大気中の微細渦の力学に関する数値的研究（要旨）

松嶋俊樹

第１章　はじめに

大気の流れは，小スケールでは等方乱流的ではあるが，その中にも組織的な微細渦が存在している．その代表例として，対流境界層でのダストデビルや，噴流中の渦輪が挙げられる．

ダストデビルや，より大きな渦である竜巻は，鉛直渦の中心まで水平収束流が到達している１セル構造，または，渦の中心付近に下端まで到達する下降流が存在する２セル構造をもつ．また，竜巻は，親渦の周りに複数の子渦が存在するような多重渦構造をもつことがある．このようなダストデビルや竜巻の渦構造に関連して，渦の形態が変化する状況を模した室内実験が行われており，上端での吸い込みの流量に対する側方の循環と実験装置のアスペクト比の積であるスワール比とよばれる無次元パラメータが大きくなるにつれて，渦の構造が１セル構造から２セル構造，多重渦構造へと遷移する．

一方，渦輪を地面へ衝突させる室内実験が，渦輪と境界との相互作用を理解するためにこれまで多く行われている．レイノルズ数が 10 の３乗のオーダーの実験では，渦輪が壁に衝突すると二次渦輪が生成され，その二次渦輪が主渦輪より先に不安定化して，波打った構造が現れる．下端境界を固体壁ではなく粒状体にした同様の室内実験も行われており，この場合，最初の衝突で下端境界に円形のクレーター構造が形成された後，生成された二次渦輪が初期に与えた渦輪（主渦輪）に巻き付き、このとき，下端境界に放射状の深い溝ができることが知られている．

竜巻を模した渦の室内実験では，スワール比を大きくしていくことで，２セル構造から多重渦構造となるため，２セル構造が持つ何らかの流れの不安定性により多重渦構造が生じている可能性がある．そこで，第２章では，２セル構造をもつ理想化された渦モデルとして，サリバン渦（Sullivan，1959）を導入し，第３章でその安定性を調べる．サリバン渦は，ダストデビルの２セル構造をはじめて発見した観測的研究（Sinclair，1973）などでも参照解として利用されている．

竜巻を模した渦の室内実験で現れるような，渦の生成と構造の変化を理解するための数値実験を行うには，室内実験に類似した設定だけでなく，より柔軟な条件設定が行える数値モデルが求められる．まず，境界条件として，側方での流入条件，上端での流出条件といった開放条件と，渦へ向かう強い吹き込みを作るための下端の粘着境界条件を課すことが可能である必要がある．また，ほぼ円形の渦の計算のためには，渦の中心を通る鉛直軸に対して，ある整数の倍数の方位角波数が特別に扱われないように，円柱座標系を用いる必要があるが，円柱座標系で差分法を用いると，中心軸上近傍の極問題を回避するためにフィルター操作のような工夫が必要となる．そのため，第４章では，竜巻を模した渦の数値計算を目的として，平面の上方に広がる半無限領域において柔軟な境界条件のもとでナヴィエ・ストークス方程式の時間発展を計算する高精度スペクトル法モデルを開発する．

第５章では，開発した数値モデルを用いた数値実験として，渦輪の壁衝突と竜巻を模した渦に関する数値実験を行い，渦力学的な観点からの解釈を試みる．最後に，第６章で全体をまとめる．

第２章　理想化された，竜巻を模した渦

大気中の微細渦に関する研究を行う準備として，特に竜巻を模した渦に関する過去の研究をまとめた．まず，ランキン渦を導入し，それを基本場としたときの線形波動である，慣性波の分散関係を導出した．また，それを利用して擾乱の初期値問題の解析解を求めた．次に，１セル構造と２セル構造をもつ竜巻に類似した，ナヴィエ・ストークス方程式の厳密解として，それぞれバーガース渦とサリバン渦を導入した．最後に，１セル構造と２セル構造のどちらも表現する，竜巻に類似したナヴィエ・ストークス方程式の厳密解として，セリンの解を導入した．

第３章　サリバン渦の安定性

サリバン渦は，吹き込みによる渦の伸長効果と粘性による散逸効果が釣り合った，ナヴィエ・ストークス方程式の定常な厳密解であり，渦レイノルズ数（動粘性係数に対する無限遠での循環の比）とよばれる無次元パラメータをもつ．

サリバン渦の安定性を調べるため，局所的な擾乱を考え，二次元安定性解析と三次元安定性解析を行った．サリバン渦は方位角波数１，２および３の擾乱に対して不安定であり，擾乱が水平二次元的であると仮定した場合では，方位角波数２のモードの発達率が常に最大であった．一方，擾乱の三次元的な構造は許すが，サリバン渦に伴う動径方向の流速を零とし，鉛直流速の高度変化を無視する場合，水平二次元的モードと三次元的モードのどちらが最大発達になるかは鉛直方向の位置に依存し，鉛直流のシアの影響が強くなる鉛直方向遠方では方位角波数１の三次元的な左手回りの螺旋状モードの発達率が大きくなった．また，渦レイノルズ数が大きくなると，最大発達のモードが左手回りの螺旋構造をもつ方位角波数１のモードから，水平二次元的な方位角波数２のモードに変化することを示した．

線形安定性解析では基本流の高度依存性を無視して解析を行ったが，鉛直流の高度依存性も考慮した擾乱の線形時間発展を行ったところ，線形安定性解析と整合的な結果が得られた．また，擾乱の線形時間発展を調べることによって，サリバン渦の鉛直方向の広がりをある程度の有限の領域で打ち切って考えた場合，10 の４乗のオーダーの渦レイノルズ数においては，広い高度範囲で水平二次元的擾乱の発達が卓越しうることを示した．

第４章　境界条件に柔軟な半無限領域スペクトル法

半無限領域の数値モデルの開発においては，本研究独自の手法が導入されている．円柱座標系で半無限領域上のナヴィエ・ストークス方程式を解く場合，水平方向には，展開した変数が極で正則となるように，Matsushima and Marcus (1997)によって提案された無限領域のスペクトル法を用いるのが良いと考えられる．しかし，粘性項を陰的に扱わなければならないことを考慮すると，彼らの方法では，水平方向の基底関数がラプラシアンの固有関数ではないため，水平方向と鉛直方向とに変数分離することができず，大規模な連立方程式を数値的に解かなければならないという問題があった．本研究では，水平方向の展

開に用いる基底関数として，渦度に関する粘性項を陰的に扱う際に現れる水平微分演算に対する固有関数を用いた．これにより，渦度の積分制約条件（速度場に対する境界条件を渦度場の線形バランス方程式に置き換える手法；Quartapelle and Valz-Gris，1981）を半無限領域の数値計算にはじめて導入した．また，渦度に関する条件を導入できたことによって，４階の偏微分方程式を２つの２階の偏微分方程式として解くことを可能にした．

鉛直方向には，Boyd (1987)による，チェビシェフ多項式を用いた半無限領域のスペクトル法を用いた．その際に現れる２階の偏微分方程式を離散化した方程式は，モデルを高解像度にする場合には悪条件となるため，数値解の計算において反復改良法を適用し，さらに境界値を決定するための反復法を新たに導入した．この手法により精度が劇的に改善されることを，二種類のストークス流線関数の分布を基準解として用いることで実証した．

第５章　開発した半無限領域スペクトル法による数値実験

開発した数値モデルを用いて，渦輪と竜巻を模した渦に関する数値実験を行った．まず，水平な壁と渦輪の衝突の数値実験を行った．第一に，軸対称の渦輪の衝突を考えた二次元数値実験を，先行研究による数値実験に比べて渦レイノルズ数を非常に大きく設定して行った．その結果，以下の過程が明らかとなった．主渦輪が壁に接近するにつれ，境界からの渦シートが剥離し，渦シートのシア不安定により，二次渦輪と三次渦輪が形成される．その後，シア不安定によって，間欠的に小さな渦輪が形成され，二次渦輪の誘導する速度場によってそれらは上方へ移流される．また，はじめに主渦輪が壁に接近するとき，境界の近くで渦度場の微細構造が形成されることをはじめて示した．

第二に，屈曲した渦輪の壁衝突の三次元数値実験を，過去の室内実験による研究と同程度の渦レイノルズ数の設定で行った．この数値実験では，軸対称の場合と同様に，主渦輪の壁への衝突により二次渦輪が生成されたが，二次渦輪は主渦輪より先に不安定化して波打つ．これは，過去の室内実験の結果とも整合的である．また，不安定となった二次渦輪は，ある部分では主渦輪に巻き付き，主渦輪は大きく屈曲し，結果として渦線は，複雑な花びら状の構造を形成した．渦輪が境界へ与える影響を調べるため，境界上の仮想粒子の運動の収束・発散を表す指標となる量を導入し，渦線が花びら状の構造となる際には対応するパターンがこの量にも現れることを示した．このことは，粒状体に渦輪を衝突させた場合の粒状体に現れるパターン形成のメカニズムの理解につながるものと考えられる．

第三に，Fiedler (2009)に基づき，円柱容器を回転させ，上昇流を作るための浮力強制を円柱容器の中心軸に与える設定で，竜巻を模した渦の二次元軸対称性を課した数値実験と三次元の数値実験を行った．この際，室内実験に準じた設定を行うために，開発した半無限領域のスペクトル法モデルに埋め込み境界法を導入した．

二次元軸対称性を課した場合の時間発展においては，本研究で導入した渦度の積分制約条件を用いて境界での渦度生成を解釈することにより，渦度場による現象の理解が可能になった．この渦力学的な観点では，二次元軸対称性を課した場合の時間発展は，角運動量の輸送，重み付き渦度（方位角渦度を中心軸からの距離で割り符号を反転させたもの）の輸送，および角運動量の分布に依存した重みつき渦度の生成・消滅と，重みつき渦度によって誘導される速度場を考えることによって解釈できる．これにより，Fiedler 型の設定

で二次元軸対称性を課した場合の時間発展において現れる２セル構造や，下端が粘着境界の場合に現れる流線が波打つ構造が以下のように理解できることが明らかになった．

Fiedler 型の設定では，浮力強制によって生じた収束流によって，角運動量が大きい気塊が下層で流入し，それが上層に向かって移流される．このとき，上層で角運動量の負の鉛直勾配が作られる．これに伴って，中心軸付近では正の重み付き渦度が生成されて，中心軸で下降流をもつセルが生成される．角運動量の負の鉛直勾配は下層でも現れ，これによって，上層でできたセルは下端に到達し，結果として渦は２セル構造となる．また，下端境界が粘着境界のとき，下層での角運動量の中心軸方向への流入によって，角運動量の正の鉛直勾配ができ，それによって負の重み付き渦度が生成される．この負の重み付き渦度が誘導する流れによって，境界付近での吹き込み流が加速され，その上での吹込み流が減速されると，初期の剛体回転流に対応して鉛直方向に直線状であった等角運動量線が中心に向かって入り込む分布となる．そのような角運動量分布では，上側では角運動量の負の鉛直勾配によって正の重み付き渦度が生成されるため，それによって誘導される流れに伴って流線が波打つ構造ができる．

同じ外部パラメータを用いた場合でも，下端がすべり境界の場合に２セル構造となる一方で，粘着境界の場合には１セル構造となることがある．この原因についても，本研究で導入した渦力学的な観点によって理解できる．粘着境界条件の場合に作られる下層での角運動量の正の鉛直勾配によって負の重み付き渦度が生成されるが，これは浮力強制のトルクで生成される重み付き渦度と同符号であるので，粘着境界条件の影響によって生じる流れは浮力強制で作られる収束流を維持するため，上層で作られるセルが下端まで到達することを阻害する．

また，粘着境界条件を課した場合については，三次元の数値実験も行った．その結果，二次元軸対称計算において１セルの解が得られたパラメータでは，三次元計算でも１セルの解が得られた．ただし，渦の中心は円柱座標の中心軸を離れて運動する．二次元軸対称計算において流線が波打つ解が得られたパラメータでは，方位角波数１のモードが発達して，左手回りでの螺旋構造が現れて渦が崩壊し，しばらくして波数２型の左手回りの螺旋構造をもつ多重渦となる解が得られた．

第６章　まとめ

本研究では，大気中の微細渦の力学を数値的に理解することを目的とし，竜巻を模した渦の安定性，下端で粘着境界条件を課すことが可能な半無限領域の新しい手法に基づく数値モデルの開発，開発した数値モデルを用いた，渦輪の壁衝突および竜巻を模した渦の時間発展の数値実験を行った．本博士論文で得られた新たな知見と意義は，以下のようにまとめられる．

サリバン渦のように吹き込み流を伴う２セル渦の二次元線形安定性は，Nolan and Farrell (1999) によって調べられているが，彼らは三次元擾乱に対する線形安定性を調べていなかった．したがって，本研究は，サリバン渦のような２セル構造をもつナヴィエ・ストークス方程式の解の安定性をはじめて適切に調べた研究であるといえる．また，本研究では，渦レイノルズ数に依存して最大発達のモードが変化することを示しが，これは，

ダストデビルや竜巻渦の室内実験における多重渦構造の成因に対しての解釈を与えうる重要な結果である.

本研究で提案した数値モデルは，側方と上方に境界を課す必要がなく，下端で粘着境界条件を課すことのできるという，大気中の微細渦の数値計算に理想的な全く新しい数値モデルである．また，著者の知る限り，全方向についてスペクトル法を用いたモデルにはじめて積分制約条件を導入した数値モデルである．さらに，本研究では，空間離散化から得られた連立方程式が高解像度で悪条件となることから生じる困難を克服するために二つの反復法を導入した．この手法は，離散化手法を変えることで連立方程式を良条件とする従来の手法(Coutsias et al. , 1996; Olver and Townsend, 2013)とは全く異なる独自のものである.

本研究で開発した数値モデルによって，高解像度・高精度数値計算が可能になったことは，軸対称渦輪が壁衝突する際に，境界付近で渦の微細構造が現れることの新たな発見へとつながった．また，本研究で境界上の仮想粒子の収束・発散を表わす量や，重み付き渦度といった概念を導入することで，渦が地表へ与える影響や竜巻を模した軸対称渦の力学の新たな解釈が可能になった.