf_∞について調べればよい。また適当な線形局所関数

$g : Q^m \to Q$に対して${}^\exists k \in Z,\ f_\infty g_\infty \sigma^k = I$であるとき$f_\infty$は逆写像をもつ。

ここで、fとgの近傍のサイズは一般に等しくはない。($n \neq m$である。)
Richardoson[1] は並列写像に対して次の関係が成立することを示した。
ここで、$C_F(Q)$は$C(Q)$の部分集合でセルの状態が有限個を除いて静止状態である

様相の集合である。

$$f_\infty \text{ is injective on } C(Q) \quad \Leftrightarrow \quad f_\infty \text{ has an inverse}$$

$$\Downarrow$$

$$f_\infty \text{ is surjective on } C(Q) \Leftrightarrow f_\infty \text{ is injective on } C_F(Q)$$

図１．並列写像の関係

注意１．図１における並列写像の関係はセルの状態の集合Qが無限集合の場合

並列写像を線形に限っても一般には成立しない。

例１． $f=2x$　をZ上のスコープ幅１の線形局所関数とする。明らかに$f_\infty=2$は

単射でその逆写像は$f_\infty^{-1}=1/2$　しかし，$1/2 \notin Z$ なので逆写像は存在

しない。

可換なアルティン環Rとはイデアルに関する降鎖条件を満たす環である。

すなわち、Rの任意イデアル$\{I_j\}$に対して次の条件を満たすことである。

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots I_n \supseteq \cdots$ ならば、適当なnに対して $I_n = I_{n+1}$.

可換なアルティン環R上の１次元線形セルオートマトンは４組$\langle Z, R, n, f \rangle$で

与えられる。ここでfは$R^n \to R$なる線形写像で$f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$

は線形局所関数と呼ばれる。

線形並列写像$f_\infty : R^Z \to R^Z$は次のように定義される。

$$f_\infty(c_1) = c_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2(i) = \sum_{j=1}^{n} a_j c_1(i+j-1) \quad \text{for all } i \in Z.$$

従って、並列写像は$f_\infty = \sum_{j=1}^{n} a_j \sigma^{j-1}$のように表せられる。明らかに

$f_\infty \sigma = \sigma f_\infty$ が成立する。シフト写像σを不定元Xと同一視すれば以下のようになる。

$$f_\infty = \sum_{j=1}^{n} a_j \sigma^{j-1} \quad \Leftrightarrow \quad F(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j X^{j-1}$$

$$\therefore f_\infty \sigma = \sigma f_\infty \quad \Leftrightarrow \quad F(X)X = XF(X)$$

命題（可換なアルティン環の構造定理）可換なアルティン環Rは局所環に一意に直和分解される。すなわち、$R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_k$ ここで、kはRにおける極大イデアルの個数である。

可換なアルティン環の例

$$\{Z_m\} \subsetneq \{\text{有限可換環}\} \subsetneq \{\text{可換なアルティン環}\}$$

次に、線形並列写像の単射性や全射性の判定に不可欠なザリスキー位相について簡単に説明する。

$Spec(R)$ で R のすべての素イデアルの集合を表し、$N(R)$ で R のすべてのベキ零元の集合を表す。$N(R)=\bigcap_{P\in Spec(R)} P$ が成立することが知られている。

$D(a_j)=\{P\in Spec(R)\mid a_j\notin P\}$ はザリスキー位相のベースである。

3．　線形セルオートマトンの単射性・全射性

$h:R\to R/N(R)$ を環準同型写像とする。R 上の線形局所関数

$f=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j$ に対して $R/N(R)$ 上の線形局所関数を $h(f)=\sum_{j=1}^{n}h(a_j)x_j$ で定義する。

補題　f_∞ が $C(R)$ 上で単射（全射）になるための必要かつ十分条件は $h(f)_\infty$ が $C(R/N(R))$ 上で単射（全射）になることである。

定理１．$f=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j$ に対して、次の各命題はすべて等価である。

（１）f_∞ は $C(R)$ 上で全射である。

（２）f_∞ は $C_F(R)$ 上で単射である。

（３）$F(X)$ は零因子ではない。

（４）$(a_1,\cdots,a_n)=1.$

（５）$\bigcup_{j=1}^{n}D(a_j)=Spec(R).$

定理２．$f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して、次の各命題はすべて等価である。

（１） f_∞ は $C(R)$ 上で単射である。

（２） f_∞ は $C(R)$ 上で逆写像を持つ。

（３） f_∞ は $C_F(R)$ 上で全射である

（４） $Spec(R)=\bigcup_{j=1}^{n} D(a_j)$ かつ $D(a_i)\cap D(a_j)=\phi \quad (i\neq j)$

（５） $\sum_{j=1}^{n} a_j \in R^*$ かつ $a_i a_j \in N(R) \quad (i\neq j)$

（６） $\sum_{j=1}^{n} h(a_j) \in (R/N(R))^*$ かつ $h(a_i)h(a_j)=0(i\neq j)$

ここで、R^* は R の単元の集合である。

系１．可換なアルティン環上の線形並列写像はセルの状態集合が有限集合上の並列写像と同じように図１の関係が成り立つ。

４． R 上の線形局所関数の群

定義１．R 上の線形局所関数 $f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \quad (a_j\neq 0)$ に対して $\sum_{j=1}^{n} a_j \in R^*$ かつ $a_i a_j=0(i\neq j)$ が成り立つとき f は群構造をもつという。

明らかに、f が群構造をもてば f_∞ は単射である。

定理２の（６）より次の系１が成り立つ。

系２．f_∞ が $C(R)$ 上で単射になるための必要かつ十分条件は $h(f)_\infty$ が $C(R/N(R))$ 上で群構造をもつことである。

定理３．R 上の線形局所関数 $f = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n (a_j \neq 0)$ が群構造をもつとき

f の係数の和を $\alpha \in R^*$ 、$f^0 = \alpha^{-1} f$ とおくと $G(f) = \{\beta f^0 \mid \beta \in R^*\}$

は線形局所関数の係数の成分ごとの積により群をなす。特に、f^0 の係数の

和は１で群 $G(f)$ の単位元である。明らかに $G(f) \cong R^*$

系３．R 上のスコープ n 幅の群構造を持つ線形局所関数の群を G_n とおくと

$^\forall f \in G_n$ に対して、$G_n \cong \{\alpha f \mid \alpha \in R^*\} \cong R^*$ が成立する。

次に線形局所関数が群構造を持つ場合並列写像の逆写像について考える。並列写像

$f_\infty = \sum_{j=1}^{n} a_j \sigma^{j-1}$ に対して共役な並列写像 $\bar{f}_\infty$ を次のように定義する。

$\bar{f}_\infty = \sum_{j=1}^{n} a_j \sigma^{-(j-1)}$， 明らかに $\bar{f}_\infty f_\infty = f_\infty \bar{f}_\infty = (a_1 + \cdots + a_n)^2$

定理４．$^\forall f \in G_n$ に対して、$f = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ とすると次式が成立。

$$f_\infty^{-1} = (a_1 + \cdots + a_n)^{-2} \bar{f}_\infty = (a_1 + \cdots + a_n)^{-1} \bar{f}^0{}_\infty$$

すなわち、並列写像の逆写像を求めるには f の群における逆元を求めて、その共役な並列写像を作ればよい。

系４．$f \in G_n$ が群の単位元のとき f 自身の共役な並列写像が逆写像となる。

次に G_n から G_{n-1} の作り方を考える。$^\forall f \in G_n$ に対して f の任意の２つの

係数を加えてできるスコープ幅 $n-1$ の線形局所関数 g を考える。明らかに g は

群構造をもつので $g \in G_{n-1}$ が成立する。

定理５．$K = |\mathrm{Spec}(R)|$ とすると次の定理（同型定理）が成立する。

$$R^* \cong G_1 \cong \cdots \cong G_n \cong \cdots \cong G_k$$

線形セルオートマトンではセル空間が多次元でも同様な結果が成立する。

5．参考文献

[1] S. Amoroso and Y. N. Patt, Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures. J.Comput.Systems Sci.6(1972),448-464.

[2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to commutative algebra,(1969) Addison-Wesley Pub.

[3] R Gilmer and W Heinzer, Products of commutative rings and zero-dimensionality, Transaction of the A M S 331 no.2 (1992) 663-680

[4] H. Aso and N. Honda, Dynamical characteristics of linear cellular automata, J. Comput. System Sci.30 No3 (1985),291-317.

[5] M. Garzon, "Models of Massive Parallelism "EATACS Text in Theoretical Computer Science, Springer-Verlag, New-York/Berlin, (1995).

[6] G. A. Hedlund, Endomorphisms and automorphisms of shift dynamical systems. Mathematical systems Theory 3 (1969), 320-375.

[7] M. Ito, N. Osato and M. Nasu, Linear cellular automata over Zm, J.Comput. System Sci.27 No.2 (1983), 125 – 140.

[8] J. Kari, Reversibility of 2D cellular automata is undecidable, Physica D 45 (1990), 379-385.

[9] J. Kari, Reversibility and surjectivity problems of cellular automata, J. Comput. System Sci. 48 (1) (1994), 149-182.

[10] G. Manzini and L. Margana, Invertible linear cellular automata over Zm, J. Comput. System Sci 56 (1998) 60-67.

[11] G. Manzini and L. Margana, Attractors of linear cellular automata, J. Comput. System Sci. 58 (1999), 597-610.

[12] D. Richardson, Tessellation with local translations, J. Comput.System Sci 6 (12) (1972), 373-388.

[13] T. Sato, Decidability for some problems of linear cellular automata over finite commutative rings, Information Processing Letters 46 (1993), 151-155.

[14] T. Sato, Group structured linear cellular automata over Zm, J. Comput. System Sci 49 No1. (1994), 18-23.

[15] T. Sato, Ergodic characterrization of linear cellular automata over Zm, Theoretical Computer Science, Elsevier 205 (1998), 135-144.

[16] T. Sato, Surjective linear cellular automata over Zm, Informaiton Processing Letters 66 (1998), 101-104