

学 位 審 査 報 告 書

(ふ り が な) 氏 名	ごとうだ たけし 後藤田 剛
学位 (専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科・専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) Anomalous enstrophy dissipation via triple collapse of point vortices in a Euler-Poincaré system (オイラー・ポアンカレ方程式における三点渦衝突による特異エンストロフィー散逸)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 坂上 貴之 教授 KRASNY, Robert 教 授 國府 寛司 教 授

理 学 研 究 科

京都大学	博士 (理 学)	氏 名	後藤田 剛
論文題目	Anomalous enstrophy dissipation via triple collapse of point vortices in a Euler-Poincaré system		

(論文内容の要旨)

流体乱流現象の理論的理解は古典力学における未解決の難問としてよく知られている．その解決に向けて多くの研究者がこの問題に取り組んできた．もっとも有名な乱流理論はコルモゴロフによる統計理論であろう．この理論は高レイノルズ数 (非粘性極限の) 乱流場の統計の一部を説明することが知られているが，コルモゴロフ理論においてなされている重要な仮定の1つは，乱流のエネルギー散逸率がレイノルズ数無限大の極限においてに正值に収束する (これをエネルギー散逸率の非粘性極限での非消散と呼ぶ) というものである．単純に考えれば，非圧縮・非粘性のなめらかな流れに対して，エネルギーは保存量なので，このような流れでは非粘性極限でエネルギー散逸率はゼロとならねばならない．したがって，この仮定が成立するには，非粘性極限であるオイラー方程式の滑らかなでない解を考える必要があり，こうした滑らかな解が保存すべき量を保存しないようなオイラー方程式の特異解 (散逸的な弱解と呼ばれる) の構成とその理解が乱流場の数学的特徴づけにおいて重要な役割を果たすと考えられている．このような特異流れの滑らかさについて言及した有名な結果にオンサーガーによるものがある．それによると，指数 $1/3$ に満たないヘルダー連続性程度しか持たないオイラー方程式の弱解がエネルギーを保存しないとされている．これをオンサーガー予想と呼ぶが，このような解の存在については近年 DeLellis と Szekelihiidi によって解決が図られたものの，その解が乱流流れ場とどう関連するか，また物理的な運動としてこれがどのようなものに対応するかなどは以前未解決のままである．

後藤田氏の研究は，このような背景のもとに，こうした散逸的な弱解の数学的構成とその物理的特徴づけを目指して行われたものである．三次元オイラー方程式の時間大域解の構成は困難な数学的課題であるため，問題を二次元オイラー方程式に制限して，そのような散逸的な弱解の構成を行った．三次元乱流と二次元乱流にはその統計的性質には本質的な違いがあるものの，二次元乱流においても非粘性極限において保存量であるエンストロフィー (渦度の L^2 ノルム) を保存しないオイラー方程式の特異解が重要な役割を果たすことが知られており，ここで得られた解が乱流の数学理論を進めることが期待されている．

二次元オイラー方程式の解がエンストロフィーを特異散逸するためには渦度の初期値がラドン測度の空間に入っていることが数学的に要請されるので，まずはこうした弱い空間に初期値を持つ解を構成しなければならない．しかし，一方でオイ

ラー方程式におけるこうした空間の解の存在は未解決の難問であることが知られている．このような状況に対して，後藤田氏はオイラー方程式を正則化したオイラー・ポアンカレ方程式系を考え，その上で時間大域解を構成しておいてから，正則化パラメータのゼロ極限としてオイラー方程式の特異解の構成を試みた．まずは，一般的なオイラー・ポアンカレ方程式系に対して，ラドン測度の空間に初期値を持つときの超関数の意味での時間大域的一意弱解の存在を証明した．照明は Marchioro-Pulvirenti による標準的なオイラー方程式の解析手法をラドン測度の初期値にも適用できるよう拡張したものである．次に，初期渦度分布が N 点のサポートを持つ δ 関数からなる「点渦」分布を考え，そこからサポート点の時間発展を記述する常微分方程式系（ハミルトン力学系，点渦系方程式とよぶ）を導出して，その時間大域可解性を証明した．加えて，Novikov の手法によって，この点渦系の運動の言葉で定式化されるエネルギーとエンストロフィーの表示を与えることに成功した．ここまでが本論文の前半の主要結果である．

本論文の後半では，オイラー・ポアンカレ方程式の正則化の一つであるオイラー α 方程式（正則化パラメータは α ）をとりあげ，点分布のサポートの個数が $N = 3$ となっている場合の点渦方程式（ α 点渦系）の三体問題を考えた．この系は可積分系であることが知られているので，これを力学系理論を使って完全に解析した．定常解の分類とその安定性の解析を行い，系の保存量を用いて系を二次元の問題に縮約して，その相平面内にハミルトニアン の等値線を書くことでその挙動は完全に理解できるが，後藤田氏はその等値線の幾何的性質を解析的に調べることによって，その挙動を数学的に完全に分類することに成功した．その結果次の定理を証明した．三点渦の強さに対するある条件下において，系のハミルトニアン の値がある範囲にある全ての解に対して， $\alpha \rightarrow 0$ の極限において，三点渦の挙動はある時刻で一点に自己相似的に衝突する点渦衝突解と自己相似的に拡大していく点渦衝突解をつないだ解に広義一様収束する．加えて，その衝突時刻において，系のエンストロフィーは超関数の意味で δ 関数的に散逸することを示すこと，またエネルギーは散逸しないことを示した．このような特異散逸解の存在は Sakajo によって数値計算を援用して指摘されていたが，このような解の存在を厳密に示したのみならず，数値計算では捉えられていない新しい特異散逸解の構成にも成功している．

以上が本論文の主要結果である．

(論文審査の結果の要旨)

コルモゴロフの乱流統計理論は、彼の確率論の誕生を促すものであったと考えられている。また、乱流理論に絡めてオンサーガー予想として知られていた、エネルギーを保存しない3次元オイラー方程式の特異弱解の構成という、新たな数学的問題が近年惹起され、その解決が図られた。その過程で非線型偏微分方程式の解の幾何学的構成という新しい手法が見出され、その成果が国際数学会議の Plenary Talk に繋がるなど非線型偏微分方程式論そのものの発展につながった。このように古典力学最大の難問とされる流体乱流の数学理論の構築は、数学の進展にも大きく寄与している。本論部で与えられている後藤田氏の研究は3次元高レイノルズ数流体乱流ではなく二次元乱流に対するものではあるが、乱流理論の数学的研究に関するこのような学問的潮流の中で行われたものである。

後藤田氏の結果のもっとも重要な点は、保存量を特異散逸するオイラー方程式の弱解の構成を行ったのみならず、その物理的挙動や意義を数学的に明らかにした点にある。すなわち、点渦構造の一点衝突という現象が乱流場における保存量特異散逸を引き起こす物理メカニズムの一つとなりうることを示唆したのである。従来の乱流物理の研究で知られている事実として、二次元乱流の乱流統計を維持するメカニズムの一つに複数の渦構造の融合 (merge) 現象がある。点渦衝突はこうした渦が近づいて一つになる仕組みを反映しており、渦の融合とオイラー方程式の弱解の特異エントロピー散逸を数学的に結びつけたものとして物理的な意義も十分高い。

後藤田氏の研究の前半で与えられたオイラー・ポアンカレ方程式系に対する一般論では、ラドン測度の初期値に対する超関数の意味での時間大域弱解の存在を示し、その点測度分布に対して得られる点渦方程式系の可解性も同時に与えている。これらの系は後半で扱われる乱流モデルとして導入されたオイラー α 系や数値計算モデルとしてよく知られている δ 点渦系を含んでおり、この結果は数理流体力学上の重要な対象を一般化するものとして意義があり、今後は後半のオイラー α 方程式系で得られた結果をこうした一般方程式系へ拡張することが期待され、さらなる発展の可能性も持つ研究である。

よって、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成29年1月18日に試問を行った結果、合格と認めた。