数理解析研究所講究録
第1972巻 2015年 57-66

無条件収束しないウェーブレット展開の例について

On an example of the non-unconditional convergence of wavelet expansions

有明工業高等専門学校一般教育科 福田 尚広 (Naohiro Fukuda)
National Institute of Technology, Ariake College
筑波大学大学院数理物質科学研究科 木下 保 (Tamotu Kinoshita)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba
筑波大学大学院数理物質科学研究科 鈴木 俊夫 (Toshio Suzuki)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

1 Introduction

ウェーブレット展開の無条件収束性を考察する前に、まずはフーリエ級数の場合について説明していこう。

1.1 フーリエ級数の L^p 収束 $(1<p<\infty)$

Riesz projection P を次で定義する。

$$Pf(x)=\frac{1}{2}\hat{f}(0)+\frac{1}{2}\Big\{f(x)+iHf(x)\Big\}$$

ただしここで、H は $\mathbf{T}$ 上のヒルベルト変換

$$Hf(x):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\sum_{k\in\mathbf{Z}}\Big\{-ie^{ikz}\mathrm{sgn}\,k\Big\}\Big|_{z=x-y}dy=\mathrm{p.v.}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\cot\Big(\frac{x-y}{2}\Big)dy$$

とする。このとき真ん中の式を用いれば、Riesz projection P は

$$Pf(x)=\frac{1}{2}\hat{f}(0)+\frac{1}{2}\Big\{f(x)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\sum_{k\in\mathbf{Z}}e^{ikz}\mathrm{sgn}\,k\Big|_{z=x-y}dy\Big\}=\sum_{k\geq 0}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

と表すこともできる。

$$\frac{1}{2}\hat{f}(0)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}1\cdot f(x)dx\leq\frac{1}{2}\|1\|_{L^q}\|f\|_{L^p}\leq C\|f\|_{L^p}$$

となるので、ヒルベルト変換 H にもとづいた Riesz projection P は $1 < p < \infty$ であるとき、$L^p(\mathbf{T})$ から $L^p(\mathbf{T})$ への有界線形作用素になることに注意する。さらに、フーリエ級数の部分和 $S_n(f) := \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k)e^{ikx}$ は、この Riesz projection P を用いると、

$$S_n(f) = e^{-inx}P\Big\{e^{inx}f\Big\} - e^{i(n+1)x}P\Big\{e^{-i(n+1)x}f\Big\}$$

のように分解して表せる。これにより、$1 < p < \infty$ であるとき

$$\|S_n\|_{L^p \to L^p} \leq 2\|P\|_{L^p \to L^p} \leq M_p$$

という事実もわかる（定数 M_p は n に無関係）。つまり、$\{S_n\}$ は L^p の有界作用素の集合として“有界集合”となっている。ところで、フェイェールの定理より、三角多項式は $L^p(\mathbf{T})$ で稠密である。このとき、$f \in L^p$ に対して、$f_m \to f$ in L^p となる三角多項式の近似列 $\{f_m\}$ をとったとすると、

$$\|f - S_n(f)\|_{L^p} \leq \|f - f_m\|_{L^p} + \|f_m - S_n(f_m)\|_{L^p} + \|S_n(f_m - f)\|_{L^p}$$

が得られる。従って、フーリエ級数は L^p 収束する、すなわち $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が、L^p（$1 < p < \infty$）の基底になっていることがわかる。

1.2　フーリエ級数の L^p のおける無条件収束と無条件基底

ここからは、e^{ikx} の代わりに $e^{2\pi ijt}$ を用いることにする。バナッハ空間 X と基底 $\{e_j(t)\}$ において、$\sum_{j\in\mathbf{Z}} c_j e_j(t)$ が X の位相で $f(t)$ へ“無条件収束”するとは、いかなる $\mathbf{Z}$ の置換 σ に対しても $\sum_{\sigma(j)\in\mathbf{Z}} c_j e_j(t)$ が X の位相で $f(t)$ へ収束することを意味する。なお、無条件収束に関しては、必ずしも基底で展開された形の級数を扱う必要はなく、$d_j(t) = c_j e_j(t)$ とおいて考えてもよい。そして、無条件収束であるとは、

$$\beta_j = \pm 1 \text{ に対して、級数 } \textstyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} \beta_j d_j(t) \text{ が収束する}$$

という条件と同値であることが知られている。一般に、

$$(\star) \qquad \text{絶対収束} \Longrightarrow \text{無条件収束}$$

が成り立つ。また、有限次元の数の級数ならば同値であることも知られている。無限次元の場合は逆が不成立である。例えば、無限次元のヒルベルト空

間である数列空間 ℓ^2 で、級数 $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}e_j$ を考えてみよう。これは絶対収束をしていないことは直ちにわかる。なぜならば

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|j^{-1}e_j\|_{\ell^2} = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\|e_j\|_{\ell^2} = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} = \infty$$

となるからである。

注意：ノルム空間の場合における絶対収束は、各項に対して絶対値ではなくノルムをとることに注意する。

一方、パーセヴァルの等式によって次のように無条件収束は確かに成り立つ。

$$\| \sum_{\sigma(j)} j^{-1}e_j\|_{\ell^2} = \Big\{ \sum_{\sigma(j)} |j^{-1}|^2 \Big\}^{1/2} = \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} |j^{-1}|^2 \Big\}^{1/2} < \infty$$

第1の等式で有限次元の数の級数にすり替えたので、第2の等式で絶対収束と無条件収束が同値であることを用いることができたことになる。

さて、$(\star)$ をノルム空間 X の場合に書き換えると、次のようになる。

$(\star)'$ $\quad \sum_{j\in\mathbf{Z}} \|c_je_j\|_X$ が収束 $\Longrightarrow \sum_{j\in\mathbf{Z}} c_je_j(t)$ は X で無条件収束

無条件基底：$\beta_j \in \mathbf{C}$ $(|\beta_j| \le 1)$ に対して、

$$T_\beta f = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j c_j e_j(t)$$

としたとき、$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_je_j(t) \in X$ と β_j に依存しない定数 C が存在して、

$$\|T_\beta f\|_X \le C\|f\|_X$$

が成り立つとき、基底 $\{e_j(t)\}$ は無条件基底と呼ばれる。また、$|\beta_j| \le 1$ を満たす β_j として、$\beta_j = \pm 1$ だけに限定してもよいことも知られている。フーリエ級数の基底 $\{e^{2\pi ijt}\}$ が L^2 における無条件基底であることは、ヒルベルト空間なので明らかである。一方、バナッハ空間 L^p で $1 < p < \infty$ であっても $p \neq 2$ ならば、$\{e^{2\pi ijt}\}$ はもはや無条件基底とはならない（[10] を見よ)。実際、$p = 7/6$ の場合に次の2つの級数を考えてみよう。

$$f_1(t) = \sum_{j=2}^{\infty} j^{-1/4}e^{2\pi ijt}, \qquad f_2(t) = \sum_{j=2}^{\infty} j^{-1/4}e^{i\sqrt{j}}e^{2\pi ijt}$$

どちらも係数に絶対値を付けたものが同じになり、$t = 0$ での挙動がよくない。[3], [15] によれば、$f_1 \in L^{7/6}([0,1])$ であり、$f_2 \notin L^{7/6}([0,1])$ であることがわかる。もし無条件基底であるならば、任意の $\beta_j \in \mathbf{C}$ ($|\beta_j| \leq 1$) に対して、$\|T_\beta f\|_X \leq C\|f\|_X$ が成り立たなければいけない。ところが、特別に選んだ $\beta_j = e^{i\sqrt{j}}$ に対して、

$$\infty = \|f_2\|_{L^{7/6}} = \|T_\beta f_1\|_{L^{7/6}} \leq C\|f_1\|_{L^{7/6}} < \infty$$

と矛盾した式になってしまっている。故に、無条件基底ではないと結論できる。

特に、$X = L^\infty$ で、フーリエ基底 $e_j(t) = e^{2\pi ijt}$ のときは、

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \|c_j e^{2\pi ijt}\|_{L^\infty} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} |c_j| \Big(= \|\{c_j\}\|_{\ell^1}\Big)$$

“ バナッハ空間 L^∞ で絶対収束 ” = “ 係数だけの絶対収束 ”

となっている。これにより $(\star)'$ はさらに

$(\star)''$　　$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |c_j| < \infty \Longrightarrow \sum_{j\in\mathbf{Z}} c_j e^{2\pi ijt}$ は L^∞ で無条件収束

と書き換えることが可能となる。しかしながら、この場合は $\{e^{2\pi ijt}\}$ が $X = L^\infty$ で基底にすらなっていないので、無条件基底にも当然ならない（一般に L^1 と L^∞ においては、いかなる無条件基底も存在しない）。しかし、フーリエ級数は $X = L^\infty$ において無条件基底でなくても、収束先の f が $\sum_{j\in\mathbf{Z}} |c_j| < \infty$ のように制限されていれば、$(\star)''$ より無条件収束や絶対収束となる可能性は十分起こり得る。実際、[15] によると、フーリエ級数 $f(t) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} c_j e_j(t)$ に対して次の事実がよく知られている。

$(i)_F$ If $f \in C^\alpha(\Omega)$ for $\alpha > 1/2$, the Fourier series converges uniformly and absolutely, i.e., $\sum_{j\in\mathbf{Z}} |c_j| < \infty$.

$(ii)_F$ If $f \in W^{1,1}(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$ for $\alpha > 0$, the Fourier series converges uniformly and absolutely, i.e., $\sum_{j\in\mathbf{Z}} |c_j| < \infty$.

従って、無条件基底ではないからといって、無条件収束の議論をあきらめる必要はない。与えられた空間が（基底をもっていないという意味で）不適切であっても、収束先への制限で、無条件収束性の議論は続行できるのである。またここで注目すべきことは、収束のためのバナッハ空間 $X = L^\infty(\Omega)$ と、収束先 f のバナッハ空間 $\tilde{X} = C^\alpha(\Omega)$ または $W^{1,1}(\Omega)$ が異なるということである（$\tilde{X} \subset X$）。とにかく空間を 2 つ準備していることに注意して欲しい。

特に、$(ii)_F$ と関連した $\tilde{X} = W^{1,1}(\Omega)$ では、次のような最適性を示す反例も知られている（$(ii)_F$ より一様収束はする）。

$(iii)_F$ For the function $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n \log(1+n)} \in W^{1,1}(\Omega)$ with $\Omega = (-\pi, \pi)$ its Fourier series does not converge absolutely.

1.3 ウェーブレット展開の L^p のおける無条件基底 $(1 < p < \infty)$

フーリエ級数のとき L^1 と L^∞ で無条件基底であることは不成立としても、$p \neq 2$ を除いた $1 < p < \infty$ の全てで不成立なのはいささか不便であった。一方、ウェーブレット展開ではこれを解消できるので、有効だとされている。フーリエ級数のときは解析的な関数空間 $\mathcal{A}$ に属する基底 $\{e^{2\pi ijt}\}$ に固定されていたが、ウェーブレット展開 $f(t) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(t)$ $(\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k))$ のときはウェーブレット関数 ψ の取り方が様々である。そこで、ウェーブレット関数の滑らかさや無限遠方での減衰を制限する関数空間（関数族）Y を導入して、ウェーブレット関数 ψ を分類しておいた方がよいであろう。[7] によれば次の結果がよく知られている。

$(iv)_w$ If $\psi \in Y = \{y \in C^1(\mathbf{R}); |y(t)| + |y'(t)| \leq g(|t|)\}$ with a decreasing $g \in L^1[0,\infty)$ such that $|g(0)| < \infty$ and $\|tg(\cdot)\|_{L^1[0,\infty)} < \infty$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ is an unconditional basis in $X = \tilde{X} = L^p(\mathbf{R})$ with $1 < p < \infty$.

さて $(iv)_w$ を示すには、T_β を Calderón-Zygmund operator で積分核の条件をチェックして証明がなされている。C^1 という条件がネックとなっていて、有名な Franklin ウェーブレットは指数減衰でありながら除外されている事態になってしまっているのは残念である。そこで [7] では、Franklin ウェーブレットの場合にも成立するということを示すために、あらためて積分核の条件をチェックし直している。ところが、Haar ウェーブレットの場合は滑らかさがないため、別証明をせざる得ない状況になっており、[7] の章末で作用素 T_β に対する弱 $(1,1)$ 評価

$$\mathrm{meas}\Big\{t \in \mathbf{R}; |T_\beta f(t)| \geq \lambda\Big\} \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbf{R})}$$

を利用した証明も行っている（[13] も見よ）。その後、[14] により C^1 の条件が外され、減衰度も緩められて、次の結果が示された（[6], [11] も見よ）。

$(iv)'_w$ If $\psi \in Y = \{y; |y(t)| \leq g(|t|)\}$ with a decreasing $g \in L^1[0,\infty)$ such that $|g(0)| < \infty$ and $\|\log(1+t)g(\cdot)\|_{L^1[0,\infty)} < \infty$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ is an unconditional basis in $X = \tilde{X} = L^p(\mathbf{R})$ with $1 < p < \infty$.

減衰度は可積性の限界に近いところまで改良されている。しかしながら、シャノンウェーブレットの場合も考えたとき t^{-1} のオーダーで可積性がないので、$(iv)'_w$ ではカバーしきれていない。作用素 T_β に対する弱 $(1,1)$ 評価がシャノンウェーブレットのときには不成立なのが原因である。そこで、[14] の論文ではさらに証明を変えて、シャノンウェーブレットを含む unimodular ウェーブレットに対して以下も示している。

$(v)_w$ If $\psi \in Y = \{y \in \mathcal{A}(\mathbf{R}); \mathcal{F}[y]$ is characteristic functions of a finite sum of bounded closed intervals (unimodular wavelets)$\}$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ is an unconditional basis in $X = \tilde{X} = L^p(\mathbf{R})$ with $1 < p < \infty$.

他にも [1] では、シャノンタイプと類似の多次元のマルチウェーブレットに対して無条件基底であることやその応用が示されている（[8] も見よ）。

2 Main Results

ウェーブレットの無条件収束性に関する我々の結果を紹介していこう。

2.1 ウェーブレット展開の $W^{1,1}$ のおける無条件収束性

フーリエ級数の $(ii)_F$ と $(iii)_F$ で登場したように、ウェーブレット展開に対しても $W^{1,1}$ という空間で考えたい。Ω を $\mathbf{R}$ の開集合とする。有界変動関数の空間は $BV(\Omega)$ で表され、ノルム $\|f\|_{BV} := \|f\|_{L^1} + V(f,\Omega)$（$V$ は全変動）が導入される。ソボレフ空間 $W^{1,1}(\Omega)$ は $BV(\Omega)$ の部分空間で、非有界な領域 Ω ならば無限遠方で減衰する性質を持っている。Ω が有界領域の場合は、$BV(\Omega)$ にしろ $W^{1,1}(\Omega)$ にしろ、リプシッツ連続な関数空間 $Lip(\Omega)$ を含むが、ヘルダークラス $C^\alpha(\Omega)$（$0 < \alpha < 1$）は含まないことに注意する。また $\Omega = \mathbf{R}$ の場合、測度 0 集合を無視すれば $Lip(\mathbf{R}) = W^{1,\infty}_{loc}(\mathbf{R})$ がわかり、さらにソボレフの埋蔵定理より $Lip \subset W^{1,1}_{loc}$, $W^{1,1} \subset C^0 \cap L^\infty$ のような包含関係がわかる。

注意：また別のソボレフの埋蔵定理を用いることで、$W^{1,1} \subset L^2$ もわかる。従って、ウェーブレット展開をしたときの係数 $c_{j,k} := (f, \psi_{j,k})_{L^2}$ は少なくとも有限値に定まる。

X（全体となる収束スピードの位相）, $\tilde{X}$（収束先の位相や条件）, Y（ウェーブレットの位相や条件）を全て同じ $W^{1,1}$ に選ぶとどうなるであろうか？少々

粗っぽい評価ではあるが、$X = \tilde{X} = Y = W^{1,1}(\mathbf{R})$ の場合に次の不等式が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\|c_{j,k}\psi_{j,k}\|_{W^{1,1}} &\leq \sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{j/2}|c_{j,k}|\|\psi(2^j\cdot -k)\|_{W^{1,1}} \\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{j/2}|c_{j,k}|\int_{\mathbf{R}}\Big\{|\psi(2^jt-k)| + 2^j|\psi'(2^jt-k)|\Big\}dt \\ &\leq \Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{-j/2}|c_{j,k}|\Big)\|\psi\|_{L^1} + \Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{j/2}|c_{j,k}|\Big)\|\psi'\|_{L^1} \\ &\leq \Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{|j|/2}|c_{j,k}|\Big)\|\psi\|_{W^{1,1}}.\end{aligned}$$

従って、級数 $\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{|j|/2}|c_{j,k}|$ が収束するならば、$\psi \in W^{1,1}(\mathbf{R})$ に対してウェーブレット展開 $\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}$ が $W^{1,1}(\mathbf{R})$ において絶対収束する、すなわち無条件収束する。これより、次の結果を得たことになる。

Proposition *Assume that $\psi \in W^{1,1}(\mathbf{R})$. Then, the wavelet expansion $\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(t)$ converges to $f(t)$ unconditionally in $W^{1,1}(\mathbf{R})$ if the coefficients satisfy $\{2^{|j|/2}c_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbf{Z}^2} \in \ell^1$.*

2.2 ウェーブレット展開の非無条件収束性

ソボレフ空間 $W^{1,1}$ は、C^0 と Lip の間に渡って存在する空間であったことに注意して、無条件収束の反例を構成するにあたっては次の strategy で考えていきたい（$X, \tilde{X}, Y$ を全て同じ $W^{1,1}$ に選んだ Proposition の仮定を、反例の構成のためにずらすことになる）。

- Y について： ウェーブレット関数 ψ は、$W^{1,1}$ における最大の滑らかさより良い $\psi \in Y = Lip(\mathbf{R})$ から選ぶ。

- $\tilde{X}$ について： 収束先 f は $W^{1,1}(\mathbf{R})$ における最小の滑らかさより悪いような次で構成する。

$$f \in \tilde{X} = \Big\{C^0(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})\Big\}\backslash W^{1,1}(\mathbf{R})$$

- X について： 位相となる X としては、$W^{1,1}(\mathbf{R})$ における最小の滑らかさより悪いような $X = L^\infty(\mathbf{R})$ を選ぶことにする（集合族 $\tilde{X}$ のように）。$W^{1,1}(\mathbf{R})$ より若干弱い位相なので、収束性しやすくなってしまうので、無条件収束性

の反例を構成する立場では多少不利となることが想定される。しかし、フーリエ級数の場合の知られている事実

$(iii)_F$ For the function $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n \log(1+n)} \in W^{1,1}(\Omega)$ with $\Omega = (-\pi, \pi)$ its Fourier series does not converge absolutely.

も、$X = L^{\infty}(\mathbf{R})$ であったので対比がしやすくなる。
本研究では、次の結果が得られたので報告する。

Main Theorem *There exists* $f_0 \in \{C^0(\mathbf{R}) \cap L^{\infty}(\mathbf{R})\} \backslash W^{1,1}(\mathbf{R})$ *satisfying the following:*

- f_0 *has the wavelet expansion* $f_0(t) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(t)$ *in* $L^2(\mathbf{R})$ *for some* $\psi \in Lip(\mathbf{R})$ *and* $\{c_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbf{Z}^2} \in \ell^2$ *such that* $\{2^{|j|/2}c_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbf{Z}^2} \notin \ell^1$.

- $\sum_{j\in\mathbf{Z}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(t)$ *converges to* $f_0(t)$ *uniformly and non-unconditionally in* $L^{\infty}(\mathbf{R})$.

証明の概略としては、具体的に f_0 を構成さえすれば証明は完了する。時間空間ではっきりとした形で求まるウェーブレットは Haar タイプ以外にはとんど存在しないと思われる。実際 Franklin ウェーブレットですら、各 node における値を求めることはかなり面倒である。本研究では、あまり利用されてきていない Strömberg ウェーブレットを有効活用した。実は、Strömberg ウェーブレットというのはあまり知られていないが、各 node における値が exact に簡単に求まるメリットを持っている（[4] を見よ)。Strömberg ウェーブレットを用いたウェーブレット展開に関して、非有界変動性、連続性と一様収束性、非無条件収束を示した。また一様収束性に対しては、同程度連続性に関する事実を利用した。証明の詳細については投稿中の論文 [5] で公表します。

References

[1] R. Ashino and T. Mandai, Wavelet bases for microlocal filtering and the sampling theorem in $L_p(\mathbf{R}^n)$, Appl. Anal., **82**, No. 1, 1–24 (2003).

[2] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[3] I. Daubechies, Different perspectives on wavelets, Papers from the American Mathematical Society Short Course held in San Antonio, Texas, January 11–12, 1993. Edited by Ingrid Daubechies. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 47. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[4] N. Fukuda and T. Kinoshita, On non-symmetric orthogonal spline wavelets, Southeast Asian Bull. Math., **36**, No. 3, 319–341 (2012).

[5] N. Fukuda, T. Kinoshita and T. Suzuki, On the Unconditional Convergence of Wavelet Expansions for Continuous Functions, preprint.

[6] G. Gripenberg, Wavelet bases in $L^p(\mathbf{R})$, Studia Math., **106**, No. 2, 175–187 (1993).

[7] E. Hernández and G. Weiss, A first course on wavelets, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[8] T. Hoshiro, Unconditional convergence of wavelet expansions (Japanese) (Kyoto, 2004). Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, No. 1385, 94–104 (2004).

[9] Y. Meyer, Wavelets and operators. Translated from the 1990 French original by D. H. Salinger. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **37**, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[10] R. E. A. C. Paley and A. Zygmund, On some series of functions, Proc. of the Cambridge Phil. Soc., **34**, 337–357, 458–474 (1930) and **28**, 190–205 (1932).

[11] W. Pompe, Unconditional biorthogonal wavelet bases in $L^p(\mathbf{R}^d)$. Colloq. Math. **92**, no. 1, 19–34 (2002).

[12] J. O. Strömberg, Ondelettes à localisation exponentielles, Proc. Conference in Harmonic Analysis in honor of Antoni Zygmund, 475–493 (1983).

[13] P. Wojtaszczyk, Banach Spaces for Analysts, Cambridge University Press, 1991.

[14] P. Wojtaszczyk, Wavelets as unconditional bases in $L^p(\mathbf{R})$, J. Fourier Anal. Appl., **5**, No. 1, 73–85 (1999).

[15] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge University Press, 1959.

[16] W. P. A. Ziemer, Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation. Graduate Texts in Mathematics, 120. Springer-Verlag, New York, 1989., Cambridge University Press, 1959.