数理解析研究所講究録
第 1972 巻 2015 年 67-83

標本化定理における複素解析的手法, Complex Analytic Method in Sampling Theorem

東京都市大学　知識工学部　自然科学科
吉野邦生
Kunio Yoshino
Tokyo City University, Faculty of Knowledge Engineering,
Department of Natural Sciences

1 Introduction

ディジタル信号処理の数学的原理は, アナログ・データ (連続変数の関数, 信号) からディジタル・データ (離散変数の関数, 言い換えると数列) を取りだし, 取り出したディジタル・データから元のアナログ・データを再現する事に基ずいている. この論説ではディジタル信号処理で重要な標本化定理に関係する話題について報告する. 標本化定理にはいくつかあるが最も有名なのは, シャノン - 染谷の標本化定理であろう. 1949 年, クロード・シャノンと 染谷勲は全く独立に標本化定理を発表した ([24],[25]). シャノンの著書 ”通信の数学的理論” は, 2009 年に復刊されたが染谷の著書 ”波形伝送” は, 現在入手困難である. 2007 年にギリシャのテッサロニキで開かれたディジタル信号処理の国際会議 SAMPTA で, ”波形伝送” の展示があり初めて見る事ができた.

2 いくつかの標本化定理

シャノン - 染谷の標本化定理はディジタル信号処理の分野では常識であるが, これ以外にも標本化定理はある. 数学の分野では補間公式と呼ばれることもある. ここでディジタル・データの取りだしの例を紹介する.

1. $f(t) \Longrightarrow \{f^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty}$

2. $f(t) \Longrightarrow \{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$

3. $f(t) \Longrightarrow \{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$

4. $f(t) \Longrightarrow \{f^{(n)}(n)\}_{n=0}^{\infty}$

これらの取り出したディジタル・データから, 元の関数 (信号) はそれぞれ次のようにして再現される.

1. テイラー (Taylor) 展開

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

2. シャノン - 染谷の標本化定理

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

3. ラマヌジャン (Ramanujan) の積分公式

$$\int_0^{\infty} u^{t-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-u)^n \right\} du = \frac{\pi f(-t)}{\sin(\pi t)}$$

3. ニュートン (Newton) 補間公式

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} f(k)$$

4. アーベル (Abel) 補間公式

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(n) \frac{t(t-n)^{n-1}}{n!}$$

成立するための条件・証明など詳しい事は, 例えば, [4], [6],[7] [12], [32] に出ている.

3 シャノン - 染谷の標本化定理

ここでは, クロード・シャノンと染谷勲により, 1949 年に独立に発表されたディジタル信号処理で有名なシャノン - 染谷の標本化定理 ([24],[25]) について復習する. シャノンと染谷以前にも複数の人間によって発見されているらしい ([19], [26]).

3.1 帯域制限関数 (Band Limited Functions)

関数 (信号)$f(t)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ が有界な台を持つ時, $f(t)$ は"帯域制限関数 (信号)"であると呼ばれる. 例えば $\dfrac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}$ のフーリエ変換は, $e^{i\xi n}\chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$ であるので $\dfrac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}$ は帯域制限関数である. ここで $\chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$ は, 閉区間 $[-\pi,\pi]$ の特性関数である. 後述する偏重楕円体関数も帯域制限関数である. ガウス関数 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ のフーリエ変換は, $\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ であるのでガウス関数は帯域制限関数ではない.

3.2 シャノン - 染谷の標本化定理

帯域制限関数に対しては次の標本化定理が成り立つ.

標本化定理 ([6], [8], [29])

関数 $f(t)$ が次の条件 (1), (2)

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^2dt<\infty$, (2) $\hat{f}(\xi)=0,\quad(|\xi|>\pi)$.

を満たしていると

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

が成り立つ.

(証明の概略) フーリエ逆変換の公式と帯域制限条件 (2) から

$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi t}d\xi=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(\xi)e^{i\xi t}d\xi$ が成り立つ.

$\hat{f}(\xi)$ のフーリエ展開

$$\hat{f}(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{-in\xi},\quad \left(a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(\xi)e^{in\xi}d\xi=f(n)\right)$$

を代入すると

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{-in\xi}\right)e^{i\xi t}d\xi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\xi}e^{i\xi t}d\xi$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\xi}e^{i\xi t}d\xi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}.$$

3.3 標本化定理とペーリー・ウイナー (Paley - Wiener) 空間 $PW(\pi)$

標本化定理とペーリー・ウイナー空間 $PW(\pi)$ の関係について説明する．標本化定理における条件 (1), (2) を満たす関数全体を $PW(\pi)$ と表しペーリー・ウイナー空間と呼ぶ ([34]). $f(t), g(t) \in PW(\pi)$ の内積 $< f, g >$ は，$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt$ で定義される．標本化定理から次がわかる．

1. $f(t) \in PW(\pi)$ に対しディジタル・データ $\{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ から 任意の点 t における関数の値 $f(t)$ が再現されている．

2. 正規直交関係式
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \frac{\sin \pi(t-m)}{\pi(t-m)} dt = \delta_{n,m}, \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$
が成立しているので関数列 $\left\{ \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は，$PW(\pi)$ において正規直交基底を作っている．

3. $$< f, g >= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\overline{g(n)}$$
$$< f, f >= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2$$

4. 特に $f(n) = 0, \quad (n \in \mathbb{Z})$ であると，$f(t)$ は恒等的にゼロである (カールソン **(Carlson)** の定理 [6], [30], [31]).

注意　1.　ひとつの関数，及びその平行移動全体で，関数空間の基底を作る" というのは，ウエーブレット理論の出発点である．

2.　信号処理の分野では $\frac{\sin \pi t}{\pi t}$ を sinc t と表す事がある．

3.　カールソンの定理から，ディジタル・データから元信号（元の関数）が一意的に再現される事が保障される．

付記　カールソン (Fritz Carlson) は，スエーデン人である．名前は似ているが，フーリエ級数論におけるルシン (Lusin) 予想の解決，カールソン測度で有名な Leonnart Carleson とは全くの別人である (二人ともスエーデン人ではある). 2007 年の 3 月に，ストックホルムにある王立数学研究所の解析学セミナーで講演した際，L. Carleson 教授は，私の講演を聞きに来てくれた．

3.4 標本化定理と関数の帯域制限性

帯域制限関数に対しては標本化定理が成り立つ．逆に関数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ が $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$ と展開されているとする．両辺をフーリエ変換すると

$$\hat{f}(\xi) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\xi}\right) \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$$

これから $\hat{f}(\xi) = 0, |\xi| > \pi$ が結論され $f(t)$ が帯域制限関数である事がわかる．

3.5 sinc x の $PW(\pi)$ における役割

ここで $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ のペーリー・ウィナー空間 $PW(\pi)$ における役割について考えてみる．$g(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ とおくと標本化定理から

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) g(x-n), \quad (\forall f(x) \in PW(\pi))$$

が成り立つ．
逆に $g(x) \in PW(\pi)$ が存在して標本化定理

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) g(x-n), \quad (\forall f(x) \in PW(\pi))$$

が成り立つとする．両辺をフーリエ変換すると

$$\hat{f}(\xi) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\xi}\right) \hat{g}(\xi)$$

ここで $f(x)$ として $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$ を取ると $\hat{f}(\xi) = \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi), \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\xi} = 1$ であるので $\hat{g}(\xi) = \chi_{[-\pi,\pi]}$ が判る．逆フーリエ変換すると $g(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ となる． つまり $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ のみがペーリー・ウィナー空間 $PW(\pi)$ において標本化定理を成立させる事ができるのである．

3.6 帯域制限関数の複素関数論による特徴付け

”帯域制限関数とはどのような関数か？ ”という問に対する解答が, ペーリー・ウィナー の定理である. $f(x)$ を帯域制限関数とするとフーリエ逆変換の公式から $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi)e^{i\xi t}d\xi$ が判る. このことから $f(x)$ は全複素平面に解析接続 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi)e^{i\xi z}d\xi, \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$ を持つ. ペーリー・ウィナーの定理の本質的部分は, 関数の正則性である.

ペーリー・ウィナー の定理

$a > 0$ とする. 次の (1), (2), (3) は, 同値である.

(1) $f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a} F(\xi)e^{-iz\xi}d\xi, \quad (z \in \mathbb{C})$ となる $F(\xi) \in L^2([-a, a])$ が存在する.

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty, \qquad \hat{f}(\xi) = 0, \quad (|\xi| > a).$

(3) $f(z)$ は整関数であり次の評価を満たす.

$$\exists C > 0, |f(x + iy)| \leq Ce^{a|y|}, \qquad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$$

証明については [1], [6], [14], [30], [34] を参照してください.

例 $\quad f(z) = \dfrac{\sin az}{\pi z}$ とおく. $f(z)$ は整関数であり上の条件 (3) を満たしている. 対応する $F(\xi)$ は $F(\xi) = \chi_{[-a,a]}(\xi)$ である.

4 ビューリング・ウィナー (Beurling - Wiener) の定理

4.1 $L^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)$ における近似定理

$\left\{\dfrac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は帯域制限関数の空間 $PW(\pi)$ において正規直交基底を作っているが $L^2(\mathbb{R})$ においては, 基底にはなっていない. これは, 次の定理から判る.

ウィナー の定理 1([11], [14])

$f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ の平行移動の有限一次結合全体が $L^2(\mathbb{R}^n)$ で稠密であるための必要十分条件は, $f(x)$ のフーリエ変換の零点集合のルベーグ測度がゼロであることである.

$\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ のフーリエ変換は, 特性関数 $\chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$ であり ([33]). その零点集合のルベーグ測度は無限大である. したがって $\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ の平行移動の有限一次結合で近似できない二乗可積分関数が存在する. 可積分関数に対する同様な結果はウィナーによって得られている.

ウィナー の定理 2([13], [14])

$f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ の平行移動の有限一次結合全体が $L^1(\mathbb{R}^n)$ で稠密であるための必要十分条件は, $f(x)$ のフーリエ変換の零点集合が空集合であることである. 別の言い方をすると $f(x)$ のフーリエ変換が決してゼロにならないことである.

例　$e^{-\frac{x^2}{2}}$ のフーリエ変換は $\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ である. これの零点集合は空集合である. 従って全ての $L^1(\mathbb{R}^n)$ 関数は, $e^{-\frac{x^2}{2}}$ の平行移動の有限一次結合で近似できる.

4.2　$L^p(\mathbb{R})$ における近似定理

$L^p(\mathbb{R})$,　$(1 < p < 2)$ における近似定理としては次が知られている ([9], [11]).

ビューリングの定理

$f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする. $f(x)$ のフーリエ変換の零点集合のハウスドルフ次元を α　$(0 < \alpha < 1)$ とする. p　$(1 < p < 2)$ が $p > \dfrac{2}{2-\alpha}$ を満たしていると $f(x)$ の平行移動の有限一次結合全体は $L^p(\mathbb{R})$ で稠密である.

注意

1.　$f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ なのでそのフーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ は連続関数である. 従って, $\hat{f}(\xi)$ の零点集合 $\{\xi \in \mathbb{R} : \hat{f}(\xi) = 0\}$ は閉集合である.
2.　$f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ であると $f(x) \in L^p(\mathbb{R}), (1 \leq p \leq 2)$ である.
3.　ハウスドルフ次元については, [3], [9] を参照してください.

5 佐藤超関数 (Hyperfunctions) による標本化定理の定式化

標本化定理における仮定 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ は, 実用上強すぎる. 佐藤超関数 (Hyperfunctions) を使うとこの仮定をはずす事が可能になる. ここで佐藤超関数について簡単に説明する ([23], [33]).

5.1 Hyperfunctions

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ を実軸上の閉区間とし, $g(z)$ を $\mathbb{C}\backslash[a,b])$ における正則関数とする. $\lim_{y>0, y\to 0}(g(x+iy)-g(x-iy)) = g(x+i0)-g(x-i0)$ を正則関数 $g(z)$ の境界値と呼ぶ. 正則関数の境界値として表されるものを佐藤超関数と呼び, $g(z)$ を定義関数と呼ぶ ([23]).

例 1 (ディラック (Dirac) のデルタ関数 $\delta(x)$) $g(z) = \dfrac{-1}{2\pi i z}$

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)$$

例 2 (特性関数 $\chi_{[a,b]}(x)$) $g(z) = \log \dfrac{z-b}{z-a}$

$$\chi_{[a,b]}(x) = \frac{-1}{2\pi i}\lim_{y\to 0}(g(x+iy)-g(x-iy))$$

例 3 (ヘビサイド関数 $H(x)$) $g(z) = \dfrac{-1}{2\pi i}\log z, \quad (0 \leqq arg(z) < 2\pi)$

$$H(x) = \frac{-1}{2\pi i}(\log(x+i0) - \log(x-i0))$$

例 4 (ルジャンドル (Legendre) 関数 $P_n(x), Q_n(x)$ に対するノイマン (Neumann) の公式 ([10], [17])

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)}{z-t}dt, \quad P_n(x) = \frac{-1}{\pi i}(Q_n(x+i0) - Q_n(x-i0))$$

例 5 ([14], [22], [34]) 上半平面で定義された正則関数 $f(z)$ が $sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}}|f(x+iy)|^2 dy < \infty$ を満たしていると境界値

$f(x+i0) = \lim_{y>0, y\to 0} f(x+iy)$ が存在し, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{f(t+i0)}{t-z}dt$ が成り立つ.

5.2 佐藤超関数に対するペーリー・ウィナーの定理

佐藤超関数に対するペーリー・ウィナーの定理 ([1], [30])

整関数 $f(z)$ は, 次の評価を持っているとする.
$\exists b \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, |f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(b|y|+\varepsilon|z|), (\forall z = x+iy \in \mathbb{C})$.
このとき台が $[-b, b]$ に含まれる佐藤超関数 T が唯一つ存在して
$f(z) =< T_\zeta, e^{-i\zeta z} >= \int_C g(\zeta)e^{-i\zeta z}d\zeta$ が成り立つ.
C は $[-b, b]$ を囲む積分路であり, $g(z)$ は T の定義関数である.

例 1 (原点 $\{0\}$ に台を持つ超関数)
$f(z) = \prod_{m=0}^{\infty}(1 - a^{m+1}z)$, $(|a| < 1)$ とおくと $f(z)$ は整関数であり
$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, |f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|z|)$, $(\forall z \in \mathbb{C})$ を満たす.
$f(z) =< T_x, e^{-ixz} >$ となる T_x は
$T_x = \delta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(a^n - 1)\cdots(a-1)}\delta^{(n)}(x)$ である ([21]).

$\delta^{(n)}(x)$ は, $\delta(x)$ の n 次導関数であり, T は原点 $\{0\}$ に台を持つ超関数である.

5.3 佐藤超関数による標本化定理

定理 ([6],[29])

整関数 $f(z)$ が次の条件を満たしているとする.
$\exists b \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ s.t.

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(b|y| + \varepsilon|z|), \quad (\forall z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

もし $0 \leq b < \pi$ であると, 次が成立する.

$$f(z) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\frac{\sin \pi(z-n)}{\pi(z-n)}e^{-\delta|n|}.$$

右辺は カーディナル (Cardinal) 級数と呼ばれる時もある ([6]). ここで標本化定理の例を掲げよう.

例 1　(Dougall 展開 [10], [17])

$$P_z(\cos\theta) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(\cos\theta)\frac{\sin\pi(z-n)}{\pi(z-n)}e^{-\delta|n|},$$

$$P_z(\cos\theta) = \frac{\sin\pi z}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{z+n+1}\right)P_n(\cos\theta),$$

ここで $P_z(\cos\theta)$,　$(|\theta| < \pi)$ はルジャンドル (Legendre) 関数であり, $P_n(\cos\theta)$ は n 次のルジャンドル多項式である ([10],[17]).

例 2.　$$1 = \lim_{\delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi(x-n)}{\pi(x-n)}e^{-\delta|n|},$$

例 3.　$$x = \lim_{\delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\frac{\sin\pi(x-n)}{\pi(x-n)}e^{-\delta|n|}$$

詳細については, 論文 [29] を参照してください.

6　$L^2(\mathbb{R})$ の直交分解と標本化定理

6.1　ペーリー・ウィナー空間 $PW(a)$

ペーリー・ウィナー空間 $PW(a)$　$(a > 0)$ は, 次の様に定義される.
$PW(a) = \{f(x) \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0, |\xi| > a)\}$
ペーリー・ウィナーの定理を使うと次のように表示する事もできる.
$PW(a) = \{f(x) \in L^2(\mathbb{R}) : f(z)$ は整関数, $\exists C > 0, |f(z)| \le Ce^{a|y|}, z = x + iy \in \mathbb{C}\}$
まず $PW(a)$ と $L^2(\mathbb{R})$ との関係を説明しよう.
$A = \left\{h(x) \in L^2(\mathbb{R}) : h(x) = 0, \quad (|x| \le a))\right\}$
$A^\perp = \left\{h(x) \in L^2(\mathbb{R}) : h(x) = 0, \quad (|x| > a))\right\}$
とおくと $L^2(\mathbb{R})$ は次のように直交分解される.

$$L^2(\mathbb{R}) = A \oplus A^\perp$$

A, $A^\perp$ 共に $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間である. $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間 $A^\perp$ への射影は $\chi_{[-a,a]}(x)g(x)$ で与えられる. $\chi_{[-a,a]}(x)$ は閉区間 $[-a, a]$ の特性関数である. 信号処理の分野では, この操作をフィルターを掛けるとい

う. ここで上の直交分解の両辺をフーリエ逆変換するとプランシェル (Plancherel) の定理により $\mathfrak{F}(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R})$ であり, フーリエ逆変換 $\mathfrak{F}^{-1}$ は, ユニタリー変換なので次の直交分解を得る.

$$L^2(\mathbb{R}) = \mathfrak{F}^{-1}(A) \oplus \mathfrak{F}^{-1}(A^{\perp})$$

$\mathfrak{F}^{-1}(A^{\perp})$ がペーリー・ウィナー空間 $PW(a)$ である.

$g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ の $PW(a)$ への射影は, $\dfrac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)}$ を積分核として持つ積分作用素 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} g(y)dy$ で与えられる.
特に, $PW(a)$ に属する関数 $g(x)$ に対しては

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} g(y)dy$$

が成立する. 言い換えると, $\dfrac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)}$ は $PW(a)$ の再生核である. 標本化定理によれば, $f(x) \in PW(\pi)$ に対しては

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}.$$

が成立している. 又, 再生核の性質から

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} f(y)dy$$

も成立している. 従って

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} f(y)dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$$

$f(x) \in PW(\pi)$ に対し
オイラー・マクローリン型の公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)dy \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)$$

が, 誤差なしで成立しているのである.

6.2 再生核の方法による標本化定理の導出

ここで再生核の方法を用いて標本化定理を導いてみよう. 次の補題が出発点である.

補題 ([34])

$F(z)$ は整関数で次の条件 (1), (2) を満足しているとする.

(1) $|F(z)| \leq Ce^{2\pi|z|}, \quad (z \in \mathbb{C})$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|dx < \infty$

このとき

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)$$

が成り立つ.

$f(z) \in PW(\pi)$ に対し, $F(z) = f(z)\dfrac{\sin \pi(t-z)}{\pi(t-z)}$ とおくと $F(z)$ は補題の条件を満足する. したがって補題から,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\sin \pi(t-y)}{\pi(t-y)}dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

が成り立つ. $\dfrac{\sin \pi(t-y)}{\pi(t-y)}$ は, $PW(\pi)$ の再生核であるので

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{\sin \pi(t-y)}{\pi(t-y)}dy$$

が成り立っている. 以上から標本化定理

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$ を得た.

6.3 $L^2(\mathbb{R})$ の直交分解のまとめ

$$\begin{array}{ccc}
L^2(\mathbb{R}) = L^2([-a,a]) \oplus L^2(\mathbb{R} \setminus [-a,a]) & \xrightarrow{P} & L^2([-a,a]) \\
\mathfrak{F}\big\downarrow & & \big\downarrow\mathfrak{F} \\
L^2(\mathbb{R}) = PW(a) \oplus PW(a)^{\perp} & \xrightarrow{P_a} & PW(a)
\end{array}$$

- $\mathfrak{F}$: フーリエ変換
- $P : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2([-a,a])$: 射影
- $(Pg)(\xi) = \chi_{[-a,a]}(\xi)g(\xi), \quad (g \in L^2(\mathbb{R}))$
- $P_a : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow PW(a)$: 射影

- $(P_a f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy, \quad (f \in L^2(\mathbb{R}))$

- $f(x) = P_a(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy, \quad (f \in PW(a))$

- $\frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)}$ は, $PW(a)$ の再生核

- $f(x) \in PW(\pi)$ であると
  $f(x) = (P_\pi f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} dy$

  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$, (標本化定理)

  $f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$

7 テプリッツ (Toeplitz) 作用素 と 偏重楕円体関数 (Prolate Spheroidal Functions)

7.1 テプリッツ (Toeplitz) 作用素

区間 $[-b, b]$ の特性関数 $\chi_b(y)$ をシンボル関数とするテプリッツ作用素は, 掛け算作用素 $m_b f(y) = \chi_b(y) f(y)$, $(f(x) \in L^2(\mathbb{R}))$ と射影 P_a との合成で定義される. 具体的には積分作用素
$(P_a \circ m_b)(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_b(y) f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy = \int_{-b}^{b} f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy,$
で与えられる,

7.2 偏重楕円体関数 (Prolate spheroidal functions)

テプリッツ作用素 $P_a \circ m_b$ の固有関数を偏重楕円体関数と呼ぶ. 偏重楕円体関数は微分作用素 $(b^2 - x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} - a^2 x^2$ の固有関数でもある事が知られている.

$T_{a,b} = P_a \circ m_b, \quad D_{a,b} = (b^2 - x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - 2x\dfrac{d}{dx} - a^2x^2$ とおくと $T_{a,b} \circ D_{a,b} = D_{a,b} \circ T_{a,b}$ が成り立つ. 偏重楕円体関数は, 2つの作用素 $T_{a,b}, D_{a,b}$ の同時固有関数である ([8], [27], [28]).

7.3 偏重楕円体関数の帯域制限性

偏重楕円体関数はテプリッツ作用素 $T_{a,b} = P_a \circ m_b$ の固有関数であるので積分方程式 $\lambda f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_b(y) f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy$ を満足している. この両辺をフーリエ変換すると $\lambda\mathfrak{F}(f)(\xi) = \mathfrak{F}(\chi_b f)(\xi)\chi_a(\xi)$ となり $\mathfrak{F}(f)(\xi) = 0 \quad (|\xi| > a)$ が判る. この事から偏重楕円体関数が帯域制限関数である事が結論される.

7.4 偏重楕円体関数のディジタル信号処理への応用

偏重楕円体関数は色々と面白い性質を持っているのだが, 未だにその正体は良くわからない. 偏重楕円体関数のディジタル信号処理への応用については, [2], [8], [16], [18], [27], [28] が参考となる.

8 Irregular Sampling

今まではRegular sampling について解説してきたが, 最後に Irregular sampling について簡単に触れておく.

定理 ([20]) $\overline{\lim}_{|n|\to\infty}|a_n - n| < \dfrac{1}{4}$ を満たす数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対し

$L(z) = (z - a_0)\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\left(1 - \frac{z}{a_{-n}}\right)$ とおく.

$f(z) \in PW(\pi)$ に対し次が成り立つ.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a_n)\frac{L(z)}{L'(a_n)(z - a_n)}$$

注意 Regular sampling の場合には $a_n = n$ であり,

$L(z) = z\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$ である. したがって上の定理は良く知られている標本化定理の拡張になっている. Irregular sampling と shift invariant space の関係について論じたものとしては [15] がある.

9 付記

対称空間 (Jordan 代数) 上での標本化定理の定式化は, [5] においてなされている.

参考文献

[1] M. Andersson : *Topics in Complex Analysis*, Springer Verlag, New York, Heidelberg(1996)

[2] 安藤繁 : 超解像における逆問題とその解法, 数理科学, no. 274, April, p. 56 - 61(1986)

[3] 新井仁之 : ルベーグ積分講義, 日本評論社 (2003)

[4] B. C. Berndt : *Ramanujan's Note Books Part I*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Tokyo(1985)

[5] W. Bertram : *Généralisation d'une formule de Ramanujan dans cadre de la transformation de Fourier spherique associée a la complexification d'un espace symmétrique compact,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, p. 1161-1166(1993)

[6] R. P. Boas : *Entire Functions*, Academic Press, New York(1982)

[7] R. P. Boas and R. Creighton Buck: *Polynomial Expansions of Analytic Functions,* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1964)

[8] I. Daubechies : *Ten Lectures on Wavelets*, Springer Verlag(2003)

[9] W. Donoghue Jr. : *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, New York(1969)

[10] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi : *Higher Transcendental Functions,* Bateman Manuscript Project Vol. I, Mcgraw - Hill, New York, Tront, London(1953)

[11] G. B. Folland : *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, New York(1995)

[12] G. H. Hardy : *Ramanujan*, Chelsea, New York(1978)

[13] 荷見守助 : 調和解析学, 槙書店 (1977)

[14] Y. Katznelson : *Introduction to Harmonic Analysis*, Dover(1968)

[15] K. H. Kwon and J. Lee : *Irregular sampling on shift invariant spaces*, IEICE Trans. Fundamentals Vol. E-93-A, no.6, p. 1163-1170(2010)

[16] H. J. Landau : *On the density of phase space expansions*, IEEE Transaction on Information Theory, Vol. 39, no. 4, July., 40, pp. 1152-1156(1993)

[17] 森口, 宇田川, 一松 : 数学公式 III, 岩波全書 (1960)

[18] D. Slepian and H. O. Pollak : *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncetainty I*, Bell System Tech. J., 40, pp. 43-66(1961)

[19] H. Ogawa : *Sampling Theory and Isao Someya; A Historical Note*, Sampling Theory in Signal and Image Processing, vol.5, no.3, Sept., p. 247-256(2006)

[20] H. C. Pak and C. E. Shin : *Perturbation of non harmonic Fourier series and non uniform sampling theorem*, Bull. Korean Math. Soc., vol. 44, no.2, p. 351-358 (2007)

[21] G. Polya and G. Szegö : *Aufgaben und Lehrsätz aus der Analysis I, II*, Springer - Verlag, Berlin, New York(1925)

[22] W. Rudin : *Real and Complex Analysis*, Mcgraw - Hill, New York, Tokyo(1986)

[23] 佐藤幹夫 : 佐藤幹夫の数学, 日本評論社 (2007)

[24] C. E. Shannon and W. Weaver: 通信の数学的理論, ちくま学芸文庫, 筑摩書房 (2009)

[25] 染谷勲: 波形伝送, 修教社 (1949)

[26] 寅市和男: ホイッタカー染谷ーシャノンの標本化定理, 数学セミナー 5 月号, 日本評論社, p. 42-48(2008)

[27] G. G. Walter : *Wavelet and Other Orthogonal Systems with Applications*, CRC Press, Florida (1994)

[28] G. G. ウオルター著　榊原進, 萬代武史, 芦野隆一 訳 : ウエーブレットと直交関数系, 東京電機大学出版局 (2001)

[29] K. Yoshino : *Liouville type theorem for entire functions of exponential type*, Complex Variables, 5(1985) p. 21-51.

[30] 吉野邦生, 荒井隆行: ディジタル信号と超関数, 海文堂 (1995)

[31] 吉野邦生: ディジタル信号と母関数, 数学セミナー 10 月号, 日本評論社, p. 24-27(2001)

[32] K. Yoshino : *The relation among Shannon's sampling theorem, Ramanujan's integral formula and Plana's summation formula*, Complex Analysis and Potential Theory, Proceedings of the Conference Satellite to ICM 2006 (Gebze Institute of Technology, Turkey) (Tahir Aliyev Azeroğlu and Promarz M. Tamrazov eds.), World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, p. 191-197(2007)

[33] 吉野邦生: ヘビサイドの超関数を知る, 数理科学 5 月号, p. 54-55(2009)

[34] R. M. Young : *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York (1980)