数理解析研究所講究録
第 1964 巻 2015 年 69-77

ALMOST SYMMETRIC NUMERICAL SEMIGROUPS

日本大学大学院 総合基礎科学研究科 沼田崇宏
Takahiro Numata
Graduate School of Integrated Basic Sciences, Nihon University

1 Introduction

本稿は [NNW], [Nu1], [Nu2] をまとめ, 要約したものである. 目的は V. Barucci と R. Fröberg [BF] によって定義された almost symmetric numerical semigroup の研究である. almost symmetric numerical semigroup とは, numerical semigroup の新しいクラスであり, symmetric 及び pseudo-symmetric の概念を一般化したものである. 以下, 本稿の構成について述べる.

まず第 2 節では, numerical semigroup の定義及び, それに関する不変量について確認する. symmetric, pseudo-symmetric, almost symmetric numerical semigroup の定義, またそれらの間の関係についてもここで述べる. 記号・術語などは [RG1] に従った.

第 3 節では, 3 元生成の almost symmetric numerical semigroup について研究する. 特に 3 元生成 pseudo-symmetric numerical semigroup の特徴付けをその semigroup ring の定義イデアルを用いて与える. この節は [NNW] に基づいている.

第 4 節では, 4 元生成の almost symmetric numerical semigroup について研究する. 著者はこのとき, type の上限は 3 であると予想している. このことを [RG2] の結果を用いて, 部分的な答えを与える. この節は [Nu1] に基づいている.

第 5 節では, numerical semigroup が almost symmetric であるための, ある一つの必要条件を [Nu2] から紹介する. この結果は almost symmetric 性を解析するための一つの重要な手がかりになると著者は考えている.

2 Numerical semigroups

以下, $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表し, $\mathbb{N}$ は負でない整数全体の集合を表すものとする.
まず, numerical semigroup の定義を思い出しておく.

定義 2.1. 部分集合 $H \subset \mathbb{N}$ は次の三つの条件を満たすとき, **numerical semigroup** であるという.

(1) $0 \in \mathbb{N}$ (H は 0 を含む).
(2) $H + H \subset H$ (H は通常の加法で閉じている).
(3) $\#(\mathbb{N} \setminus H) < \infty$ (H の $\mathbb{N}$ における補集合は有限である).

numerical semigroup H は一意的な極小生成系を持つ. 従って, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ が H の極小生成系のとき,

$$H = \langle a_1, ..., a_n \rangle := \{\lambda_1 a_1 + \cdots \lambda_n a_n \mid \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N}\}$$

と表す. ここで, $\gcd(a_1, ..., a_n) = 1$ であることに注意しておく.

numerical semigroup が与えられたとき, その semigroup ring が定義される.

定義 2.2. numerical semigroup $H = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ に対してその **semigroup ring** $k[H]$ が次のように定義される.

$$k[H] := k[t^{a_1}, ..., t^{a_n}] \subset k[t],$$

但し, k は体, t は不定元である.

定義 2.3. $H = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ のとき, k-代数の全射 $\phi : k[X_1, ..., X_n] \to k[H]$, $\phi(X_i) = t^{a_i}$ が定義される. このとき, $\ker \phi$ を $k[H]$ の**定義イデアル** (defining ideal) といい I_H で表す.

次に numerical semigroup の重要な不変量を思い出しておく.

定義 2.4. H は numerical semigroup とする.

(1) $\mathrm{F}(H) := \max(\mathbb{Z} \setminus H)$ を H の **Frobenius number** という.
(2) $\mathrm{PF}(H) := \{x \in \mathbb{Z} \setminus H \mid x + h \in H \text{ for } 0 \neq \forall h \in H\}$ と定義し, $\mathrm{PF}(H)$ の元を **pseudo-Frobenius number** と呼ぶ.
(3) $\mathrm{t}(H) := \#\mathrm{PF}(H)$ を H の **type** と呼ぶ.
(4) $\mathrm{g}(H) := \#(\mathbb{N} \setminus H)$ を H の **genus** と呼ぶ.

定義によって, いつでも $\mathrm{F}(H) \in \mathrm{PF}(H)$ であることに注意する.

例 2.5.

(1) $H = \langle 3, 4, 5 \rangle = \{0, 3, 4, 5 \to\}$ のとき,

$$\mathrm{F}(H) = 2, \quad \mathrm{PF}(H) = \{1, 2\}, \quad \mathrm{t}(H) = 2, \quad \mathrm{g}(H) = 2.$$

(2) H が 2 元生成のとき, Frobenius number 及び genus の公式はよく知られている. す

なわち, $H = \langle a, b\rangle$ のとき,

$$\mathrm{F}(H) = (a-1)(b-1) - 1 = ab - a - b, \qquad \mathrm{PF}(H) = \{\mathrm{F}(H)\},$$
$$\mathrm{t}(H) = 1, \qquad \mathrm{g}(H) = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

2 元生成の numerical semigroup は symmetric であることにも注意しておく (symmetric の定義は命題-定義 2.9 参照).

これらの不変量の間には一般に次の関係がある.

命題 2.6 ([Na]). H を numerical semigroup とするとき, 次が成り立つ.

$$2\mathrm{g}(H) \geq \mathrm{F}(H) + \mathrm{t}(H).$$

今, numerical semigroup H に対して, 次のような集合を定義する.

$$\mathrm{L}(H) := \{x \in \mathbb{Z} \setminus H \mid \mathrm{F}(H) - x \notin H\}.$$

命題 2.6 の不等式において, 等号が成立する numerical semigroup は almost symmetric と呼ばれる.

命題-定義 2.7 ([BF]). numerical semigroup H は次の同値な条件を満たすとき, **almost symmetric** であるという.

(1) $\mathrm{L}(H) \subset \mathrm{PF}(H)$.
(2) $2\mathrm{g}(H) = \mathrm{F}(H) + \mathrm{t}(H)$.

almost symmetric 性はその pseudo-Frobenius number の対称性によって特徴付けられる.

定理 2.8 ([Na]). H を numerical semigroup とし, $\mathrm{PF}(H) = \{f_1 < \cdots < f_t = \mathrm{F}(H)\}$ とする. このとき次の条件は互いに同値である.

(1) H は almost symmetric である.
(2) $f_i + f_{t-i} = \mathrm{F}(H)$ が全ての $1 \leq i \leq t-1$ について成り立つ.

type 1, type 2 の almost symmetric numerical semigroup はそれぞれ, symmetric, pseudo-symmetric と呼ばれる.

命題-定義 2.9. numerical semigroup H は次の同値な条件を満たすとき, **symmetric** であるという.

(1) 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して, $x \in H$ または $\mathrm{F}(H) - x \in H$ のいずれかが成り立つ.

(2) $2\mathrm{g}(H) = \mathrm{F}(H) + 1$.
(3) $\mathrm{PF}(H) = \{\mathrm{F}(H)\}$.
(4) $\mathrm{t}(H) = 1$.

命題-定義 2.10. numerical semigroup H は次の同値な条件を満たすとき, **pseudo-symmetric** であるという.

(1) $\mathrm{F}(H)$ が偶数かつ, 任意の $x \in \mathbb{Z}, x \neq \mathrm{F}(H)/2$ に対して, $x \in H$ または $\mathrm{F}(H) - x \in H$ のいずれかが成り立つ.
(2) $2\mathrm{g}(H) = \mathrm{F}(H) + 2$.
(3) $\mathrm{PF}(H) = \{\mathrm{F}(H)/2, \mathrm{F}(H)\}$.

定義からすぐ分かるように, H が symmetric ならば $\mathrm{F}(H)$ は必ず奇数である. また, 次のことに注意しておく.

$$H \text{ が pseudo-symmetric} \iff H \text{ が almost symmetric かつ } \mathrm{t}(H) = 2.$$

すなわち, $\mathrm{t}(H) = 2$ という条件のみでは, H は pseudo-symmetric になるとは限らない. 実際, $H = \langle 3, 7, 8 \rangle$ のとき, $\mathrm{PF}(H) = \{4, 5\}$ なので, $\mathrm{t}(H) = 2$ であるが H は pseudo-symmetric ではない.

例 2.11.
(1) $H = \langle 3, 4, 5 \rangle$ は almost symmetric である. 特に, H は pseudo-symmetric である.
(2) $H = \langle 4, 5, 6, 7 \rangle$ は almost symmetric であるが, pseudo-symmetric でも symmetric でもない. 実際, $\mathrm{PF}(H) = \{1, 2, 3\}$.

3 Almost symmetric numerical semigroups generated by three elements

ここでは 3 元生成の almost symmetric numerical semigroup について考える. まず一般に, 3 元生成の numerical semigroup については次の結果が知られている.

定理 3.1. $H = \langle a, b, c \rangle$ とする. このとき, 次が成り立つ.

[He] $\mu(I_H) \leq 3$ (H が symmetric のときは $\mu(I_H) = 2$, そうでないときは $\mu(I_H) = 3$). 但しここで, $\mu(I_H)$ は I_H の極小生成元の個数を表すものとする.
[FGH] $\mathrm{t}(H) \leq 2$.

Theorem 3.1 より次のことが分かる.

命題 3.2. $H = \langle a, b, c \rangle$ のとき,

$$H \text{ が almost symmetric} \Longleftrightarrow H \text{ が symmetric または pseudo-symmetric.}$$

従って, 3 元生成の almost symmetric numerical semigroup は symmetric または pseudo-symmetric numerical semigroup に限られる. しかしながら, 3 元生成の symmetric numerical semigroup に対しては分かりやすい特徴付けが与えられている.

定理 3.3 ([FGH], [He], [Wa]). $H = \langle a, b, c \rangle$ のとき, 次の二つの条件は互いに同値である:

(1) H は symmetric である.

(2) 必要ならば a, b, c の順序を入れ替えて, $a = a'd, b = b'd$, $c \in \langle a', b' \rangle$, $c \neq a', b'$ かつ $\gcd(d, c) = 1$ とできる. 但しここで, $d = \gcd(a, b) > 1$. このとき, $H = \langle d \langle a', b' \rangle, c \rangle$ と書く.

例 3.4.

(1) $H = \langle 4, 5, 6 \rangle$ は symmetric である. 実際, $H = \langle 2 \langle 2, 3 \rangle, 5 \rangle$ と書ける.

(2) $H = \langle 7, 9, 12 \rangle$ は symmetric である. なぜならば, $H = \langle 3 \langle 3, 4 \rangle, 7 \rangle$ と書ける.

(3) $H = \langle 7, 11, 13 \rangle$ は symmetric ではない. 実際, どの二つの生成元も互いに素である.

そこで, ここでは 3 元生成の pseudo-symmetric numerical semigroup について研究する. 以下, $H = \langle a, b, c \rangle$ は symmetric でない numerical semigroup と仮定し, $k[H] \cong k[X, Y, Z]/I_H$ をその semigroup ring とする. このとき, 定義イデアル I_H は行列

$$\begin{pmatrix} X^{\alpha} & Y^{\beta} & Z^{\gamma} \\ Y^{\beta'} & Z^{\gamma'} & X^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

の全ての 2×2 小行列式で生成されることが [He] の結果によってわかっている. 但し, α, β, γ, α', β', γ' は全て正整数である.

このとき, 我々は次の結果を得ることができた.

定理 3.5 ([NNW]). $H = \langle a, b, c \rangle$ は symmetric でないと仮定する.

(1) もし $\beta' b > \alpha a$ ならば, $2 \cdot \mathrm{g}(H) - (\mathrm{F}(H) + 1) = \alpha\beta\gamma$,

(2) もし $\beta' b < \alpha a$ ならば, $2 \cdot \mathrm{g}(H) - (\mathrm{F}(H) + 1) = \alpha'\beta'\gamma'$.

この定理と命題-定義 2.10 によって, 次の 3 元生成 pseudo-symmetric numerical semigroup の特徴付けを得る.

系 3.6 ([NNW]). $H = \langle a, b, c \rangle$ は symmetric ではないと仮定する. このとき,

$$H \text{ が pseudo-symmetric} \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 1 \text{ または } \alpha' = \beta' = \gamma' = 1$$

例 3.7.

(1) $H = \langle 3, 4, 5 \rangle$ は前に見たように pseudo-symmetric である. 実際, H の定義イデアルは

$$I_H = (X^3 - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - X^2Y)$$

であるが, これは次の行列の全ての 2×2 の行列式で生成されている:

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X^2 \end{pmatrix}.$$

(2) $H = \langle 3, 7, 8 \rangle$ は pseudo-symmetric ではない. 実際,

$$I_H = (X^5 - YZ, Y^2 - X^2Z, Z^2 - X^3Y)$$

は次の行列の全ての 2×2 小行列式で生成される:

$$\begin{pmatrix} X^2 & Y & Z \\ Y & Z & X^3 \end{pmatrix}.$$

4 Almost symmetric numerical semigroups generated by four elements

次に 4 元生成の almost symmetric numerical semigroup について考察する. これに対しては次の事が知られている.

定理 4.1. $H = \langle a, b, c, d \rangle$ とする.

[Backelin] ([FGH], [RG1] を参照) 一般に, $\mathrm{t}(H)$ 及び $\mu(I_H)$ の上限は存在しない ($\mathrm{t}(H)$ 及び $\mu(I_H)$ がいくらでも大きくなる例が構成できる).

[Br] H が symmetric のとき, $\mu(I_H) \leq 5$ (H が完全交差ならば, $\mu(I_H) = 3$, それ以外のとき $\mu(I_H) = 5$).

[Ko] H が pseudo-symmetric のとき, $\mu(I_H) = 5$.

3 元生成の際には, almost symmetric numerical semigroup は symmetric または pseudo-symmetric numerical semigroup に限られたが, 4 元生成以上の場合には, symmetric でも pseudo-symmetric でもない almost symmetric numerical semigroup が存在することに注意する. 例: $\langle a, a+1, a+2, ..., 2a-1 \rangle$ ($a \geq 4$).

著者は次の予想を持っている.

予想 4.2 ([Nu1]). $H = \langle a, b, c, d \rangle$ が almost symmetric ならば,

(1) $\mathrm{t}(H) \leq 3$.

(2) $\mu(I_H) \leq 7$.

ここでは, (1) は特別な場合には正しい, ということについて述べたい. まず一つ定義を与えておく.

定義 4.3. numerical semigroup H は, symmetric または pseudo-symmetric であるとき, **既約** (irreducible) であるという.

既約な numerical semigroup の詳しい性質に関しては [RG1] を参照していただきたい.

次の J. C. Rosales と P. A. García-Sánchez による結果が重要となる.

定理 4.4 ([RG2]). H を numerical semigroup とする. このとき次の二つの条件は互いに同値である.

(1) H は almost symmetric である.

(2) $\mathrm{F}(T) = \mathrm{F}(H)$ であるような, ある既約な numerical semigroup T が存在して, $H = T \setminus \mathcal{A}$ となる. 但しここで, $\mathcal{A}$ は T の極小生成系の部分集合で次の条件を満たすものとする:

$$\mathcal{A} \subset [\frac{\mathrm{F}(H)}{2}, \mathrm{F}(H)] \text{ かつ } x + y - \mathrm{F}(T) \notin H \text{ for } \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

このとき, H の type は次の式で与えられる:

$$\mathrm{t}(H) = 2 \cdot (\#\mathcal{A}) + \mathrm{t}(T).$$

この定理は「全ての almost symmetric numerical semigroup は, ある既約な numerical semigroup から生成元をいくつか取り除いて構成される」ということを述べている.

例 4.5.

(1) $H = \langle 4, 5, 6, 7 \rangle$ は almost symmetric であった. これは既約な numerical semigroup $T = \langle 2, 5 \rangle$ から極小生成元 $\{2\}$ を取り除いて構成されている:

$$H = T \setminus \{2\}.$$

(2) $T = \langle 4, 5, 6 \rangle$ は symmetric なので既約である. T から次の 4 つの almost symmetric numerical semigroup が構成される:

- $T \setminus \{5\} = \langle 4, 6, 9, 11 \rangle$.
- $T \setminus \{4\} = \langle 5, 6, 8, 9 \rangle$.
- $T \setminus \{4, 5\} = \langle 6, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle$.
- $T \setminus \{4, 5, 6\} = \langle 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \rangle$.

また, これらの pseudo-Frobenius number 及び type はそれぞれ以下のようになっている:

- $\mathrm{PF}(T \setminus \{5\}) = \{2,5,7\}$, $\mathrm{t}(T \setminus \{5\}) = 3$.
- $\mathrm{PF}(T \setminus \{4\}) = \{3,4,7\}$, $\mathrm{t}(T \setminus \{4\}) = 3$.
- $\mathrm{PF}(T \setminus \{4,5\}) = \{2,3,4,5,7\}$, $\mathrm{t}(T \setminus \{4,5\}) = 5$.
- $\mathrm{PF}(T \setminus \{4,5,6\}) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $\mathrm{t}(T \setminus \{4,5,6\}) = 7$.

Theorem 4.4 を用いて次を示すことができる.

定理 4.6 ([Nu1]). T が既約な 2 または 3 元生成 numerical semigroup ならば, Theorem 4.4 ([RG2]) の方法で構成される 4 元生成 almost symmetric numerical semigroup H の type の上限は 3 である.

5 Further properties of almost symmetric numerical semigroups.

これまで, 3 元生成, 4 元生成の場合を見てきたが, 生成元の個数が一般の場合について成り立つ almost symmetric numerical semigroup のある性質について紹介したい. まず, 次のような事が知られている.

定理 5.1 ([RG1]). $H = \langle a,b,c \rangle$ とする. もし H が pseudo-symmetric ならば, $\{a,b,c\}$ のどの二つの元の組も互いに素である.

この結果の一般化と思えるものが以下である.

定理 5.2 ([Nu2]). $H = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ は symmetric でないと仮定する. もし H が almost symmetric ならば, 極小生成元の集合 $\{a_1, ..., a_n\}$ の任意の $n-1$ 個からなる部分集合は互いに素である.

この定理の逆は全く成り立たないことに注意しておく.

参考文献

[BF] V. Barucci, R. Fröberg, *One-dimensional almost Gorenstein rings*, J. Algebra, **188** (1997), 418-442.

[Br] H. Bresinsky, *Symmetric semigroups of integers generated by 4 elements*, Manuscripta Math. **17** (1975), 205-219.

[FGH] R. Fröberg, C. Gottlieb, R. Häggkvist, *On numerical semigroups*, Semigroup Forum **35** (1987), 63-83.

[He] J. Herzog, *Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. **3** (1970), 175-193.

[Ko] J. Komeda, *On the existence of Weierstrass points with a certain semigroup generated by 4 elements*, Tsukuba J. Math. Vol. **6** No. 2 (1982). 237-270.

[Na] H. Nari, *Symmetries on almost symmetric numerical semigroups*, Semigroup Forum **86** (2013), no. 1, 140 - 154.

[NNW] H. Nari, T. Numata, K.-i. Watanabe, *Genus of numerical semigroups generated by three elements*, J. Algebra, **358** (2012), 67-73.

[Nu1] T. Numata, *Almost symmetric numerical semigroups generated by four elements*, Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University **48** (2013), 197-207.

[Nu2] T. Numata, *A variation of gluing of numerical semigroups*, to appear in Semigroup Froum.

[RG1] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, Numerical semigroups, Springer Developments in Mathematics, Volume **20** (2009).

[RG2] J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez, *Constructing almost symmetric numerical semigroups from irreducible numerical semigroups*, Comm. in Algebra **42** (2014), mp. 3, 1362 - 1367.

[Wa] K. - i. Watanabe, *Some examples of one dimensional Gorenstein domains*, Nagoya Math. J. **49** (1973), 101-109.