非線形フィルタ理論に基づくデータ同化手法を応用した洪水予測手法に関する研究

2016年

辻倉　裕喜

目　　次

第1章

緒　論

洪水予測技術には様々なものがあるが，上下流の水位の相関関係等に基づき評価地点の水位を直接予測する手法と，降雨から流出量を評価する流出解析モデルを基本とする手法の 2 つに分類することができる．

前者の最も単純なモデルとしては，洪水予測地点の水位と上流観測地点の水位との経験的相関による水位相関法が挙げられる．水位相関法は大流域の大規模洪水を比較的精度良く予測できるが，基本的なモデルでは降雨パターンの違いを考慮する仕組みがなく中規模洪水に対する適用性に課題があることが指摘されている [1]．また，中小流域に適用する場合には，降雨流出から河道水位の変化までの時間が短いため，上流の水位だけでなく流域への降雨量も考慮して下流の水位を予測するといった工夫が必要となる [2),3)]．

流出解析モデルでは，基本的に降雨量を入力データとして流出量を評価し，流量を水位に換算することで水位ハイドログラフを予測する．洪水予測に用いられるという観点では，比較的少数のパラメータで流出現象の非線形性を表現できるモデルとして貯留関数法が広く利用されてきた．貯留関数法は，流出事象に応じてパラメータの調整が必要になることと，ピーク流量はある程度再現できるもののピーク時刻の予測精度の確保が困難となる傾向があることが指摘されている [1]．

上記の水位相関法や貯留関数法は，各手法に限界があるものの，両者とも比較的簡便な仕組みで実用的な予測ができるといった点においては, 実務上有効な洪水予測手法である. したがって, 2 つに分類した手法それぞれについての精度向上に向けた取り組みが必要であると認識している．しかしながら，本研究では，透明性や説明性の観点から，基本的には，より工学的な立場をとる流出解析モデルを基本とする手法について, その予測精度の向上に向けた検討を行うものとする．

洪水予測に貯留関数法等のいわゆる集中型流出モデルを用いる際には, 流出解析モデルの構築, パラメータの設定，流域の初期貯留量の算定が予測精度の確保に重要となる．パラメータの設定については，パラメータを現実的な範囲でばらつかせた多数のアンサンブル予測を行い，その中から観測値に近い結果を出力するものを選択していく手法が検討されている [4]．また，流域での初期貯留量を直接算定することは事実上困難であることもあり，Kalman Filter [5] に代表されるデータ同化手法を用いた補正方法が検討されている [6]．

分布型流出モデルの洪水予測への適用も増えている．分布型流出モデルは，比較的狭い区画を対象として流出過程を記述することにより，集中型流出モデルの観念的なモデル化に比べ，より力学的な立場で流出プロセスを記述できる点が特徴である．

昨今の局所的な豪雨による災害の頻発や，水防法改正等に伴う身近な流域における洪水予測の要求もあるなか，レーダ雨量などによる降雨の空間分布を直接考慮できる分布型流出モデルは，中小流域への適用性が高いと考えられる．しかしながら，河道形状や流量観測データ等が十分に整備されていない中小河川の洪水予測に対しては，分布型流出モデルの説明性を活用することが困難であるため，これらの情報を必要としない洪水予測手法の開発が必要であると考える．

水位と流量を水位流量関係式（以下，H-Q 式という）で関連付けることに起因する流量や水位の不確かさは，洪水予測モデルの実行や検証において大きな障害となる．また，観測態勢が構築されていても，発生頻度の小さい大規模出水時の観測データが不十分あるいは取得できていないことにより，大規模洪水に対する H-Q 式の精度には限界があることが多い．

一次元や二次元の不定流計算を使用した水位算定や，不定流計算と多地点の水位観測データを用いた流量算定技術などにより，水位算定の高度化を図っていくことは，大規模出水や流量観測データの少ない河川における洪水予測の精度向上に貢献できるとものと考えられる[7)]．

洪水予測では水位予測の精度が高いことが第一に要求されることから，観測水位などを用いて河道の状態量のデータ同化を行うことも精度向上に効果的である．佐山ら[8)]は，河道追跡モデルの流量を，バイアス補正カルマンフィルタを用いて同化している．立川ら[9)]は，非線形現象への適用性に優れるとされる粒子フィルタを使用して，河道での洪水伝搬過程の同化を行っている．

以上の洪水予測技術の現状と課題を踏まえ，本研究においては，以下に示す検討を実施する．

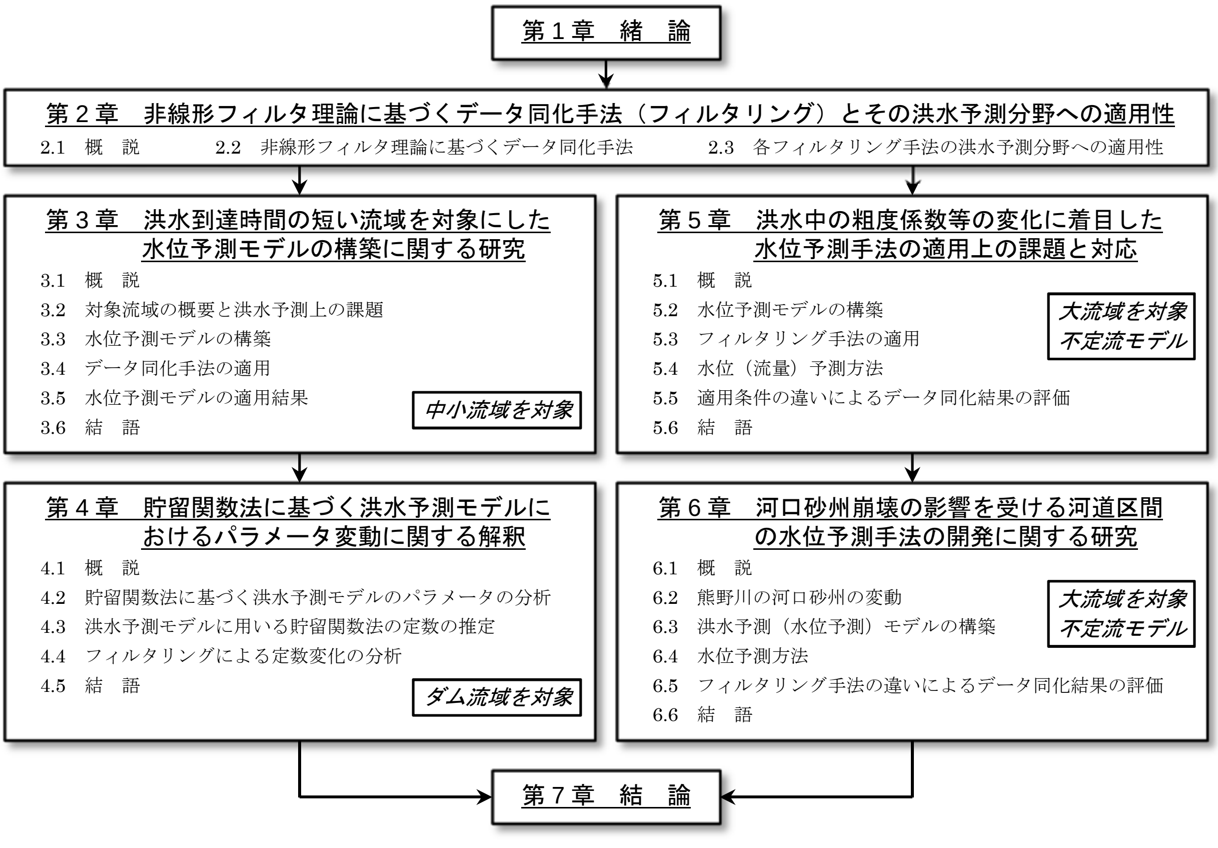


図 1.1　本研究のフロー

洪水予測技術のなかでも本研究の主題であり水防上重要な水位予測については，特に H-Q 式の精度向上が容易ではないため，降雨量や流量の予測精度の向上が水位予測に十分に活かされないこと，また，不定流モデルを導入して水位を直接算出することも行われているが，洪水中に変化する河道状況をリアルタイムの水位予測に反映する手段がないことが技術的に解決されていない．そこで本研究では，『流出モデルの基礎式と H-Q 式を組合せ降雨から水位を直接予測するモデルを開発し，モデル定数を非線形フィルタによりデータ同化して水位予測の精度を向上させる方法』や，『不定流モデルにおける粗度係数や河床変動高といった状態量を非線形フィルタによりデータ同化して水位予測の精度を向上させる方法』等，様々な特性を有する河川流域を対象に高精度な水位予測手法を開発することを目的とした．

第 2 章では，非線形フィルタ理論に基づくデータ同化手法として，Kalman Filter [5] を基礎とする Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter, および Ensemble Kalman Filter と，Particle Filter の一般形やアルゴリズムについて記述する．また，各手法の特徴や長所・短所を踏まえた上で，洪水予測分野への適用性を比較して，次章以降の水位予測手法の開発に使用するフィルタリング手法を評価する．

第 3 章では，洪水到達時間の短い中小河川流域を対象として，観測水位に対してデータ同化を行いながら降雨から水位を直接予測するモデル（水位予測モデル）を開発し，適用性を評価する．使用実績の多い貯留関数法の基礎式と H-Q 式を組み合わせた「水位予測モデル」の基礎式を導出し，基礎式における定数等を自己回帰モデルで表現する．観測水位に対するデータ同化手法には，洪水到達時間が短く計算時間を短縮する必要がある中小河川流域を対象とすることを考慮して，複雑な非線形モデルにも対応でき，計算機への負荷も軽減できるフィルタリング手法を選定する．さらに，洪水中に H-Q 式が変化すると考えられる急流河川（土器川）と緩流河川（旧吉野川）を対象として，実洪水における水位予測モデルの適用結果を示し，水位の再現性，定数の推定結果，流量の推定結果に対する評価を行い，水位予測モデルの適用性について考察する．

第 4 章では，第 3 章で用いた貯留関数法の定数の変動要因を分析して，流出予測の精度向上を図る．まず，18 ダムにおける洪水低減部の流入量を分析し，流域面積の関数として貯留関数法の定数の推定式を求める．推定式から得られる値を用いて変動幅を規定した貯留関数法の定数や，流出係数等を自己回帰モデルで表現し，ダム流入量に対してデータ同化を行う流出予測モデルを開発する．さらに，実洪水における流出予測モデルの適用結果を示して，ダム流入量の再現性，定数の推定結果に対する評価を行い，流出予測モデルの適用性について考察する．

第 5 章では，淀川三川合流部の複雑な流況を表現するために，不定流モデルにデータ同化手法を組み合わせた水位予測手法を開発して，適用上の課題とその対応方法を示す．淀川三川の流量と残流域等の流量に乗じる補整係数のみを状態量としてデータ同化の対象とした場合について，フィルタリング後境界流量の流量観測値等に対する再現性を確認する．一方，粗度係数に乗じる補整係数を状態量に追加した場合についても境界流量の再現性を確認して，両者の再現性の比較から粗度係数を状態量として選択する必要性を評価する．さらに，粗度係数に乗じる補整係数を三川毎に個別に設定するなど状態量の数を増やした場合について，粒子数を増やすなど境界流量の再現性を確保するために必要と考えられる対応措置による効果を評価する．また，観測値更新を行う対象を枚方地点流量のみではなく，合流前の各河川の観測所水位も追加した多点フィルタとすることによる効果や影響についても，水位の再現性や境界流量の再現性によって評価する．

第 6 章では，熊野川における河口砂州崩壊の影響を受ける河道区間を対象に，不定流モデルにデータ同化手法を組み合わせた水位予測手法を開発して，適用性を評価する．砂州フラッシュを表す状態量として，下流端断面の河床変動高を設定することにより，砂州崩壊の影響を考慮する．さらに，流量に乗じる補整係数も合わせて状態量として設定することにより，観測水位に対するデータ同化を可能とする水位予測手法を開発する．また，実洪水に対して特徴の異なる 2 種類のフィルタリング手法を組み合わせた水位予測手法を適用し，下流端断面の河床変動高の妥当性，流量の再現性，水位の再現性などの比較から，非線形性の強い状態量推定に対して適用性の高いフィルタリング手法を評価する．

第 7 章では，本研究で得られた成果をまとめて結論とする．

参考文献

1) 槻山ら：ニューラルネットワークによる阿武隈川洪水予測の基礎的検討，河川技術論文集，Vol.9，pp.173-178，2003.

2) 谷岡康，福岡捷二，岩永勉，北川明：都市域中小河川における洪水位と雨量の直接的関係を用いた洪水解析－東京都神田川の事例－，水工学論文集，Vol.38，pp.69-74，1994.

3) 天野卓三ら：中小河川における各種洪水予測モデルの適用性に関する研究，河川技術論文集，Vol.9，pp.61-66，2003.

4) 立川康人，市川温，椎葉充晴：貯留関数法のモデルパラメータの不確実性を考慮した実用的な実時間流出予測手法，水文・水資源学会誌，Vol.10/No.6，pp.617-626，1997.

5) R. E. Kalman：A new approach to liner filtering and prediction problems, *Trans. ASME, Journal of Basic Engineering*, Vol.82D/No.1，pp.34-45，1960.

6) 椎葉充晴，永田卓也，立川康人，萬和明，市川温：非線形集中型モデルと降雨の逆推定による流出予測手法の開発，水工学論文集，Vol.54，pp.529-535，2010.

7) 立川康人，日野貴嗣，キムスンミン，椎葉充晴：2011 年熊野川大洪水の再現計算からみた実時間河川水位予測の精度向上への課題，河川技術論文集，Vol.19，pp.229-234，2013.

8) 佐山敬洋，立川康人，寶馨：バイアス補正カルマンフィルタによる広域分布型流出予測システムのデータ同化，土木学会論文集 B，Vol.64/No.4，pp.226-239，2008.

9) 立川康人，須藤純一，椎葉充晴，萬和明，キムスンミン：粒子フィルタを用いた河川水位の実時間予測手法の開発，水工学論文集，Vol.55，pp.S511-S516，2011.

第2章

非線形フィルタ理論に基づくデータ同化手法とその洪水予測分野への適用性

2.1　概　説

洪水予測分野においては, 物理法則に基づき時空間シミュレーションモデル (洪水予測モデル) を構成し, この計算を実施することで, 洪水流量や河道水位などの再現や予測を行うことになる. その際に, これらのシステムの持つ非線形性が原因となり, 初期条件や境界条件さらにはモデルパラメータの与え方によって, シミュレーション結果が実現象から乖離した不適切なものとなることが問題となる. データ同化の目的は, これらシミュレーションにおける初期条件や境界条件ならびにモデルパラメータを, 実際の観測データに基づいて適切なものに構成することである. また予測においては, こうして得られた諸変数を用いることにより, 精度の向上が見込まれる. データ同化には逐次型と非逐次型のものがある. 本論では, Kalman Filter (カルマンフィルタ) などに代表される, 観測データを得るたびにシステムの状態変数を修正する逐次型を対象とする.

Kalman Filter は観測データに基づいて線形確率システムにおける状態ベクトルを逐次的に推定するフィルタリング理論であり, 工学を始めとする非常に多くの分野の動的システムの状態および未知パラメータの推定問題に応用されている.

多くの革新をもたらした Kalman Filter ではあるが, システムの線形性やノイズのガウス性が損なわれる場合には, 観測データに基づく状態ベクトルの条件付き確率分布は非ガウス性となり, フィルタリング問題を解析的に解くことはほとんど不可能となる. 実際のところ非線形システムに対するフィルタリング問題は線形システムに対するフィルタリング問題よりはるかに難しく, 様々な近似手法 (非線形フィルタ理論) が提案されている. 例えば, システムモデルを線形化しそれに Kalman Filter の理論を適用して近似的な条件付き期待値と誤差共分散行列を計算する方法や, 状態ベクトルの条件付き確率分布を多数の粒子 (アンサンブルとも呼ぶ) により近似しモンテカルロ法によって条件付き確率分布の時間変化を追跡する方法など, 多くの工夫と応用がなされてきた.

表 2.1　非線形フィルタの分類 [1)]

	名　称	略称	日本語訳
局所的方法	Extended Kalman Filter	EKF	拡張カルマンフィルタ
	Equivalently Linearized Kalman Filter	EqKF	等価線形化カルマンフィルタ
	Unscented Kalman Filter	UKF	アンセンテッドカルマンフィルタ
	Ensemble Kalman Filter	EnKF	アンサンブルカルマンフィルタ
大域的方法	Gaussian Sum Filter	GSF	ガウス和フィルタ
	Point Mass Filter	PMF	質点フィルタ
	Particle Filter	PF	粒子フィルタ

表 2.1 は非線形フィルタの分類を示したものである [1)]．非線形フィルタリングに関しては，多くの近似手法が提案されており，同表に記載のあるものだけではない．例えば，Particle Filter（粒子フィルタ）と呼ばれる手法の中には Gaussian Particle Filter（ガウシアン粒子フィルタ）などいくつかのバリエーションがある．また，他の非線形フィルタと Particle Filter を融合した非線形フィルタも発表されている [2)]．表 2.1 の局所的方法は，状態ベクトルの条件付き期待値および誤差共分散行列の時間推移を近似的に計算する方法であり，事後確率分布はガウス分布と仮定される．一方，大域的方法は，状態ベクトルの条件付き確率分布の時間推移を数値的に評価した上で，条件付き期待値を計算する．

Extended Kalman Filter（EKF：拡張カルマンフィルタ）は非線形システムを状態ベクトルの推定値のまわりでテーラー展開して得られる 1 次近似システムに Kalman Filter を適用して，推定値を更新していく方法であり [3)]，1 次フィルタと呼ばれている．

Equivalently Linearized Kalman Filter（EqKF：等価線形化カルマンフィルタ）は条件付き確率分布をガウス分布と仮定して，2 乗誤差規範のもとで非線形要素を線形近似するという方法に基づくもので，EKF より推定精度は高いがアルゴリズムの導出は複雑である [4)]．

Unscented Kalman Filter（UKF：アンセンテッドカルマンフィルタ）は 1990 年代の中頃に発表され [5)]，非常に多くの関連した研究が行われている．確率ベクトルが非線形要素を通過したときの出力ベクトルの平均値と共分散行列を近似的に評価する Unscented Transformation（UT）を利用した非線形フィルタである．

Ensemble Kalman Filter（EnKF：アンサンブルカルマンフィルタ）は気象予測分野で開発されたデータ同化，すなわち状態ベクトルと未知パラメータの同時推定アルゴリズムである [6)]．気象モデルは非線形で状態ベクトルが高次元（10^4～10^6）であり，初期状態の不確定性は高いが，多くの観測データが存在する．こうした場合，誤差共分散行列の正確な時間更新は不可能である．アンサンブルと呼ばれるシステムのコピーを多数準備し，それらにランダムな初期条件とノイズのサンプルを与えて，それぞれの時間更新のシミュレーションを行う．新しい観測データを得ると，各アンサンブルの状態ベクトルから平均値と共分散行列を計算し，観測データと組み合せて観測更新を行う．アンサンブルを用いるという意味では Particle Filter と考え方は類似しているが，EnKF はアンサンブルの分布ではなく，平均値と共分散行列に着目した局所的方法であり，アンサンブルの共分散行列から Kalman Gain（カルマンゲイン）を数値的に求めるものである．

Gaussian Sum Filter（GSF：ガウス和フィルタ）は非ガウスの事後確率分布を複数のガウス分布の線形結合で近似することで，フィルタの推定精度を改善しようとするものである [7]．また，Point Mass Filter（PMF：質点フィルタ）は状態ベクトルの条件付き確率分布の時間的な推移を記述する Kolmogorov の関数方程式を数値的に解く方法である [8]．実際には，合成積分を含む関数方程式を解くには時間と空間を離散化する必要があり，空間領域を制限しなければならない．

Particle Filter（PF：粒子フィルタ）は状態ベクトルの条件付き確率分布を多数の粒子により近似する方法である．このモンテカルロ・サンプリングの方法に基づいた PF は近年非常に多く関心を集めており，文献も多数発表されている [2),9),10)]．PF の時間更新ステップは EnKF とほぼ同じであるが，観測更新ステップにおいてはリサンプリングを利用するため，Kalman Gain を用いないところが EnKF と異なる点である．PF は任意の分布のノイズを扱うことが可能である．

本章では，2.2 において，非線形フィルタで用いるベイズ推定の基礎について確認した上で，表 2.1 に示す非線形フィルタの内，より一般的なデータ同化手法として，Kalman Filter を基礎とする局所的方法である EKF，UKF，EnKF と，大域的方法である PF を取り上げ，各手法の理論やアルゴリズムを記述する．また，2.3 では，各手法の特徴や長所・短所を踏まえた上で，洪水予測分野への適用性を比較して，次章以降の研究に用いるフィルタリング手法を評価する．

なお，本章における主な記号の説明については，巻末の付録を参照されたい．

2.2　非線形フィルタ理論に基づくデータ同化手法

2.2.1　ベイズ推定の基礎

本項では，非線形フィルタで用いるベイズ推定の基礎と多次元ガウス分布について記述する．

(1)　確率変数の推定

パラメータ推定問題は観測データに基づいて未知パラメータの推定値を求める問題である．観測値が与えられたとき未知パラメータに関する情報はすべて事後確率分布に含まれている．

未知パラメータを x として観測値を y とする．y に関する x の事後確率密度関数を $p(x|y)$ とおくと，ベイズの定理から

$$p(x|y)=\frac{p(y|x)p_a(x)}{p(y)} \tag{2.1}$$

を得る．ただし，$p(y|x)$ は x に関する y の条件付き確率密度関数であり，$p_a(x)$ は x の事前確率密度関数である．式(2.1)には事前確率密度関数，条件付き確率密度関数，事後確率密度関数の 3 種類の密度関数が存在する．

ここで，簡単な線形モデル

$$y=x+v, \qquad x\sim N\left(\bar{x},\sigma_a^2\right), \qquad v\sim N\left(0,\sigma_v^2\right) \tag{2.2}$$

を考える．ただし，ノイズ v は未知パラメータ x とは独立であるとし，x を固定すると，式(2.2)から $y-x$ は v の分布に従うので，

$$p(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_v^2}(y-x)^2} \tag{2.3}$$

が成立する．よって，式(2.1)右辺の分子は

$$p(y|x)p_a(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_v^2}(y-x)^2-\frac{1}{2\sigma_a^2}(x-\bar{x})^2} \tag{2.4}$$

となる．上式右辺の指数部分をϕとおくと，

$$-2\phi=\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_a^2}+\frac{(y-x)^2}{\sigma_v^2}=\left[\frac{1}{\sigma_a^2}+\frac{1}{\sigma_v^2}\right]x^2-2\left[\frac{\bar{x}}{\sigma_a^2}+\frac{y}{\sigma_v^2}\right]x+\left[\frac{\bar{x}^2}{\sigma_a^2}+\frac{y^2}{\sigma_v^2}\right] \tag{2.5}$$

を得る．ここで，

$$\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{\sigma_a^2}+\frac{1}{\sigma_v^2}, \qquad \alpha=\frac{\bar{x}}{\sigma_a^2}+\frac{y}{\sigma_v^2} \tag{2.6}$$

とおき，式(2.5)をxについて整理すると，

$$-2\phi=\frac{1}{\gamma^2}\left(x-\alpha\gamma^2\right)^2+\frac{1}{\left(\sigma_v^2+\sigma_a^2\right)}(y-\bar{x})^2 \tag{2.7}$$

となる．したがって，

$$p(y|x)p_a(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}}e^{-\frac{1}{2\gamma^2}\left(x-\alpha\gamma^2\right)^2-\frac{1}{2\left(\sigma_v^2+\sigma_a^2\right)}(y-\bar{x})^2} \tag{2.8}$$

が成立する．また，上式をxについて積分して

$$p(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(y|x)p_a(x)dx=\frac{\sqrt{2\pi\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}\sqrt{2\pi\sigma_a^2}}e^{-\frac{1}{2\left(\sigma_v^2+\sigma_a^2\right)}(y-\bar{x})^2} \tag{2.9}$$

を得る．よって，式(2.1)から事後確率密度関数は

$$p(x|y)=\frac{p(y|x)p_a(x)}{p(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}}e^{-\frac{1}{2\gamma^2}\left(x-\alpha\gamma^2\right)^2} \tag{2.10}$$

となる． $p(x|y)$はガウス分布$N\left(m,\gamma^2\right)$となり， mとγ^2は

$$m=\left[\frac{1}{\sigma_a^2}+\frac{1}{\sigma_v^2}\right]^{-1}\left[\frac{\bar{x}}{\sigma_a^2}+\frac{y}{\sigma_v^2}\right], \qquad \frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{\sigma_a^2}+\frac{1}{\sigma_v^2} \tag{2.11}$$

で与えられる．条件付き期待値は事前期待値$\bar{x}$と観測値yの加重平均である．また，分散の逆数を精度と考えると，事後精度は事前精度とサンプルの精度の和となって向上している．式(2.11)のmを変形すると，

$$m = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_a^2 + \sigma_v^2}\bar{x} + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_v^2} y \tag{2.12}$$

となる．σ_a^2 が非常に小さければ，事前情報の精度が非常に高いので，観測値よりも事前情報 $\bar{x}$ を信頼し，逆に σ_v^2 が小さい場合には，観測値 y を信頼するという結果を示している．

ここで, 式(2.10)の事後確率密度関数には式(2.2)のモデルにおいて y がもたらす x に関するすべての情報が含まれている．以下では，事後確率分布に基づき未知パラメータの推定値を求めるためのベイズ推定について記述する．

(2)　ベイズ推定

未知パラメータを x，推定値を $\hat{x} = f(y)$ とおくと，推定誤差は

$$e = x - f(y) \tag{2.13}$$

となる．まず，誤差 e の大小を評価するための損失関数 $l(e) \geq 0$ を導入する．x と y はともに確率変数であるから，$l(e)$ は確率変数となる．よって，$l(e)$ の期待値としてベイズリスク

$$R[f] = E\{l(x - f(y))\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} l(x - f(y))p(x, y)dx\,dy \tag{2.14}$$

を定義する．ベイズリスクを最小にする $f(y)$ をベイズ推定値という．$p(x, y) = p(x|\,y)p(y)$ を用いると，式(2.14)は

$$R[f] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} l(x - f(y))p(x|\,y)dx\right)p(y)dy \tag{2.15}$$

となる．さらに，条件付きベイズリスク

$$R_c[f] = E\{l(x - f(y))|\,y\} = \int_{-\infty}^{\infty} l(x - f(y))p(x|\,y)dx \tag{2.16}$$

を定義すると，ベイズリスクは条件付きベイズリスク $R_c[f]$ の $p(y)$ に関する期待値となる．式(2.16)右辺の被積分関数 $l(x - f(y))$ と $p(x|\,y)$ はともに非負であるため, 任意の固定された y に対し $R_c[f]$ を最小にする $\hat{x} = f(y)$ を求めれば，それはベイズリスク $R[f]$ を最小にする．

任意の推定値 $g(y)$ に対して $R_c[f] \leq R_c[g]$，すなわち，

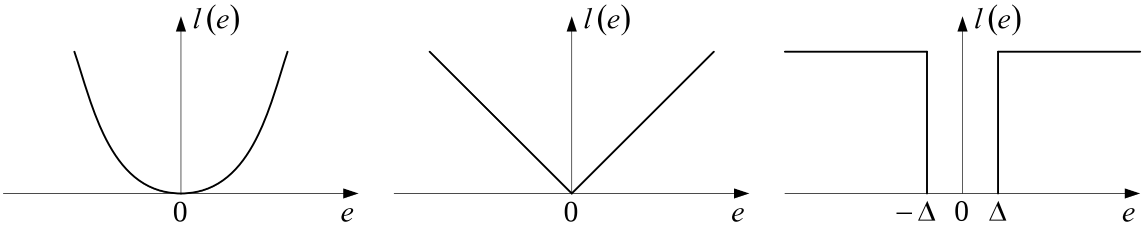
$$E\{l(x - f(y))|\,y\} \leq E\{l(x - g(y))|\,y\},\quad \forall g(y) \tag{2.17}$$

が成立すると仮定する．上式の y に関する期待値を計算すると,

$$E\{E\{l(x - f(y))|\,y\}\} \leq E\{E\{l(x - g(y))|\,y\}\} \tag{2.18}$$

となる．これは，$R[f] \leq R[g]$，$\forall g$ と等価である．

ベイズ推定値は式(2.16)の条件付きベイズリスクを最小にすることによって求めることができる．以下では，図 2.1 に示す 3 つの損失関数に対するベイズ推定値を計算する．



(a) 2乗誤差　(b) 絶対誤差　(c) 一様誤差

図 2.1　損失関数

1)　2 乗誤差

$l(e)=e^2$ を考える．このとき，条件付きベイズリスクは

$$R_c[f]=E\left\{(x-f(y))^2|\,y\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-f(y))^2\,p(x|\,y)\,dx \tag{2.19}$$

となる．式(2.19)を $f(y)$ について偏微分して 0 とおくと，

$$\frac{\partial R_c[f]}{\partial f}=\int_{-\infty}^{\infty}2(f(y)-x)p(x|\,y)\,dx=0 \tag{2.20}$$

となるので，積分を実行すると，

$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x|\,y)\,dx=E\{\,x|\,y\,\} \tag{2.21}$$

を得る．よってベイズ推定値は y に関する x の条件付き期待値となる．このベイズ推定値を“最小分散推定値”という. 条件付き期待値の性質から $E\{f(y)\}=E\{E\{\,x|\,y\,\}\}=E\{x\}$ となるので，最小分散推定値は不偏推定値である．

2)　絶対誤差

$l(e)=|\,e\,|$ を考える．このとき，条件付きベイズリスクは

$$\begin{aligned}R_c[f]&=\int_{-\infty}^{\infty}|\,x-f(y)|\,p(x|\,y)\,dx\\&=\int_{-\infty}^{f(y)}(f(y)-x)p(x|\,y)\,dx+\int_{f(y)}^{\infty}(x-f(y))p(x|\,y)\,dx\end{aligned} \tag{2.22}$$

となる．式(2.22)を $f(y)$ について偏微分して 0 とおくと，

$$\int_{-\infty}^{f(y)}p(x|\,y)\,dx=\int_{f(y)}^{\infty}p(x|\,y)\,dx \tag{2.23}$$

を得る．これからベイズ推定値 $f(y)$ は事後確率密度関数 $p(x|\,y)$ の中央値となる．このベイズ推定値を“絶対誤差推定値”という．

3)　一様誤差

一様誤差の損失関数は，$\Delta > 0$ として，

$$l(e) = \begin{cases} 0, & |e| \le \Delta \\ 1, & |e| > \Delta \end{cases} \tag{2.24}$$

で与えられる．この場合，Δ が十分小さいとすると，条件付きベイズリスクは

$$R_c[f] = 1 - \int_{f(y)-\Delta}^{f(y)+\Delta} p(x|\,y)dx \cong 1 - 2\Delta\, p(f(y)|\,y) \tag{2.25}$$

と近似できる．したがって，$R_c[f]$ を最小にする $f(y)$ は事後確率密度関数 $p(x|\,y)$ を最大にする $f(y)$ で，$p(x|\,y)$ のモードとなる．このベイズ推定値を“MAP 推定値”という．MAP 推定値 $\hat{x}_{\mathrm{MAP}}$ は MAP 方程式

$$\left[\frac{\partial \log p(x|\,y)}{\partial x}\right]_{x=\hat{x}_{\mathrm{MAP}}} = 0 \tag{2.26}$$

を解くことにより求められる．ベイズの定理から式(2.26)は

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\log p(y|\,x) + \log p_a(x))\right]_{x=\hat{x}_{\mathrm{MAP}}} = 0 \tag{2.27}$$

となる．また，$p_a(x)$ が一様分布であれば，$p_a(x)$ は x によらないので，MAP 推定値は“最尤推定値”に帰着する．

事後確率密度関数 $p(x|\,y)$ がガウス分布であれば, 上記の 3 つのベイズ推定値は一致する．また，損失関数 $l(e)$ が対称かつ下に凸で，事後確率分布 $p(x|\,y)$ が条件付き期待値に関して対称であれば, ベイズ推定値は最小分散推定値に等しいことが知られている[1]．したがって, かなり広いクラスの損失関数と事後確率分布に対してベイズ推定値は条件付き期待値により与えられることが分かる．このことが最小分散推定値が広く用いられる理由となっている．

(3)　多次元ガウス分布

(2)で記述したように，最小分散推定値は条件付き期待値

$$\hat{x} := E\{x|\,y\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|\,y)dx \tag{2.28}$$

で与えられる．したがって，最小分散推定値を計算するには，条件付き確率密度関数 $p(x|\,y)$ を必要とする．しかし，実際には，$p(x|\,y)$ が正確に与えられる場合はまれであり，たとえ，$p(x|\,y)$ が正確に与えられたとしても，一般に式(2.28)の積分計算は非常に困難である．

ここで，結合確率密度関数 $p(x, y)$ が多次元ガウス分布である場合について，条件付き確率密度関数および条件付き期待値の計算を行う．$x \in \mathbf{R}^n$ は未知パラメータベクトル，$y \in \mathbf{R}^p$ は観測ベクトルとし，それらの平均値ベクトルおよび共分散行列を以下のように定義する．

$$\bar{x} := E\{x\}, \qquad y := E\{y\} \tag{2.29}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} E\left\{(x-\bar{x})(x-\bar{x})^{\mathrm{T}}\right\} & E\left\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})^{\mathrm{T}}\right\} \\ E\left\{(y-\bar{y})(x-\bar{x})^{\mathrm{T}}\right\} & E\left\{(y-\bar{y})(y-\bar{y})^{\mathrm{T}}\right\} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

ここで，$\Sigma := \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix}$とおくと，$(x, y)$の結合確率密度関数は

$$p(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{(n+p)/2} |\Sigma|^{1/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \left[(x-\bar{x})^{\mathrm{T}} \ (y-\bar{y})^{\mathrm{T}} \right] \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{bmatrix} \right) \tag{2.31}$$

となる．Σの行列式，逆行列を計算するために，以下の公式

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

を利用する．ただし，逆行列の存在は仮定する．$A = \Sigma_{xx}$，$B = \Sigma_{xy}$，$C = \Sigma_{yx}$，$D = \Sigma_{yy}$とおき，両辺の行列式を計算すると，

$$|\Sigma| = \left| \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} \right| \left| \Sigma_{yy} \right| = |\Pi| \left| \Sigma_{yy} \right| \tag{2.33}$$

を得る．ただし，$\Pi := \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx}$である．簡単のために，$a := x - \bar{x}$，$b := y - \bar{y}$とおくと，式(2.31)の指数部の 2 次形式は$-1/2$を除いて，

$$\begin{aligned} \left[a^{\mathrm{T}} \ b^{\mathrm{T}} \right] \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \left[a^{\mathrm{T}} \ b^{\mathrm{T}} \right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Pi^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{yy}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \left(a - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} b \right)^{\mathrm{T}} \Pi^{-1} \left(a - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} b \right) + b^{\mathrm{T}} \Sigma_{yy}^{-1} b \end{aligned} \tag{2.34}$$

となる．また，ここで，$\alpha := \bar{x} + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y})$とおくと，$a - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} b = x - \alpha$となるので，式(2.31)は

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Pi|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x-\alpha)^{\mathrm{T}} \Pi^{-1} (x-\alpha) \right) \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \left| \Sigma_{yy} \right|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (y-\bar{y})^{\mathrm{T}} \Sigma_{yy}^{-1} (y-\bar{y}) \right) \end{aligned} \tag{2.35}$$

と表すことができる．ここで，

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Pi|^{1/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(x-\alpha)^{\mathrm{T}} \Pi^{-1} (x-\alpha)} dx = 1 \tag{2.36}$$

が成立するので，周辺確率密度関数$p(y) = \int p(x,y)\,dx$は

$$p(y) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\left|\Sigma_{yy}\right|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\bar{y})^{\mathrm{T}} \Sigma_{yy}^{-1}(y-\bar{y})\right) \tag{2.37}$$

となる．したがって，条件付き確率密度関数

$$p(x|\,y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Pi|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\alpha)^{\mathrm{T}} \Pi^{-1}(x-\alpha)\right) \tag{2.38}$$

を得る．ここで，結合確率密度関数が $p(x,y)=p(x|\,y)p(y)$ のように $p(x|\,y)$ と $p(y)$ の積に分解されたので，$x-\alpha$ と y は独立で $E\left\{(x-\alpha)y^{\mathrm{T}}\right\}=0$ が成立する．よって，x と y が結合ガウス分布に従うとき，データ y に基づく x の最小分散推定値および推定誤差共分散行列は

$$\hat{x} = E\{x|\,y\} = \bar{x} + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y-\bar{y}) \tag{2.39}$$

$$\mathrm{var}(x|\,y) = E\left\{[x-E\{x|\,y\}][x-E\{x|\,y\}]^{\mathrm{T}}|\,y\right\} = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} \tag{2.40}$$

となる．また，最小分散推定値 $\hat{x}$ は不偏推定値であり，$x-E\{x|\,y\}$ と y は独立である．

次に，一般線形回帰モデル

$$y = Hx + v, \qquad x \sim N(\bar{x}, P), \qquad v \sim N(0, R) \tag{2.41}$$

を考える．$y \in \mathbf{R}^p$，$x \in \mathbf{R}^n$，$v \in \mathbf{R}^p$ であり，かつ x と v は独立であるとする．このとき，結合確率密度関数 $p(x,y)$ を求める．

式(2.41)から $p(y|\,x)$ は以下の多次元ガウス分布となる．

$$p(y|\,x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |R|}} e^{-\frac{1}{2}\|y-Hx\|_{R^{-1}}^2} \tag{2.42}$$

ただし，$\|z\|_{R^{-1}}^2 = z^{\mathrm{T}}R^{-1}z$ である．また，$p(x,y)=p(x)p(y|\,x)$ から

$$p(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{n+p}|P||R|} e^{-\frac{1}{2}\|x-\bar{x}\|_{P^{-1}}^2 - \frac{1}{2}\|y-Hx\|_{R^{-1}}^2} \tag{2.43}$$

を得る．上式の指数部分を ϕ とおくと，

$$\begin{aligned}
-2\phi &= \|x-\bar{x}\|_{P^{-1}}^2 + \|y-Hx\|_{R^{-1}}^2 \\
&= \|x-\bar{x}\|_{P^{-1}}^2 + \|y-H\bar{x}-H(x-\bar{x})\|_{R^{-1}}^2 \\
&= \|x-\bar{x}\|_{P^{-1}}^2 + \|y-H\bar{x}\|_{R^{-1}}^2 + \|x-\bar{x}\|_{H^{\mathrm{T}}R^{-1}H}^2 \\
&\quad -(y-H\bar{x})^{\mathrm{T}}R^{-1}H(x-\bar{x}) - (x-\bar{x})^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}R^{-1}(y-H\bar{x})
\end{aligned} \tag{2.44}$$

となる．ここで，

$$M^{-1}=P^{-1}+H^{\mathrm{T}}R^{-1}H \tag{2.45}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}-2\phi &=\| x-\bar{x}\|_{M^{-1}}^{2}+\| y-H\bar{x}\|_{R^{-1}}^{2}\\ &\quad -(y-H\bar{x})^{\mathrm{T}}R^{-1}H(x-\bar{x})-(x-\bar{x})^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}R^{-1}(y-H\bar{x})\\ &=\left[(x-\bar{x})^{\mathrm{T}}\ (y-H\bar{x})^{\mathrm{T}}\right]\begin{bmatrix} M^{-1} & -H^{\mathrm{T}}R^{-1}\\ -R^{-1}H & R^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\bar{x}\\ y-H\bar{x}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.46}$$

を得る．よって，上式と式(2.31)の指数部分を比較すると,

$$\bar{y}=H\bar{x}, \qquad \Sigma^{-1}=\begin{bmatrix} M^{-1} & -H^{\mathrm{T}}R^{-1}\\ -R^{-1}H & R^{-1}\end{bmatrix} \tag{2.47}$$

が成立する．また，式(2.31)と式(2.43)の係数が等しいことから，$|\Sigma|=|P||R|$ を得る．次に，式(2.32)を用いて，上式の Σ^{-1} を三角行列とブロック対角行列の積に分解すると,

$$\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix} I & -H^{\mathrm{T}}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P^{-1} & 0\\ 0 & R^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ -H & I\end{bmatrix} \tag{2.48}$$

となる．ここで，式(2.48)の逆行列を計算すると,

$$\Sigma=\begin{bmatrix} I & 0\\ H & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & 0\\ 0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & H^{\mathrm{T}}\\ 0 & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P & PH^{\mathrm{T}}\\ HP & HPH^{\mathrm{T}}+R\end{bmatrix} \tag{2.49}$$

を得る．これから，$p(x,y)$ の共分散行列は

$$\Sigma_{xx}=P, \qquad \Sigma_{xy}=PH^{\mathrm{T}}, \qquad \Sigma_{yy}=HPH^{\mathrm{T}}+R \tag{2.50}$$

となる．したがって，以下の式が成立する．

$$p(x,y)\sim N\left(\begin{bmatrix}\bar{x}\\ H\bar{x}\end{bmatrix},\begin{bmatrix} P & PH^{\mathrm{T}}\\ HP & HPH^{\mathrm{T}}+R\end{bmatrix}\right) \tag{2.51}$$

さらに，式(2.51)から $p(y)$ と $p(x|\,y)$ を求め，結合確率密度関数 $p(x,y)$ の別表現を与える．まず，式(2.50)の共分散行列を用いて,

$$K=\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}=PH^{\mathrm{T}}V^{-1}, \qquad V=HPH^{\mathrm{T}}+R \tag{2.52}$$

とおく．式(2.45)を用いると，$K=PH^{\mathrm{T}}V^{-1}=MH^{\mathrm{T}}R^{-1}$ が成立する．

$p(x,y)$ が式(2.51)で与えられるとき，式(2.37)および式(2.38)から

$$p(y)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{p}|V|}}e^{-\frac{1}{2}\| y-H\bar{x}\|_{V^{-1}}^{2}} \tag{2.53}$$

$$p(x \mid y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |M|}} e^{-\frac{1}{2}\| x-\alpha \|^2_{M^{-1}}} \tag{2.54}$$

を得る．ただし，$\alpha = \bar{x} + K(y - H\bar{x})$ である．したがって，

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n+p} |M||V|}} e^{-\frac{1}{2}\| x-\alpha \|^2_{M^{-1}} - \frac{1}{2}\| y-H\bar{x} \|^2_{V^{-1}}} \tag{2.55}$$

が成立する．

式(2.43)と式(2.55)から，式(2.5)と式(2.7)の右辺が互いに等しいというスカラーの場合での結果を多次元に拡張した以下の恒等式を得る．

$$\| x-\bar{x} \|^2_{P^{-1}} + \| y-Hx \|^2_{R^{-1}} = \| x-\alpha \|^2_{M^{-1}} + \| y-H\bar{x} \|^2_{V^{-1}} \tag{2.56}$$

ただし，$\alpha = \bar{x} + PH^{\mathrm{T}}V^{-1}(y - H\bar{x})$，$V = HPH^{\mathrm{T}} + R$，$M = P - PH^{\mathrm{T}}V^{-1}HP$ である．また，$|P||R| = |M||V|$ が成立する．この恒等式は次項以降の非線形フィルタの誘導に使用する．

2.2.2　Extended Kalman Filter（EKF：拡張カルマンフィルタ）

本項では，まず非線形フィルタリングの概要を説明する．次に，歴史的に最も古く分かり易い近似非線形フィルタである EKF について理論やアルゴリズムを記述する．

(1)　非線形フィルタリング

以下の離散時間非線形確率システムについて考える．

$$x_{t+1} = f_t(x_t) + w_t \tag{2.57}$$

$$y_t = h_t(x_t) + v_t \tag{2.58}$$

ただし，$x_t \in \mathbf{R}^n$ は状態ベクトル，$y_t \in \mathbf{R}^p$ は観測ベクトルで，$w_t \in \mathbf{R}^n$ はシステムノイズ，$v_t \in \mathbf{R}^p$ は観測ノイズである．ノイズは平均値 0 のガウス白色ノイズで，その共分散行列は

$$E\left\{ \begin{bmatrix} w_t \\ v_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_s^{\mathrm{T}} & v_s^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_t & 0 \\ 0 & R_t \end{bmatrix} \delta_{ts}, \qquad t, s = 0, 1, \cdots \tag{2.59}$$

であるとする．ただし，$Q_t > 0$，$R_t > 0$ である．初期状態 x_0 は $N(\bar{x}_0, P_0)$ に従い，さらに，$E\{w_t\, x_0^{\mathrm{T}}\} = 0$，$E\{v_t\, x_0^{\mathrm{T}}\} = 0$，$t = 0, 1, \cdots$ と仮定する．また非線形特性である f_t ：$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ および h_t ：$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ はそれぞれ

$$f_t(x_t) = \begin{bmatrix} f_{1,t}(x_{1,t}, \cdots, x_{n,t}) \\ \vdots \\ f_{n,t}(x_{1,t}, \cdots, x_{n,t}) \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

$$h_t(x_t) = \begin{bmatrix} h_{1,t}(x_{1,t}, \cdots, x_{n,t}) \\ \vdots \\ h_{p,t}(x_{1,t}, \cdots, x_{n,t}) \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

で与えられるとする.

時刻0からtまでの観測データの集合を$Y^t = \{y_0, \cdots, y_t\}$とおき, 観測データ$Y^t$に基づいて, 時刻$t+m$における状態ベクトル$x_{t+m}$の最小分散推定値を求める. すなわち, ベイズリスク

$$J = E\left\{ \left\| x_{t+m} - \hat{x}_{t+m/t} \right\|^2 \right\}, \qquad m = 0,1 \tag{2.62}$$

を最小にする最適推定値$\hat{x}_{t+m/t}$を与える状態推定問題を考える.

式(2.21)から, 式(2.62)を最小にするベイズ推定値$\hat{x}_{t+m/t}$は以下のとおりY^tに関するx_{t+m}の条件付き期待値で与えられる.

$$\hat{x}_{t+m/t} = E\left\{ x_{t+m} \middle| Y^t \right\} = \int_{\mathbf{R}^n} x_{t+m} p\left(x_{t+m} \middle| Y^t\right) dx_{t+m} \tag{2.63}$$

推定問題は$m > 0$, $m = 0$, $m < 0$に従い, それぞれ予測問題, 濾波問題, 平滑問題となる. 以下では, 主として$m = 0$（フィルタリング）と$m = 1$（1段予測推定）の場合を考える.

条件付き確率密度関数の時間的な推移$p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right) \to p\left(x_t \middle| Y^t\right) \to p\left(x_{t+1} \middle| Y^t\right)$を与える更新式は以下のようになる.

1) 観測更新ステップ

$$p\left(x_t \middle| Y^t\right) = \frac{p\left(y_t \middle| x_t\right) p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right)}{p\left(y_t \middle| Y^{t-1}\right)} \tag{2.64}$$

2) 時間更新ステップ

$$p\left(x_{t+1} \middle| Y^t\right) = \int_{\mathbf{R}^n} p\left(x_{t+1} \middle| x_t\right) p\left(x_t \middle| Y^t\right) dx_t \tag{2.65}$$

$Y^t = \left\{ Y^{t-1}, y_t \right\}$であるから, ベイズの定理を用いると,

$$p\left(x_t \middle| Y^t\right) = \frac{p\left(x_t, y_t, Y^{t-1}\right)}{p\left(y_t, Y^{t-1}\right)} = \frac{p\left(y_t \middle| x_t, Y^{t-1}\right) p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right)}{p\left(y_t \middle| Y^{t-1}\right)} \tag{2.66}$$

となる. ここで, 式(2.58)からy_tはx_tが与えられると過去のデータY^{t-1}とは独立であるから, $p\left(y_t \middle| x_t, Y^{t-1}\right) = p\left(y_t \middle| x_t\right)$が成立する. よって式(2.64)を得る. また, 再びベイズの定理から

$$p\left(x_{t+1} \middle| Y^t\right) = \int_{\mathbf{R}^n} p\left(x_{t+1}, x_t \middle| Y^t\right) dx_t = \int_{\mathbf{R}^n} p\left(x_{t+1} \middle| x_t, Y^t\right) p\left(x_t \middle| Y^t\right) dx_t \tag{2.67}$$

となる. ここで, 式(2.59)からw_tとv_tは独立, 式(2.57)からx_{t+1}はx_tが与えられるとデータY^tとは独立となるので, $p\left(x_{t+1} \middle| x_t, Y^t\right) = p\left(x_{t+1} \middle| x_t\right)$が成立する. よって式(2.65)を得る.

観測更新および時間更新ステップは，それぞれ濾波および 1 段予測ステップに対応する．これらの方程式を解くために必要となる初期分布は，仮定から $x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0)$ である．

式(2.64)，(2.65)の更新式は無限次元であるが，ガウス白色ノイズを受ける線形システムの場合には，条件付き確率密度関数はガウス分布となるので，その期待値と誤差共分散行列は Kalman Filter で与えられる．したがって，ガウス白色ノイズを受ける線形システムの場合には，Kalman Filter 以外のフィルタを考える必要はなかった．

しかし，本項以降で取り扱う非線形システムの場合には，式(2.64)，(2.65)の条件付き確率密度関数は非ガウス分布となるので，最適フィルタを求めることは事実上不可能である [1)]．式(2.63)の条件付き期待値を計算する理論式は存在するが [1),11)]，実際それに基づいて最適なアルゴリズムを実現することは不可能である．このため，非線形フィルタリングにおいては近似フィルタについて考えることが必要不可欠であり，近似推定値の誤差共分散行列を評価することは理論的にも実際的にも非常に有用である．

(2) EKF のアルゴリズムの導出

ここでは，後述の式(2.68)に基づき，式(2.63)の条件付き期待値（$m = 1,0$）を MAP 推定の立場から近似的に計算するという方針で EKF のアルゴリズムを導く．また，非線形関数の $f_t(x_t)$，$h_t(x_t)$ はヤコビアンが必要となるため，微分可能であると仮定する．

1) 観測更新ステップ

観測更新ステップ $\left[\hat{x}_{t/t-1}, P_{t/t-1}, y_t\right] \rightarrow \left[\hat{x}_{t/t}, P_{t/t}\right]$ の近似アルゴリズムを考える．ここで，式(2.68)を仮定し，条件付き確率密度関数 $p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right)$ はガウス分布

$$p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \left|P_{t/t-1}\right|}} e^{-\frac{1}{2}\left\| x_t - \hat{x}_{t/t-1} \right\|^2_{P^{-1}_{t/t-1}}} \tag{2.68}$$

に従うものとする．ただし，$t = 0,1,\cdots$ である．

まず，式(2.58)から x_t が与えられたときの y_t の条件付き確率密度関数は

$$p\left(y_t \middle| x_t\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \left|R_t\right|}} e^{-\frac{1}{2}\left\| y_t - h_t(x_t) \right\|^2_{R_t^{-1}}} \tag{2.69}$$

となる．よって，式(2.64)，(2.68)，(2.69)から Y^t に基づく x_t の事後確率密度関数

$$p\left(x_t \middle| Y^t\right) = \frac{1}{c} e^{-\frac{1}{2}\left\| x_t - \hat{x}_{t/t-1} \right\|^2_{P^{-1}_{t/t-1}} - \frac{1}{2}\left\| y_t - h_t(x_t) \right\|^2_{R_t^{-1}}} \tag{2.70}$$

を得る．ただし，c は x_t には依存しない正規化の定数である．

以下では, 式(2.70)の事後確率密度関数を最大にする MAP 推定値 $\hat{x}_{t/t}$ を近似的に求めることを考える．すなわち，

$$-2\phi = \| x_t - \hat{x}_{t/t-1} \|^2_{P^{-1}_{t/t-1}} + \| y_t - h_t(x_t) \|^2_{R_t^{-1}} \tag{2.71}$$

を最小にする近似解 $x_t = \hat{x}_{t/t}$ を求める．

EKF では, 非線形関数 $h_t(x_t)$ を線形化して, 式(2.71)を最小化する近似解を求めている．$h_t(x_t)$ を 1 段予測推定値 $\hat{x}_{t/t-1}$ の近傍でテーラー展開すると,

$$h_t(x_t) = h_t(\hat{x}_{t/t-1}) + \left[\frac{\partial h_t}{\partial x_t} \right]_{x_t = \hat{x}_{t/t-1}} (x_t - \hat{x}_{t/t-1}) + \cdots \tag{2.72}$$

を得る．ただし，ヤコビアンは式(2.61)から

$$H_t = \frac{\partial h_t}{\partial x_t} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_{1,t}}{\partial x_{1,t}} & \dfrac{\partial h_{1,t}}{\partial x_{2,t}} & \cdots & \dfrac{\partial h_{1,t}}{\partial x_{n,t}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_{p,t}}{\partial x_{1,t}} & \dfrac{\partial h_{p,t}}{\partial x_{2,t}} & \cdots & \dfrac{\partial h_{p,t}}{\partial x_{n,t}} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{p \times n} \tag{2.73}$$

で与えられる．以下では， $x_t = \hat{x}_{t/t-1}$ におけるヤコビアンを

$$\hat{H}_t = \left[\frac{\partial h_t}{\partial x_t} \right]_{x_t = \hat{x}_{t/t-1}} \tag{2.74}$$

とおく． $h_t(x_t)$ を式(2.72)右辺の第 2 項までで近似して，式(2.71)に代入すると,

$$-2\phi = \| x_t - \hat{x}_{t/t-1} \|^2_{P^{-1}_{t/t-1}} + \left\| y_t - h_t(\hat{x}_{t/t-1}) - \hat{H}_t (x_t - \hat{x}_{t/t-1}) \right\|^2_{R_t^{-1}} \tag{2.75}$$

を得る．式(2.56)左辺と上式を比較すると,

$$x = x_t, \qquad \bar{x} = \hat{x}_{t/t-1}, \qquad P = P_{t/t-1}$$

$$y = y_t - h_t(\hat{x}_{t/t-1}) + \hat{H}_t \hat{x}_{t/t-1}, \qquad H = \hat{H}_t, \qquad R = R_t \tag{2.76}$$

となるので，式(2.56)から

$$-2\phi = \| x_t - \alpha \|^2_{M_t^{-1}} + \left\| y_t - h_t(\hat{x}_{t/t-1}) \right\|^2_{V_t^{-1}} \tag{2.77}$$

が成立する．ただし,

$$\alpha = \hat{x}_{t/t-1} + P_{t/t-1} \hat{H}_t^{\mathrm{T}} V_t^{-1} \left[y_t - h_t(\hat{x}_{t/t-1}) \right]$$

$$M_t = P_{t/t-1} - P_{t/t-1} \hat{H}_t^{\mathrm{T}} V_t^{-1} \hat{H}_t P_{t/t-1} \tag{2.78}$$

$$V_t = \hat{H}_t P_{t/t-1} \hat{H}_t^{\mathrm{T}} + R_t$$

である．明らかに-2ϕを最小にするのは$\hat{x}_{t/t}=\alpha$であり，かつ$P_{t/t}=M_t$となる．よって，濾波推定値と推定誤差共分散行列は

$$\hat{x}_{t/t}=\hat{x}_{t/t-1}+K_t\left[y_t-h_t\left(\hat{x}_{t/t-1}\right)\right] \tag{2.79}$$

$$P_{t/t}=P_{t/t-1}-K_t\hat{H}_tP_{t/t-1} \tag{2.80}$$

となる．ただし，$K_t\in\mathbf{R}^{n\times p}$は EKF の Kalman Gain であり，

$$K_t=P_{t/t-1}\hat{H}_t^{\mathrm{T}}\left[\hat{H}_tP_{t/t-1}\hat{H}_t^{\mathrm{T}}+R_t\right]^{-1} \tag{2.81}$$

で与えられる．

2)　時間更新ステップ

時間更新ステップ$\left[\hat{x}_{t/t},P_{t/t}\right]\rightarrow\left[\hat{x}_{t+1/t},P_{t+1/t}\right]$の近似アルゴリズムを考える．ここでは，時刻$t$における条件付き期待値と共分散行列

$$\hat{x}_{t/t}=E\left\{x_t\middle|Y^t\right\},\qquad P_{t/t}=E\left\{\left[x_t-\hat{x}_{t/t}\right]\left[x_t-\hat{x}_{t/t}\right]^{\mathrm{T}}\middle|Y^t\right\} \tag{2.82}$$

が与えられていると仮定する．式(2.57)から，Y^tに関するx_{t+1}の条件付き期待値は

$$\hat{x}_{t+1/t}=E\left\{f_t(x_t)+w_t\middle|Y^t\right\}=E\left\{f_t(x_t)\middle|Y^t\right\} \tag{2.83}$$

となる．ここで，$f_t(x_t)$は微分可能であるから，$x_t=\hat{x}_{t/t}$の近傍でテーラー展開すると，

$$f_t(x_t)=f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right)+\left[\frac{\partial f_t}{\partial x_t}\right]_{x_t=\hat{x}_{t/t}}\left(x_t-\hat{x}_{t/t}\right)+\cdots \tag{2.84}$$

となる．ただし，ヤコビアンは式(2.60)から

$$F_t=\frac{\partial f_t}{\partial x_t}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_{1,t}}{\partial x_{1,t}} & \dfrac{\partial f_{1,t}}{\partial x_{2,t}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{1,t}}{\partial x_{n,t}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_{n,t}}{\partial x_{1,t}} & \dfrac{\partial f_{n,t}}{\partial x_{2,t}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{n,t}}{\partial x_{n,t}}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times n} \tag{2.85}$$

で与えられる．以下では，$x_t=\hat{x}_{t/t}$におけるヤコビアンを

$$\hat{F}_t=\left[\frac{\partial f_t}{\partial x_t}\right]_{x_t=\hat{x}_{t/t}} \tag{2.86}$$

とおく．$\hat{F}_t$は$\hat{x}_{t/t}$の関数であるから$Y^t=\left\{y_0,\cdots,y_t\right\}$の関数であることに留意し，式(2.84)の$Y^t$に関する条件付き期待値をとると，

$$E\left\{ f_t(x_t) \middle| Y^t \right\} = f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) + E\left\{ \hat{F}_t\left(x_t - \hat{x}_{t/t}\right) \middle| Y^t \right\} + \cdots$$

$$= f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) + \hat{F}_t E\left\{ x_t - \hat{x}_{t/t} \middle| Y^t \right\} + \cdots$$

$$= f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) + 0 + \cdots \tag{2.87}$$

を得る．よって，式(2.83)の 1 次近似式は以下のようになる．

$$\hat{x}_{t+1/t} \cong f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) \tag{2.88}$$

次に，1 段予測誤差共分散行列を計算する．定義と式(2.88)から

$$P_{t+1/t} = E\left\{ \left[x_{t+1} - \hat{x}_{t+1/t} \right]\left[x_{t+1} - \hat{x}_{t+1/t} \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\}$$

$$\cong E\left\{ \left[f_t(x_t) + w_t - f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) \right]\left[f_t(x_t) + w_t - f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\}$$

$$= E\left\{ \left[f_t(x_t) - f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) \right]\left[f_t(x_t) - f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\}$$

$$+ E\left\{ \left[f_t(x_t) - f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) \right] w_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\}$$

$$+ E\left\{ w_t\left[f_t(x_t) - f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\} + E\left\{ w_t w_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\} \tag{2.89}$$

を得る．$X^t = \{ x_0, \cdots, x_t \}$，$Z^t = \left\{ X^t, Y^t \right\}$とおく．$Z^t \supset Y^t$ であり，$\xi_t := f_t(x_t) - f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right)$ はZ^t の関数である．また仮定から $E\left\{ w_t \middle| Z^t \right\} = 0$ であることに留意すると，式(2.89)右辺の第 2 項は

$$E\left\{ \xi_t w_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\} = E\left\{ E\left\{ \xi_t w_t^{\mathrm{T}} \middle| Z^t \right\} \middle| Y^t \right\} = E\left\{ \xi_t E\left\{ w_t^{\mathrm{T}} \middle| Z^t \right\} \middle| Y^t \right\} = 0 \tag{2.90}$$

となる．同様に第 3 項も 0 であり，第 4 項は明らかにQ_t となる．式(2.89)右辺の第 1 項を評価するために式(2.84)の近似式を利用すると，$\xi_t \cong \hat{F}_t\left(x_t - \hat{x}_{t/t}\right)$となるので，

$$E\left\{ \xi_t \xi_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\} \cong \hat{F}_t E\left\{ \left[x_t - \hat{x}_{t/t} \right]\left[x_t - \hat{x}_{t/t} \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\} \hat{F}_t^{\mathrm{T}} \tag{2.91}$$

が成立する．よって，式(2.89)は近似的に以下のようになる．

$$P_{t+1/t} \cong \hat{F}_t P_{t/t} \hat{F}_t^{\mathrm{T}} + Q_t \tag{2.92}$$

すなわち，ヤコビアンを用いて予測誤差共分散行列が近似的に計算される．

Kalman Filter において，Kalman Gain はデータと無関係にシステム行列およびノイズの統計的性質から決定されるが，EKF においては，推定誤差共分散行列およびフィルタゲインは$\hat{F}_t$，$\hat{H}_t$ を通して推定値（観測データ）に依存することが特徴である．

(3) EKF のアルゴリズムのまとめ

EKF のアルゴリズムをまとめると，以下のとおりとなる．

① 初期値を $\hat{x}_{0/-1} = \bar{x}_0$， $P_{0/-1} = P_0$ とおき， $t = 0$ とする．

② 観測更新ステップ　Input : $\left[\hat{x}_{t/t-1}, P_{t/t-1}, y_t\right]$ → Output : $\left[\hat{x}_{t/t}, P_{t/t}\right]$

a) 観測ヤコビアン

$$\hat{H}_t = \left[\frac{\partial h_t}{\partial x_t}\right]_{x_t = \hat{x}_{t/t-1}} \tag{2.93}$$

b) EKF Kalman Gain

$$K_t = P_{t/t-1}\hat{H}_t^{\mathrm{T}}\left[\hat{H}_t P_{t/t-1}\hat{H}_t^{\mathrm{T}} + R_t\right]^{-1} \tag{2.94}$$

c) 濾波推定値

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t\left[y_t - h_t\left(\hat{x}_{t/t-1}\right)\right] \tag{2.95}$$

d) 濾波推定誤差共分散行列

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - K_t\hat{H}_t P_{t/t-1} \tag{2.96}$$

③ 時間更新ステップ　Input : $\left[\hat{x}_{t/t}, P_{t/t}\right]$ → Output : $\left[\hat{x}_{t+1/t}, P_{t+1/t}\right]$

a) 1 段予測推定値

$$\hat{x}_{t+1/t} = f_t\left(\hat{x}_{t/t}\right) \tag{2.97}$$

b) 状態遷移ヤコビアン

$$\hat{F}_t = \left[\frac{\partial f_t}{\partial x_t}\right]_{x_t = \hat{x}_{t/t}} \tag{2.98}$$

c) 予測誤差共分散行列

$$P_{t+1/t} = \hat{F}_t P_{t/t}\hat{F}_t^{\mathrm{T}} + Q_t \tag{2.99}$$

④ $t \leftarrow t+1$ としてステップ②へ戻る．

以上のステップを繰り返すことにより，濾波推定値 $\hat{x}_{t/t}$，1 段予測推定値 $\hat{x}_{t+1/t}$ が逐次的に計算できる．

EKF のアルゴリズムの最大の特徴は，ヤコビアン $\hat{F}_t$， $\hat{H}_t$ を用いて推定誤差共分散行列や Kalman Gain が近似計算されている点にある．したがって，非線形性が強くて，ヤコビアンによる近似精度が良くない場合には，フィルタの性能が低下するのはやむを得ない．

2.2.3 Unscented Kalman Filter（UKF：アンセンテッドカルマンフィルタ）

UKF は EKF と同じように条件付き期待値と推定誤差共分散行列を扱うので, これは事後確率分布をガウス分布で近似していることに相当する．ここでは，確率ベクトルが非線形要素を通過したときの出力の平均値と共分散行列, および入出力の相互共分散行列に近似的な評価を与える Unscented Transformation（UT）法を利用した UKF について理論やアルゴリズムを記述する．

(1) Unscented Transformation（UT）

確率ベクトル $x \in \mathbf{R}^n$ の平均値と共分散行列を μ_x， Σ_{xx} とする．また， $y = g(x)$ を任意の非線形要素 g ： $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ とする．UT は y の平均値 μ_y と共分散行列 Σ_{yy}，および x と y の相互共分散行列 Σ_{xy} を近似的に計算する方法である．

まず，$2n+1$ 個の組 $\left\{x^{(i)}, W^{(i)}, i = 0,1,\cdots,2n\right\}$ を式(2.100), (2.101)を満足するように選ぶ．

$$\sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} x^{(i)} = \mu_x \tag{2.100}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left[x^{(i)} - \mu_x\right]\left[x^{(i)} - \mu_x\right]^{\mathrm{T}} = \Sigma_{xx} \tag{2.101}$$

ただし， $W^{(i)}$ は重み係数であり，以下の正規化条件が成立しているものとする．

$$\sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} = 1 \tag{2.102}$$

集合 $\left\{x^{(i)}, i = 0,1,\cdots,2n\right\}$ を x の分布を代表（近似）する σ 点という. 対応する重み係数 $W^{(i)}$ は負の値をとることも許容されるが, 非負にとるのが一般的である. このとき, y の平均値 μ_y と共分散行列 Σ_{yy}， Σ_{xy} を近似的に計算する UT 法のアルゴリズムは以下のとおりである．

1) UT 法

① $2n+1$ 個の σ 点に対して，その非線形変換を計算する．すなわち， $y^{(i)} = g\left(x^{(i)}\right)$, $i = 0,1,\cdots,2n$ とおく．

② 変換された $2n+1$ 個の点の重み付き平均値を計算する．

$$\mu_y = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} y^{(i)} \tag{2.103}$$

③ 共分散行列を以下のように計算する．

$$\Sigma_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left[y^{(i)} - \mu_y\right]\left[y^{(i)} - \mu_y\right]^{\mathrm{T}} \tag{2.104}$$

$$\Sigma_{xy} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left[x^{(i)} - \mu_x\right]\left[y^{(i)} - \mu_y\right]^{\mathrm{T}} \tag{2.105}$$

2)　σ 点の選択

式(2.100)～(2.102)を満足する σ 点と重み係数 $W^{(i)}$ は, 以下のように与えられる. まず, $\sum_{xx} \geq 0$ の平方根行列 $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ を

$$\sum\nolimits_{xx} = BB^{\mathrm{T}}, \qquad B = [\, b_1 \cdots b_n \,] \tag{2.106}$$

とする．このとき，$2n+1$ 個の σ 点と重み係数を

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \mu_x, & W^{(0)} &= \frac{\lambda}{n+\lambda} & & \\ x^{(i)} &= \mu_x + \sqrt{n+\lambda}\, b_i, & W^{(i)} &= \frac{1}{2(n+\lambda)}, & i &= 1, \cdots, n \\ x^{(n+i)} &= \mu_x - \sqrt{n+\lambda}\, b_i, & W^{(n+i)} &= \frac{1}{2(n+\lambda)}, & i &= 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{2.107}$$

のように定める．ただし，$b_i \in \mathbf{R}^n$ は行列 B の第 i 列ベクトル，$\lambda \in \mathbf{R}$ は調整パラメータである. 上で与えた σ 点と重み係数が式(2.100), (2.102)を満足することは明らかであり, また，$b_1 b_1^{\mathrm{T}} + \cdots + b_n b_n^{\mathrm{T}} = \sum_{xx}$ であるから，式(2.101)も満足する.

多次元の場合は，σ 点を決定するために式(2.106)の共分散行列の平方根行列を必要とする. 平方根行列の計算には特異値分解やコレスキー分解を用いる [1)].

(2)　UKF のアルゴリズムの導出

UKF は，UT 法による近似計算によって条件付き期待値とその誤差共分散行列を逐次的に求めるので，どのような非線形システムにも適用可能である．ここでは，条件付き確率密度関数がガウス分布に従うという仮定の下，UKF のアルゴリズムを導く.

1)　観測更新ステップ

観測更新ステップ $\left[\hat{x}_{t/t-1}, P_{t/t-1}, y_t\right]$ → $\left[\hat{x}_{t/t}, P_{t/t}\right]$ のアルゴリズムを考える．ここでは, 式(2.108)を仮定し，条件付き確率密度関数 $p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right)$ はガウス分布

$$p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right) = N\left(x_t \middle| \hat{x}_{t/t-1}, P_{t/t-1}\right) \tag{2.108}$$

に従うものとする．ただし，$t = 0, 1, \cdots$ である.

まず，x_t と y_t の結合条件付き確率密度関数 $p\left(x_t, y_t \middle| Y^{t-1}\right)$ を導出する．ベイズの定理と式(2.58)から式(2.64)を得た過程と同様にして,

$$p\left(x_t, y_t \middle| Y^{t-1}\right) = p\left(y_t \middle| x_t\right) p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right) \tag{2.109}$$

を得る．$v_t \sim N(0, R_t)$ と式(2.108)の仮定から右辺の 2 つの条件付き確率密度関数は共にガウス分布である．よって，$p\left(x_t, y_t \middle| Y^{t-1}\right)$ はガウス分布となる.

次に，$p\left(x_t, y_t \middle| Y^{t-1}\right)$の平均値と共分散行列を求める．式(2.108)と式(2.58)から，y_tの条件付き期待値を求めればよい．式(2.58)から

$$\hat{y}_{t/t-1} = E\left\{ y_t \middle| Y^{t-1} \right\} = E\left\{ h_t(x_t) + v_t \middle| Y^{t-1} \right\} = E\left\{ h_t(x_t) \middle| Y^{t-1} \right\} \tag{2.110}$$

が得られる．ここで，事後確率密度関数$p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right)$に対する$\sigma$点および重み係数の集合を$\left\{ \hat{x}^{(i)}_{t/t-1}, W^{(i)}_h, i = 0,1,\cdots,2n \right\}$とすると，条件付き期待値は

$$\hat{y}_{t/t-1} = E\left\{ h_t(x_t) \middle| Y^{t-1} \right\} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)}_h h_t\left(\hat{x}^{(i)}_{t/t-1}\right) \tag{2.111}$$

となる．また，y_tの条件付き共分散行列は以下のようになる．

$$\begin{aligned} V_{t/t-1} &= \mathrm{var}\left(y_t \middle| Y^{t-1}\right) = E\left\{ \left[y_t - \hat{y}_{t/t-1} \right]\left[y_t - \hat{y}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} \\ &= E\left\{ \left[h_t(x_t) + v_t - \hat{y}_{t/t-1} \right]\left[h_t(x_t) + v_t - \hat{y}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} \end{aligned} \tag{2.112}$$

ここで，$\xi_t := h_t(x_t) - \hat{y}_{t/t-1}$とおくと，上式は

$$V_{t/t-1} = E\left\{ \xi_t \xi_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} + E\left\{ v_t v_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} + E\left\{ v_t \xi_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} + E\left\{ \xi_t v_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} \tag{2.113}$$

と表すことができる．また，$Z^t = \left\{ X^t, Y^{t-1} \right\}$とおくと，$Z^t \supset Y^{t-1}$であり，かつ$\xi_t$は$Z^t$の関数である．仮定から$E\left\{ v_t \middle| Z^t \right\} = 0$であるので，

$$E\left\{ v_t \xi_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} = E\left\{ E\left\{ v_t \xi_t^{\mathrm{T}} \middle| Z^t \right\} \middle| Y^{t-1} \right\} = E\left\{ E\left\{ v_t \middle| Z^t \right\} \xi_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} = 0 \tag{2.114}$$

となる．よって，式(2.113)右辺の最後の 2 項は0であり，式(2.113)右辺の最初の 2 項を計算すると，

$$V_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)}_h \left[h_t\left(\hat{x}^{(i)}_{t/t-1}\right) - \hat{y}_{t/t-1} \right]\left[h_t\left(\hat{x}^{(i)}_{t/t-1}\right) - \hat{y}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} + R_t \tag{2.115}$$

を得る．さらに，x_tとy_tの条件付き共分散行列は

$$\begin{aligned} U_{t/t-1} &= \mathrm{cov}\left(x_t, y_t \middle| Y^{t-1}\right) = E\left\{ \left[x_t - \hat{x}_{t/t-1} \right]\left[y_t - \hat{y}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} \\ &= E\left\{ \left[x_t - \hat{x}_{t/t-1} \right]\left[h_t(x_t) + v_t - \hat{y}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} \end{aligned} \tag{2.116}$$

で与えられる．$\eta_t := x_t - \hat{x}_{t/t-1}$とおくと，$\eta_t$は$Z^t$の関数であるから，式(2.114)と同様に$E\left\{ \eta_t v_t^{\mathrm{T}} \middle| Y^{t-1} \right\} = 0$となるので，次式を得る．

$$U_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)}_h \left[\hat{x}^{(i)}_{t/t-1} - \hat{x}_{t/t-1} \right]\left[h_t\left(\hat{x}^{(i)}_{t/t-1}\right) - \hat{y}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} \tag{2.117}$$

以上をまとめると，(x_t, y_t)の条件付き期待値と共分散行列は

$$E\left\{\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \middle| Y^{t-1}\right\} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{t/t-1} \\ \hat{y}_{t/t-1} \end{bmatrix} \tag{2.118}$$

$$\mathrm{var}\left(\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \middle| Y^{t-1}\right) = \begin{bmatrix} P_{t/t-1} & U_{t/t-1} \\ U_{t/t-1}^{\mathrm{T}} & V_{t/t-1} \end{bmatrix} \tag{2.119}$$

となる（式(2.51)参照）．式(2.52)から，Kalman Gain に相当するゲイン行列を

$$K_t = U_{t/t-1} V_{t/t-1}^{-1} \tag{2.120}$$

と定義すると，式(2.39)から濾波推定値

$$\hat{x}_{t/t} = E\left\{ x_t \middle| Y^t \right\} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t \left[y_t - \hat{y}_{t/t-1} \right] \tag{2.121}$$

および式(2.40)から濾波推定誤差共分散行列

$$P_{t/t} = \mathrm{var}\left(x_t \middle| Y^t \right) = P_{t/t-1} - U_{t/t-1} V_{t/t-1}^{-1} U_{t/t-1}^{\mathrm{T}} \tag{2.122}$$

を得る．これが観測更新ステップのアルゴリズムである．

よって，上で得られた $\hat{x}_{t/t}$ および $P_{t/t}$ を用いて，次の時間更新ステップでは，濾波事後確率密度関数を以下のとおりガウス分布と仮定する．

$$p\left(x_t \middle| Y^t \right) = N\left(x_t \middle| \hat{x}_{t/t}, P_{t/t} \right) \tag{2.123}$$

2) 時間更新ステップ

時間更新ステップでは，時刻 t までの観測データ $Y^t = \{ y_0, \cdots, y_t \}$ に基づいて時刻 $t+1$ における状態ベクトル x_{t+1} の1段予測推定値 $\hat{x}_{t+1/t}$ およびその共分散行列 $P_{t+1/t}$ を計算する．まず，x_{t+1} の1段予測推定値は

$$\hat{x}_{t+1/t} = E\left\{ x_{t+1} \middle| Y^t \right\} = E\left\{ f_t(x_t) + w_t \middle| Y^t \right\} = E\left\{ f_t(x_t) \middle| Y^t \right\} \tag{2.124}$$

となる．ここで，$E\left\{ w_t \middle| Y^t \right\} = E\{ w_t \} = 0$ を用いた．また，x_{t+1} の条件付き共分散行列は

$$\begin{aligned} P_{t+1/t} &= \mathrm{var}\left(x_{t+1} \middle| Y^t \right) = E\left\{ \left[x_{t+1} - \hat{x}_{t+1/t} \right]\left[x_{t+1} - \hat{x}_{t+1/t} \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\} \\ &= E\left\{ \left[f_t(x_t) + w_t - \hat{x}_{t+1/t} \right]\left[f_t(x_t) + w_t - \hat{x}_{t+1/t} \right]^{\mathrm{T}} \middle| Y^t \right\} \\ &= E\Big\{ \left[f_t(x_t) - \hat{x}_{t+1/t} \right]\left[f_t(x_t) - \hat{x}_{t+1/t} \right]^{\mathrm{T}} \\ &\qquad + w_t w_t^{\mathrm{T}} + w_t \left[f_t(x_t) - \hat{x}_{t+1/t} \right]^{\mathrm{T}} + \left[f_t(x_t) - \hat{x}_{t+1/t} \right] w_t^{\mathrm{T}} \Big| Y^t \Big\} \end{aligned} \tag{2.125}$$

となる．これは式(2.89)とほぼ同じ式であるから式(2.92)を導いたのと同じ方法を用いる．$X^t = \{ x_0, \cdots, x_t \}$，および $Z^t = \{ X^t, Y^t \}$ とおく．$Z^t \supset Y^t$ であり，$\xi_t := f_t(x_t) - \hat{x}_{t+1/t}$ は Z^t の関数である．また仮定から $E\left\{ w_t \middle| Z^t \right\} = 0$ であることに留意すると，

$$E\left\{w_t\xi_t^{\mathrm{T}}\middle|Y^t\right\}=E\left\{E\left\{w_t\xi_t^{\mathrm{T}}\middle|Z^t\right\}\middle|Y^t\right\}=E\left\{E\left\{w_t\middle|Z^t\right\}\xi_t^{\mathrm{T}}\middle|Y^t\right\}=0 \tag{2.126}$$

が成立する．したがって，予測誤差共分散行列は

$$\begin{aligned}P_{t+1/t}&=E\left\{\xi_t\xi_t^{\mathrm{T}}\middle|Y^t\right\}+E\left\{w_tw_t^{\mathrm{T}}\right\}\\&=E\left\{\left[f_t(x_t)-\hat{x}_{t+1/t}\right]\left[f_t(x_t)-\hat{x}_{t+1/t}\right]^{\mathrm{T}}\middle|Y^t\right\}+Q_t\end{aligned} \tag{2.127}$$

のようになる．ここで，仮定 $p\left(x_t\middle|Y^t\right)=N\left(x_t\middle|\hat{x}_{t/t},P_{t/t}\right)$ を用いて，UT 法のための σ 点と重み係数の集合を $\left\{\hat{x}_{t/t}^{(i)},W_f^{(i)},i=0,1,\cdots,2n\right\}$ とおくと，式(2.124)から以下の式を得る．

$$\hat{x}_{t+1/t}=\sum_{i=0}^{2n}W_f^{(i)}f_t\left(\hat{x}_{t/t}^{(i)}\right) \tag{2.128}$$

また，式(2.127)から以下の式を得る．

$$P_{t+1/t}=\sum_{i=0}^{2n}W_f^{(i)}\left[f_t\left(\hat{x}_t^{(i)}\right)-\hat{x}_{t+1/t}\right]\left[f_t\left(\hat{x}_t^{(i)}\right)-\hat{x}_{t+1/t}\right]^{\mathrm{T}}+Q_t \tag{2.129}$$

(3) UKF のアルゴリズムのまとめ

UKF のアルゴリズムをまとめると，以下のとおりとなる．

① 初期値を $\hat{x}_{0/-1}=\bar{x}_0$， $P_{0/-1}=P_0$ とおき， $t=0$ とする．

② 観測更新ステップ　Input : $\left[\hat{x}_{t/t-1},P_{t/t-1},y_t\right]$ → Output : $\left[\hat{x}_{t/t},P_{t/t}\right]$

a) σ 点と重み係数

$$\begin{aligned}&\hat{x}_{t/t-1}^{(0)}=\hat{x}_{t/t-1}, && W_h^{(0)}=\frac{\lambda_h}{n+\lambda_h}\\&\hat{x}_{t/t-1}^{(i)}=\hat{x}_{t/t-1}+\left(\sqrt{(n+\lambda)P_{t/t-1}}\right)_i, && W_h^{(i)}=\frac{1}{2(n+\lambda_h)}, \quad i=1,\cdots,n\\&\hat{x}_{t/t-1}^{(i+n)}=\hat{x}_{t/t-1}-\left(\sqrt{(n+\lambda)P_{t/t-1}}\right)_i, && W_h^{(i+n)}=\frac{1}{2(n+\lambda_h)}, \quad i=1,\cdots,n\end{aligned} \tag{2.130}$$

ただし，$(\cdot)_i$ は第 i 列ベクトルである．

b) σ 点の h_t による変換

$$\hat{y}_{t/t-1}^{(i)}=h_t\left(\hat{x}_{t/t-1}^{(i)}\right), \qquad i=0,1,\cdots,2n \tag{2.131}$$

c) 出力の 1 段予測推定値

$$\hat{y}_{t/t-1}=\sum_{i=0}^{2n}W_h^{(i)}\hat{y}_{t/t-1}^{(i)} \tag{2.132}$$

d) 条件付き共分散行列

$$V_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_h^{(i)} \left[\hat{y}_{t/t-1}^{(i)} - \hat{y}_{t/t-1} \right] \left[\hat{y}_{t/t-1}^{(i)} - \hat{y}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} + R_t \tag{2.133}$$

$$U_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_h^{(i)} \left[\hat{x}_{t/t-1}^{(i)} - \hat{x}_{t/t-1} \right] \left[\hat{y}_{t/t-1}^{(i)} - \hat{y}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} \tag{2.134}$$

e) UKF Kalman Gain

$$K_t = U_{t/t-1} V_{t/t-1}^{-1} \tag{2.135}$$

f) 濾波推定値

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t \left[y_t - \hat{y}_{t/t-1} \right] \tag{2.136}$$

g) 濾波推定誤差共分散行列

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - U_{t/t-1} V_{t/t-1}^{-1} U_{t/t-1}^{\mathrm{T}} \tag{2.137}$$

③ 時間更新ステップ　Input : $\left[\hat{x}_{t/t}, P_{t/t} \right]$ → Output : $\left[\hat{x}_{t+1/t}, P_{t+1/t} \right]$

a) σ 点と重み係数

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_{t/t}^{(0)} = \hat{x}_{t/t}, && W_f^{(0)} = \frac{\lambda_f}{n + \lambda_f} \\
&\hat{x}_{t/t}^{(i)} = \hat{x}_{t/t} + \left(\sqrt{(n+\lambda) P_{t/t}} \right)_i, && W_f^{(i)} = \frac{1}{2(n+\lambda_f)}, \qquad i = 1, \cdots, n \\
&\hat{x}_{t/t}^{(i+n)} = \hat{x}_{t/t} - \left(\sqrt{(n+\lambda) P_{t/t}} \right)_i, && W_f^{(i+n)} = \frac{1}{2(n+\lambda_f)}, \qquad i = 1, \cdots, n
\end{aligned} \tag{2.138}$$

b) σ 点の f_t による変換

$$\hat{x}_{t+1/t}^{(i)} = f_t\left(\hat{x}_{t/t}^{(i)} \right), \qquad i = 0, 1, \cdots, 2n \tag{2.139}$$

c) 1 段予測推定値

$$\hat{x}_{t+1/t} = \sum_{i=0}^{2n} W_f^{(i)} \hat{x}_{t+1/t}^{(i)} \tag{2.140}$$

d) 予測誤差共分散行列

$$P_{t+1/t} = \sum_{i=0}^{2n} W_f^{(i)} \left[\hat{x}_{t+1/t}^{(i)} - \hat{x}_{t+1/t} \right] \left[\hat{x}_{t+1/t}^{(i)} - \hat{x}_{t+1/t} \right]^{\mathrm{T}} + Q_t \tag{2.141}$$

④ $t \leftarrow t+1$ としてステップ②へ戻る．

以上のステップを繰り返すことにより，濾波推定値$\hat{x}_{t/t}$，1 段予測推定値$\hat{x}_{t+1/t}$が逐次的に計算できる．

UKF のアルゴリズムは，ステップ②と③の繰り返しごとにσ点を生成している．しかし，ステップ③-b)で生成されるσ点$\hat{x}_{t+1/t}^{(i)}$を 2 回目以降のステップ②-b)で使用することができるので，ステップ②-a)におけるσ点の生成は最初の 1 回だけにすることも可能である．

2.2.4 Ensemble Kalman Filter（EnKF：アンサンブルカルマンフィルタ）

EnKF の特徴は, システムの状態ベクトルの動きをアンサンブルと呼ばれる粒子の集合により近似して, アンサンブル平均によって求めた状態ベクトルや出力ベクトルの共分散行列を用いて Kalman Gain を数値的に計算することである. 以下, EnKF の理論やアルゴリズムを記述する.

(1) EnKF のアルゴリズムの導出

式(2.57)，(2.58)のコピーであるM個のシステムを以下のように準備する．

$$(S_i)\quad \begin{cases} x_{t+1}^{(i)} = f_t\left(x_t^{(i)}\right) + w_t^{(i)} \\ y_t^{(i)} = h_t\left(x_t^{(i)}\right) + v_t^{(i)} \end{cases},\qquad i = 1,\cdots,M \tag{2.142}$$

ただし，(S_i)はi番目のシステム，$x_t^{(i)}$は(S_i)の状態ベクトル，その集合$\left\{x_t^{(i)}, i=1,\cdots,M\right\}$をアンサンブル（あるいは粒子）という．また，$w_t^{(i)}$，$v_t^{(i)}$は平均値$0$，共分散行列$Q_t$，$R_t$に従うシステムノイズおよび観測ノイズのサンプルであり，乱数によって生成する．さらに，システム(S_i)に初期値$x_{0/-1}^{(i)}, i=1,\cdots,M$をランダムに与える．

観測データY^{t-1}に基づくシステム(S_i)の状態ベクトル$x_t^{(i)}$の 1 段予測推定値の集合を

$$X_{t/t-1} = \left[x_{t/t-1}^{(1)},\ x_{t/t-1}^{(2)},\cdots,\ x_{t/t-1}^{(M)}\right] \in \mathbf{R}^{n\times M} \tag{2.143}$$

で表す．このようなM個の要素からなる行列をアンサンブル行列という．このアンサンブル行列は，Y^{t-1}に基づく状態ベクトルx_tの条件付き確率分布が

$$p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right) \cong \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\delta\left(x_t - x_{t/t-1}^{(i)}\right) \tag{2.144}$$

のように近似されていることを意味する．$\delta(\cdot)$はディラックのデルタ関数である (2.2.5 参照).

次に，新しい観測値y_tが得られると，式(2.143)のアンサンブル行列とy_tに基づいて時刻tにおける濾波推定値からなるアンサンブル行列

$$X_{t/t} = \left[x_{t/t}^{(1)},\ x_{t/t}^{(2)},\cdots,\ x_{t/t}^{(M)}\right] \in \mathbf{R}^{n\times M} \tag{2.145}$$

を求める．このとき，Y^tに基づくx_tの条件付き確率密度関数は以下のように近似される．

$$p\left(x_t \middle| Y^{t}\right) \cong \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\delta\left(x_t - x_{t/t}^{(i)}\right) \tag{2.146}$$

さらに，時間更新によって，新しいアンサンブル行列 $X_{t+1/t}$ を求めて，以下同様の手順を繰り返し実行する．

1)　観測更新ステップ

システム (S_i) の状態ベクトル $x_t^{(i)}, i=1,\cdots,M$ の 1 段予測推定値の集合である式(2.143)のアンサンブル行列 $X_{t/t-1}$ が与えられているとする．このとき，アンサンブル平均から x_t の 1 段予測推定値は

$$x_{t/t-1}^M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_{t/t-1}^{(i)} \tag{2.147}$$

となる（$(\cdot)^M$ は M 個のアンサンブル平均）．よって，状態ベクトル $x_t^{(i)}$ の 1 段予測誤差は

$$\tilde{x}_{t/t-1}^{(i)} = x_{t/t-1}^{(i)} - x_{t/t-1}^M, \qquad i=1,\cdots,M \tag{2.148}$$

で与えられるので，予測誤差アンサンブル行列

$$\tilde{X}_{t/t-1} = \left[\tilde{x}_{t/t-1}^{(1)},\ \tilde{x}_{t/t-1}^{(2)},\cdots,\ \tilde{x}_{t/t-1}^{(M)}\right] \in \mathbf{R}^{n\times M} \tag{2.149}$$

を得る．また，予測誤差共分散行列は以下の式で与えられる．

$$P_{t/t-1}^M = \frac{1}{M-1}\tilde{X}_{t/t-1}\left(\tilde{X}_{t/t-1}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.150}$$

次に，式(2.142)を参照して，$p(v_t) \sim N(0, R_t)$ に従って生成された独立なノイズ $v_t^{(i)}$ と 1 段予測推定値 $x_{t/t-1}^{(i)}$ を用いて，

$$y_{t/t-1}^{(i)} = h_t\left(x_{t/t-1}^{(i)}\right) + v_t^{(i)}, \qquad i=1,\cdots,M \tag{2.151}$$

とおき，アンサンブル行列

$$Y_{t/t-1} = \left[y_{t/t-1}^{(1)},\ y_{t/t-1}^{(2)},\cdots,\ y_{t/t-1}^{(M)}\right] \in \mathbf{R}^{p\times M} \tag{2.152}$$

を定義する．さらに，アンサンブル平均を

$$y_{t/t-1}^M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_{t/t-1}^{(i)} \tag{2.153}$$

とおくと，これが出力 y_t の 1 段予測推定値となる．ノイズ $v_t^{(i)}$ の平均値は 0 であるから，式(2.153)右辺は近似的に $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} h_t\left(x_{t/t-1}^{(i)}\right)$ に等しくなる．したがって，システム (S_i) の出力の 1 段予測誤差は

$$\tilde{y}_{t/t-1}^{(i)} = y_{t/t-1}^{(i)} - y_{t/t-1}^M, \qquad i=1,\cdots,M \tag{2.154}$$

で与えられる．これより，以下の出力の予測誤差アンサンブル行列を得る．

$$\tilde{Y}_{t/t-1} = \left[\tilde{y}_{t/t-1}^{(1)},\ \tilde{y}_{t/t-1}^{(2)}, \cdots,\ \tilde{y}_{t/t-1}^{(M)} \right] \in \mathbf{R}^{p \times M} \tag{2.155}$$

ここで，式(2.155)および式(2.149)の予測誤差アンサンブル行列を用いて，

$$V_{t/t-1}^{M} = \frac{1}{M-1} \tilde{Y}_{t/t-1} \left(\tilde{Y}_{t/t-1} \right)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{p \times p} \tag{2.156}$$

$$U_{t/t-1}^{M} = \frac{1}{M-1} \tilde{X}_{t/t-1} \left(\tilde{Y}_{t/t-1} \right)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{n \times p} \tag{2.157}$$

を定義する（式(2.115)，(2.117)参照）．$V_{t/t-1}^{M}$ は y_t の条件付き共分散行列，$U_{t/t-1}^{M}$ は x_t と y_t の条件付き共分散行列である．このとき，時刻 t における Kalman Gain は

$$K_t^M = U_{t/t-1}^{M} \left(V_{t/t-1}^{M} \right)^{-1} \in \mathbf{R}^{n \times p} \tag{2.158}$$

で与えられる（式(2.120)参照）．

ここで，実際の観測値 y_t を用いると，システム (S_i) の状態ベクトル $x_t^{(i)}$ の濾波推定値は

$$x_{t/t}^{(i)} = x_{t/t-1}^{(i)} + K_t^M \left[y_t - y_{t/t-1}^{(i)} \right], \qquad i = 1, \cdots, M \tag{2.159}$$

となり，以下の濾波アンサンブル行列

$$X_{t/t} = \left[x_{t/t}^{(1)},\ x_{t/t}^{(2)}, \cdots,\ x_{t/t}^{(M)} \right] \in \mathbf{R}^{n \times M} \tag{2.160}$$

を得る．このとき，x_t の濾波推定値はアンサンブル平均

$$x_{t/t}^{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} x_{t/t}^{(i)} \tag{2.161}$$

で与えられ，システム (S_i) の状態ベクトルの濾波推定誤差

$$\tilde{x}_{t/t}^{(i)} = x_{t/t}^{(i)} - x_{t/t}^{M}, \qquad i = 1, \cdots, M \tag{2.162}$$

を得る．したがって，濾波推定誤差アンサンブル行列は

$$\tilde{X}_{t/t} = \left[\tilde{x}_{t/t}^{(1)},\ \tilde{x}_{t/t}^{(2)}, \cdots,\ \tilde{x}_{t/t}^{(M)} \right] \in \mathbf{R}^{n \times M} \tag{2.163}$$

となる．これから，濾波推定誤差共分散行列は

$$P_{t/t}^{M} = \frac{1}{M-1} \tilde{X}_{t/t} \left(\tilde{X}_{t/t} \right)^{\mathrm{T}} \tag{2.164}$$

で与えられる．

式(2.151)において，観測ノイズ $v_t^{(i)}$ を予測値 $h_t\left(x_{t/t-1}^{(i)}\right)$ に意図的に加えているが，これはアンサンブル $y_{t/t-1}^{(i)}, i = 1, \cdots, M$ が縮退することを防ぐために必要なステップである．

2)　時間更新ステップ

式(2.160)のアンサンブル行列 $X_{t/t}$ が与えられているとする．ノイズ w_t の分布 $N(0,Q_t)$ から得られる M 個のサンプルを $w_t^{(i)}, i=1,\cdots,M$ とおき，式(2.142)に基づいて，

$$x_{t+1/t}^{(i)} = f_t\left(x_{t/t}^{(i)}\right) + w_t^{(i)}, \qquad i=1,\cdots,M \tag{2.165}$$

を生成する．このとき，条件付き確率密度関数 $p\left(x_{t+1} \middle| Y^t\right)$ を近似するアンサンブル行列は

$$X_{t+1/t} = \left[x_{t+1/t}^{(1)},\ x_{t+1/t}^{(2)},\cdots,\ x_{t+1/t}^{(M)}\right] \in \mathbf{R}^{n\times M} \tag{2.166}$$

となる．したがって，状態ベクトルの 1 段予測推定値は

$$x_{t+1/t}^{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_{t+1/t}^{(i)} \tag{2.167}$$

で与えられる．ノイズ $w_t^{(i)}$ の平均値は 0 であるから，上式の右辺は近似的に $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f_t\left(x_{t/t}^{(i)}\right)$ に等しくなる．よって，システム (S_i) の状態ベクトルの 1 段予測誤差は

$$\tilde{x}_{t+1/t}^{(i)} = x_{t+1/t}^{(i)} - x_{t+1/t}^{M}, \qquad i=1,\cdots,M \tag{2.168}$$

となる．したがって，以下の予測誤差アンサンブル行列および予測誤差共分散行列を得る．

$$\tilde{X}_{t+1/t} = \left[\tilde{x}_{t+1/t}^{(1)},\ \tilde{x}_{t+1/t}^{(2)},\cdots,\ \tilde{x}_{t+1/t}^{(M)}\right] \in \mathbf{R}^{n\times M} \tag{2.169}$$

$$P_{t+1/t}^{M} = \frac{1}{M-1}\tilde{X}_{t+1/t}\left(\tilde{X}_{t+1/t}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.170}$$

(2)　EnKF のアルゴリズムのまとめ

EnKF のアルゴリズムをまとめると，以下のとおりとなる．

① 初期ベクトルの平均値 $\bar{x}_0$ と共分散行列 P_0 から $X_{0/-1} = \left[x_{0/-1}^{(1)},\ x_{0/-1}^{(2)},\cdots,\ x_{0/-1}^{(M)}\right]$ を生成し，$t=0$ とおく．

② 観測更新ステップ　Input : $\left[X_{t/t-1}, y_t\right]$ → Output : $\left[X_{t/t}, x_{t/t}^{M}\right]$

a) 予測誤差アンサンブル行列

$$\tilde{X}_{t/t-1} = \left[\tilde{x}_{t/t-1}^{(1)},\ \tilde{x}_{t/t-1}^{(2)},\cdots,\ \tilde{x}_{t/t-1}^{(M)}\right] \tag{2.171}$$

b) システム (S_i) の出力ベクトルの予測値

$$y_{t/t-1}^{(i)} = h_t\left(x_{t/t-1}^{(i)}\right) + v_t^{(i)}, \qquad i=1,\cdots,M \tag{2.172}$$

c) 出力の予測誤差アンサンブル行列

$$\tilde{Y}_{t/t-1} = \left[\tilde{y}_{t/t-1}^{(1)},\ \tilde{y}_{t/t-1}^{(2)},\cdots,\ \tilde{y}_{t/t-1}^{(M)}\right] \tag{2.173}$$

d) 共分散行列

$$V_{t/t-1}^{M} = \frac{1}{M-1}\tilde{Y}_{t/t-1}\left(\tilde{Y}_{t/t-1}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.174}$$

$$U_{t/t-1}^{M} = \frac{1}{M-1}\tilde{X}_{t/t-1}\left(\tilde{Y}_{t/t-1}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.175}$$

e) EnKF Kalman Gain

$$K_{t}^{M} = U_{t/t-1}^{M}\left(V_{t/t-1}^{M}\right)^{-1} \tag{2.176}$$

f) システム(S_i)の濾波推定値

$$x_{t/t}^{(i)} = x_{t/t-1}^{(i)} + K_t^M\left[y_t - y_{t/t-1}^{(i)}\right], \qquad i = 1,\cdots,M \tag{2.177}$$

g) 濾波アンサンブル行列

$$X_{t/t} = \left[x_{t/t}^{(1)},\, x_{t/t}^{(2)},\cdots,\, x_{t/t}^{(M)}\right] \tag{2.178}$$

h) 濾波推定値

$$x_{t/t}^{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_{t/t}^{(i)} \tag{2.179}$$

③ 時間更新ステップ　Input : $\left[X_{t/t}\right]$ → Output : $\left[X_{t+1/t}, x_{t+1/t}^{M}\right]$

a) システム(S_i)の予測アンサンブル

$$x_{t+1/t}^{(i)} = f_t\left(x_{t/t}^{(i)}\right) + w_t^{(i)}, \qquad i = 1,\cdots,M \tag{2.180}$$

b) 予測アンサンブル行列

$$X_{t+1/t} = \left[x_{t+1/t}^{(1)},\, x_{t+1/t}^{(2)},\cdots,\, x_{t+1/t}^{(M)}\right] \tag{2.181}$$

c) 1 段予測推定値

$$x_{t+1/t}^{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_{t+1/t}^{(i)} \tag{2.182}$$

④ $t \leftarrow t+1$としてステップ②へ戻る.

以上のステップを繰り返すことにより，濾波推定値$x_{t/t}^{M}$，１段予測推定値$x_{t+1/t}^{M}$が逐次的に計算できる.

なお, EnKF のアルゴリズムには推定誤差共分散行列$P_{t/t}^{M}$，$P_{t+1/t}^{M}$の計算は含まれていない. アルゴリズムで状態ベクトルの共分散行列の計算を必要としないことが EnKF の利点であり, これは状態ベクトルの次元nが大きいときに効果がある [12).]

2.2.5　Particle Filter（PF：粒子フィルタ）

PF は観測データに基づく状態ベクトルの条件付き確率分布を多数の粒子で近似的に表現して，ベイズの定理を応用しその時間推移を数値的に評価するものである．本項では，リサンプリングを用いた PF の理論やアルゴリズムを記述する．

(1)　非線形確率システム

以下の離散時間非線形確率システムについて考える．

$$x_{t+1} = f_t(x_t, w_t) \tag{2.183}$$

$$y_t = h_t(x_t, v_t) \tag{2.184}$$

ただし，$x_t \in \mathbf{R}^n$ は状態ベクトル，$y_t \in \mathbf{R}^p$ は観測ベクトルで，$w_t \in \mathbf{R}^m$ はシステムノイズ，$v_t \in \mathbf{R}^p$ は観測ノイズである．w_t，v_t は平均値 0 の互いに無相関な白色ノイズで，かつ初期状態ベクトル x_0 とは無相関であるとする．さらにノイズの分布は一般に非ガウス分布であり，

$$w_t \sim p(w_t), \qquad v_t \sim p(v_t), \qquad x_0 \sim p(x_0) \tag{2.185}$$

で与えられるとする．また $f_t(x_t, w_t)$ および $h_t(x_t, v_t)$ は n 次元および p 次元非線形ベクトル関数であり，ノイズは状態ベクトル x_t に対して必ずしも加法的であるとは限らないとする．

観測データ $Y^t = \{ y_0, \cdots, y_t \}$ に基づく状態ベクトル x_t の条件付き確率密度関数の時間的な推移 $p(x_t | Y^{t-1}) \to p(x_t | Y^t) \to p(x_{t+1} | Y^t)$ を与える更新式は式(2.64)，(2.65)のとおりである．

(2)　PF のアルゴリズムの導出

PF の考え方は, 事後確率分布をその分布から独立にサンプルされた多数の粒子で近似的に表現することである. EnKF と同様に, 分布を近似する粒子の集まりをアンサンブルという.

以下では，1 段予測確率密度関数 $p(x_t | Y^{t-1})$ およびフィルタ確率密度関数 $p(x_t | Y^t)$ を近似する M 個の粒子からなるアンサンブルをそれぞれ

$$X_{t/t-1} = \left[x_{t/t-1}^{(1)}, x_{t/t-1}^{(2)}, \cdots, x_{t/t-1}^{(M)} \right] \tag{2.186}$$

$$X_{t/t} = \left[x_{t/t}^{(1)}, x_{t/t}^{(2)}, \cdots, x_{t/t}^{(M)} \right] \tag{2.187}$$

とおく．このことは，2 つの事後確率密度関数が

$$p(x_t | Y^{t-1}) \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \delta\left(x_t - x_{t/t-1}^{(i)}\right) \tag{2.188}$$

$$p(x_t | Y^t) \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \delta\left(x_t - x_{t/t}^{(i)}\right) \tag{2.189}$$

のように近似されていることに相当する．$\delta(x)$，$x \in \mathbf{R}^n$ はディラックのデルタ関数であり，以下の性質がある．

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(x)dx = 1 \ ; \qquad \delta(x) = 0 \, , \qquad x \neq 0 \tag{2.190}$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} g(x)\delta(x-a)dx = g(a) \, , \qquad g(x) \text{：連続関数} \tag{2.191}$$

ここで，式(2.188)，(2.189)について，デルタ関数による事後確率密度関数の近似における重みがすべて等しく$1/M$となっていることに留意する．PF はアンサンブルの時間的な推移$X_{t/t-1} \to X_{t/t} \to X_{t+1/t}$を，モンテカルロ法によって数値的に計算するアルゴリズムである．言い換えると，PF は初期分布に対応するアンサンブルを与えて，システムノイズのサンプルによってアンサンブルを推移させる時間更新ステップおよびリサンプリングによる観測更新ステップを繰り返すことにより，非線形確率システムのフィルタリング問題を数値的に解くことができる．

1) **時間更新ステップ**

システムノイズw_tを考慮して式(2.65)を変形すると，

$$p\left(x_{t+1} \middle| Y^t\right) = \int \left(\int p\left(x_{t+1}, w_t \middle| x_t\right) dw_t \right) p\left(x_t \middle| Y^t\right) dx_t \tag{2.192}$$

となる．ただし，x_tおよびw_tの積分範囲はそれぞれ$\mathbf{R}^n$および$\mathbf{R}^m$であるが，省略する．$p\left(x_{t+1}, w_t \middle| x_t\right) = p\left(x_{t+1} \middle| x_t, w_t\right) p\left(w_t \middle| x_t\right)$であるから，

$$\begin{aligned} p\left(x_{t+1} \middle| Y^t\right) &= \int \left(\int p\left(x_{t+1} \middle| x_t, w_t\right) p\left(w_t \middle| x_t\right) dw_t \right) p\left(x_t \middle| Y^t\right) dx_t \\ &= \int\int p\left(x_{t+1} \middle| x_t, w_t\right) p\left(x_t \middle| Y^t\right) p(w_t)\, dx_t dw_t \end{aligned} \tag{2.193}$$

となる．また条件付き結合確率分布$p\left(x_t, w_t \middle| Y^t\right) = p\left(x_t \middle| Y^t\right) p(w_t)$に従う$M$個の独立なサンプルの組を$\left(x_{t/t}^{(i)}, w_t^{(i)}\right)$，$i = 1, \cdots, M$とする．すなわち，結合確率分布を以下のように近似する．

$$p\left(x_t \middle| Y^t\right) p(w_t) \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \delta\left(x_t - x_{t/t}^{(i)}\right) \delta\left(w_t - w_t^{(i)}\right) \tag{2.194}$$

ここで，式(2.194)を式(2.193)に代入すると，デルタ関数の性質から

$$\begin{aligned} p\left(x_{t+1} \middle| Y^t\right) &\cong \int\int p\left(x_{t+1} \middle| x_t, w_t\right) \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \delta\left(x_t - x_{t/t}^{(i)}\right) \delta\left(w_t - w_t^{(i)}\right) dx_t dw_t \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p\left(x_{t+1} \middle| x_{t/t}^{(i)}, w_t^{(i)} \right) \end{aligned} \tag{2.195}$$

を得る．式(2.183)において，x_tとw_tが与えられるとx_{t+1}は確定するので，

$$p\left(x_{t+1} \middle| Y^t\right) \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \delta\left(x_{t+1} - f_t\left(x_{t/t}^{(i)}, w_t^{(i)}\right)\right) \tag{2.196}$$

となる．ここで，

$$x_{t+1/t}^{(i)} = f_t\left(x_{t/t}^{(i)}, w_t^{(i)}\right), \qquad i = 1, \cdots, M \tag{2.197}$$

とおくと，

$$p\left(x_{t+1} \middle| Y^t\right) \cong \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \delta\left(x_{t+1} - x_{t+1/t}^{(i)}\right) \tag{2.198}$$

を得る．したがって，式(2.197)，(2.198)から

$$X_{t+1/t} = \left[x_{t+1/t}^{(1)},\, x_{t+1/t}^{(2)}, \cdots,\, x_{t+1/t}^{(M)}\right] \tag{2.199}$$

は事後確率密度関数 $p\left(x_{t+1} \middle| Y^t\right)$ から独立にサンプルされた M 個のアンサンブルであると考えられる．ここで，式(2.197)，(2.199)と式(2.165)，(2.166)をそれぞれ比較すると，PF の時間更新ステップは EnKF の場合と同じであることが分かる．

2) 観測更新ステップ

式(2.198)で $t := t-1$ とした事後確率密度関数 $p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right)$ を近似する M 個の粒子 $X_{t/t-1}$ が与えられたとする．この事後確率密度関数に対応する経験分布は

$$F_{t/t-1}(x) \cong \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} I\left(x - x_{t/t-1}^{(i)}\right) \tag{2.200}$$

となる．ただし，$I(\cdot)$ は単位ステップ関数であり，

$$I(x-a) = \begin{cases} 1, & x \ge a \\ 0, & x < a \end{cases} \tag{2.201}$$

で定義される．すなわち，式(2.200)の右辺は単位ステップ関数の和となっている．

ここで，新しく観測値 y_t が得られたとする．$Y^t = \left\{Y^{t-1}, y_t\right\}$ となるので，事後確率密度関数 $p\left(x_t \middle| Y^t\right)$ は式(2.64)から

$$p\left(x_t \middle| Y^t\right) = \frac{p(y_t | x_t)\, p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right)}{\int p(y_t | x_t)\, p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right) dx_t} \tag{2.202}$$

となる．式(2.202)右辺の分母を C_t とおき， $p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right)$ を式(2.188)で置き換えて，デルタ関数の性質を用いると，

$$C_t \cong \int p(y_t | x_t) \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \delta\left(x_t - x_{t/t-1}^{(i)}\right) dx_t = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \alpha_t^{(i)} \tag{2.203}$$

を得る．ただし，

$$\alpha_t^{(i)} = p\left(y_t \middle| x_t = x_{t/t-1}^{(i)}\right), \qquad i = 1, \cdots, M \tag{2.204}$$

は $x_t = x_{t/t-1}^{(i)}$ が与えられたときの y_t の条件付き確率密度関数で，式(2.184)と v_t の確率密度関数 $p(v_t)$ から計算できる．これは観測値 y_t が与えられた場合の状態ベクトル $x_t = x_{t/t-1}^{(i)}$ の尤度である．このとき，式(2.202)は

$$p\left(x_t \middle| Y^t\right) \cong p(y_t | x_t) \frac{1}{C_t M} \sum_{i=1}^{M} \delta\left(x_t - x_{t/t-1}^{(i)}\right) \tag{2.205}$$

となる．上式から以下の式を得る．

$$\begin{aligned} p\left(x_t = x_{t/t-1}^{(i)} \middle| Y^t \right) &\cong \frac{1}{C_t M} p\left(y_t \middle| x_t = x_{t/t-1}^{(i)} \right) \\ &= \frac{\alpha_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^{M} \alpha_t^{(j)}} = \tilde{\alpha}_t^{(i)}, \qquad i = 1, \cdots, M \end{aligned} \tag{2.206}$$

式(2.206)は Y^t に基づく粒子 $x_{t/t-1}^{(i)}$ の事後確率分布であり， $\tilde{\alpha}_t^{(i)}$ は粒子 $x_{t/t-1}^{(i)}$ の条件付き確率を与える．よって，式(2.206)に対応する経験分布は

$$F_{t/t}(x) \cong \sum_{i=1}^{M} \tilde{\alpha}_t^{(i)} I\left(x - x_{t/t-1}^{(i)}\right) \tag{2.207}$$

となる．これは点 $x_{t/t-1}^{(i)}$， $i = 1, \cdots, M$ において大きさ $\tilde{\alpha}_t^{(i)}$， $i = 1, \cdots, M$ のジャンプをする階段関数である．

以上で事後確率分布の近似式を記述したが，これを次のステップの時間更新式に用いるためには，式(2.207)の分布を式(2.200)と同様に等確率の粒子 $x_{t/t}^{(i)}$， $i = 1, \cdots, M$ を用いて，

$$F_{t/t}(x) \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} I\left(x - x_{t/t}^{(i)}\right) \tag{2.208}$$

のように近似し直す必要がある．すなわち，式(2.207)に示すような分布関数を，式(2.200)と同様にジャンプの大きさがすべて $1/M$ である分布関数で置き換えなければならない．リサンプリングによってこの置き換えを実行するのが PF であり，EnKF との違いはこのリサンプリングにある．

(3) リサンプリング

上述のように，式(2.207)から式(2.208)を導くには，粒子 $x_{t/t-1}^{(i)}$ を確率 $\tilde{\alpha}_t^{(i)}$ でリサンプリングすればよい．すなわち，新しい粒子

$$X_{t/t} = \left[x_{t/t}^{(1)},\, x_{t/t}^{(2)}, \cdots,\, x_{t/t}^{(M)} \right] \tag{2.209}$$

を求めるためには，アンサンブル $X_{t/t-1} = \left[x_{t/t-1}^{(1)},\, x_{t/t-1}^{(2)}, \cdots,\, x_{t/t-1}^{(M)} \right]$ からの復元抽出を用いる．言い換えると，各 $j = 1, \cdots, M$ に対して，粒子 $x_{t/t}^{(j)}$ を

$$x_{t/t}^{(j)} = \begin{cases} x_{t/t-1}^{(1)}, & \tilde{\alpha}_t^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x_{t/t-1}^{(M)}, & \tilde{\alpha}_t^{(M)} \end{cases} \tag{2.210}$$

によって定義すると，これは以下の重み付き確率測度から一様確率測度への変換となる．

$$\begin{pmatrix} x_{t/t-1}^{(1)} & \cdots & x_{t/t-1}^{(M)} \\ \tilde{\alpha}_t^{(1)} & \cdots & \tilde{\alpha}_t^{(M)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{t/t}^{(1)} & \cdots & x_{t/t}^{(M)} \\ 1/M & \cdots & 1/M \end{pmatrix} \tag{2.211}$$

図 2.2 には PF のアルゴリズムの概念図を示す．リサンプリングでは小さい尤度（確率）の粒子を×印で示すように消滅させ，大きな尤度をもつ粒子を増殖させてその個数を増やす．新しく求まったアンサンブル $X_{t/t} = \left[x_{t/t}^{(1)}, x_{t/t}^{(2)}, \cdots, x_{t/t}^{(M)}\right]$ を事後確率密度関数 $p\left(x_t \middle| Y^t\right)$ から独立にサンプルされた実現値と考える．リサンプリングの手順の一例を以下に示す．

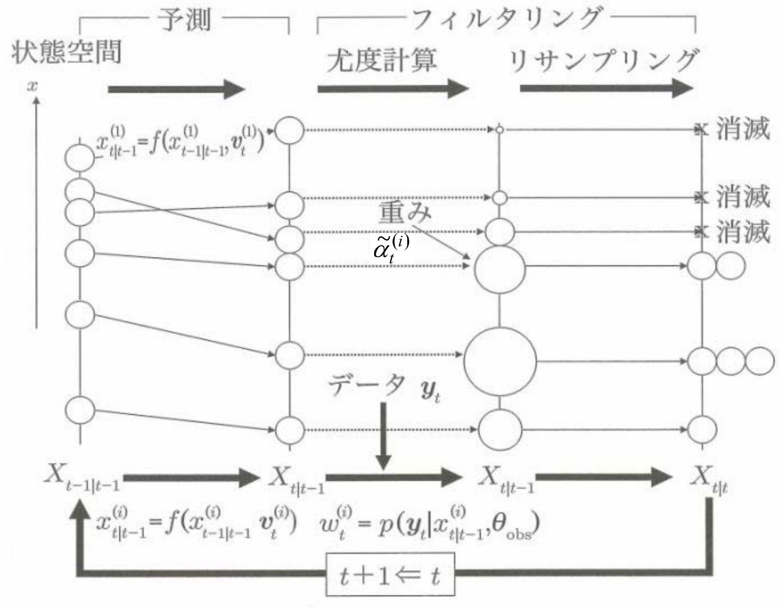


図 2.2　Particle Filter のアルゴリズムの概念図（樋口[10] より引用）

＜リサンプリングの手順の一例＞

各 $j = 1, \cdots, M$ について，以下のステップ(ｉ)～(iii)を繰り返す．

(ｉ) 一様乱数 $\xi_t^{(j)} \in (0,1)$ を生成する．

(ⅱ) 次の条件を満足する番号 i を見つける．

$$\sum_{k=1}^{i-1} \tilde{\alpha}_t^{(k)} < \xi_t^{(j)} \leq \sum_{k=1}^{i} \tilde{\alpha}_t^{(k)} \tag{2.212}$$

(iii) 新しい粒子を $x_{t/t}^{(j)} := x_{t/t-1}^{(i)}$ とおく．

(4) PF のアルゴリズムのまとめ

PF のアルゴリズムをまとめると，以下のとおりとなる．

① 事前分布 $p(x_0)$ に従って，初期アンサンブル $X_{0/-1} = \left[x_{0/-1}^{(1)},\ x_{0/-1}^{(2)}, \cdots,\ x_{0/-1}^{(M)}\right]$ を生成して，$t = 0$ とおく．

② 観測更新ステップ　Input：$\left[X_{t/t-1}, y_t\right]$ → Output：$\left[X_{t/t}, \hat{x}_{t/t}\right]$

a) 尤度の計算

$$\alpha_t^{(i)} = p\left(y_t \middle| x_t = x_{t/t-1}^{(i)}\right), \qquad i = 1, \cdots, M \tag{2.213}$$

$$\tilde{\alpha}_t^{(i)} = \frac{\alpha_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^{M} \alpha_t^{(j)}}, \qquad i = 1, \cdots, M \tag{2.214}$$

b) リサンプリングにより濾波アンサンブル行列を計算

$$X_{t/t} = \left[x_{t/t}^{(1)},\ x_{t/t}^{(2)}, \cdots,\ x_{t/t}^{(M)}\right] \tag{2.215}$$

c) 濾波推定値

$$\hat{x}_{t/t} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_{t/t}^{(i)} \tag{2.216}$$

③ 時間更新ステップ　Input：$\left[X_{t/t}\right]$ → Output：$\left[X_{t+1/t}, \hat{x}_{t+1/t}\right]$

a) システムノイズのサンプルを生成

$$w_t^{(i)} \sim p(w_t), \qquad i = 1, \cdots, M \tag{2.217}$$

b) 予測アンサンブル行列

$$x_{t+1/t}^{(i)} = f_t\left(x_{t/t}^{(i)}, w_t^{(i)}\right), \qquad i = 1, \cdots, M \tag{2.218}$$

$$X_{t+1/t} = \left[x_{t+1/t}^{(1)},\ x_{t+1/t}^{(2)}, \cdots,\ x_{t+1/t}^{(M)}\right] \tag{2.219}$$

c) 1 段予測推定値

$$\hat{x}_{t+1/t} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_{t+1/t}^{(i)} \tag{2.220}$$

④ $t \leftarrow t+1$ としてステップ②へ戻る．

以上のステップを繰り返すことにより，濾波推定値 $\hat{x}_{t/t}$，1 段予測推定値 $\hat{x}_{t+1/t}$ が逐次的に計算できる．

PF は Kalman Gain を用いない方法であり，観測更新ステップにおいて解析的・数値的に計算される Kalman Gain を用いる EKF，UKF，EnKF とは基本的に異なった方法である．

2.3　各フィルタリング手法の洪水予測分野への適用性

本論において対象とする洪水流量や河道水位の高精度な予測には，シミュレーションモデルの境界条件やパラメータさらには河道諸元といった状態ベクトル，および観測ベクトルについて，非線形性の強い変化を逐次推定し，予測に活用することが求められるため，前節までに記述した非線形フィルタ理論に基づくデータ同化手法は極めて有用と考える．

表 2.2 に前節までに記述した非線形フィルタリング手法の特徴比較を示す．

表 2.2　非線形フィルタリング手法の特徴比較

項　目	Extended Kalman Filter (EKF)	Unscented Kalman Filter (UKF)	Ensemble Kalman Filter (EnKF)	Particle Filter (PF)
基本的な考え方	ヤコビアンを計算して，それを使用し，Kalman Gain や誤差共分散行列を解析的に求める．	σ 点および重み係数を設定し，UT 法を用いることにより，平均と共分散行列を近似的に求める．	アンサンブル平均により共分散行列を求め，それを使用し，Kalman Gain を数値的に求める．	尤度の計算およびリサンプリングを行い，アンサンブル（粒子）の時間推移を数値的に求める．
状態空間モデル	非線形モデルにも対応可．	非線形モデルにも対応可．	非線形モデルにも対応可．	非線形性の顕著なモデルにも対応可．
条件付き確率分布	ガウス分布	ガウス分布	ガウス分布	任意の分布
観測更新の方法	Kalman Gain	Kalman Gain	Kalman Gain	リサンプリング
時間更新の方法	ヤコビアン	UT 法	ノイズサンプル	ノイズサンプル
1 サイクル演算回数	1 回	σ 点数	アンサンブル数	粒子数
演算時間	中	短	長	長

EKF は，ヤコビアンを用いて誤差共分散行列や Kalman Gain を近似計算する 1 次フィルタであるため，非線形性が強くヤコビアンによる近似精度が良くない場合には，フィルタの性能が低下する可能性がある．また，オンラインの洪水予測において非線形モデルのヤコビアンを計算しなければならず, 短時間での予測結果が求められるような中小流域への適用には不向きである．

UKF は，UT 法による近似計算によって条件付き期待値と誤差共分散行列を逐次的に求める 2 次フィルタであるため，一般的に EKF よりも非線形モデルに対する適用性は高い．条件付き確率分布にガウス分布を仮定しているため，非線形性（非定常性を含む）が強い場合には注意を要する．また, 1 サイクルにおいて σ 点数 (2×状態数＋1) 分の演算回数しか必要としないため, 短時間での予測結果が求められるような中小流域への適用に有利である．

EnKF は, 状態ベクトルの条件付き確率分布をアンサンブルと呼ばれる粒子の集合により近似して，アンサンブル平均によって状態ベクトルや出力ベクトルの共分散行列と Kalman Gain を求める 2 次フィルタであるため，UKF と同様，一般的に非線形モデルに対する適用性は高い．条件付き確率分布にガウス分布を仮定しているため, アンサンブル数を増加させても必ず分布の近似精度や状態の推定精度が上がるとは限らない [13]．また，1 サイクルでアンサンブル数分の演算回数を必要とするため，予測計算時間の制約が少ない大流域への適用に限定される．

PF は，状態ベクトルの条件付き確率分布を多数の粒子で近似的に表現して，ベイズの定理を応用し，時間推移をモンテカルロ法によって計算するフィルタであるため，非線形・非ガウスの状態空間モデルに対する適用性が高い．なお，EnKF とは異なり，粒子数を増加させれば分布の近似精度は上がる [13]．また，1 サイクルにおいて粒子数分の演算回数を必要とするため，予測計算時間の制約が少ない大流域への適用に限定される．ここで，大流域への適用に限定した場合，上記から，EnKF よりも PF の方が有利な点が多い．

以上の各種の非線形フィルタリング手法の特徴や長所・短所を踏まえ，中小流域を対象とした『第 3 章　洪水到達時間の短い流域を対象にした水位予測モデルの構築に関する研究』，およびダム流域を対象とした『第 4 章　貯留関数法に基づく洪水予測モデルにおけるパラメータ変動に関する解釈』においては，UKF を適用し，大流域を対象とした『第 5 章　洪水中の粗度係数等の変化に着目した水位予測手法の適用上の課題と対応』,『第 6 章　河口砂州崩壊の影響を受ける河道区間の水位予測手法の開発に関する研究』においては，PF を適用する．なお，第 6 章では，同一条件における非線形カルマンフィルタとの適用性比較の観点から，UKF も適用している．

参考文献

1) 片山徹：非線形カルマンフィルタ，朝倉書店，2011.

2) B. Ristic, S. Arulampalam and N. Gordon : Beyond the Kalman Filter – Particle Filters for Tracking Applications，*Artech House*，2004.

3) A. H. Jazwinski：Stochastic Processes and Filtering Theory，*Academic Press*，1970.

4) Y. Sunahara : An approximate method of state estimation for nonlinear dynamical systems，*Trans. ASME, Journal of Basic Engineering*, Vol.92D/No.2, pp.385-393, 1970.

5) S. J. Julier and J. K. Uhlmann : A new extension of the Kalman Filter to nonlinear systems，*Proc. SPIE, Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition IV*, pp.182-193，1997.

6) Special Issue : Data Assimilation for Weather Forecasting，*IEEE Control Systems Magazine*，Vol.29/No.3，pp.34-104，2009.

7) H. W. Sorenson and D. L. Alspach : Recursive Bayesian estimation using Gaussian sums，*Automatica*，Vol.7/No.2，pp.465-479，1971.

8) R. Bucy and K. Senne : Digital synthesis of nonlinear filters，*Automatica*, Vol.7/No.3, pp.287-298，1971.

9) 北川源四郎：時系列解析入門，pp.209-222，岩波書店，2005.

10) 樋口知之：粒子フィルタ，電子情報通信学会誌，Vol.88/No.12，pp.989-994，2005.

11) 國田　寛：確率過程の推定，産業図書，1976.

12) G. Evensen : Data Assimilation; The Ensemble Kalman Filter，*Springer-Verlag*，2009.

13) 中村和幸，上野玄太，樋口知之：データ同化；その概念と計算アルゴリズム，統計数理，Vol.53/No.2，pp.211-229，2005.

第3章

洪水到達時間の短い流域を対象にした水位予測モデルの構築に関する研究

3.1 概 説

洪水予測において，雨量から流量を予測し，流量から水位流量関係式（以下，H-Q 式という）を使用して水位を予測する方法が一般的であり，予測誤差には，降雨の誤差，流出モデルの誤差，H-Q 式の誤差が考えられる．

近年，情報通信技術の発達，演算能力の飛躍的な向上に伴い，レーダ雨量等の大量で高精度な降雨データを使用することが多くなってきた．また，流出モデルにおいては，降雨～流出過程の物理的なメカニズムを反映させた分布型流出モデル [1] 等により流量を高精度に推定することが可能となってきた．しかし，H-Q 式の精度は従来からほとんど変わらないため，降雨とモデルの精度向上による流量推定の精度向上の成果が水位の予測精度に十分に反映されていない場合がある．一方で，実際の洪水管理の現場では，避難判断等の基準は水位であることから，この予測精度が重要となる．

H-Q 式の精度向上のための方策として，流量観測の高度化等が図られているが，直轄河川でも十分とは言えず，ましてや自治体が管理する河川では流量観測自体行われていないことが多い．また，不定流モデルの導入等が考えられている [2] が，特に洪水到達時間の短い流域においては，計算時間を短縮する必要があることから高次な演算処理を適用できない等の問題がある．さらに，こうした流域の急流河川では洪水中に河床の変動を伴うこと，緩流河川では背水の影響を受けることなどにより，何らかの H-Q 式を用意したとしても洪水中に変化するといった問題があり，リアルタイムで逐次 H-Q 式を修正する有効な手段がないのが現状である．

そこで，H-Q 式を介さず直接，降雨から水位を予測できるモデルを構築し，洪水時に逐次観測される水位に対して予測モデルを同化させることができれば，上記の問題の大部分が解消され，河床の変動が著しい河川，背水の影響を受ける河川，流量観測資料のない河川等における水位の予測精度が向上するものと考えられる [3]．

本章では，洪水到達時間の短い流域を対象にして，観測水位に対してデータ同化を行いながら降雨量から水位を直接予測するモデル（水位予測モデル）を構築し，その適用性等を検討する．まず, 3.2 では対象流域の概要と洪水予測上の課題について, 実績データに基づいた整理を行う．3.3 では使用実績の多い貯留関数法 [4] の基礎式と H-Q 式を組み合わせた「水位予測モデル」の基礎式を導出し，基礎式における定数を自己回帰モデルで表現する．3.4 では観測水位に対するデータ同化（最適定数の推定）手法として，洪水到達時間が短く計算時間を短縮する必要がある流域に適用することを考慮し，複雑な非線形モデルにも対応でき，かつ計算機への負荷も小さいフィルタルング手法を選定して，基礎式やアルゴリズム等を整理・構築する．3.5 では洪水中に H-Q 式が変化すると考えられる急流河川（土器川）と緩流河川（旧吉野川）を対象にした実洪水における水位予測モデルの適用結果（データ同化実験の結果）を示し，観測水位の再現性，定数の推定結果, 流量の推定結果等に対する評価を行い, 水位予測モデルの適用性について考察する．3.6 では本章で得られた結果を要約して結語としている．

3.2　対象流域の概要と洪水予測上の課題

3.2.1　対象流域の概要

1 流域の貯留関数法により流出モデルを構築できる 100～300km^2 の流域面積 [5] で，洪水中に河床が変動する [6] 土器川流域と，河口から背水の影響を受ける [7] 旧吉野川流域を対象とする．

土器川は香川県の西部に位置し，瀬戸内海に注ぐ河川である．流域面積は 127km^2（基準地点祓川橋 : 106.7km^2）で，河床勾配は河口部の感潮区間では約 1/1,200 であるが，中・下流部では 1/400～1/100，上流部では 1/100 以上と全国有数の急流河川である [6]（図 3.1 参照）．

旧吉野川は吉野川第十地点で吉野川本川から分かれ，宮川内谷川等の支川を合わせて東流し，今切川を分派しつつ紀伊水道に注ぐ河川である. 流域面積は 211km^2（基準地点大寺橋: 98.7km^2）で，河床勾配は今切川との分派下流で 1/20,000～1/10,000，今切川で 1/10,000～1/5,000，分派上流で 1/5,000 以上と緩流河川の様相を呈している [7]（図 3.2 参照）．

3.2.2　洪水予測上の課題

国土交通省が公開している水文・水質データベース [8] から，祓川橋（土器川）の実績水位と H-Q 式から換算した流量（以下，H-Q 換算流量という），各観測所の実績テレメータ雨量データを取得し，水収支等を分析することにより，洪水予測上の課題を明らかにする．

データが取得できる 2003 年から 2012 年までの期間において，概ねの流量が 100m^3/s 以上の洪水を対象に，図 3.1 に示す 5 観測所のテレメータ雨量と祓川橋の H-Q 換算流量を取得した．まず，ティーセン法 [9] により総雨量を算定し，次に，H-Q 換算流量のハイドログラフから水平分離法によって総流出高を算定して, 図 3.3 に示す総雨量と総流出高の関係を把握した. ここで, 総雨量と H-Q 式が正確であれば総流出高は総雨量より小さいはずであるが，総流出高が総雨量より大きい洪水がある．これは，ティーセン法による流域平均雨量，H-Q 式，もしくは観測水位に含まれる誤差によるものと考えられ, 流域平均雨量や観測水位の誤差が大きいとは考えにくいことから，主に H-Q 式の誤差に起因しているものと考えられる．

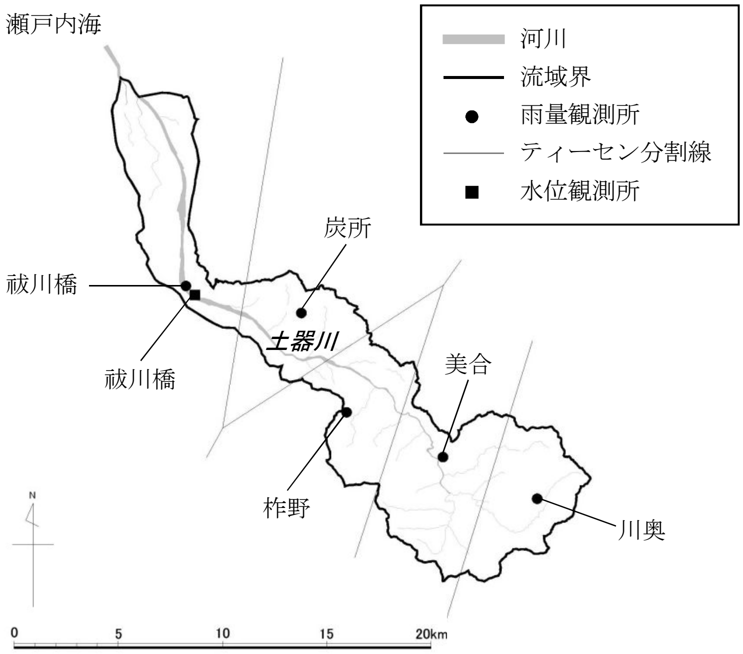


図 3.1　土器川流域の概要図

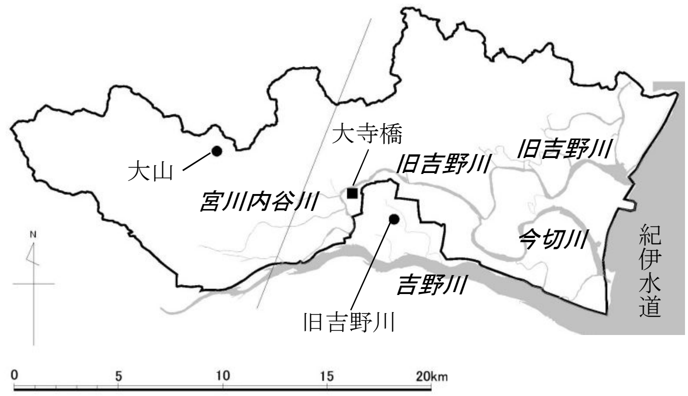


図 3.2　旧吉野川流域の概要図

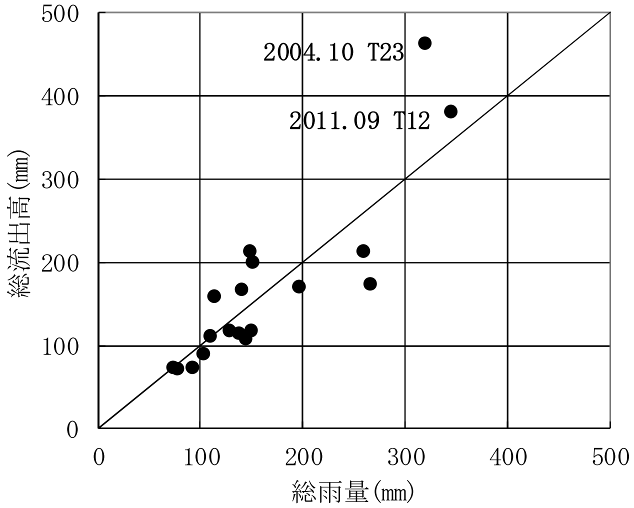


図 3.3　総雨量と総流出高の関係（土器川：祓川橋）

流出モデルとH-Q式が一定の精度を保持していれば，流出モデルで算定した流量とH-Q換算流量は概ね一致する．祓川橋を対象に貯留関数法（式(3.3)～(3.5)参照）の k をパラメータとして推定した流出高を，流出係数とH-Q式を仮定し流量から水位に換算して実績水位と比較すると図 3.4 に示すとおりとなる．

ここで，土器川は細長い流域であるため，流域平均雨量の算定においては，洪水の流下による時間的な遅れを考慮した．各雨量観測所から祓川橋までの流下距離を算定して，クラーヘン式[10)]により遅れ時間を推定し，遅れ時間分ずらした各観測所のハイエトグラフをもとにティーセン法により流域平均雨量を算定した．

流出係数 f は，累加雨量 $R(t)$ が大きくなると 1 に近づく傾向を式(3.1)に示すように指数関数で表現した．式(3.1)中の α は，実績のデータから算定し 0.02 とした．

$$f(t)=1-\exp(-\alpha R(t)) \tag{3.1}$$

また，H-Q式は，水文・水質データベースから取得した実績水位とH-Q換算流量の関係より式(3.2)で仮定した．

$$Q=100(H-1.7)^2 \tag{3.2}$$

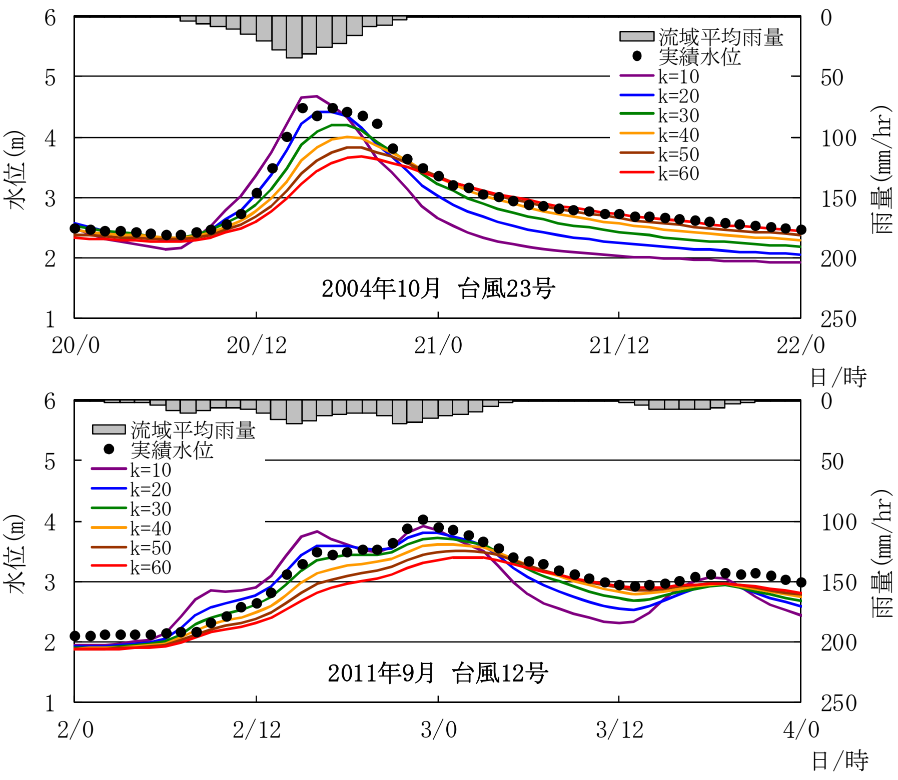


図 3.4　貯留関数法の定数の違いによる水位推定結果（土器川：祓川橋）

2004年10月，2011年9月洪水について，立ち上がり部における実績水位は，k=10～30の推定水位の範囲に入っている．しかし，水位の低減部においては，k=10～30で実績水位を再現できない．以上の考察から，流出モデルにより算定した流量をH-Q式により換算する方法では，精度の高い水位予測は困難であることが示唆される．

3.3　水位予測モデルの構築

3.3.1　水位予測の基本的な考え方

従来から水位予測は図 3.5 に示すフローで行われている．観測水位から H-Q 式で流量に換算し，一方で流出モデルにより雨量から流量を推定して，状態量のフィルタリングを行う．状態量としては流出係数等を調整する．この場合，雨量誤差や H-Q 式の誤差を流出係数等にしわ寄せすることになるため，雨量誤差が大きいとき，あるいは H-Q 式が変化する場合には，予測水位の信頼性が大きく低下する可能性がある．

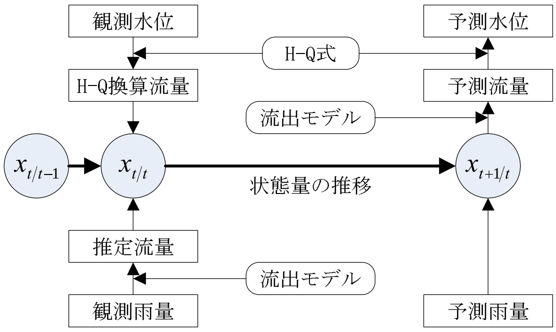


図 3.5　従来の水位予測のフロー

本章で提示する水位予測のフローは，図 3.6 に示すとおりである．水位予測モデルにより雨量から水位を推定し，観測水位を用いて状態量のフィルタリングを行う．予測段階でも，雨量から水位を直接推定する方法となっている．流出係数を仮定することにより流量を逆算できるようになっているが，流量の逆算結果が水位予測結果に影響しないことが分かる．

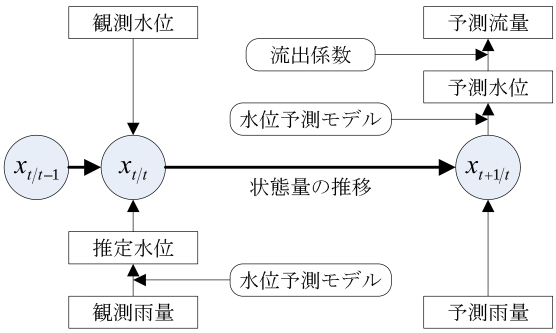


図 3.6　本章の水位予測のフロー

3.3.2　水位予測モデルの概要

1 流域の貯留関数法による流出モデル（以下，貯留関数モデルという）を基本とし，算定した流量が H-Q 式から得られる流量と等しいとしたもので，定数 p を 1/2 に固定し式を簡便にしたものを提示する．図 3.7 に示す概念図より，流量項を消去することができるため，雨量から直接水位を推定できることが分かる．

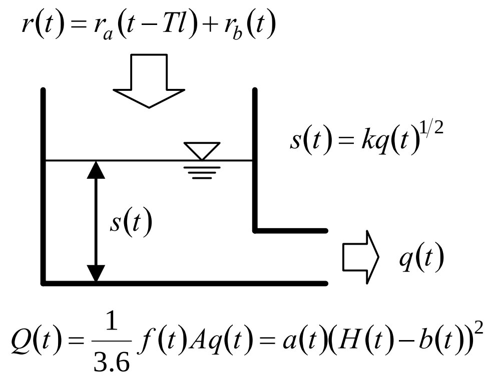


図 3.7　水位予測モデルの概念図

3.3.3　水位予測モデルの基礎式

(1)　基礎式の導出

貯留関数法の基礎式は式(3.3)～(3.6)に示すとおりである．なお，モデルに入力する雨量にベースフロー分も加算することで，洪水前の基底流量を表現している．

$$\frac{ds(t)}{dt}=r(t)-q(t) \tag{3.3}$$

$$r(t)=r_a(t-Tl)+r_b(t) \tag{3.4}$$

$$s(t)=kq(t)^p \tag{3.5}$$

$$Q(t)=\frac{1}{3.6}f(t)Aq(t) \tag{3.6}$$

ここに，s ：貯留高(mm)，t ：時間(hr)，r ：モデルに直接入力する降雨量(mm/hr)，r_a ：テレメータ等から推定される流域平均雨量(mm/hr)，Tl ：遅れ時間(hr)，r_b ：ベースフローに相当する雨量(mm/hr)，q ：流出高(mm)，Q ：実流域流量(m³/s)，k,p ：貯留関数モデルの定数(p =1/2)，f ：流出係数，A ：流域面積(km²)である．また，(t)は時間の関数であることを示している．ここで，貯留高の連続性は保証されない．

H-Q 式は，式(3.7)に示すとおり流量を水位の二次式で表現する．H-Q 式の右辺の括弧の中は$H+b$と表すことが多いが，本章では$H-b$としている．これは，bに流量がゼロとなる基準面からの高さという水理的な意味を持たせるためである．また，定数a,bは時間の関数としている．

$$Q(t)=a(t)(H(t)-b(t))^2 \tag{3.7}$$

ここに，H ：基準面からの水位(m)，a,b ：定数である．

式(3.8)に示す定数cを導入し，式(3.5)，(3.6)，(3.7)を用いて式(3.3)をHとrの関数にすることにより，本章の水位予測モデルの基礎式である式(3.9)を導くことができる．

$$c(t)=\left(\frac{f(t)A}{3.6a(t)}\right)^{1/2} \tag{3.8}$$

$$k\frac{d(H(t)-b(t))}{dt}=c(t)r(t)-\frac{1}{c(t)}(H(t)-b(t))^2 \tag{3.9}$$

(2)　解析方法

式(3.9)は，水位が雨量と k， b， c の 3 つの定数で表現できることを示している．また，式(3.9)は，Δt 時間内においては，雨量および定数が一定と仮定することにより解析的に時間積分が可能となる．積分した結果は双曲線関数等で表現され，式(3.10)～(3.14)が導かれる．これらの式は，関数に既知量を代入することにより水位を推定できるため，繰り返し計算を必要とせず，解の安定性を保持できる．

① $(H(t-1)-b(t))/c(t)/r(t)^{1/2}<1$ のとき

$$H(t)=c(t)r(t)^{1/2}\tanh\left(\frac{r(t)^{1/2}}{k}\Delta t+\xi\right)+b(t)\ ,\quad \xi=\tanh^{-1}\left[(H(t-1)-b(t))/c(t)/r(t)^{1/2}\right] \tag{3.10}$$

② $(H(t-1)-b(t))/c(t)/r(t)^{1/2}=1$ のとき

$$H(t)=H(t-1) \tag{3.11}$$

③ $(H(t-1)-b(t))/c(t)/r(t)^{1/2}>1$ のとき

$$H(t)=c(t)r(t)^{1/2}\coth\left(\frac{r(t)^{1/2}}{k}\Delta t+\xi\right)+b(t)\ ,\quad \xi=\coth^{-1}\left[(H(t-1)-b(t))/c(t)/r(t)^{1/2}\right] \tag{3.12}$$

④ $r(t)=0$ のとき

$$H(t)=\frac{kc(t)(H(t-1)-b(t))}{(H(t-1)-b(t))\Delta t+kc(t)}+b(t) \tag{3.13}$$

⑤ $r(t)<0$ のとき

$$H(t)=c(t)|r(t)|^{1/2}\cot\left(\frac{|r(t)|^{1/2}}{k}\Delta t+\xi\right)+b(t)\ ,\quad \xi=\cot^{-1}\left[(H(t-1)-b(t))/c(t)/|r(t)|^{1/2}\right] \tag{3.14}$$

3.3.4　定数の自己回帰モデル

定数 c は流出係数 f と H-Q 式の定数 a の関数である．洪水中に流出係数と H-Q 式が変化することを想定すると，定数 c は複雑に変化する．これを水理水文学的な知見からモデル化することは容易ではない．そこで，定数の変化を確率過程として考え，自己回帰モデルを適用する．

(1)　定数（状態量）の選定

b, c は時間とともに変化するパラメータである．この 2 つの状態量をフィルタリングすることによって水位を推定できるが，洪水初期の低水流量時と洪水終了後の無降雨時の水位の再現性に配慮し，ベースフローに相当する雨量 r_b を加えた 3 つのパラメータを状態量とする．なお，洪水前後の雨量によらない変動を調整する状態量として，r_b はマイナス値となることも想定する．貯留関数法の定数 k は相対的に変動が小さいと考え，状態量として選定しない．

(2)　定数（状態量）の次数と係数

自己回帰モデルは簡便なものとして，式(3.15)～(3.17)に示すとおりとし，次数は 1 とする．次数 1 の場合は，自己回帰係数は自己相関係数である．定数 b は洪水中に常に大きな変動をしないため，自己相関係数は 1.0 に近いと考え，自己回帰係数 α_b=1.0 と設定する．

定数 c は流出係数 f と H-Q 式の定数 a の関数で正値である．また，a は一定幅で変動し，f は 0～1 の値であるため，c も一定幅で変動するものと想定する．そこで，$c/c_{\max}$（$c_{\max}$ は c の最大値）の Logit 関数で自己回帰モデルを表現することとし，自己回帰係数 α_c=0.75 と設定する．r_b は洪水中に b よりも大きく変動するものと考え，自己回帰係数 α_r=0.8 とする．

$$b(t) = \alpha_b b(t-1) + e_b(t) \qquad \alpha_b = 1.0 \qquad (3.15)$$

$$\mathrm{logit}(c(t)/c_{\max}) = \alpha_c \mathrm{logit}(c(t-1)/c_{\max}) + e_c(t) \qquad \alpha_c = 0.75 \qquad (3.16)$$

$$r_b(t) = \alpha_r r_b(t-1) + e_r(t) \qquad \alpha_r = 0.8 \qquad (3.17)$$

なお，$e_b(t)$，$e_c(t)$，$e_r(t)$ は定数と無相関の誤差項とし，誤差分布に正規分布を仮定する．

3.4　データ同化手法の適用

3.4.1　フィルタリング手法の選定

非線形モデルのフィルタリング手法には，Extended Kalman Filter [11] が多く使用されてきたが，共分散行列が不安定になることが指摘されている [12]．洪水予測においては，推定した洪水波形が実績波形と時間的にずれている場合，観測値と推定値が交差する時刻付近において観測値と推定値の誤差が急激にプラスからマイナスに変化することにより，共分散行列が不安定になる．

この不安定性を解決すべく考案されたものが，統計量を近似する Ensemble Kalman Filter [13]（EnKF）である．一方，誤差分布が正規分布ではなくても適用できる Particle Filter [14]（PF）等も提案されている．しかし，これらの手法は統計量の近似にモンテカルロ近似を使用しており，数百から数千回の解析を必要とするため，計算機への負荷が大きく計算時間を要する．

本章で構築した水位予測モデルは，高速かつ安定的に一定精度で予測結果を提供できることを期待したものである．そのため，EnKF や PF は本章で構築した水位予測モデルにはなじまない．このため，“2×状態数＋1”回の解析で統計量を近似できる Unscented Transformation（UT）法を使用し，計算機への負荷を小さくできる Unscented Kalman Filter [15]（UKF）を採用する．

3.4.2　フィルタリング手法の適用

(1)　フィルタの基礎式の整理

時間更新ステップ式と観測値更新ステップ式からなる．

時間更新ステップ式は式(3.15)～(3.17)で表され，$x_{t-1/t-1}$，$x_{t/t-1}$ を状態量ベクトルとして，式(3.18)のとおり簡易な線形式で表現できる．定数の状態量は式(3.19)で表され，係数行列は式(3.20)となる．q_n はシステムノイズである．また，サフィックス $_{t-1/t-1}$ は 1 ステップ前の状態量を示し，$_{t/t-1}$ は 1 ステップ前の情報から時間更新した結果を示している．なお，$_{t/t}$ は現時刻における観測値更新した結果であることを示す．

$$x_{t/t-1} = Ax_{t-1/t-1} + q_n \tag{3.18}$$

$$x_{t/t-1}^{\mathrm{T}} = \left[b_{t/t-1} \quad \mathrm{logit}\left(c_{t/t-1} / c_{\max} \right) \quad r_{b_{t/t-1}} \right]^{\mathrm{T}} \tag{3.19}$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_b & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_c & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

観測値更新ステップ式は，式(3.21)で表現することができ，$F_t\left(x_{t/t-1}\right)$ は式(3.10)～(3.14)を示している．$y_{t/t-1}$ は観測推定値，r_n は観測ノイズである．

$$y_{t/t-1} = F_t\left(x_{t/t-1}\right) + r_n \tag{3.21}$$

(2)　システムノイズと観測ノイズの設定

システムノイズについては，後述の水位予測モデルを運用した感度分析の結果から，b のノイズは $H-b$ の 6%として，$H-b$ が大きくなると b が変動しやすくなるように設定する．$\mathrm{logit}\left(c/c_{\max}\right)$ のノイズは，土器川で 0.03，旧吉野川で 0.3 として，r_b のノイズは 1.0mm/hr とする．土器川のシステムノイズの分散を式(3.22)に示す．

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0.06^2 (H-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 \times 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \times 1.0 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

観測ノイズについても，後述の水位予測モデルの運用結果から，$H-b$ の 5%と仮定し，分散を式(3.23)のとおりとする．

$$R_n = 0.05^2 (H-b)^2 \tag{3.23}$$

3.4.3　Unscented Kalman Filter（UKF）のアルゴリズム

二次の統計量である状態量の誤差共分散行列を UT 法 [15] によって「σ 点」で近似することが UKF の特徴である．アルゴリズムの詳細については，第 2 章を参照されたい．

(1) 状態量の観測値更新方法

Kalman Gain（G）は，式(3.24)に示すとおり誤差共分散行列から求めることができる．Kalman Gain によって状態量を更新する式は，Kalman Filter [16] と同一であり式(3.25)より与えられる．また，状態量の誤差共分散行列の時間更新については，式(3.26)で与えられる．なお, 表記は片山 [17] を参考にした. 式(3.24)～(3.26)の変数は式(3.27)～(3.31)で定義される．

$$G = U_{t/t-1} V_{t/t-1}^{-1} \tag{3.24}$$

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + G\left(y_t - \hat{y}_{t/t-1}\right) \tag{3.25}$$

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - U_{t/t-1} V_{t/t-1}^{-1} U_{t/t-1}^{\mathrm{T}} \tag{3.26}$$

① 状態量の誤差共分散行列（$W^{(i)}$：後述するσ点“i”における重み，以下同じ）

$$P_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left[x_{t/t-1}^{(i)} - \hat{x}_{t/t-1} \right] \left[x_{t/t-1}^{(i)} - \hat{x}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} + Q_n \tag{3.27}$$

② 状態量と観測推定値の誤差共分散行列

$$U_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left[x_{t/t-1}^{(i)} - \hat{x}_{t/t-1} \right] \left[y_{t/t-1}^{(i)} - \hat{y}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} \tag{3.28}$$

③ 観測推定値の誤差共分散行列

$$V_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left[y_{t/t-1}^{(i)} - \hat{y}_{t/t-1} \right] \left[y_{t/t-1}^{(i)} - \hat{y}_{t/t-1} \right]^{\mathrm{T}} + R_n \tag{3.29}$$

④ 観測推定値

$$\hat{y}_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} y_{t/t-1}^{(i)} \tag{3.30}$$

⑤ 状態量推定値

$$\hat{x}_{t/t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} x_{t/t-1}^{(i)} \tag{3.31}$$

(2) UT 法の概要

2 つの状態量がある場合を想定して UT 法を概説する．図 3.8 のとおり，$\left(x_1, x_2\right)$平面上に独立な状態量の誤差分布を仮定する. 2 軸の一方を長軸, 他方を短軸とした誤差分布になる. これを，$\left(y_1, y_2\right)$平面上の誤差分散特性を反映した分布に変換することを UT 法という.

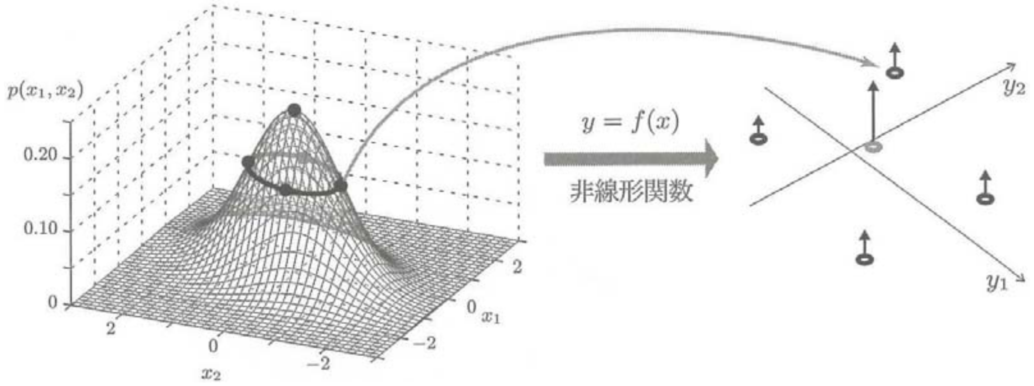


図 3.8　UT 法と σ 点の概念図（足立ら[18] より引用）

(x_1, x_2) 平面上の 2 軸上に状態量から観測推定値を算定する「σ 点」を設定する．2 変数の場合，σ 点は 5 となり，これを一般化すると n 次元では $2n+1$ となる．

(3)　σ 点の設定方法

状態量 $x_{t/t-1}$ の誤差共分散行列 $P_{t/t-1}$ は，特異値分解により式(3.32)に示すとおり平方根行列で表現できるものとする．

$$P_{t/t-1} = \sqrt{P_{t/t-1}}\sqrt{P_{t/t-1}}^{\mathrm{T}} \tag{3.32}$$

σ 点の数は $2n+1$ 個で，式(3.33)～(3.35)で表現される．

① $i = 0$ のとき

$$x_{t/t-1}^{(0)} = \hat{x}_{t/t-1} \qquad W^{(0)} = \frac{\lambda}{n+\lambda} \tag{3.33}$$

② $i = 1 \sim n$ のとき

$$x_{t/t-1}^{(i)} = \hat{x}_{t/t-1} + \sqrt{(n+\lambda)P_{t/t-1}^{(i)}} \qquad W^{(i)} = \frac{1}{2(n+\lambda)} \tag{3.34}$$

③ $i = n+1 \sim 2n$ のとき

$$x_{t/t-1}^{(i)} = \hat{x}_{t/t-1} - \sqrt{(n+\lambda)P_{t/t-1}^{(i)}} \qquad W^{(n+i)} = \frac{1}{2(n+\lambda)} \tag{3.35}$$

ここに，$x^{(i)}$ ：σ 点 i における状態量，$\hat{x}$ ：状態量の期待値，$\sqrt{P_{t/t-1}^{(i)}}$ ：誤差共分散行列の平方根行列の i 列の値，$W^{(i)}$ ：σ 点 i における重み，λ ：チューニングパラメータである．Julier[15] を参考に，$n+\lambda = 3$ と設定する．

3.5　水位予測モデルの適用結果

洪水の立ち上がりが急な 2004 年 10 月洪水（土器川・旧吉野川共通 : 台風 23 号）と，洪水の立ち上がりが緩やかな 2011 年 9 月洪水（土器川 : 台風 12 号，旧吉野川 : 台風 15 号）について，水位予測モデルを適用した結果を示す．貯留関数法の定数kは水位予測モデルの精度に影響するパラメータであり，ここではk=20 と仮定し，水位の推定結果や定数の変動状況を評価した上で，適用性を確認する．

3.5.1　水位の推定結果の評価

土器川（祓川橋）における水位の推定結果を図 3.9，図 3.10，旧吉野川（大寺橋）における水位の推定結果を図 3.11，図 3.12 のそれぞれ最上段の図に示す．観測値の誤差分布を正規分布と仮定すると式(3.36)に示す 95%信頼区間が得られるで，これと実績水位を比較する．

$$\hat{y}_{t/t-1} - 1.96\sqrt{V_{t/t-1}} < y_{t/t-1} < \hat{y}_{t/t-1} + 1.96\sqrt{V_{t/t-1}} \tag{3.36}$$

これらの図より，観測水位が概ね 95%信頼区間に挟まれていることが分かるため，推定結果に大きな問題はないと評価できる．

3.5.2　定数b, c, r_bの推定結果の評価

土器川（祓川橋）における定数b，c，r_bの推定結果を図 3.9，図 3.10，旧吉野川（大寺橋）における定数b，c，r_bの推定結果を図 3.11，図 3.12 のそれぞれ 2 段目の図に示す．

土器川（祓川橋）においては，定数cは洪水中大きく変化せず，bとr_bで誤差を調整した結果となっている．洪水ピーク付近でベースフローr_bによる誤差の調整ができなくなるとbが小さくなり，観測水位との調整を行う傾向にある．急流河川では，洪水中に掃流力が大きくなり，ある水深を超過すると河床が変動すると考えられ，この傾向を概ね表現した結果となっていると評価できる．

旧吉野川（大寺橋）においては，r_bによる誤差の調整ができなくなるとbだけでなくcも変化して，観測水位との調整を行う傾向にある．緩流河川では，洪水中に背水の影響を受けるため，H-Q 式の勾配であるaを含むcが変化しやすくなったと考えられ，河道特性を概ね表現した結果となっていると評価できる．

3.5.3　定数cのa, fへの分解試算

定数cをaとfに分解する方法については，有効な方法がない．一つの試算としてfを式(3.1)で与えaと分解する．

土器川（祓川橋）における定数の分解結果を図 3.9，図 3.10 のそれぞれ 3 段目の図に示す．これらの図より，洪水の立ち上がり部でaが次第に大きくなる傾向を示していることが分かる．流出係数fが妥当な値であれば，定数aがこのように流出係数fに追随する変化を示すことは考えにくいため，洪水期間中のfには，式(3.1)で与えた指数関数等の仮定は成立しない可能性があると考えられる．

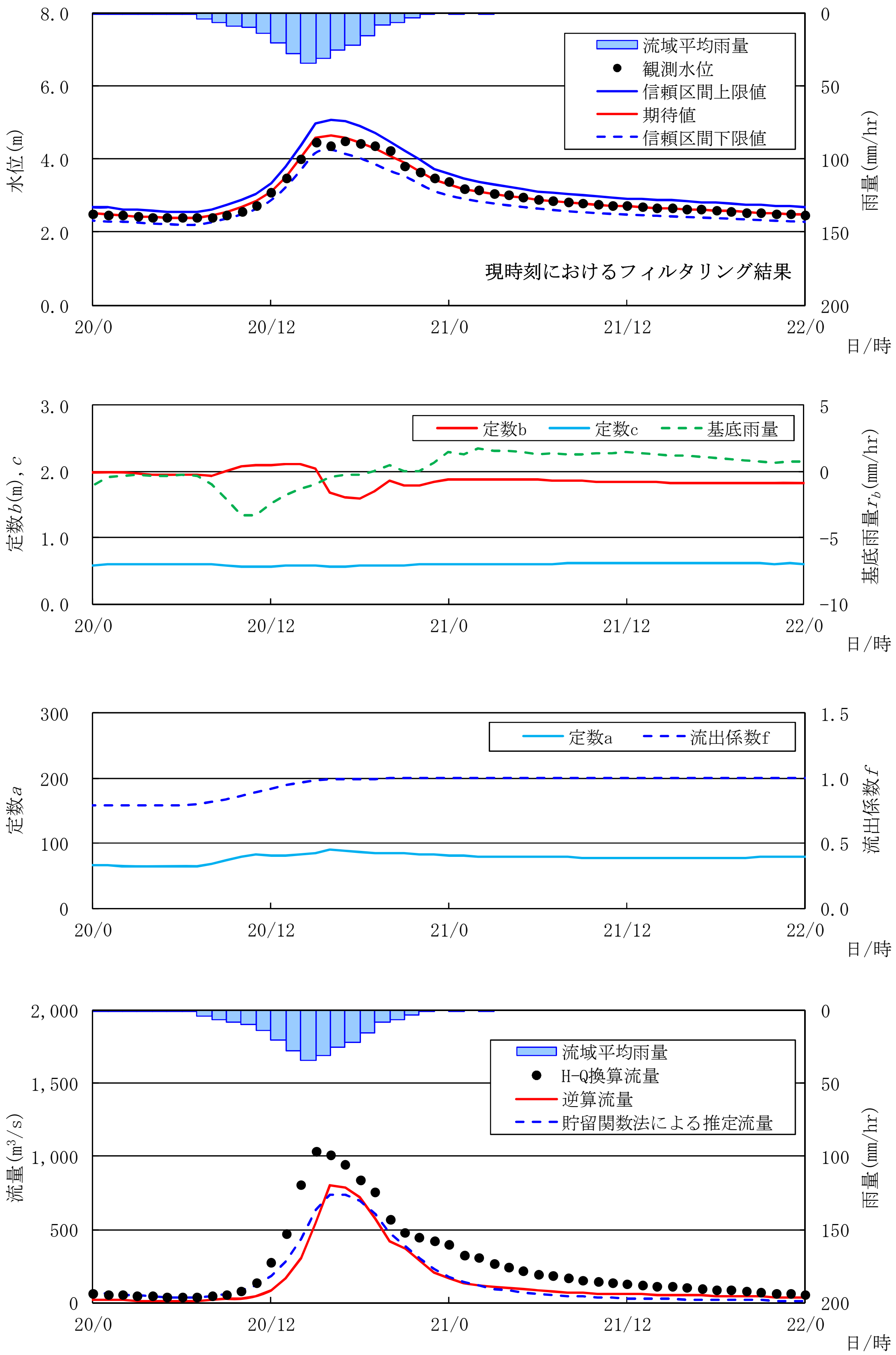


図 3.9　土器川（祓川橋）への水位予測モデルの適用結果（2004 年 10 月・台風 23 号）

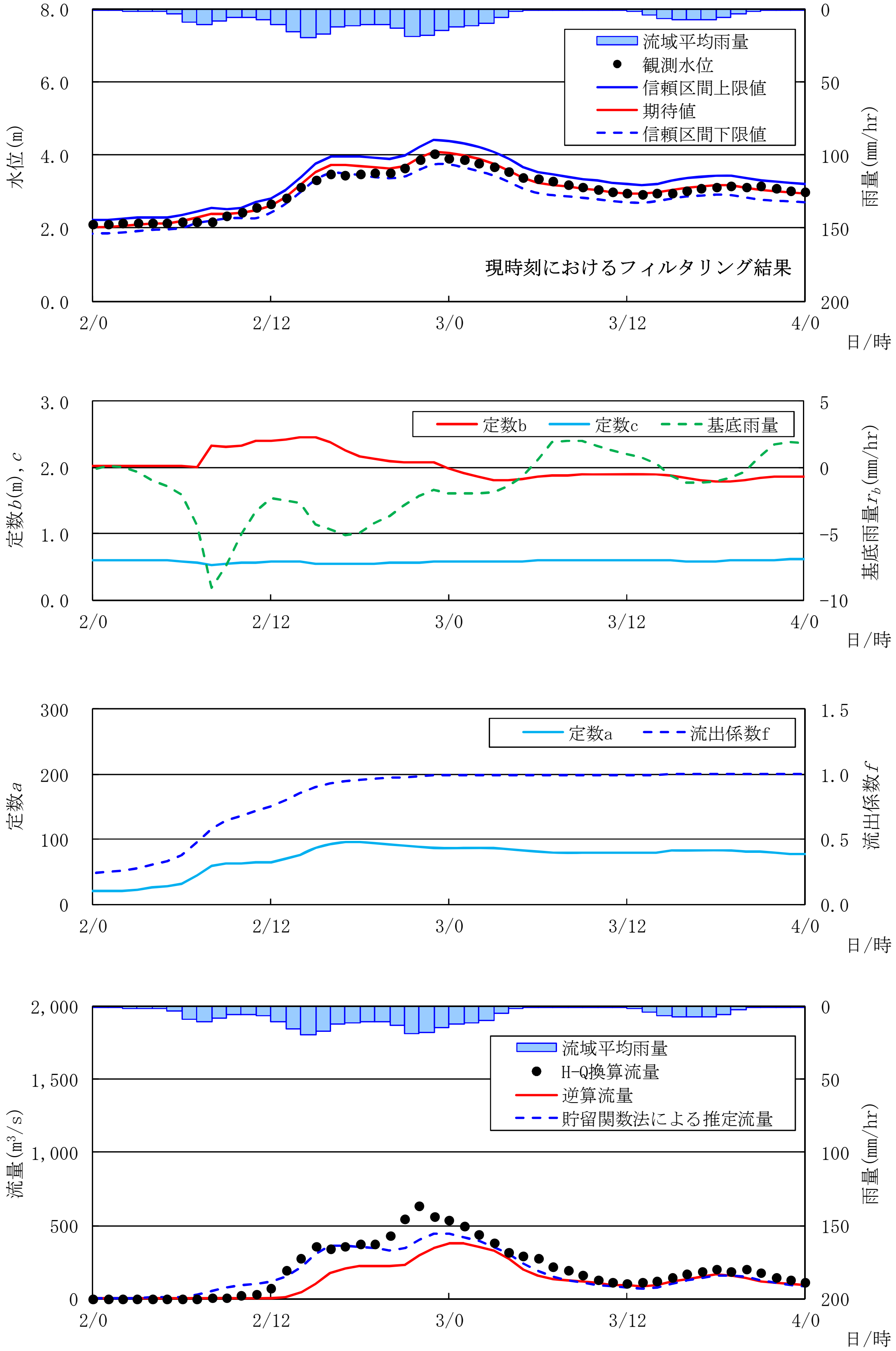


図 3.10　土器川（祓川橋）への水位予測モデルの適用結果（2011 年 9 月・台風 12 号）

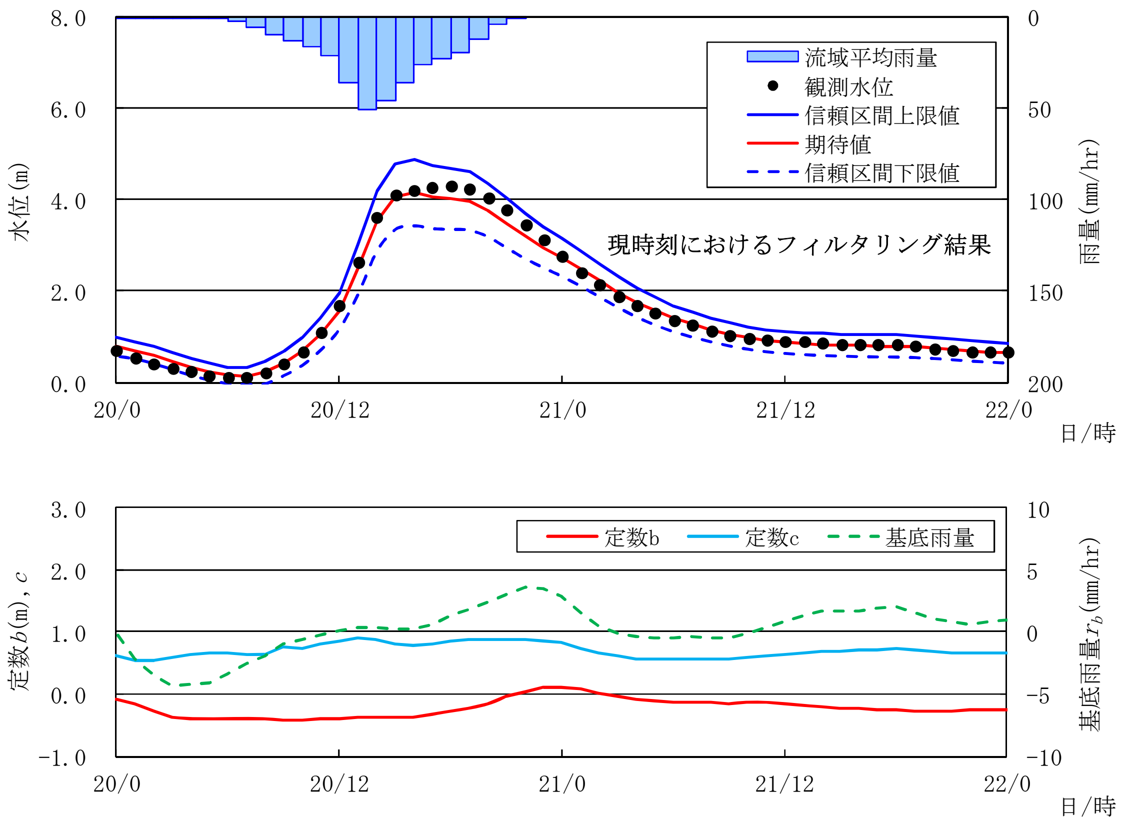


図 3.11　旧吉野川（大寺橋）への水位予測モデルの適用結果（2004 年 10 月・台風 23 号）

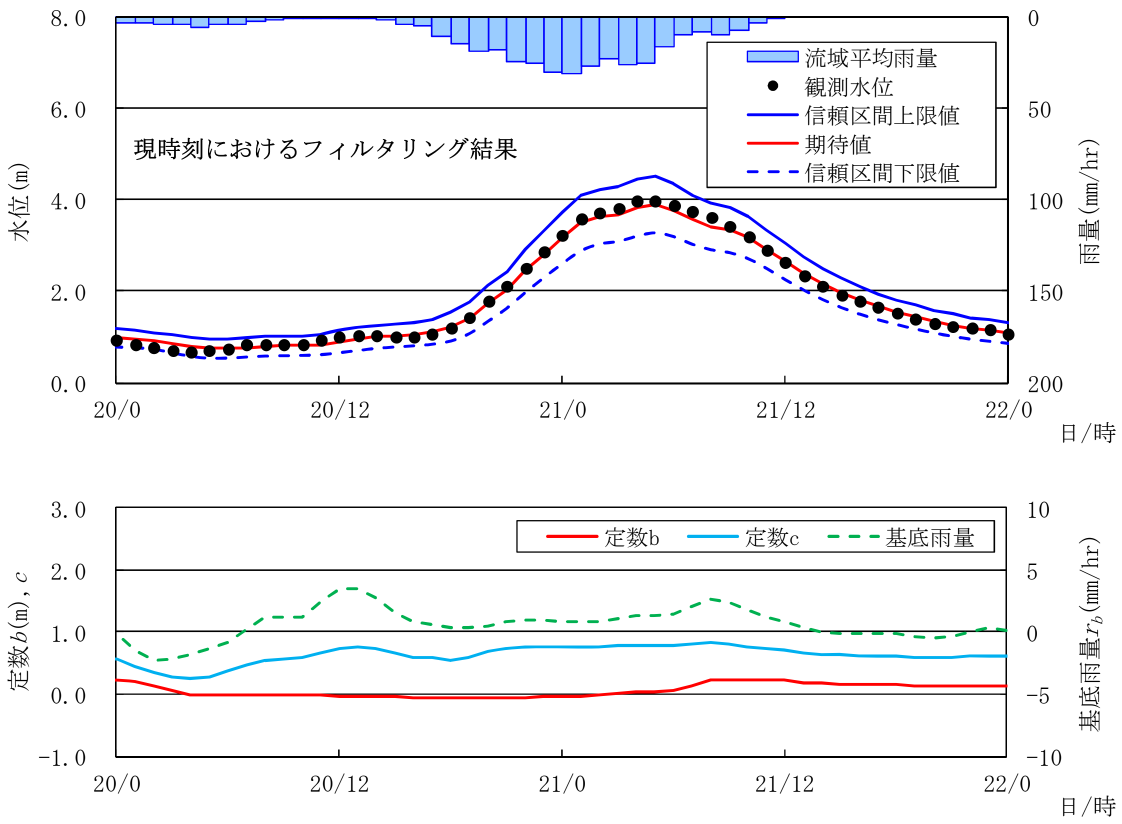


図 3.12　旧吉野川（大寺橋）への水位予測モデルの適用結果（2011 年 9 月・台風 15 号）

3.5.4　逆算流量の評価

流出係数 f を仮定することにより得られた H-Q 式から算定した流量を逆算流量とする．一方，流出係数 f を仮定して，貯留関数法により算定した流量を推定流量とする．図 3.9，図 3.10 のそれぞれ 4 段目の図には，土器川（祓川橋）におけるこれらの算定結果を比較したものを示す．図 3.9（2004 年 10 月・台風 23 号）では，逆算流量と推定流量が概ね一致しており，図 3.10（2011 年 9 月・台風 12 号）では，逆算流量と推定流量が乖離していることが分かる．これは，定数 b と r_b の調整においてその変化がより大きいことに起因し，乖離が大きくなると考えられる．

また，図 3.9，図 3.10 の洪水ともに，H-Q 換算流量と逆算流量・推定流量が乖離している．これは，H-Q 式は流量観測成果等から作成されたものであるが，これを正しいものとして換算に用いることは必ずしも適切でないことを示唆している．

逆算流量は，定数 b, c をフィルタリング手法により推定し，この結果を反映した H-Q 式から算定した流量であるため，一定の精度を担保しているものと考えられる．すなわち，不確実性の高い流量に対してではなく，水位に対してフィルタリングを行うことにより，H-Q 式の各定数を推定し流量を逆算する方法は，流量観測が十分に行われていない中小河川や，観測流量の精度に誤差が伴うような河川の洪水予測に，有効な手法であると推察される．

3.5.5　予測水位の精度検証

実際の洪水予測では，上記までのフィルタリング計算により得られた現時刻における状態量の期待値を用い，予測雨量をモデルに入力し，将来の水位を時々刻々予測することになる．そこで，実績雨量を予測雨量に見立てて入力し，1 時間毎に予測計算を行い，予測水位の精度を検証する．

土器川（祓川橋）における水位の予測結果を図 3.13，図 3.14，旧吉野川（大寺橋）における水位の予測結果を図 3.15，図 3.16 に示す．

これらの図より，観測水位が概ね 95%信頼区間に挟まれていることが分かるため，予測結果に大きな問題はないと評価できる．しかしながら，両河川・全対象洪水ともに，特に 3 時間先の予測水位の期待値における観測水位に対する誤差がやや大きくなっている．これは，貯留関数法で仮定した定数 k の与え方に課題を残していることが主な要因であると考えられる．

3.6　結　語

本章では，「水位予測モデル」を提示し，河床変動や背水の影響により洪水中に H-Q 式が変化する特性を有する河川に適用した結果を示した．本章で得られた成果は，以下のとおりである．

➢ 本章では，貯留関数法と H-Q 式を組み合わせて構築した「水位予測モデル」を提示した．このモデルは，演算過程で流量を使用しないことから，H-Q 換算流量と雨量が整合しない河川や流量観測成果がない水位観測所を対象にしたものである．河道高さを表す定数 b のシステム誤差を，水位が高くなると変動する特性を表現するために $H-b$ の関数で与えた．流出係数 f と H-Q 式の定数 a からなる定数 c は，Logit 関数で自己回帰モデルを仮定した．その結果，観測水位に対して予測モデルを同化（状態量を推定）できることが分かった．

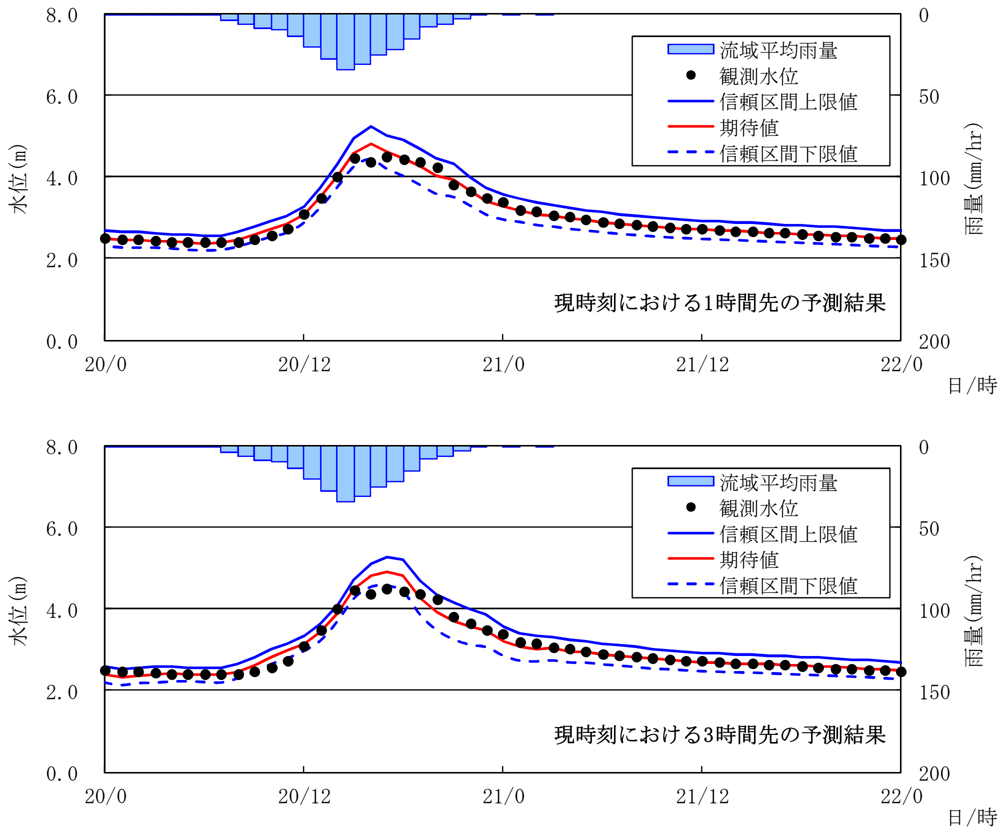


図 3.13　土器川（祓川橋）における 1・3 時間先の水位予測結果（2004 年 10 月・台風 23 号）

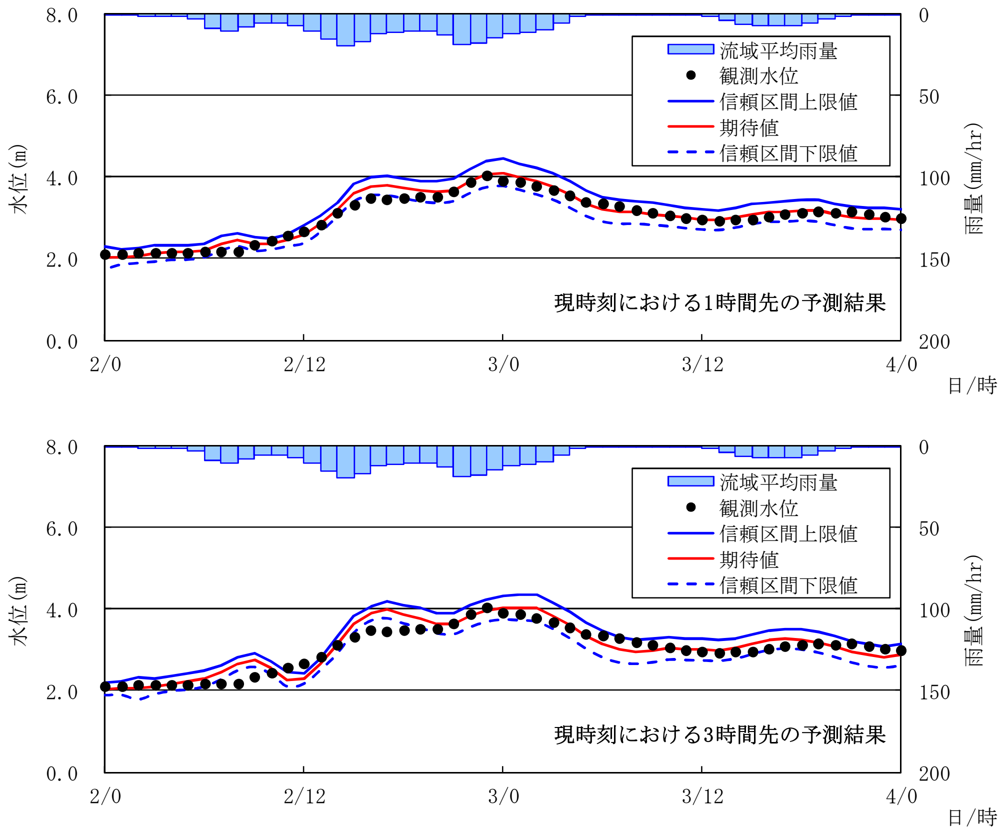


図 3.14　土器川（祓川橋）における 1・3 時間先の水位予測結果（2011 年 9 月・台風 12 号）

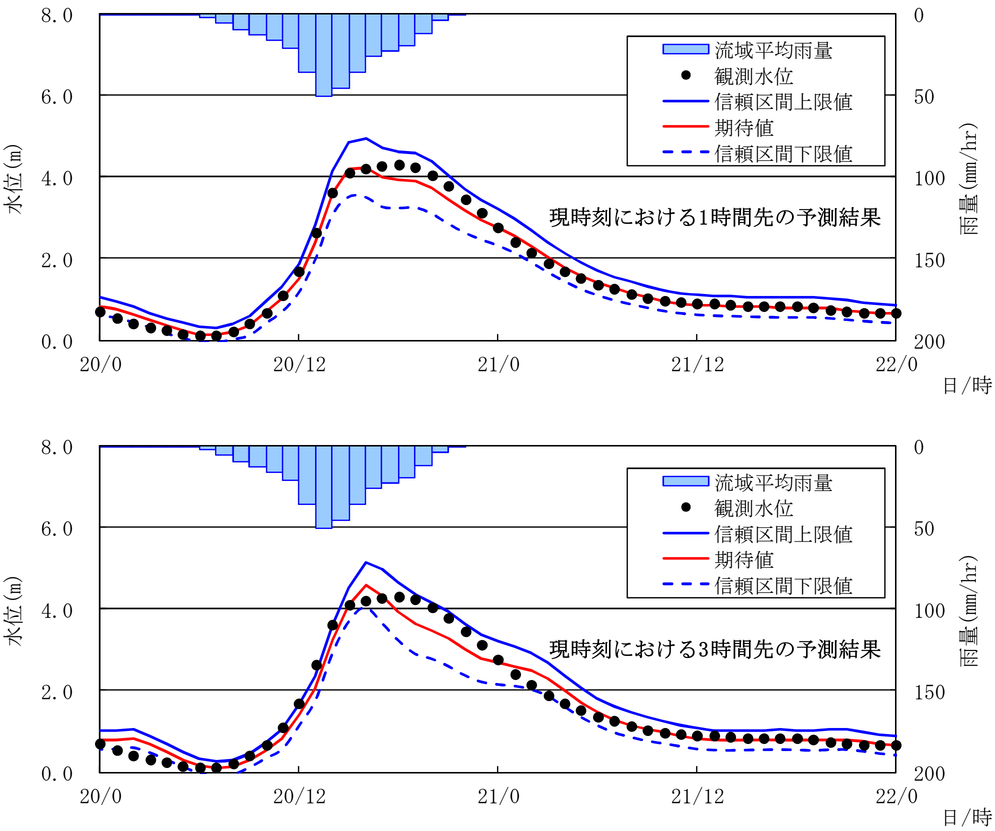


図 3.15　旧吉野川（大寺橋）における 1・3 時間先の水位予測結果（2004 年 10 月・台風 23 号）

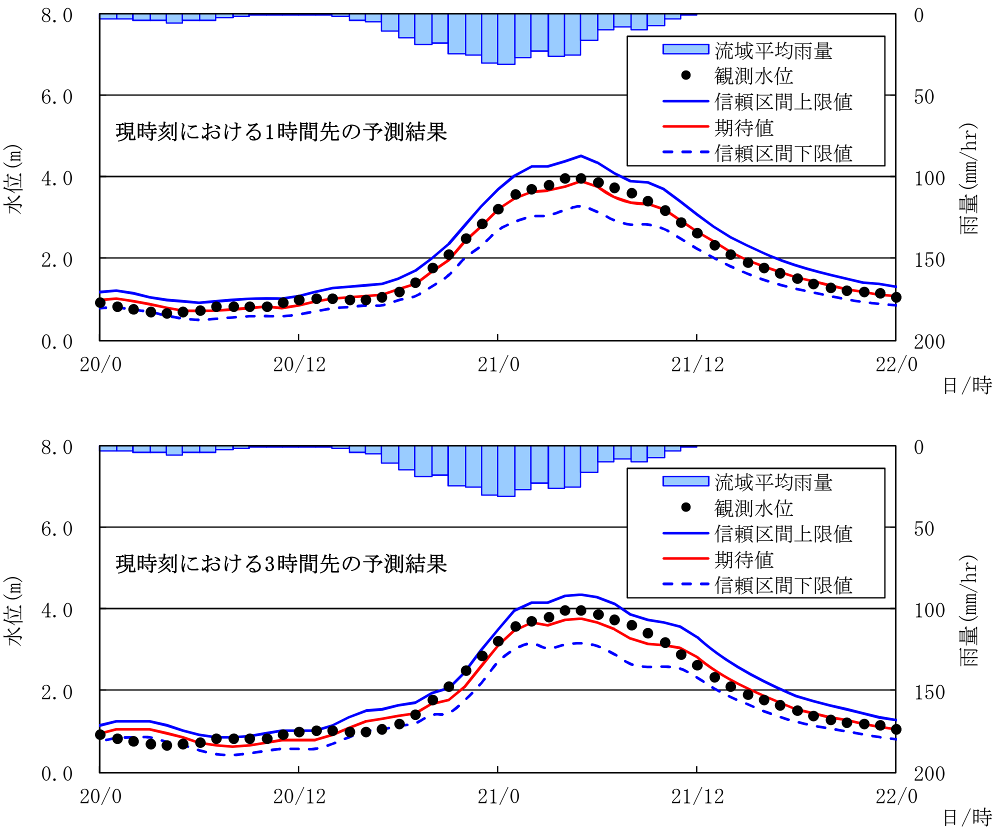


図 3.16　旧吉野川（大寺橋）における 1・3 時間先の水位予測結果（2011 年 9 月・台風 15 号）

- ➢ フィルタリング手法には，二次の統計量を近似する UKF を採用した．統計量については正規分布を仮定することにより得られる σ 点を使用したが，問題はなかった．この結果，UKF は水位予測モデルにおける定数（状態量）のフィルタリング手法として有効な手法の一つであることが確認された．
- ➢ 洪水予測においては，降雨誤差，モデル誤差，H-Q 式の変化等により予測誤差を伴うが，リアルタイムで運用しているときに，個別にこれらの誤差量を特定することは困難である．このような状況の下でも，流出係数 f と H-Q 式の定数 a からなる定数 c などの状態量をフィルタリングし，予測モデルを観測水位に対して同化できることが分かった．
- ➢ 提示した水位予測モデルは，雨量から直接水位を予測できる．さらに，実績雨量で行った水位の再現結果が良好で，フィルタリングによる状態量の調整がほとんど行われない場合には，逆算流量が概ね貯留関数法による推定流量と一致することが分かった．
- ➢ 貯留関数法の定数 k の設定に課題は残るものの，現時刻の状態量の推定結果から 3 時間先までの予測水位を算定した結果，観測水位が概ね 95%信頼区間に挟まれており，本章で提示した水位予測モデルの適用性は高いことが確認された．

参考文献

1) 吉野文雄，吉谷純一，堀内輝亮：分布型流出モデルの開発と実流域への適用，土木技術資料，32-10，pp.54-59，1990.

2) 国土交通省国土技術政策総合研究所：洪水予測システムの課題・改善事項とその対応策 http://www.nilim.go.jp/lab/rcg/newhp/checklist/kadai_taiou.pdf.

3) 辻倉裕喜，田中耕司，杉浦正之：Unscented Kalman Filter を用いた洪水到達時間の短い流域を対象にした水位予測システムの適用，河川技術論文集，Vol.19，pp.253-258，2013.

4) 木村俊晃：貯留関数による洪水流出追跡法の河川計画への応用に関する研究，京都大学博士論文，pp.189-221，1962.

5) 国土交通省水管理・国土保全局：国土交通省河川砂防技術基準　調査編，平成 26 年 4 月，第 3 章第 2 節-15

6) 国土交通省河川局：土器川水系河川整備基本方針土砂管理等に関する資料（案），2007.

7) 国土交通省河川局：吉野川水系河川整備基本方針吉野川水系流域及び河川の概要，2005.

8) http://www1.river.go.jp/.

9) 国土交通省水管理・国土保全局：国土交通省河川砂防技術基準　調査編，平成 26 年 4 月，第 3 章第 2 節-5

10) 国土交通省水管理・国土保全局：国土交通省河川砂防技術基準　調査編，平成 26 年 4 月，第 3 章第 2 節-14

11) A. H. Jazwinski：Stochastic Processes and Filtering Theory，*Academic Press*，1970.

12) 中村和幸，上野玄太，樋口知之：データ同化；その概念と計算アルゴリズム，統計数理，Vol.53/No.2，pp.211-229，2005.

13) G. Evensen : Data Assimilation; The Ensemble Kalman Filter，*Springer-Verlag*，2009.
14) 北川源四郎：モンテカルロ・フィルタおよび平滑化について，統計数理，Vol.44/No.1，pp.31-48，1996.
15) S. J. Julier and J. K. Uhlmann : A new extension of the Kalman Filter to nonlinear systems，*Proc. SPIE, Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition IV*，pp.182-193，1997.
16) R. E. Kalman：A new approach to liner filtering and prediction problems, *Trans. ASME, Journal of Basic Engineering*，Vol.82D/No.1，pp.34-45，1960.
17) 片山徹：非線形カルマンフィルタ，朝倉書店，pp.103-109，2011.
18) 足立修一，丸田一郎：カルマンフィルタの基礎，東京電機大学出版局，pp.168，2012.

第4章

貯留関数法に基づく洪水予測モデルにおけるパラメータ変動に関する解釈

4.1　概　説

流出現象を地下水流動，表面流等の物理的あるいは概念的な表現で記述している流出モデルが多様化されている．雨量と流出の応答関係を見ると，雨量が緩やかに増加するパターンと，集中豪雨などの急激に猛烈な降雨が発生するパターンでは，流出現象を表現する流出モデルは異なると考えられる．

第 3 章で，中小流域（300km^2 以下）程度の洪水予測をより簡易に行えるように，貯留関数法を使用した「水位予測モデル」の提案を行った．これは，水位流量関係式（以下，H-Q 式という）が洪水中に変化することによる水位予測の精度低下という問題に対して取り組んだ成果である．このモデルは，貯留関数法と現時刻の状態量を推定できる Unscented Kalman Filter [1)]（UKF）を組み合わせたもので，定数（状態量）を逐次フィルタリングして，その定数を用いて水位予測を行うものである [2),3)]．定数は流出係数と H-Q 式の定数で，流量観測資料がなくても水位予測ができる仕組みになっている．

UKF は近似的に最適解を求めるものであり，誤差分布がガウス分布とみなせる洪水予測では，UKF は Particle Filter [4)] と同程度の精度を持ち，演算時間が短く，状態量を推定するエンジンとしては実用的であることが分かっている [5)]．

しかしながら，洪水予測モデルには基礎式中の定数の総合化といった課題が依然残されている．H-Q 式に関する定数は流量観測値がなくても，水位観測地点の横断測量と簡単な水理解析で定数が決定され，実用的な側面からは有利な点も特徴である．一方で，貯留関数法の定数と流出係数については，実績ハイドログラフがあれば，一方を既知として，シミュレーションにより他方を解析できる．この手法は，ハイドログラフ全体を解析する一般的な流出解析手法であるものの，現時刻から数時間先までの部分的な最適定数を求めようとする洪水予測の視点・目的からは採用しにくい．

貯留関数法を用いた洪水予測では，流出係数の時間的な変化を自己回帰モデルで大まかに把握しつつも，妥当と考えられる貯留関数法の定数と流出係数の組み合わせに複数パターン存在することが明らかとなっている[2),3)]．このことは，貯留関数法の定数と流出係数の最適な組み合わせを客観的に求めることが困難であることを示している．そこで，洪水中の変動が相対的に小さいと考えられる貯留関数法の定数を総合化することによって，客観的に流出係数を最適化できると推察される[6)]．

本章では，逓減特性値（貯留関数法の定数と流出係数の組み合わせ）の推定式を求め，定数の変動幅を規定したフィルタリングによりデータ同化させる洪水予測モデルの適用性を検討する．まず, 4.2 では雨量に関係しない洪水の逓減部に着目して, 貯留関数法の定数について分析する．逓減特性を示すパラメータを逓減特性値と定義し，ダム流入量を用いて分析を行う．逓減特性値の分析については過去にも試みられている事例がある. 例えば, 高木[7)] は, 逓減特性値を加古川, 吉野川，由良川の流量資料から求めており，逓減特性値は同一流域においても洪水により異なることを指摘している．呉ら[8)] も同様な分析をしているが，流域面積，洪水により変化しており，逓減勾配は累加雨量が大きいほど小さくなっている．4.3 では流域面積と総雨量が逓減特性値を大きく変化させる要因であることを示し，逓減特性値の変化傾向を表現できる貯留関数法を提案する．4.4 では貯留関数法の定数，流出係数等を自己回帰モデルで表現し，UKF により観測値に同化させる洪水予測モデルを構築して，その適用性について評価する．4.5 では本章で得られた結果を要約して結語としている．

4.2　貯留関数法に基づく洪水予測モデルのパラメータの分析

4.2.1　流出係数 f と貯留関数法の定数 k の解釈

既往の貯留関数モデルには 2 種類がある．降雨に係数がかかるモデルと，流量に係数がかかるモデルがあり, ここでは各々を A, B モデルとする. これらの基礎式は式(4.1), (4.2)のとおりで, s は貯留高(mm)， f は流出係数， k, p は貯留関数の定数でモデルの違いによる水文学的な意味の違いを表現するためにサフィックス A, B を付けている． t は時間で， q_a は実際に観測された流量(mm/hr)である．

$$\frac{ds_A}{dt} = f_A r - q_a \qquad s_A = k_A q_a^p \tag{4.1}$$

$$\frac{ds_B}{dt} = r - q_a / f_B \qquad s_B = k_B (q_a / f_B)^p \tag{4.2}$$

式(4.1)と(4.2)を比較すると，両モデルが同等になる条件は式(4.3)である． f_A と f_B が等しく，定数 k_A と k_B は流出係数によって関係付けられ，さらに f は 1.0 以下であるため， k_A は k_B より小さくなる．

$$f = f_A = f_B \qquad k_A = f^{1-p} k_B \tag{4.3}$$

雨量を 0，t=0 のときの流量をq_{a0}として式(4.1)，(4.2)を積分することによりt時間後の流量は式(4.4), (4.5)で示される. A モデルにおける逓減勾配は, 貯留関数の定数によって決定される. 一方で，B モデルにおけるそれは，貯留関数の定数と流出係数によって決定される.

$$q_{a,t}^{p-1} = t\left(p-1\right)/\left(k_A p\right) + q_{a0}^{p-1} \tag{4.4}$$

$$q_{a,t}^{p-1} = t\left(p-1\right)/\left(k_B f^{1-p} p\right) + q_{a0}^{p-1} \tag{4.5}$$

p=1/2 を仮定すると，式(4.6)，(4.7)に示すとおり，A モデルでの逓減勾配は貯留関数の定数の逆数となり，B モデルでの逓減勾配は貯留関数の定数と流出係数の平方根の積の逆数となる.

$$q_{a,t}^{-1/2} = -t/k_A + q_{a0}^{-1/2} \tag{4.6}$$

$$q_{a,t}^{-1/2} = -t/\left(k_B f^{1/2}\right) + q_{a0}^{-1/2} \tag{4.7}$$

以上のとおりに，2 つのモデルにおける貯留関数法の定数と流出係数の関係を整理した結果を踏まえ，ダム流入量（ダム諸量データベース [9]）より入手）の逓減勾配を分析し，2 つのモデルの適用性を評価する．淀川水系青蓮寺ダム（流域面積 100km²）の 3 洪水について図 4.1 に示す.

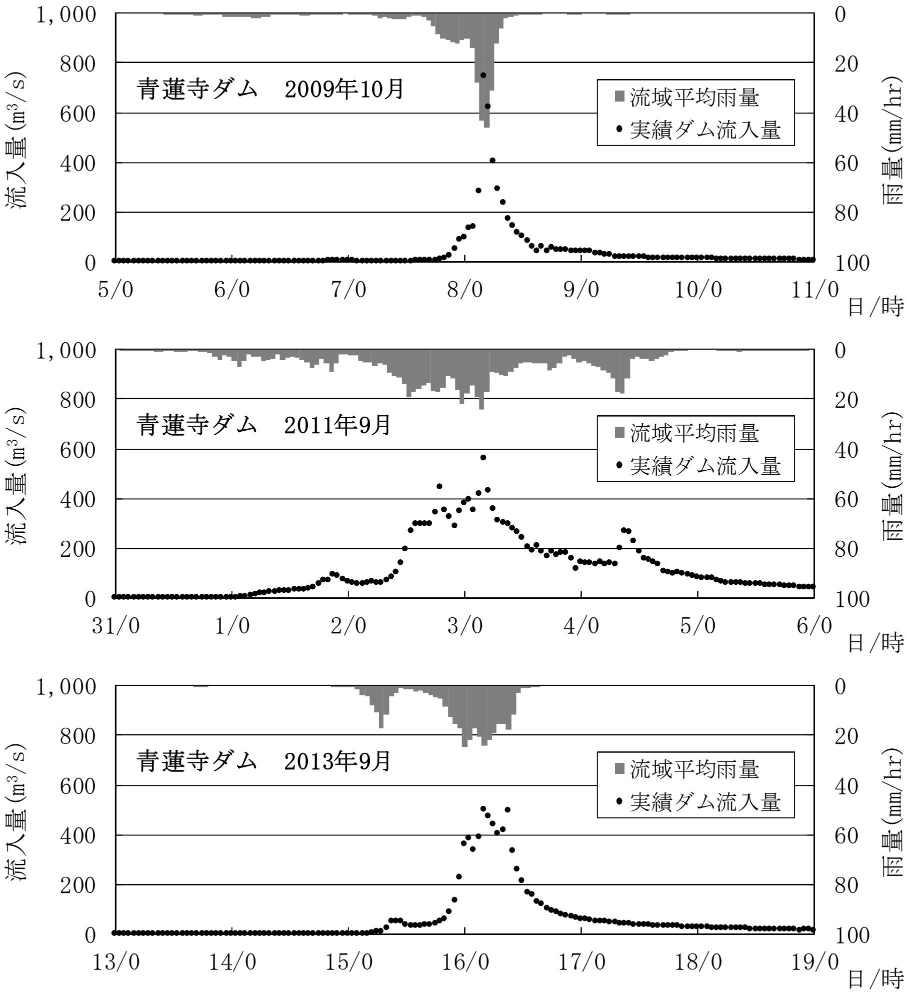


図 4.1　青蓮寺ダムの実績流入量

2009 年 10 月洪水は短時間の豪雨で立ち上がりが急な洪水である．一方，2011 年 9 月洪水は降雨が 5 日にわたり継続し，総雨量が 700mm に達した洪水である．また，2013 年 9 月洪水は近畿地方を襲来した台風 18 号がもたらした豪雨である．

これらの特徴の異なる洪水波形に対して，流量の平方根の逆数の時間変化から逓減勾配を算定した結果を図 4.2 に示す．この結果から，逓減勾配は洪水により異なることが分かる．

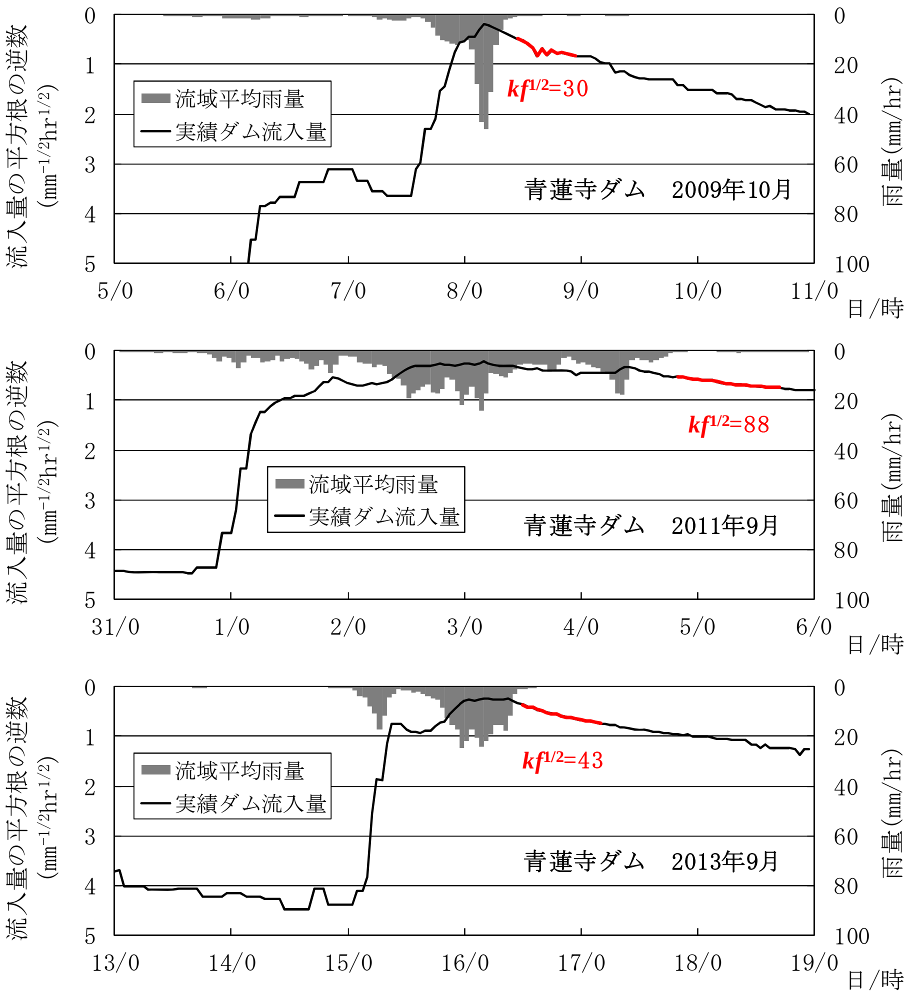


図 4.2　青蓮寺ダムの実績流入量の逓減勾配

さらに，愛媛県の肱川水系の野村ダム（流域面積 168km²）の解析例を図 4.3，図 4.4 に示す．2011 年 9 月洪水を対象としており，3～4 個の小さなピークの後に大きなピークが発生している．青蓮寺ダムの流入量の変化に対する解釈と同様に，逓減勾配は雨量の増加とともに小さくなる．

このように，逓減勾配が雨量の増加とともに変化する場合には，流出係数で勾配を調整できる B モデルの方が，柔軟性があると考える．また，流量の平方根の逆数の時間変化を，便宜上直線近似できると仮定すれば，図 4.5 に示す洪水予測モデルにより流量を予測することが可能であると考える．洪水の逓減勾配を決定するパラメータとし $kf^{1/2}$ (mm$^{-1/2}$hr$^{1/2}$)を逓減特性値と定義すると，逓減特性値は降雨パターンにより変化すると推測されるので，逐次，逓減特性値を推定するフィルタリング手法を洪水予測モデルに組み込む必要があると推察される．

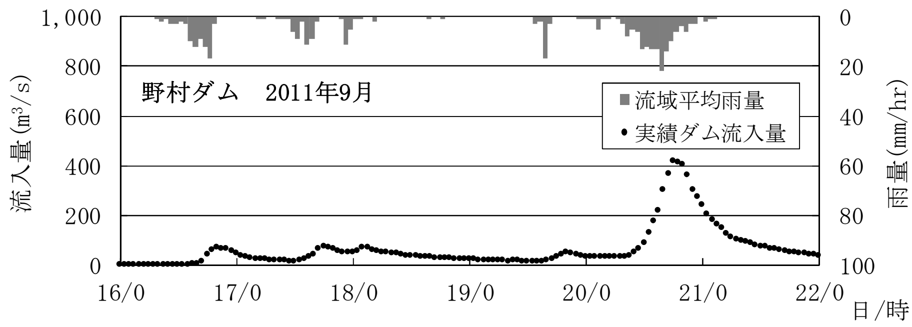


図 4.3　野村ダムの実績流入量

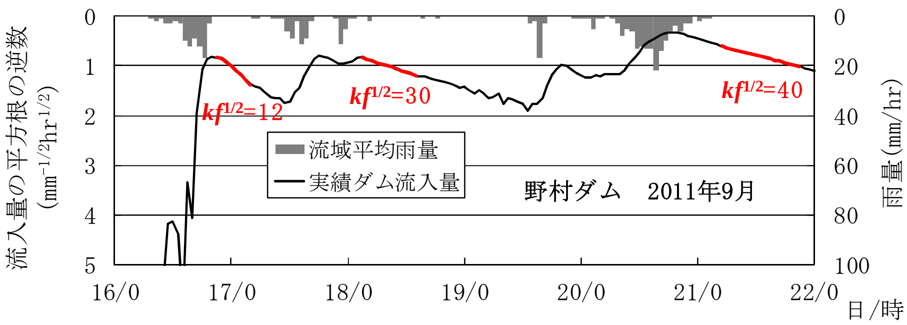


図 4.4　野村ダムの実績流入量の逓減勾配

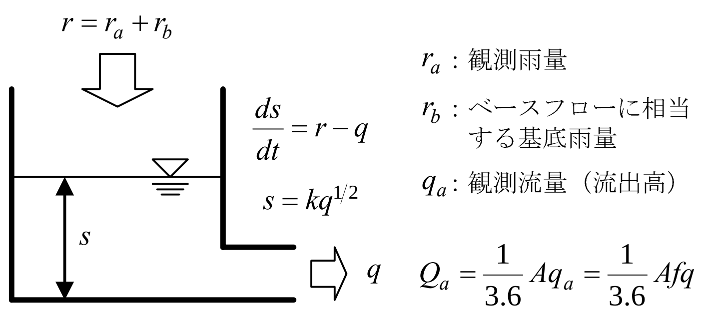


図 4.5　貯留関数法に基づく洪水予測モデルの概念図

4.2.2　貯留関数法の定数 p の解釈

第 3 章の水位予測モデル [2),3)] では，p =1/2 を採用している．これは，H-Q 式を水位の二次式とするとパラメータを 1 つ減らすことができるために便宜的に採用した値である．雨量が一定と仮定すると，水位は双曲線関数等で表現でき，解析が容易となる．

既往研究では，Manning 則を想定して p =3/5 と仮定した事例 [10)] が多い．そこで，便宜的に採用した p =1/2 と 3/5 で解析結果にどの程度の差が生じるか，無降雨期に着目して解析を行う．降雨終了後の逓減勾配を同一とした場合と流量の半減期間を同一にした場合の p =1/2 と 3/5 の定数 k を解析する．降雨終了直前の流出高は，数年に 1 回程度発生する洪水を 10mm/hr 程度と想定し，50mm/hr を超過することは稀であるとして，10, 30, 50mm/hr と設定して解析を行う．

解析結果を図 4.6 に示す．p =3/5 の場合の貯留関数法の定数 k は p =1/2 の場合の 1.45～1.75 程度で平均 1.6 倍すれば p =1/2 とほぼ同等の流量の逓減曲線が得られることが分かる．実用的には p =1/2 と 3/5 に大きな差はなく，解析結果が初等関数で表現できることを重視すれば p =1/2 でも特に問題はない．

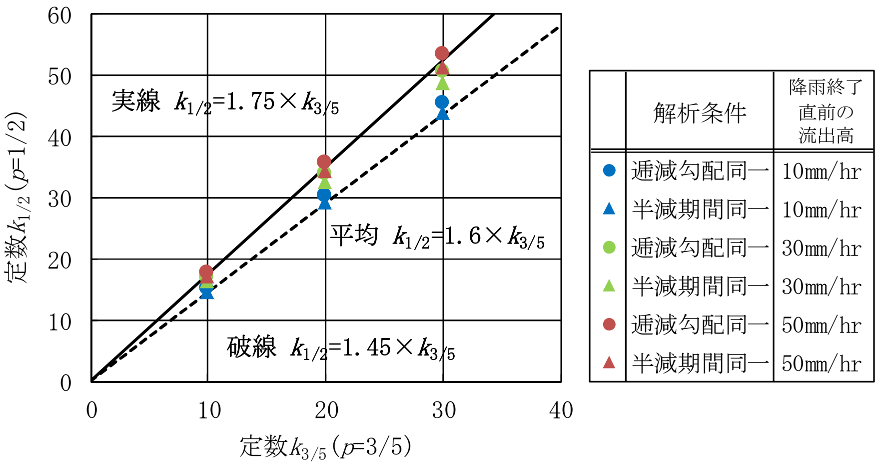


図 4.6　p =1/2 と 3/5 の場合の定数 k の解析結果

4.3　洪水予測モデルに用いる貯留関数法の定数の推定

4.3.1　洪水予測モデルの概要

第 3 章では水位予測モデルの基礎式を示しているが，本章ではダムの流入量を対象にしているため，図 4.5 に示すとおり，流量予測モデルとして書き直した．

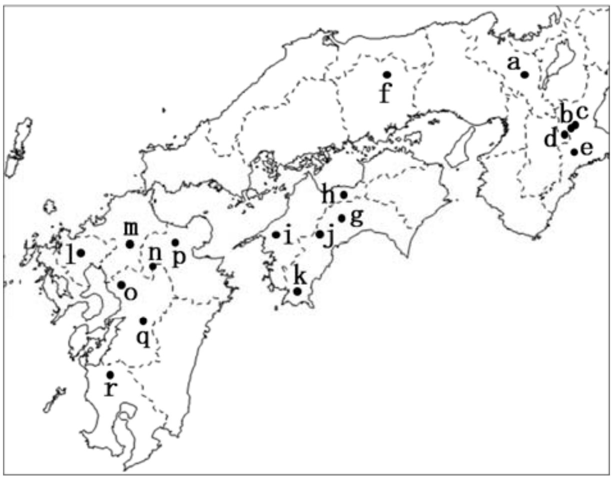
4.3.2　ベースフローが 0 に近い場合の逓減特性値 $kf^{1/2}$

洪水流量に対するベースフローの値は十分に小さいとし，式(4.7)を適用して逓減勾配を求める．対象とするダムは図 4.7 に示す 18 ダムとした．実績流入量はダム諸量データベース [9] を使用し，雨量は解析雨量 [11] を使用した．

図 4.8 に逓減特性値を整理した結果を示している．これによれば，特性値が全体にばらつき，流域面積との関係が明確ではない．特に大きい 2 つの逓減特性値は，比奈知ダムと青蓮寺ダムの 2011 年 9 月の台風 12 号（紀伊半島豪雨）である．

4.3.3　ベースフローを考慮した場合の逓減特性値 $kf^{1/2}$

2011 年 9 月の台風 12 号のような長期間降雨が継続した洪水では，時間的変化の少ない中間流と地下水流の影響が無視できないと考えられる．例えば，比奈知ダムと青蓮寺ダムの逓減特性値は，図 4.8 に示すように概ね 90 という値を得た．このような長時間の降雨ではベースフローが無視できないとし，図 4.5 に示す基礎式を時間積分して，$q_b = fr_b$ とすると式(4.8)が得られる．この式からベースフローを考慮した逓減特性値を分析する．



a ： 日吉ダム	j ： 大渡ダム
b ： 青蓮寺ダム	k ： 中筋川ダム
c ： 比奈知ダム	l ： 厳木ダム
d ： 室生ダム	m ： 寺内ダム
e ： 蓮ダム	n ： 下筌ダム
f ： 苫田ダム	o ： 竜門ダム
g ： 早明浦ダム	p ： 耶馬渓ダム
h ： 富郷ダム	q ： 緑川ダム
i ： 野村ダム	r ： 鶴田ダム

図 4.7　対象としたダムの位置図

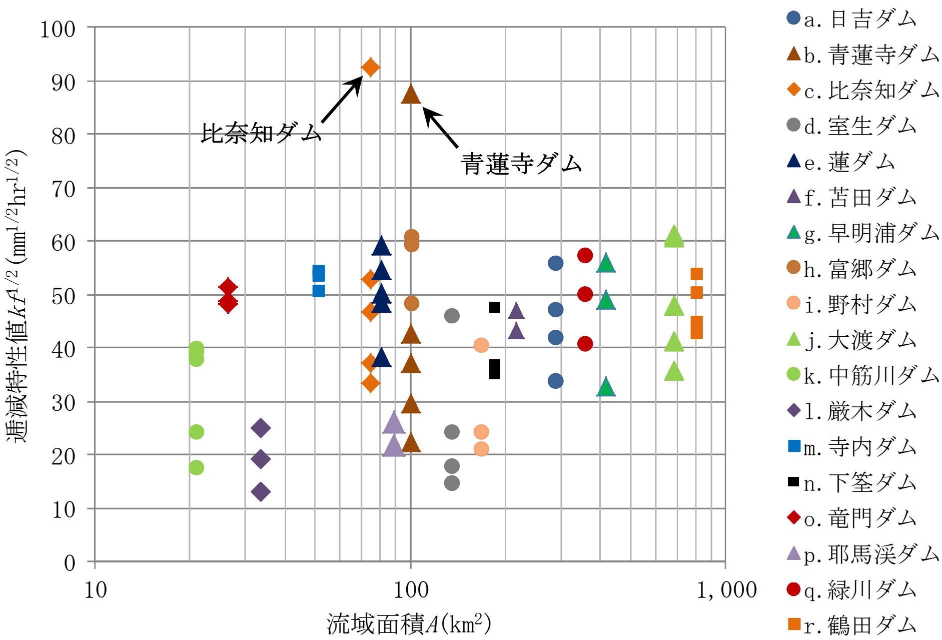


図 4.8　ベースフローが 0 に近いとした場合の流域面積と逓減特性値 $kf^{1/2}$ との関係

$$\coth^{-1}\left(\frac{q_{a,t}}{q_b}\right)^{1/2} = \frac{q_b^{1/2}}{kf^{1/2}}t + \coth^{-1}\left(\frac{q_{a0}}{q_b}\right)^{1/2} \tag{4.8}$$

ここで，ベースフローの値の設定方法が問題となる．実績流入量とベースフローの比 q_a/q_b で逓減特性値との関係を作成すると，図 4.9 のとおりになる．比較的大きい洪水では，q_a/q_b =30～300 程度で，特性値が流域面積の関数となることが考えられる．そこで，面積が 70km² 以下の場合は図 4.9 の左図を想定し，ピーク後 18～24 時間後の流量の 1/2 をベースフローとする．面積が 300km² 以上の場合は右図を想定し，36～42 時間後の流量の 1/2 をベースフローとする．それらの間の場合は中央の図を想定して，24～36 時間後の流量の 1/2 をベースフローとする．

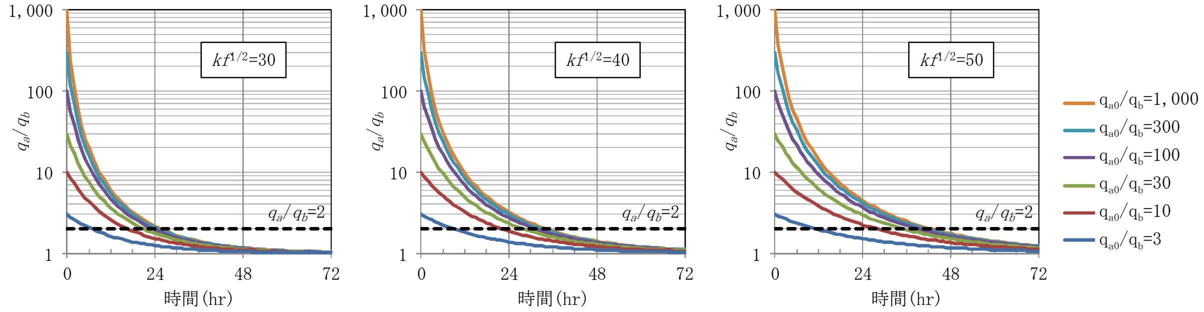


図 4.9　逓減特性値 $kf^{1/2}$ と逓減時間の関係

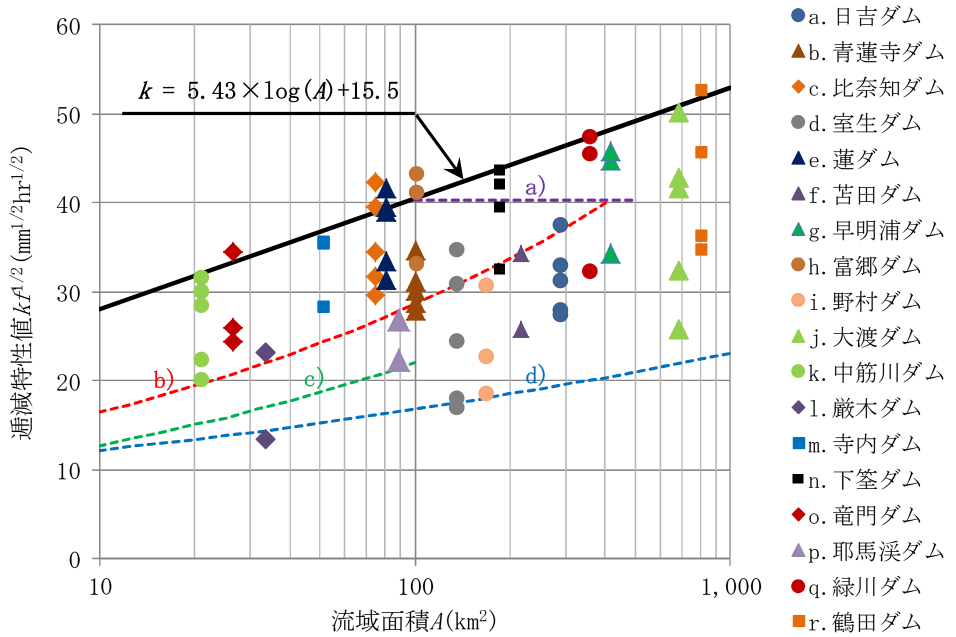


図 4.10　ベースフローを考慮した場合の流域面積と逓減特性値 $kf^{1/2}$ との関係

逓減特性値の解析結果は図 4.10 のとおりで，ばらつきの上限値が f =1.0 を満たす逓減特性値と推定される．式(4.9)は，上限の値を通過する直線を最小自乗法で求めたものである．

$$kf^{1/2} = k = 5.43\log A + 15.5 \tag{4.9}$$

これが本研究で総合化した貯留関数法の定数 k と流域面積の関係式である．

図 4.10 中の a)～d)は，貯留関数法の定数 k の総合化に関する既往研究成果である．既往研究成果を本研究と比較した結果を以下に示す．

(1)　木村の総合貯留関数（図 4.10 中の曲線 a)，B モデル）

木村 [12] は，流域面積が 100～500km² の河川を対象に式(4.10)を導出している．

$$k = 40.3 \quad , \quad p = 1/2 \tag{4.10}$$

総合貯留関数法では流出係数は面積にかかる係数としている．fA が非浸透域，$(1-f)A$ が浸透域の面積で，浸透域では累加雨量が飽和雨量 R_{sa} に達した後に流出するものとしている．洪水期間中の f は解析流量にかかる係数ではないが，累加雨量が飽和雨量 R_{sa} に達した後は f =1.0 の場合の結果とみなすことができ，木村の貯留関数の定数と式(4.9)は概ね同じとなる．

(2)　園山らの損失を考慮したモデル（図 4.10 中の曲線 b)，B モデル）

園山ら [13] は，損失 q_l が表面流 q_s に比例するものとした二価の貯留関数として，式(4.11)を提案している．第 2 項が二価性を示す項であり，洪水の立ち上がり部では貯留量に与える影響は大きいが，洪水の逓減部では影響は小さいと考えられる．そこで，第 1 項のみを考慮し，損失を含めた全流出量を $q = q_l + q_s$ とすると，B モデルと同様の式(4.12)が導出される．

$$s = k_{11} q_s^{3/5} + k_{12} \frac{d}{dt}\left(q_s^{0.4648}\right) \qquad k_{11} = c_{11} A^{0.24} \qquad q_l = c_{13} q_s \tag{4.11}$$

$$s = kq^{3/5} = \frac{c_{11}}{(1+c_{13})^{3/5}} A^{0.24} q^{3/5} \tag{4.12}$$

ここに，k_{11}，k_{12}，c_{11}，c_{13} は定数で，対象にしたダム流入量から同定した結果，c_{11}=11.081，c_{13}=1.84513 が得られ，これから貯留関数法の定数を推定すると式(4.13)となる．式(4.13)を図 4.10 に示すが，p =3/5 を 1/2 に変換するために，図 4.6 より貯留関数法の定数を 1.6 倍している．なお，流域面積の適用範囲は，論文 [13] 中のグラフから 400km² 以下と推測される．

$$k = 5.92 A^{0.24} \quad , \quad p = 3/5 \tag{4.13}$$

式(4.9)が貯留関数の定数の最大値とみなすと曲線 b)が平均的な推定値とみなすこともでき，逓減特性値の平均値の推定式として利用できる可能性がある．

(3)　星らの有効雨量を用いたモデル（図 4.10 中の曲線 c)，A モデル）

星ら [14] は，流域面積が 100km² 以下の小流域を対象とし，式(4.14)を導出している．式(4.3)を想定すると，式(4.9)の推定値より小さくなることは容易に推測できる．また，論文 [14] では信頼幅を示しており，95%値が 8.22，5%値が 1.87 で，0.4（=1.87/4.57）～1.8（=8.22/4.57）である．図 4.10 に記載はしないが，式(4.14)の 1.8 倍は流域面積 100km² 付近では式(4.9)と概ね一致しており，A，B モデルの最大は同じであるから，本研究の結果と整合する．

$$k = 4.57 A^{0.24} \quad , \quad p = 3/5 \tag{4.14}$$

(4)　永井らの有効雨量を用いたモデル（図 4.10 中の曲線 d)，A モデル）

永井ら [10] は，流域面積が 0.245～1,426km² の山地流域を対象に，式(4.15)を導出している．5.5 を平均値とすると，論文 [10] 中の貯留関数の定数のばらつきから，信頼区間は平均値の 0.6～2 倍と推定され，星ら [14] の A モデルの研究成果と概ね一致し，本研究の結果とも整合する．

$$k = 5.5 A^{0.14} \quad , \quad p = 3/5 \tag{4.15}$$

4.3.4　逓減特性値のばらつきの要因

前項の分析から，図 4.10 における逓減特性値のばらつきの要因の一つに累加雨量との関係があると推測できる．貯留関数の定数を式(4.9)として累加雨量と流出係数の関係を示すと図 4.11 のとおりであり，推測どおりとなる．

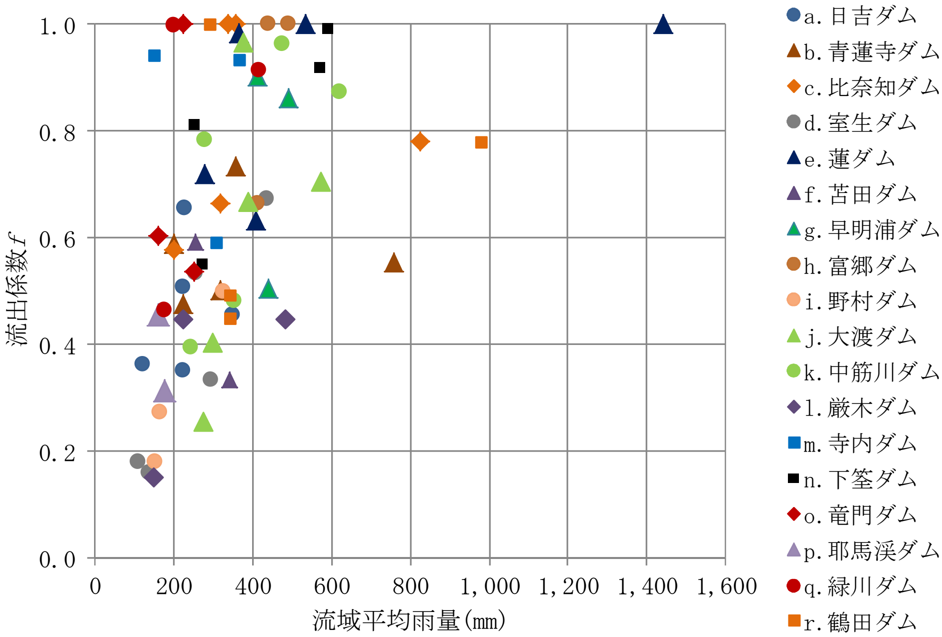


図 4.11　逓減特性値を算定した時刻までの累加雨量と流出係数の関係

4.4　フィルタリングによる定数変化の分析

図 4.5 の貯留関数法の定数 k，流出係数 f および基底雨量 r_b を自己回帰モデルで表現し，UKF（第 2 章を参照）による観測値に同化させる手法を組み込んだ洪水予測モデルを構築する．なお，予測計算では，雨量誤差が予測精度に与える影響を除くために，実績雨量を使用する．

4.4.1　洪水予測モデルの基礎式

図 4.5 の貯留関数法の基礎式は式(4.16)～(4.18)に示すとおりである．

$$\frac{ds_t}{dt} = r_t - q_t \tag{4.16}$$

$$s_t = k_t q_t^{1/2} \tag{4.17}$$

$$q_{a,t} = f_t q_t \tag{4.18}$$

ここに，s_t：貯留高(mm)，t：時間(hr)，r_t：貯留関数モデルに直接入力する降雨量(mm/hr)，q_t：流出高(mm)，k_t：貯留関数モデルの定数，$q_{a,t}$：観測流出高(mm)，f_t：流出係数である．

式(4.16)と式(4.17)から式(4.19)の左端式が得られ，これを展開すると式(4.19)の右端式となる．

$$\frac{ds_t}{dt} = r_t - \frac{s_t^2}{k_t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_t - \dfrac{s_t^2}{k_t^2}} \frac{ds_t}{dt} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_t} \frac{1}{1 - \dfrac{s_t^2}{r_t k_t^2}} \frac{ds_t}{dt} = 1 \tag{4.19}$$

$\dfrac{s_t}{r_t^{1/2} k_t} = \tanh x$ とおくと，$\dfrac{ds_t}{r_t^{1/2} k_t} = \dfrac{dx}{\cosh^2 x}$ であり，$1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ と上式に代入すると，

$$\frac{k_t}{r_t^{1/2}} \frac{dx}{dt} = 1 \tag{4.20}$$

を得る．式(4.20)の両辺を積分して，定数を ξ とおくと，

$$x = \frac{r_t^{1/2}}{k_t} t + \xi \tag{4.21}$$

となり，$\dfrac{s_t}{r_t^{1/2} k_t} = \tanh x$ から式(4.22)の左式とし，$s_t = k_t q_t^{1/2}$ から式(4.22)の右式を得る．

$$\frac{s_t}{r_t^{1/2} k_t} = \tanh\left(\frac{r_t^{1/2}}{k_t} t + \xi \right) \quad \Rightarrow \quad q_t^{1/2} = r_t^{1/2} \tanh\left(\frac{r_t^{1/2}}{k_t} t + \xi \right) \tag{4.22}$$

上式の両辺を 2 乗して式(4.23)の左式とし，$q_{a,t} = f_t q_t$ から式(4.23)の右式を得る．

$$q_t = r_t \tanh^2\left(\frac{r_t^{1/2}}{k_t} t + \xi \right) \quad \Rightarrow \quad q_{a,t} = f_t r_t \tanh^2\left(\frac{r_t^{1/2}}{k_t} t + \xi \right) \tag{4.23}$$

ここで，$t = \Delta t$ のときの流量を $q_{a,t}$ と置き換えれば,

$$q_{a,t} = f_t r_t \tanh^2\left(\frac{r_t^{1/2}}{k_t} \Delta t + \xi \right) \tag{4.24}$$

を得る. また, t=0 のときの流量を q_{a0} と置き換え, この逆関数をとれば下式のとおり ξ を得る.

$$q_{a0} = f_t r_t \tanh^2(\xi) \quad \Rightarrow \quad \xi = \tanh^{-1}\left(q_{a0}^{1/2} / f_t^{1/2} / r_t^{1/2} \right) \tag{4.25}$$

式(4.24)，(4.25)を洪水予測モデルの基礎式とする．モデルに入力する降雨量は落水線を利用して時間遅れを考慮したものであり，基礎式は降雨量を流量に変換することのみを示している．

洪水予測で現時刻の流量を再現し，数時間先の流量を予測することを想定すると，流出係数 f は現時刻の流量を再現する役割を果たす．そのとき，貯留関数法の定数 k は予測流量の上昇勾配を調整する役割を担う．このように，洪水の逓減部では，逓減特性値が支配的であるが，洪水の立ち上がり部では，流出係数と貯留関数法の定数が個別の役割を持つことになる．したがって，流出係数と貯留関数法の定数を個別に調整することにより，流量予測の精度向上が期待できると考え，次項以降の検討を行う．

4.4.2　定数の自己回帰モデル

流出係数 f，基底雨量 r_b，および貯留関数法の定数 k を式(4.26)～(4.28)に示すとおり簡便な自己回帰モデルで表現し，UKF を用いたフィルタリングにより最適値を推定することとする．次数を 1 としており，この場合には，自己回帰係数は自己相関係数である．流出係数については，0～1 の間で変化するパラメータであるため，自己回帰モデルに $f^{1/2}$ の Logit 関数を使用する．基底雨量 r_b については，降雨発生時において雨量を調整する機能も担うため，マイナス値に変化することも許容する．貯留関数法の定数については，常に正値となることから，自己回帰モデルを k_t/k （k は式(4.9)より算定）の対数で表し，雨量強度の影響を受けることを表現するために $-ar_t$ 項を追加した．この項により，雨量強度が大きい場合には貯留関数法の定数が小さくなる傾向を表現する．

$$\mathrm{logit}\left(f_t^{1/2}\right)=\alpha_f \mathrm{logit}\left(f_{t-1}^{1/2}\right)+e_f \tag{4.26}$$

$$r_{b,t}=\alpha_r r_{b,t-1}+e_r \tag{4.27}$$

$$\log\left(k_t/k\right)=\alpha_k \log\left(k_{t-1}/k\right)-ar_t+e_k \tag{4.28}$$

ここに，サフィックス t は時間変化することを示し，α_f，α_r，α_k は自己回帰係数ですべて 0.8 とする．a は試算の結果 0.005mm^{-1}hr とした．また，e_f，e_r，e_k は定数と無相関の誤差項とし，誤差分布に正規分布を仮定する．

4.4.3　フィルタリング手法の適用

(1)　フィルタの基礎式の整理

時間更新ステップ式と観測値更新ステップ式からなる．

時間更新ステップ式は式(4.26)～(4.28)で表され，$x_{t-1/t-1}$，$x_{t/t-1}$ を状態量ベクトルとして，式(4.29)のとおり簡易な線形式で表現できる．定数の状態量は式(4.30)で表され，係数行列は式(4.31)となる．q_n はシステムノイズである．また，サフィックス $_{t-1/t-1}$ は 1 ステップ前の状態量を示し，$_{t/t-1}$ は 1 ステップ前の情報から時間更新した結果を示している．なお，$_{t/t}$ は現時刻における観測値更新した結果であることを示す．

$$x_{t/t-1}=Ax_{t-1/t-1}+q_n \tag{4.29}$$

$$x_{t/t-1}^{\mathrm{T}}=\left[\mathrm{logit}\left(f_{t/t-1}^{1/2}\right)\quad r_{bt/t-1}\quad \log\left(k_{t/t-1}/k\right)\right]^{\mathrm{T}} \tag{4.30}$$

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_f & 0 & 0\\ 0 & \alpha_r & 0\\ 0 & 0 & \alpha_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0.8 & 0\\ 0 & 0 & 0.8\end{bmatrix} \tag{4.31}$$

観測値更新ステップ式は，式(4.32)で表現することができ，$F_t\left(x_{t/t-1}\right)$ は式(4.24)，(4.25)を示している．$y_{t/t-1}$ は観測推定値，r_n は観測ノイズである．

$$y_{t/t-1}=F_t\left(x_{t/t-1}\right)+r_n \tag{4.32}$$

(2)　システムノイズと観測ノイズの設定

システムノイズについては，後述の洪水予測モデルを運用した結果により，$\mathrm{logit}\left(f^{1/2}\right)$ のノイズは 2.0 と設定する．r_b のノイズは 2.0mm/hr とし，$\log\left(k_t/k\right)$ のノイズは 0.05 とする．システムノイズの分散を式(4.33)に示す．

$$Q_n = \begin{bmatrix} 2.0\times 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0\times 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05\times 0.05 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

観測ノイズについても，後述の洪水予測モデルの運用結果から，青蓮寺ダムと竜門ダムの流入量の平方根に対し 0.08mm$^{1/2}$hr$^{-1/2}$，鶴田ダムの流入量の平方根に対し 0.04mm$^{1/2}$hr$^{-1/2}$ と設定する．観測ノイズの分散を式(4.34)，(4.35)に示す．

$$R_n = 0.08^2 \quad \cdot\cdot\cdot\quad \text{青蓮寺ダム，竜門ダムの流入量の平方根に対する分散} \tag{4.34}$$

$$R_n = 0.04^2 \quad \cdot\cdot\cdot\quad \text{鶴田ダムの流入量の平方根に対する分散} \tag{4.35}$$

4.4.4　流出係数や貯留関数法の定数等の変化

青蓮寺ダムでは 2009 年 10 月上旬洪水を，竜門ダムでは 2006 年 7 月上旬洪水，鶴田ダムでは 2006 年 7 月下旬洪水を対象とし，流出係数や貯留関数法の定数等の時間変化を解析した結果を図 4.12～図 4.14 のそれぞれ 1～3 段目の図に示す．同図から，式(4.28)の右辺第 2 項により，貯留関数法の定数 k は流量が急増するときに小さくなり降雨がピーク時を過ぎると大きくなることが分かる．また，洪水の逓減とともに流出係数 f が小さくなり，逓減特性値 $kf^{1/2}$ は降雨の終了後ほぼ一定となっており，上述の分析結果と一致する．

4.4.5　予測流量の精度検証

青蓮寺ダム，竜門ダム，および鶴田ダムにおいて，それぞれ上述と同一の洪水を対象として，現時刻から 3 時間先の流量を予測した結果を図 4.12～図 4.14 のそれぞれ 4 段目の図に示す．予測結果は実績流入量と概ね適合しており，式(4.9)および予測手法は妥当であると判断できる．

4.5　結　語

本章では，流出係数と貯留関数法の定数からなる逓減特性値を分析して，この変化傾向を表現できる貯留関数法を提案しその適用性を評価した．本章で得られた成果は，以下のとおりである．

- 実績のダム流入量から，貯留関数法の定数の推定式として式(4.9)を求めた．この推定式は，降雨終了後の洪水逓減部で分析した結果である．面積の異なる流域の貯留関数法に基づく洪水予測モデルに推定式を適用した結果，流入量予測結果の適合性が高いことが示され，貯留関数法の定数の変動幅を規定するものとして式(4.9)を利用できることが確認できた．

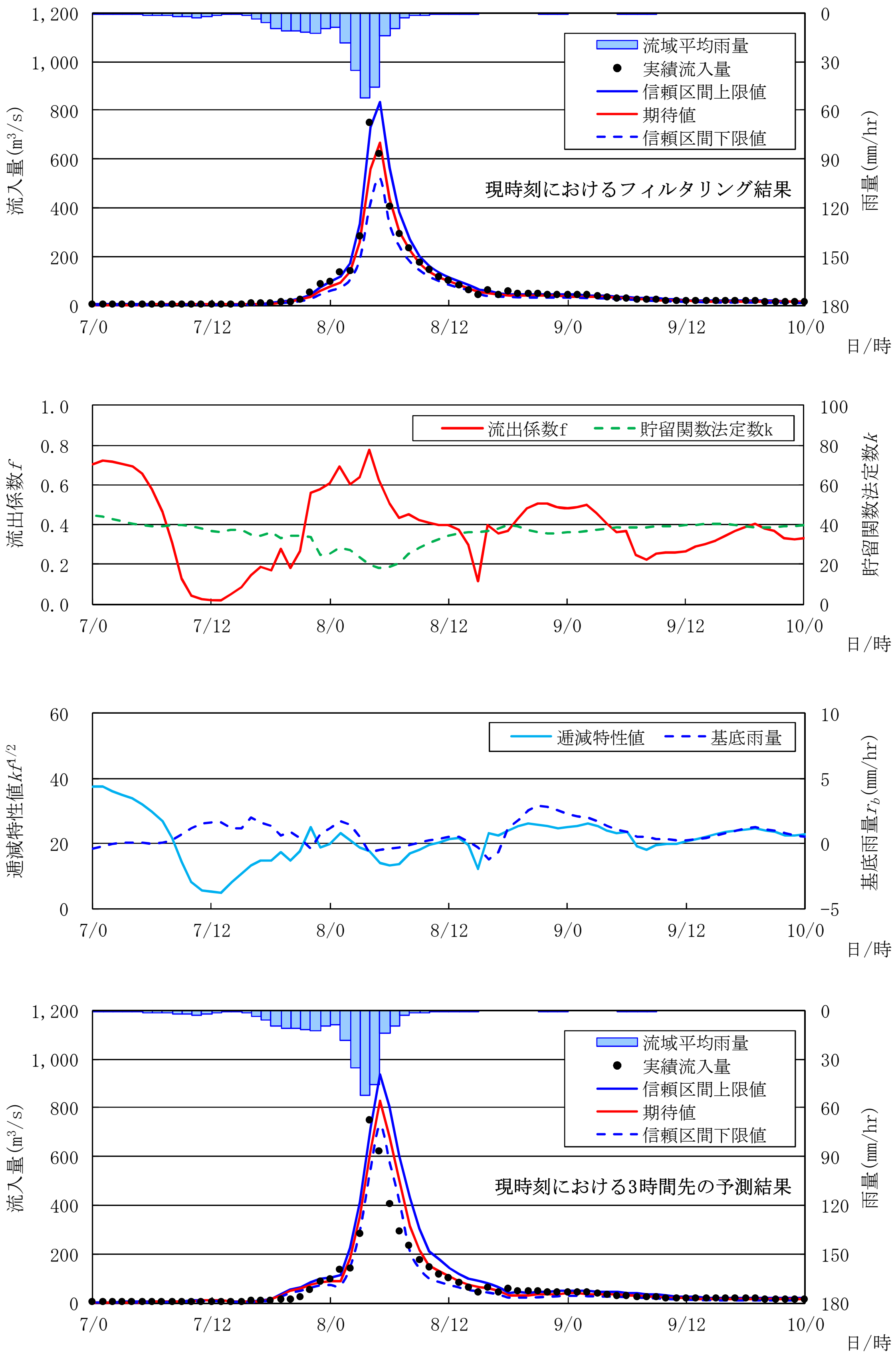


図 4.12　青蓮寺ダム（C.A.=100km^2）への流入量予測モデルの適用結果（2009 年 10 月洪水）

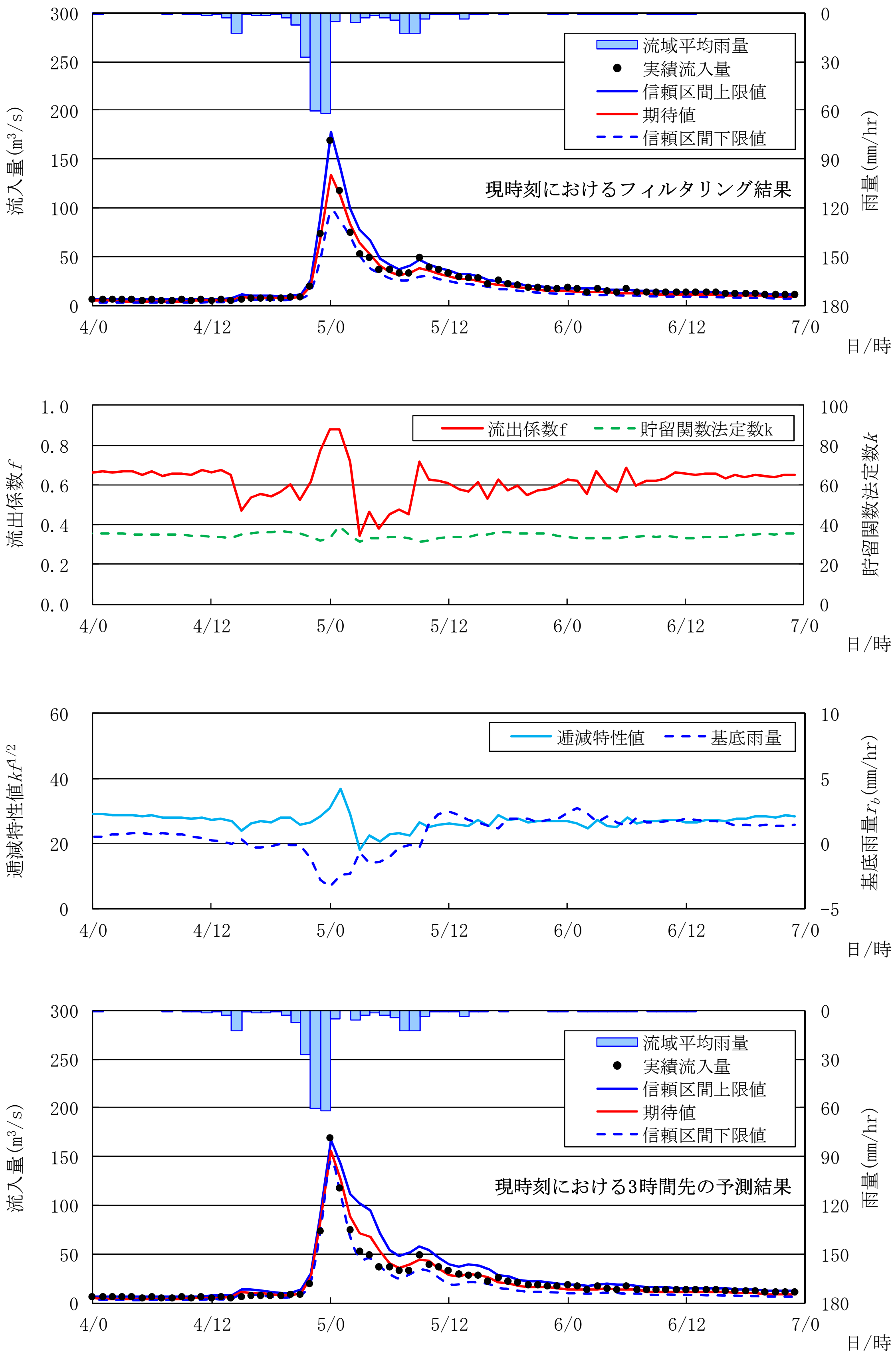


図 4.13　竜門ダム（C.A.=26.5km^2）への流入量予測モデルの適用結果（2006 年 7 月洪水）

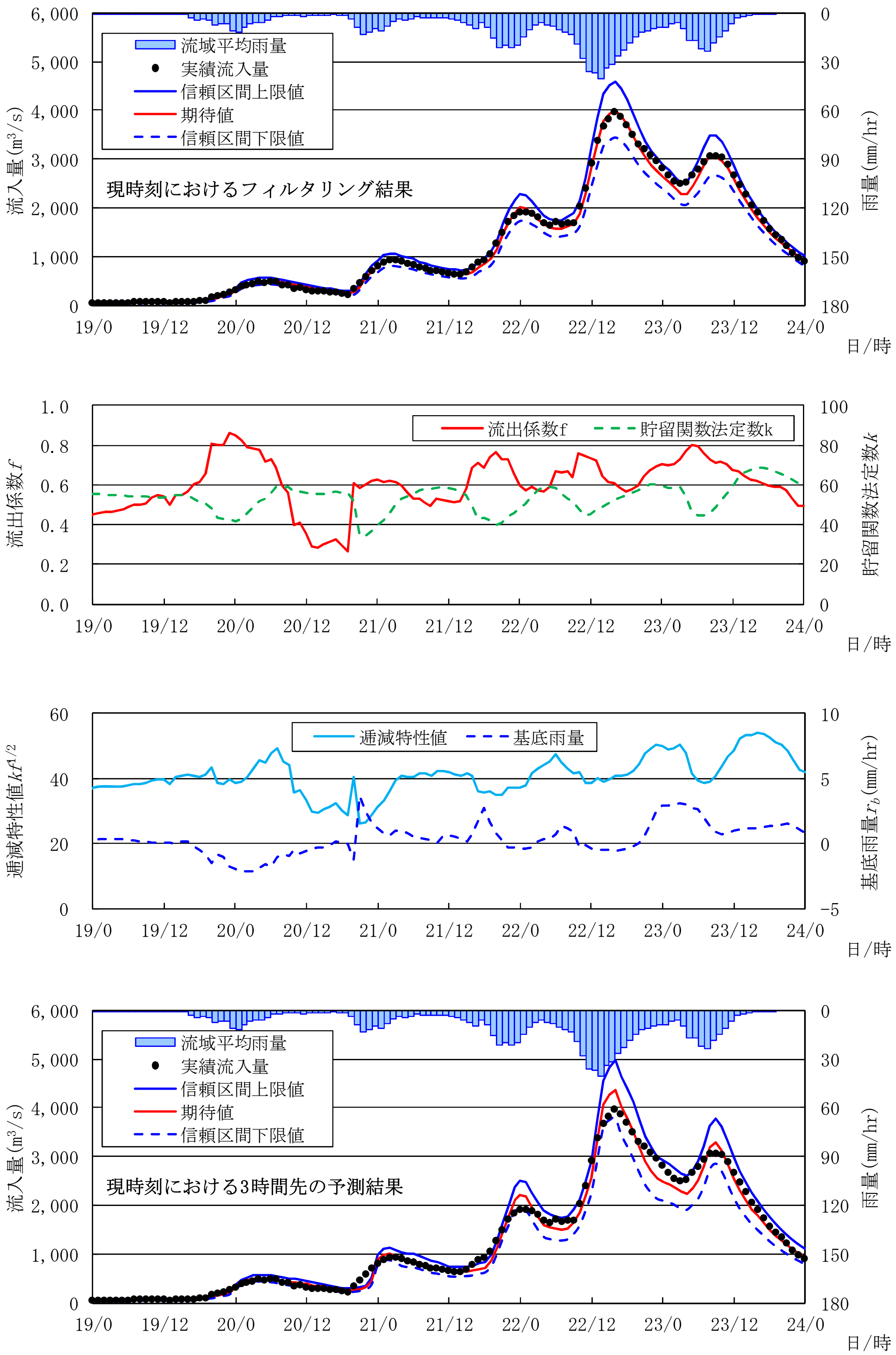


図 4.14　鶴田ダム（C.A.=805km^2）への流入量予測モデルの適用結果（2006 年 7 月洪水）

- 貯留関数法の定数や流出係数などを自己回帰モデルで表現し，第 3 章と同じ UKF により実績ダム流入量に対してデータ同化させた洪水予測モデルの適用結果から，ダム流入量の再現性が高いことを確認した．これより，実際の洪水予測において，貯留関数法の定数と流出係数を逐次推定することの必要性が示された．
- フィルタリングによる状態量の推定においては，急激に豪雨が発生した場合，貯留関数法の定数を小さくした方が，洪水の立ち上がりを良好に再現できると考えられる．一方で，流出係数については，流量が急増するときに大きくなり，流量の減少に伴って小さくなる傾向があることが分かった．
- 大田ら [15] の森林土壌におけるパイプ流の観察では，難透水層付近のパイプは降雨に対し敏感に反応して流出量を増加させるが，上部パイプは帯水面の上昇により突然流出が発生するとしている．豪雨が発生したときには，急激に流出量が増加する場合があり，本章で構築した洪水予測モデルでは，貯留関数法の定数を小さくすることでこれに対応できる．
- 内田ら [16] は，累加雨量の増加によって，パイプ断面の拡大，粗度係数の低下等が生じると指摘している．降雨が長時間継続すると，パイプからの流出が支配的になり，表面流は発生しにくくなっていると推測される．本章で構築した洪水予測モデルでは，このようなメカニズムを，流出係数を変化させることで表現している．

参考文献

1) S. J. Julier and J. K. Uhlmann : A new extension of the Kalman Filter to nonlinear systems， *Proc. SPIE, Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition IV*, pp.182-193，1997.
2) 辻倉裕喜，田中耕司，杉浦正之：Unscented Kalman Filter を用いた洪水到達時間の短い流域を対象にした水位予測システムの適用，河川技術論文集，Vol.19，pp.253-258，2013.
3) 田中耕司，辻倉裕喜，杉浦正之：非線形フィルタリングを用いた実時間河川水位の集中型モデルへのデータ同化，土木学会論文集 B1(水工学)，Vol.70/No.4，I_409-I_414，2014.
4) 北川源四郎：モンテカルロ・フィルタおよび平滑化について，統計数理，Vol.44/No.1，pp.31-48，1996.
5) 杉浦正之，田中耕司：中小河川の水位予測モデルにおける非線形フィルタリング法の適用性評価，河川技術論文集，Vol.20，pp.349-354，2014.
6) 杉浦正之，辻倉裕喜，田中耕司：貯留関数法に基づく簡易洪水予測モデルにおけるパラメータ変動の解釈，土木学会論文集 B1(水工学)，Vol.71/No.4，I_307-I_312，2015.
7) 高木不折：低水流出の低減特性に関する研究，土木学会論文集，Vol.28，pp.1-11，1966.
8) 呉修一，腰塚雄太，山田正：ハイドログラフの逓減特性を用いた流出特性の抽出，水工学論文集，Vol.48，pp.13-18，2004.
9) 国土交通省：ダム諸量データベース http://dam5.nilim.go.jp/dam/

10) 永井明博，角屋睦，杉山博信，鈴木克英：貯留関数法の総合化，京都大学防災研究所年報，Vol.5/B-2，pp.207-220，1982.
11) http://www.jma.go.jp/jma/kishou/know/kurashi/kaiseki.html.
12) 木村俊晃：貯留関数による洪水流出追跡法の河川計画への応用に関する研究，京都大学博士論文，pp.189-221，1962.
13) 園山裕士，星清，井出康郎：損失項を考慮した貯留関数法の一般化，河川技術論文集，Vol.7，pp.465-468，2001.
14) 星清，村上泰啓：小流域における総合貯留関数法の開発，水理講演会論文集，Vol.31，pp.107-122，1987.
15) 太田猛彦，塚本義則，野口晴彦：パイプフローと山崩れについての一考察，昭和 56 年度砂防学会研究発表会概要集，pp.92-93，1981.
16) 内田太郎，小杉賢一郎，水山高久：山地源流域におけるパイプ流出特性の変化，日本林學會誌，Vol.81/No.2，pp.101-108，1999.

第5章

洪水中の粗度係数等の変化に着目した水位予測手法の適用上の課題と対応

5.1　概　説

洪水予測の分野では，時々刻々得られる観測データを用いて流出モデルの状態量やパラメータの値を逐次推定しつつ数時間先の流量を予測する手法が開発されてきた[1),2)]．また，洪水予報や水防警報などの洪水情報としては水位の予測情報の提供が重要となるが，時々刻々の水位データを使用して水位予測モデルの状態量やパラメータの値を逐次推定しつつ数時間先の水位を予測する手法の開発についても，近年数多く試みられている．

上記のようなフィルタリング手法を水位予測モデルに導入した推定手法として，Shiiba et al.[3)]は一次元不定流モデルに Kalman Filter を適用し，水位と流量を逐次推定する手法を開発した．立川ら[4)]は，淀川水系桂川の流況再現に一次元不定流モデルを用い，現時刻における計算水位を観測水位と整合させるために Particle Filter を適用して，粗度係数と河道断面形状および上流端に与える流量にかかる係数を状態量とし逐次推定して水位予測を行う方法を示した．Kim et al.[5)]は，河道地形や粗度係数の平面的な変化をより適切に考慮するために平面二次元不定流モデルを導入し，Particle Filter により粗度係数と境界条件を時々刻々推定しながら水位を予測する方法を示した．

一方，田中ら[6)]は，淀川三川の合流部前後の複雑な流況に対して一次元不定流モデルを用い，計算時間の制約がある洪水予測システムにおいて状態量の数をできるだけ少なくすること，計算の安定性を確保すること等の目的から，状態量を上流端流量と残流域流出量等にかかる係数のみとした Particle Filter を適用し，時々刻々のリアルタイムの水位予測を行う手法を提案している．ここで，同手法の課題として，水位上昇等に伴う粗度係数等のパラメータの変化を考慮できないため，特に規模が大きい洪水においては，そのことが要因となりフィルタリング後の上流端流量と流量観測値等とが整合せず，水位予測に影響を及ぼすことが考えられる[7)]．

本章では，田中ら[6]が提案している手法を基本とし，近年生起した洪水規模が大きい 2013 年台風 18 号と 2014 年台風 11 号を対象に，Particle Filter を適用した水位予測を行う．その結果から，状態量を各流量にかかる係数のみとした場合のフィルタリング後の境界流量の流量観測値などに対する再現性を把握する．両者に不整合が認められる場合には，粗度係数を状態量に追加することによる境界流量の再現性向上の効果や粒子数を増やす必要性などを評価する．こうした一連の検討から，リアルタイムシステムに要求される計算速度の観点なども踏まえて，水位予測における Particle Filter の適用上の課題とその対応方法のあり方について考察する．

5.2　水位予測モデルの構築

5.2.1　水位予測モデルの構成

淀川水系の洪水予測システム[6]は，木津川・宇治川・桂川の上流部で分布型流出モデルを適用し，観測所毎に水位予測を行っている．また，図 5.1 に示すように，三川合流部前後の区間では，分布型流出モデルにより算出した流出量を上流端や横流入条件とし，枚方地点の水位流量関係式（以下，H-Q 式という）を下流端条件として与える不定流モデルにより水位予測を行っている．

本章では，淀川三川の合流部前後の区間を対象として，枚方地点の流量を用い，区間内の河道パラメータや境界条件として与える流量等を逐次推定しながら，区間内の水位を予測することを考える．なお，状態量や不定流モデルの非線形性を考慮して，フィルタリング手法には後述する Particle Filter を適用する．ここで，加茂地点，桂地点，残流域の流量にかかる係数，さらには粗度係数にかかる係数を状態量として粒子化の対象とする．また，枚方地点の H-Q 式の変化を表すために，流量を調整する基底流量（$300m^3/s$）を設定し，これにかかる係数も状態量とする．

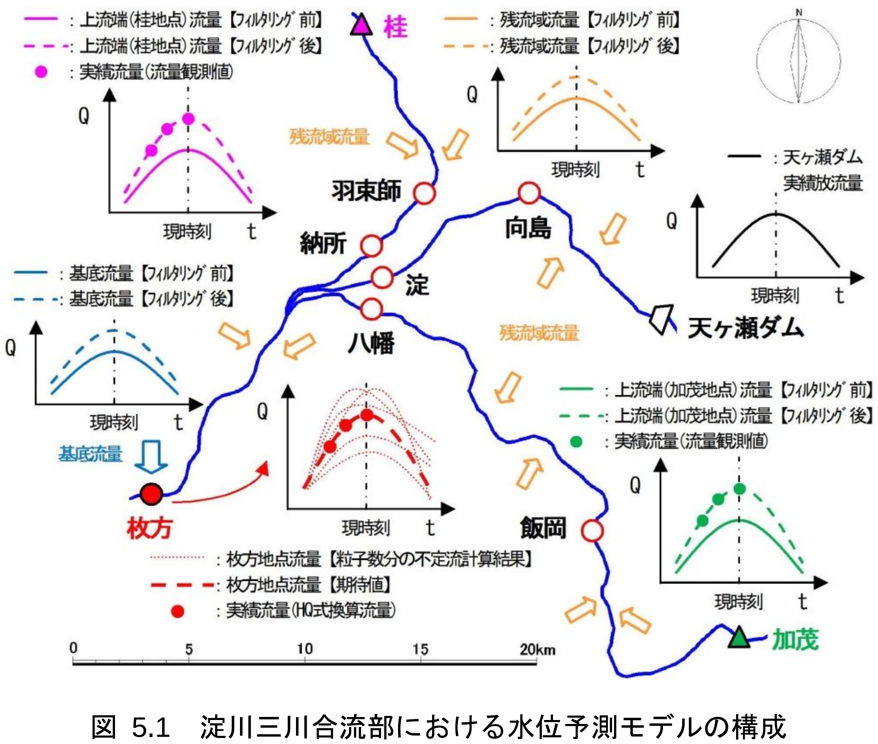


図 5.1　淀川三川合流部における水位予測モデルの構成

参考までに，淀川水系の洪水予測システム[6]における分布型流出モデルの概要を以下に示す．

分布型流出モデルは，流域全メッシュに鉛直方向に設定された 3 層のモデル（表層，不飽和層，地下水層モデル）と河道モデルからなる（図 5.2）．各層からの流出成分をメッシュ標高（図 5.3）に基づく落水線（図 5.5）に沿った河道モデルに入力し，Kinematic Wave 法で河道流量を逐次計算するモデルである．このモデルの特徴としては，各層・各メッシュに土地利用（図 5.6），土壌（図 5.7），表層地質（図 5.8）の水文学的な特性を反映したパラメータを設定できることである．なお，メッシュサイズは 250m メッシュとしている．

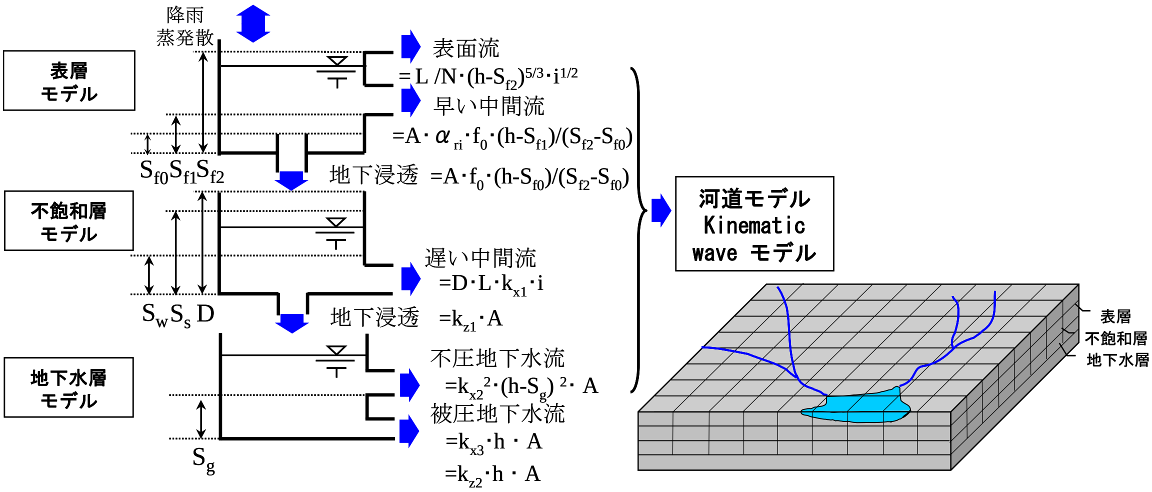


図 5.2　分布型流出モデルの概念図（土木研究所モデル）

5.2.2　不定流モデルの基礎式

淀川三川合流部前後の区間における水位予測モデルに適用されている不定流モデルの基礎式を以下に示す．

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t}=q \tag{5.1}$$

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{n^2|Q|Q}{A^2R^{4/3}} \tag{5.2}$$

t は時間座標，x は流下方向にとった空間座標，A は通水断面積，Q は流量，g は重力加速度，H は水位，R は径深，n は粗度係数である．

式(5.1)と式(5.2)を陽形式差分法（2step Lax Wendroff 法[8]）によって解く．計算の安定性を考慮し，差分時間間隔を 2.5s，空間間隔を約 200m として計算を行う．2step Lax Wendroff 法においては，下流端の格子に式(5.2)を使用できず，式(5.1)のみを使用することとなる．このため，水位，流量，H-Q 式のいずれかを与えることにより，下流端の水位や流量を求めることになる．下流端条件に H-Q 式を設定する本計算の場合には，式(5.1)と H-Q 式を連立させることにより，水位および流量が求まる．この部分のみ陽形式では計算できないため，陰解法を適用している．

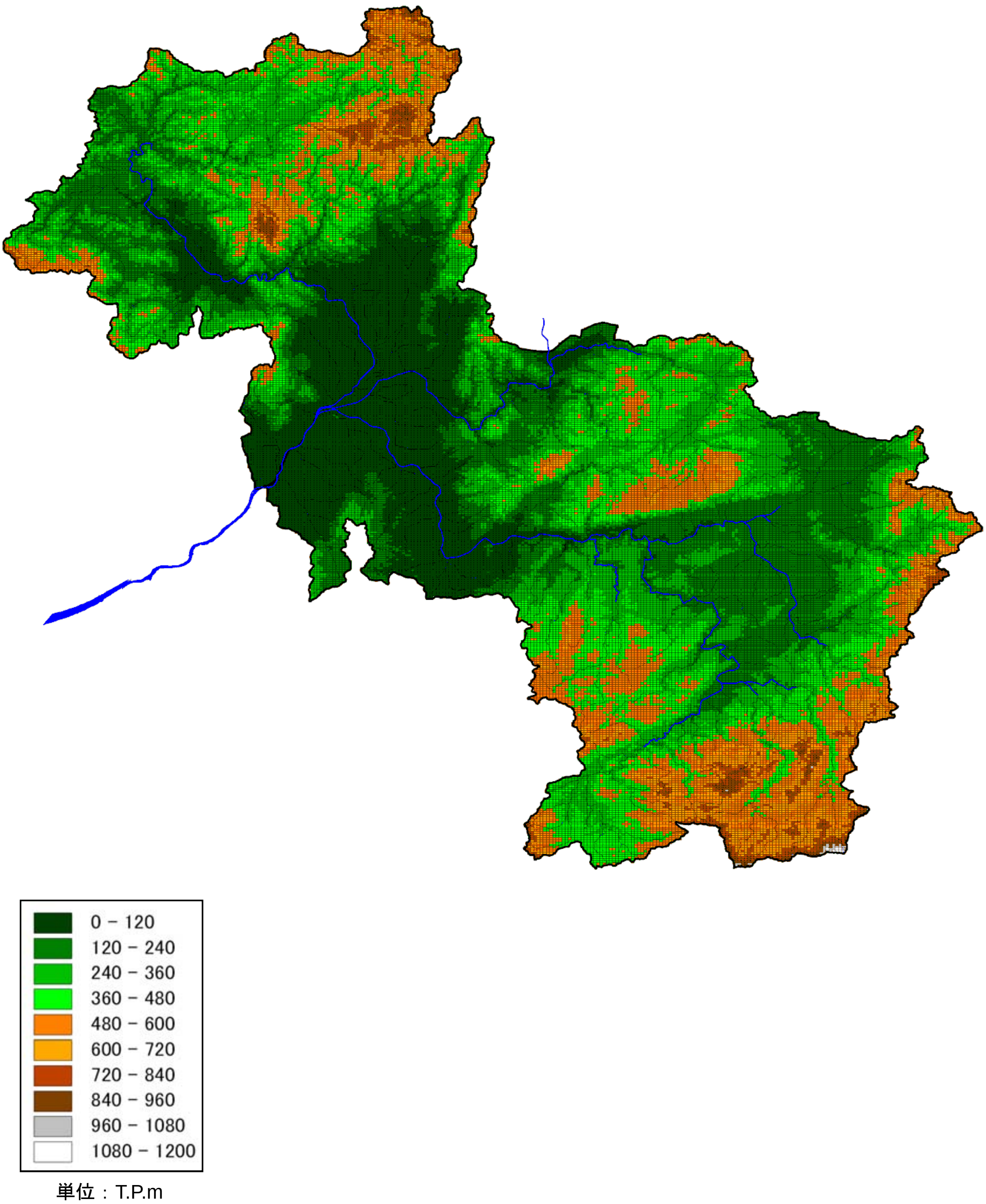


図 5.3　メッシュ標高分布図

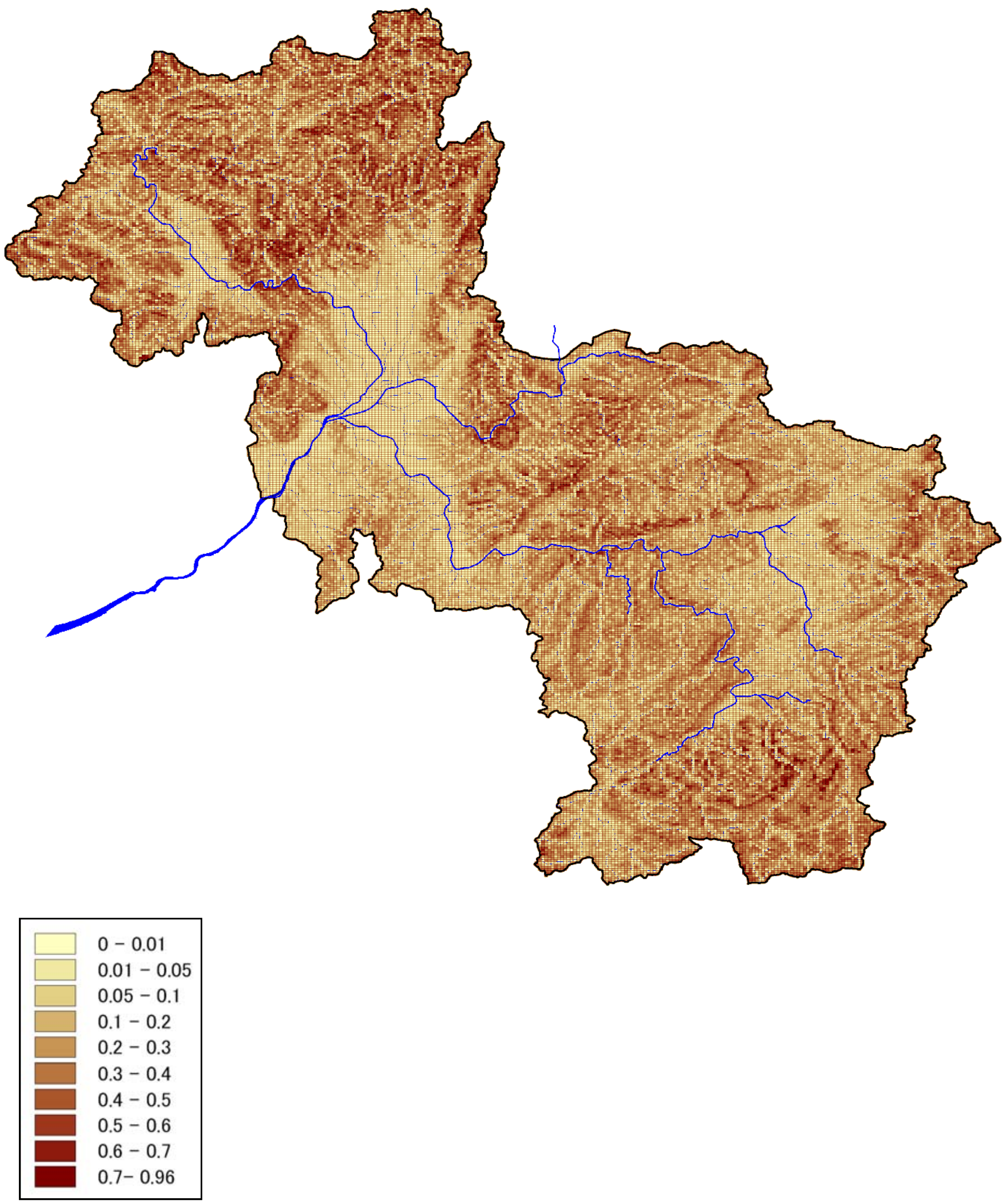


図 5.4　地表勾配分布図

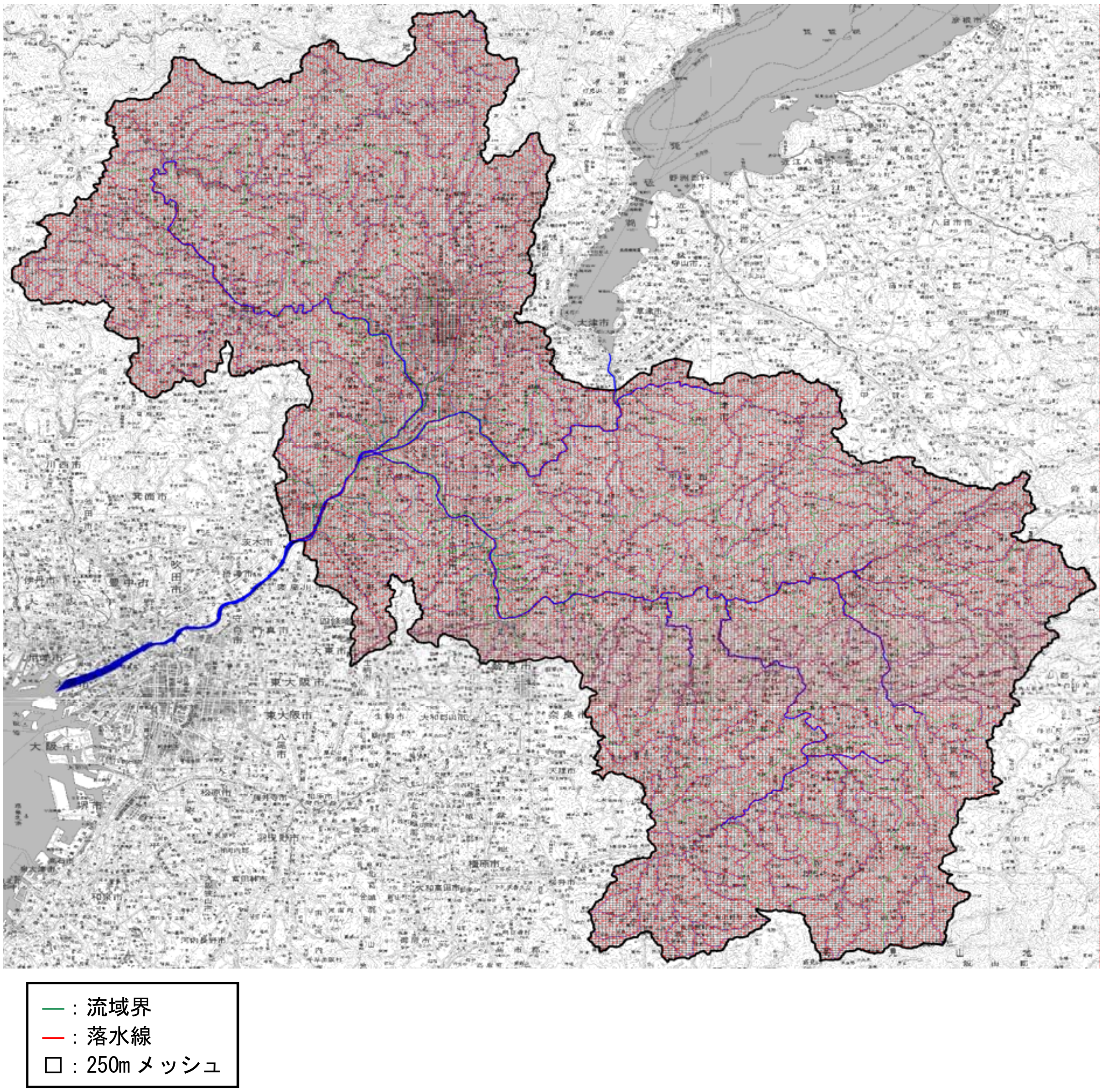


図 5.5　落水線図

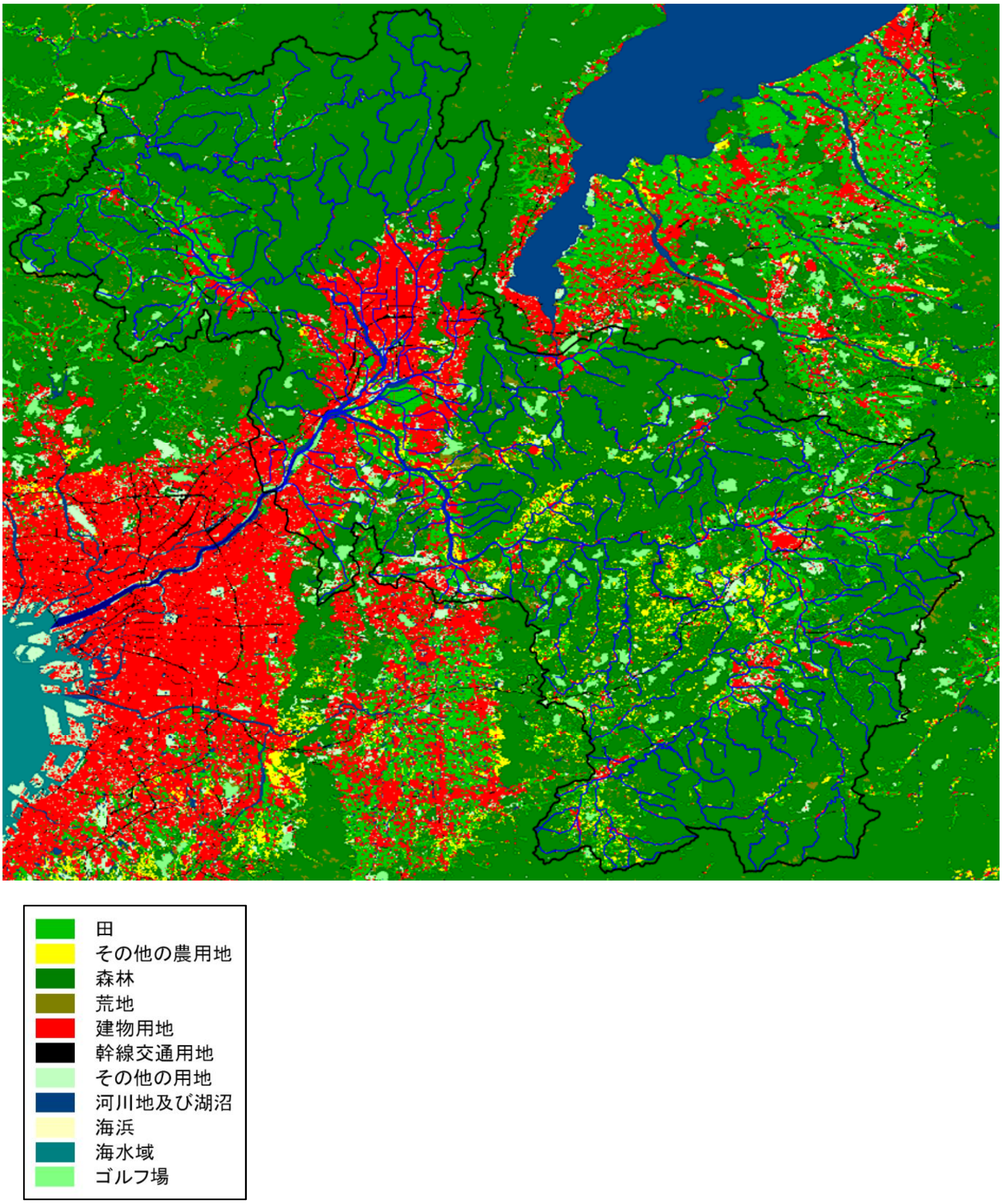


図 5.6　土地利用分布図

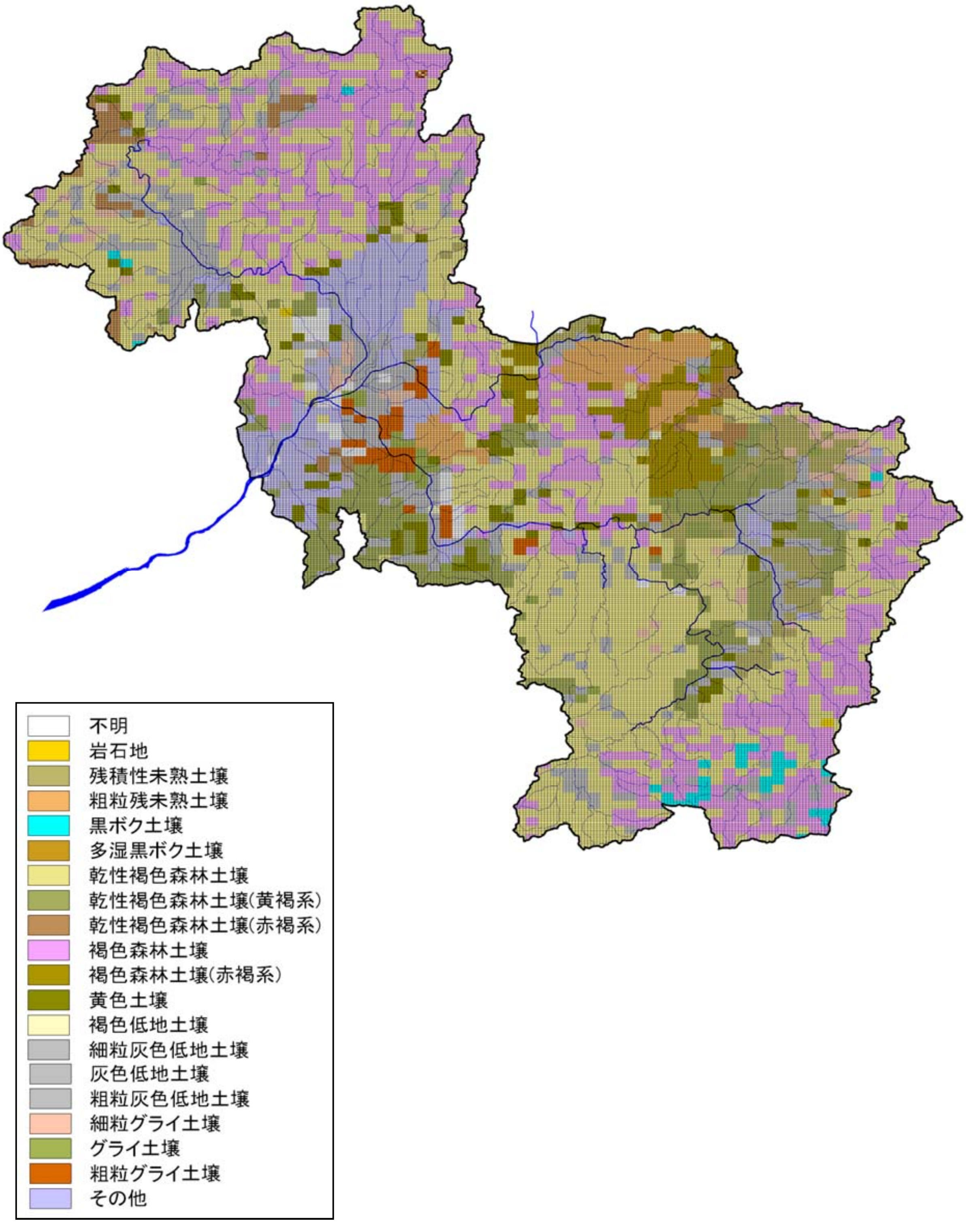

不明
岩石地
残積性未熟土壌
粗粒残未熟土壌
黒ボク土壌
多湿黒ボク土壌
乾性褐色森林土壌
乾性褐色森林土壌(黄褐系)
乾性褐色森林土壌(赤褐系)
褐色森林土壌
褐色森林土壌(赤褐系)
黄色土壌
褐色低地土壌
細粒灰色低地土壌
灰色低地土壌
粗粒灰色低地土壌
細粒グライ土壌
グライ土壌
粗粒グライ土壌
その他

図 5.7　土壌分布図

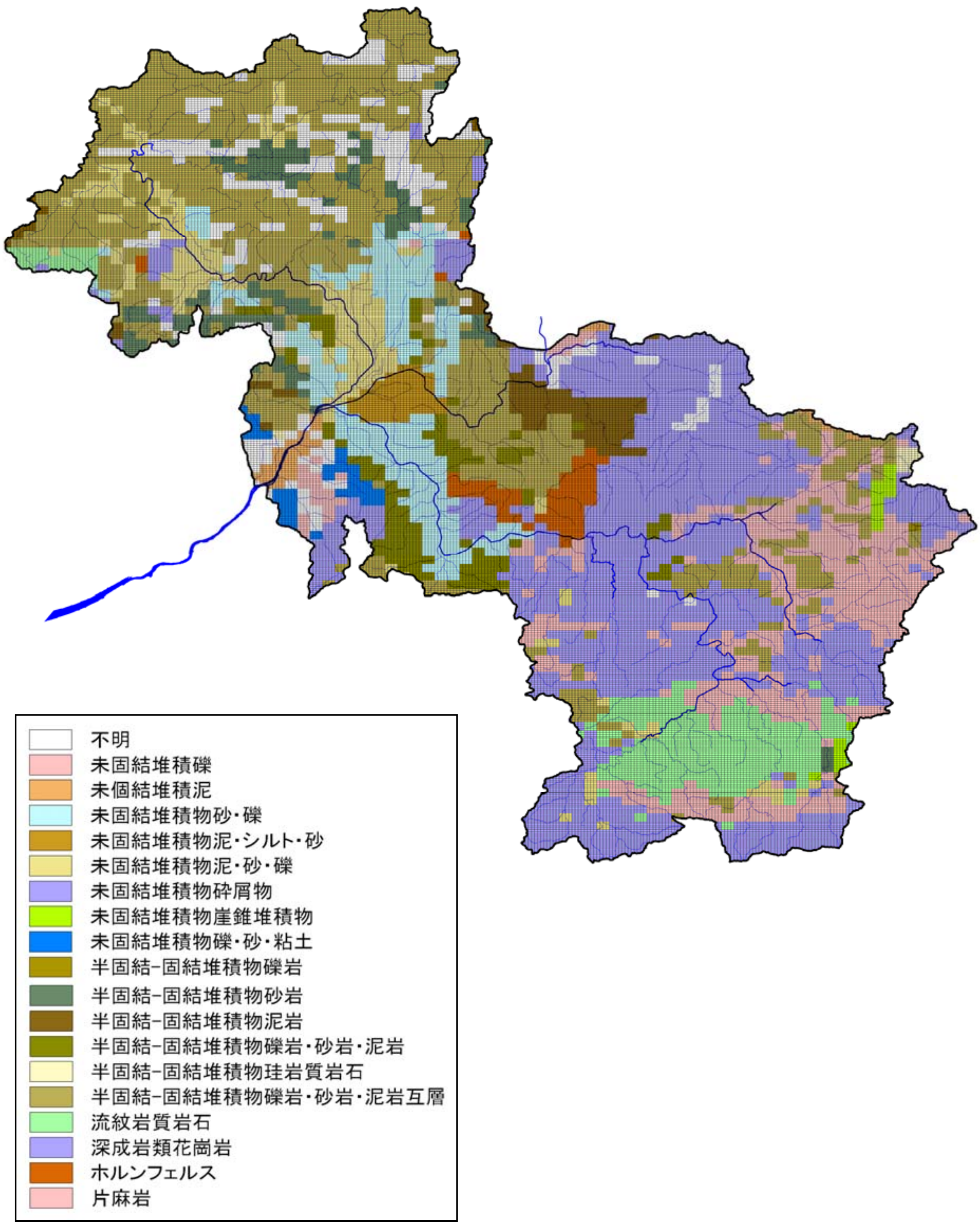

不明
未固結堆積礫
未個結堆積泥
未固結堆積物砂・礫
未固結堆積物泥・シルト・砂
未固結堆積物泥・砂・礫
未固結堆積物砕屑物
未固結堆積物崖錐堆積物
未固結堆積物礫・砂・粘土
半固結−固結堆積物礫岩
半固結−固結堆積物砂岩
半固結−固結堆積物泥岩
半固結−固結堆積物礫岩・砂岩・泥岩
半固結−固結堆積物珪岩質岩石
半固結−固結堆積物礫岩・砂岩・泥岩互層
流紋岩質岩石
深成岩類花崗岩
ホルンフェルス
片麻岩

図 5.8　表層地質分布図

5.3　フィルタリング手法の適用

Particle Filter[9),10)] は非線形・非ガウス型の状態空間モデルに適用できるフィルタリング手法である．状態量の確率分布を多数のサンプル（粒子）の実現値によって近似的に表現することが特徴である．類似の手法である Ensemble Kalman Filter のように，状態量の事後分布を求める際に Kalman Gain を使用するものではなく，観測値によって定まる各粒子の尤度（適合度）を用いる．

5.3.1　Particle Filter（PF）のアルゴリズム[4)]

非線形・非ガウス型の状態空間モデル

$$x_t = f(x_{t-1}, u_t) \tag{5.3}$$

$$y_t = h(x_t, v_t) \tag{5.4}$$

を考える．x_t は時刻 t の k 次元の状態ベクトル，y_t は時刻 t の l 次元の観測ベクトルであり，u_t，v_t はガウス分布とは限らない確率密度関数に従ったシステムノイズと観測ノイズで, 白色ノイズとする．f，h は状態ベクトルに関する非線形関数で，式(5.3)は状態ベクトルの時間発展を表す状態方程式，式(5.4)は観測方程式である．

一期先の状態 x_t の推定値の確率分布（事前分布）は

$$p(x_t | Y^{t-1}) = \int p(x_t | x_{t-1}) p(x_{t-1} | Y^{t-1}) dx_{t-1} \tag{5.5}$$

と表される．ここで，$Y^{t-1} = \{ y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, y_2, y_1 \}$ とする．また，時刻 t までの観測ベクトル Y^t が得られた後，フィルタリングされた状態 x_t の確率分布（事後分布）は，ベイズの定理により

$$p(x_t | Y^t) = \frac{p(y_t | x_t) p(x_t | Y^{t-1})}{p(y_t | Y^{t-1})} \tag{5.6}$$

と表される. Particle Filter ではこの条件付き確率分布を多数の粒子の実現値を用いて近似する．具体的には，式(5.5)の事前分布を

$$p(x_t | Y^{t-1}) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta\left(x_t - x_{t/t-1}^{(i)}\right) \tag{5.7}$$

と近似する．N は粒子数，$\delta(\cdot)$ は Dirac の Delta 関数，$x_{t/t-1}^{(i)}$ は時刻 t の i 番目粒子の事前推定値である．これを式(5.6)に代入して，事後分布が式(5.8)となるように $x_{t/t}^{(i)}$ を設定する．

$$p(x_t | Y^t) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta\left(x_t - x_{t/t}^{(i)}\right) \tag{5.8}$$

式(5.7)と式(5.8)の $x_{t/t-1}^{(i)}$，$x_{t/t}^{(i)}$ は，以下の手順で求める．

① 初期設定：現在時刻を $t-1$ とする．i 番目の粒子（$i=1,\cdots,N$）のフィルタリング後の状態量 $x_{t-1/t-1}^{(i)}$ が得られているとする（図 5.9 の第 1 列）.

② 時間更新：状態方程式(5.3)を用いて i 番目の粒子（$i=1,\cdots,N$）の更新値 $x_{t/t-1}^{(i)}$ を求める（図 5.9 の第 2 列）．これにより事前分布が式(5.7)より定まる.

③ フィルタリング：式(5.6)の $p\left(y_t \middle| x_t\right)$ は状態 x_t の時に観測値 y_t を得る確率（尤度）で，式(5.4)から別途定まる $R\left(y_t \middle| x_{t/t-1}^{(i)}\right)$ により得られるものとする．図 5.9 の第 3 列の粒子の大きさは尤度の大小の関係を表現しており，観測値に対する適合度が高いほど尤度が大きいことを示す．式(5.6)の $p\left(y_t \middle| Y^{t-1}\right)$ は

$$p\left(y_t \middle| Y^{t-1}\right) = \int R\left(y_t \middle| x_t\right) p\left(x_t \middle| Y^{t-1}\right) dx_t \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} R\left(y_t \middle| x_{t/t-1}^{(i)}\right) \tag{5.9}$$

となり，式(5.7)と式(5.9)を式(5.6)に代入し，事後分布を

$$p\left(x_t \middle| Y^t\right) \cong \sum_{i=1}^{N} w_t^{(i)} \delta\left(x_t - x_{t/t-1}^{(i)}\right) \tag{5.10}$$

として得る．ここで $w_t^{(i)}$ は正規化した尤度である.

$$w_t^{(i)} = R\left(y_t \middle| x_{t/t-1}^{(i)}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{N} R\left(y_t \middle| x_{t/t-1}^{(i)}\right) \tag{5.11}$$

④ リサンプリング：正規化した尤度（重み）$w_t^{(i)}$ に比例した割合で $x_{t/t-1}^{(i)}$ を復元抽出した粒子を $x_{t/t}^{(i)}$ とする（図 5.9 の第 4 列）．抽出された粒子の合計は N 個で，各粒子の重みは全て $1/N$ となり，最終的に式(5.8)が得られる.

⑤ 時間を更新して①に戻る.

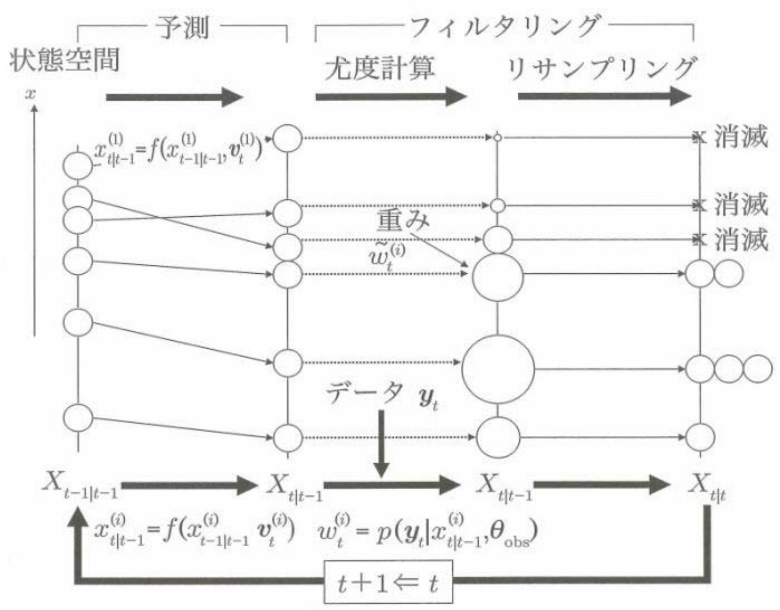


図 5.9　Particle Filter のアルゴリズムの概念図（樋口 10) より引用）

上記により，x_t の最適推定値 $\hat{x}_t$ と推定誤差分散 $\hat{\sigma}_t$ は

$$\hat{x}_t \cong \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{t/t}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} w_t^{(i)} x_{t/t-1}^{(i)} \tag{5.12}$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{t/t}^{(i)} - \hat{x}_t\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} w_t^{(i)}\left(x_{t/t-1}^{(i)} - \hat{x}_t\right)^2 \tag{5.13}$$

として求められる．95%信頼幅などについても $x_{t/t-1}^{(i)}, i = 1,\cdots,N$ から直接求めることができる．

5.3.2　リサンプリング

重み $w_t^{(i)}$ を持った粒子 $x_{t/t-1}^{(i)}$ の分布を重みが等しい粒子で表現できるように粒子を復元抽出し，$x_{t/t}^{(i)}$ を得ることがリサンプリングの目的である．リサンプリング法には，重みの大きい順に抽出する方法（重み順方式）や重み付きランダムサンプリングがある．重み順方式は，粒子の中から重みの最大値を抽出する計算が必要になり，重み付きランダムサンプリングよりも時間を要す．しかし，重み順方式は重みの小さい粒子が選択される確率が低いため，粒子数が少ない場合でも解が安定する傾向にあるので，本研究ではこれを採用した．

具体的には，まず粒子の重み $w_t^{(i)}$ が計算された後，以下により $d_j^{(i)}$ を求める．

$$d_j^{(i)} = w_t^{(i)} \Big/ \left(m_j^{(i)} + 1\right) \tag{5.14}$$

$m_j^{(i)}$ は，最初 0 個で，粒子 i が j 回目までに抽出された個数の総和とする．$j = 1, 2, \cdots, N$ の順番に $d_j^{(i)}$ が最大となる粒子 i に対して配分数 $m_j^{(i)}$ を一つ増やす．これを粒子の総数 N 回分繰り返すことによって復元抽出が完了する．$d_j^{(i)}$ の値が等しくなる場合には，番号の若い粒子を抽出することにした．

5.3.3　システムノイズの追加

特定粒子の重みが大きくなり粒子のパターンが固定化すると，状況の変化に適応できなくなり推定精度が低下する．これに対処するため，リサンプリング後に各粒子の状態量に撹乱を与える．撹乱の与え方には様々な手法が存在するが，ここでは，時間更新の段階において正規分布に従うシステムノイズを追加することにより，特定粒子のみが選択されない工夫を行う．具体的な設定については後述する．

5.4　水位（流量）予測方法

5.4.1　枚方地点の流量予測方法

枚方地点の水位を H-Q 式で変換した流量を対象として，加茂地点，桂地点，残流域の流量や，基底流量にかかる係数，さらには粗度係数にかかる係数などの状態量を Particle Filter を用いてフィルタリングする．

一期先の状態量の確率分布を推定する時間更新では，一期前の状態量にシステムノイズを追加（$x_t = x_{t-1} + u$）するのみとする．各流量にかかる係数のシステムノイズを平均 0，分散 0.05²，粗度係数にかかる係数のシステムノイズを平均 0，分散 0.03² のガウス分布とした．なお，粒子の多様なパターンを確保するためには，分散の値をある程度の大きさに設定する必要があるが，特に今回新たに状態量に追加する粗度係数にかかる係数に撹乱を加える場合には，前時刻の値と極端に異なる値が設定されると計算が不安定になることがある．これを回避するためには，分散の値を小さく設定すればよいが，値が小さすぎると急激な変化に追随できない場合がある．上記のシステムノイズの値はこれらのトレードオフの関係を考慮した感度分析により設定した．

観測値（枚方地点 H-Q 換算流量）は 1 時間毎に得られるとし，1 時間毎にフィルタリングを実施する．式(5.4)から定まる尤度関数を正規分布の確率密度関数とし，

$$R\left(y_t \middle| x_{t/t-1}^{(i)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left\{ -\frac{\left(y_{t,cal}^{(i)} - y_{t,obs}\right)^2}{2\sigma_y^2} \right\} \tag{5.15}$$

と定義する．$R\left(y_t \middle| x_{t/t-1}^{(i)}\right)$ は粒子 $x_{t/t-1}^{(i)}$ の尤度，$y_{t,cal}^{(i)}$ は時刻 t の i 番目粒子の観測推定値，$y_{t,obs}$ は観測値である．σ_y は観測値の標準偏差であり，H-Q 換算流量に 5%の観測誤差があるとした．

不定流解析は現時刻から遡った 12 時間前から開始する．これは，現時刻における枚方地点の水位や流量は，洪水到達時間（12 時間）程度前からの降雨量や上流端流量，残流域流出量等の影響を受けていると考えたことによる．現時刻において式(5.15)で尤度を求め，観測値更新後の流量の確率分布を推定する．また，将来の予測値は，現時刻の状態量が継続するとして推定する．

5.4.2　枚方上流地点の水位予測方法

上記は枚方地点の流量のみで観測値更新を行う方法であるが，不定流解析結果は枚方上流地点の水位予測においても有効な情報であるため，これらを用い上流の観測値に適合する水位を別途推定する方法を考える．

上流の観測所の現時刻における水位観測値とある粒子の不定流解析値との間の重みを式(5.16)により算定し，重みに応じて各粒子の不定流解析値を加重平均することにより各観測所の水位の期待値を推定する方法とした（八幡・飯岡・納所・羽束師・淀・向島の計 6 地点を対象とした）．

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^k |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} [X_c - X_o]^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} [X_c - X_o] \right\} \tag{5.16}$$

ここに，X_c は解析水位の行列，X_o は観測水位の行列，Σ は誤差共分散行列，k は観測所数で，

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{H1}^2 & \rho_{H1H2}\sigma_{H1}\sigma_{H2} & \cdots \\ \rho_{H2H1}\sigma_{H2}\sigma_{H1} & \sigma_{H2}^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

として，水位の観測誤差 $\sigma_{H.}$ を 0.5m，誤差の相互相関係数 $\rho_{H.}$ を 0.3 と設定した．なお，将来の予測値は，予測時間までの各粒子の不定流解析値から現時刻の重みが継続するとして推定する．

5.5　適用条件の違いによるデータ同化結果の評価

近年生起した洪水規模が大きい2013年9月台風18号および2014年8月台風11号を対象に，Particle Filterによる状態量のデータ同化ならびに水位予測を行う．

5.5.1　状態量の違いによるデータ同化結果の評価

田中ら[6)]の水位予測モデルでは，上流端流量や残流域流出量などの境界流量の初期設定として，分布型流出モデルより算定された流出量を与えている．本研究では，残流域流出量等の初期設定には，分布型流出モデルより算定された流出量を与えるが，上流端流量の初期設定には，実測値との誤差を少なくすることを目的として，洪水が生起した前年度における確定 H-Q 式で水位を換算した流量を与えるものとする．

これらの各流量にかかる係数のみを状態量として，全ての初期分布を平均 1.0，分散 0.05^2 のガウス分布に従って独立に発生させ，粒子数を 200 個に設定したフィルタリング計算を実施する．なお，粒子数の設定については，リアルタイムのシステムに要求される計算速度（予測結果の 10 分毎送信に対する即時性を確保できる計算時間）の観点から，200 個程度が上限と判断したものである．枚方地点の現時刻の推定水位を図 5.10 と図 5.11 に，枚方上流地点（八幡・納所・淀地点）における 1 時間先の予測水位を図 5.12～図 5.17 に示す．上記の結果より，現時刻の枚方地点の水位や，1 時間先の枚方上流地点における予測水位については，再現性が高いことが伺える．

一方，この場合の加茂地点や桂地点の流量のフィルタリング結果を図 5.18～図 5.21 に示す．これらの図より，フィルタリング後の加茂地点や桂地点の流量については，逆解析的な側面から整合する必要のある流量観測値などから乖離していることが分かる．これらの乖離の要因として，対象洪水の規模が大きく，洪水時の水位上昇等に伴い粗度係数などの河道パラメータが変化したことが推察される．この場合，河道パラメータの変化が本来受け持つはずの流量変化分を上流端流量や残流域流出量により調整しているため，現時刻の推定水位や 1 時間先の予測水位などには影響は少ないが，数時間先の予測水位の精度に影響を及ぼす可能性があると考えられる．また，不定流解析の安定性等にも影響を及ぼす可能性があるため，改善の余地がある．

そこで，状態量に粗度係数にかかる係数を追加して（各流量にかかる係数や粗度係数にかかる係数ともに，全ての初期分布を平均 1.0，分散 0.05^2 のガウス分布に従って独立に発生させた），粒子数を 200 個のままとし，上記と同様のフィルタリング計算を実施する．この場合の加茂地点や桂地点の流量のフィルタリング結果を図 5.22 と図 5.23，図 5.25 と図 5.26 に示す．また，各状態量の時系列変化を図 5.24 と図 5.27 に示す．なお，粗度係数の初期設定は，既往洪水の再現計算より別途得られた値とし，河川別・縦断別に淀川 0.043～0.045，宇治川 0.048，木津川 0.043～0.045，桂川 0.035 と設定した．上記の結果より，フィルタリング後の加茂地点や桂地点の流量について，流量観測値などの再現性が大幅に改善していることが分かる．特に，より流量規模の大きい 2013 年 9 月台風 18 号では，水位上昇に伴って粗度係数が変化し，上流端流量や残流域流出量とともに枚方地点流量を調整しており，概ね妥当なデータ同化結果を示していると評価できる．

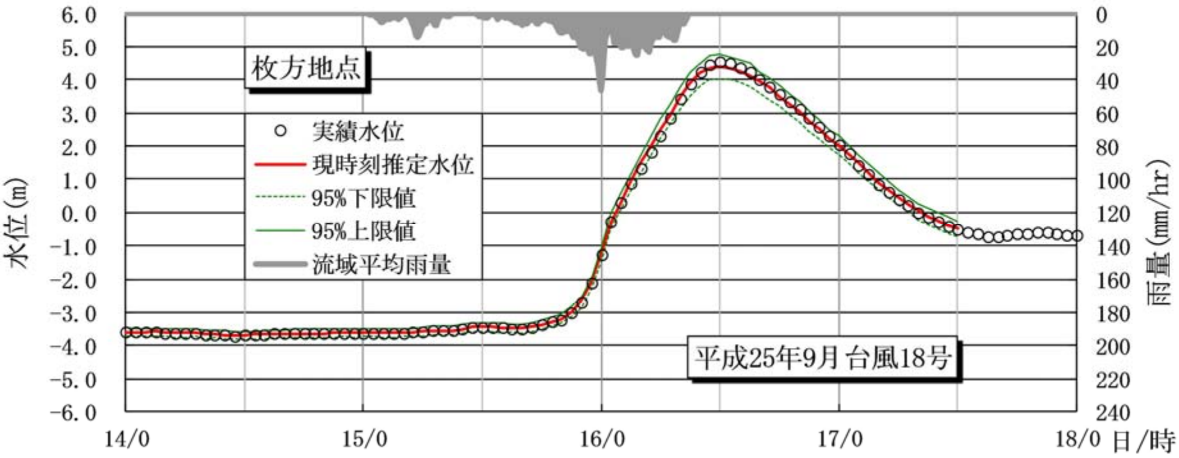


図 5.10　枚方地点（淀川）の現時刻推定水位（2013 年 9 月・台風 18 号）

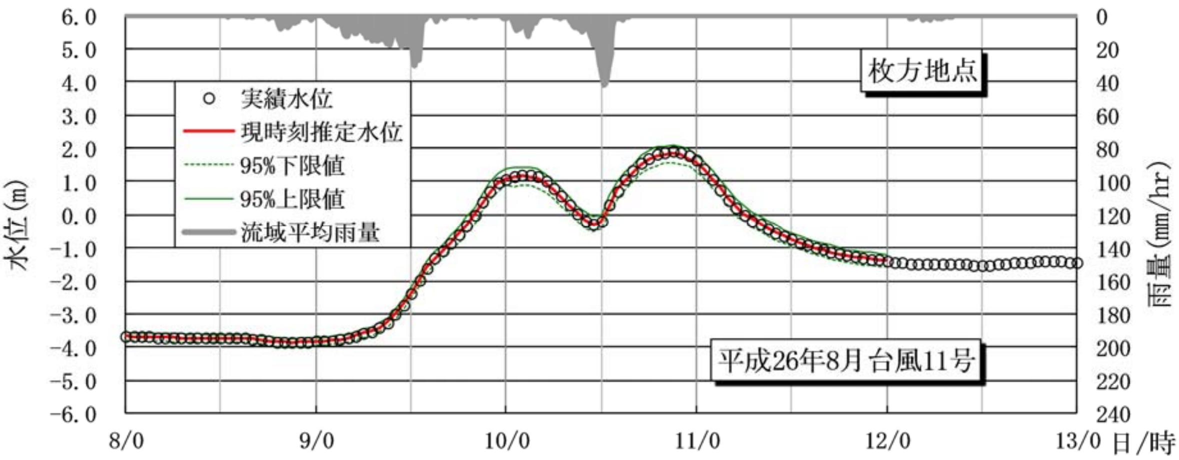


図 5.11　枚方地点（淀川）の現時刻推定水位（2014 年 8 月・台風 11 号）

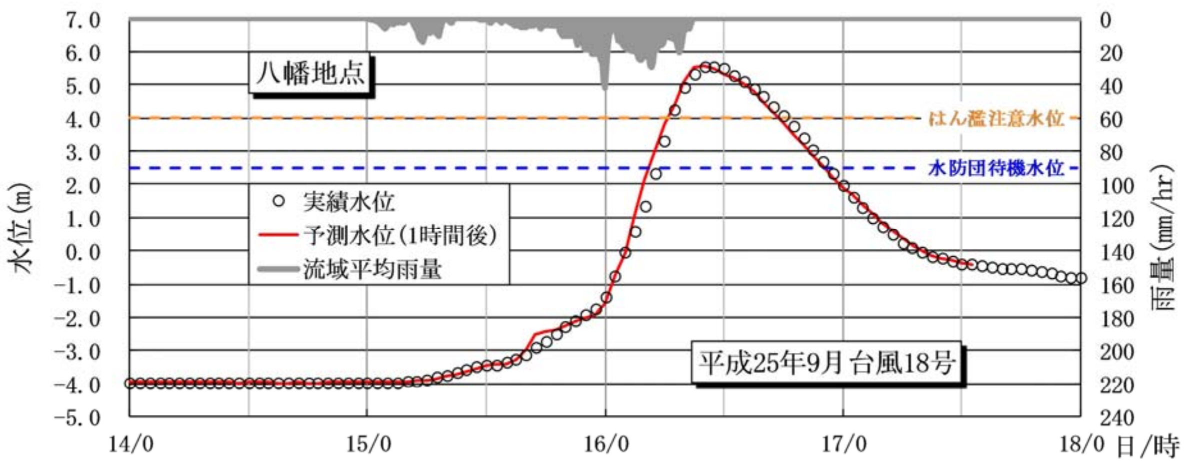


図 5.12　八幡地点（木津川）の 1 時間先予測水位（2013 年 9 月・台風 18 号）

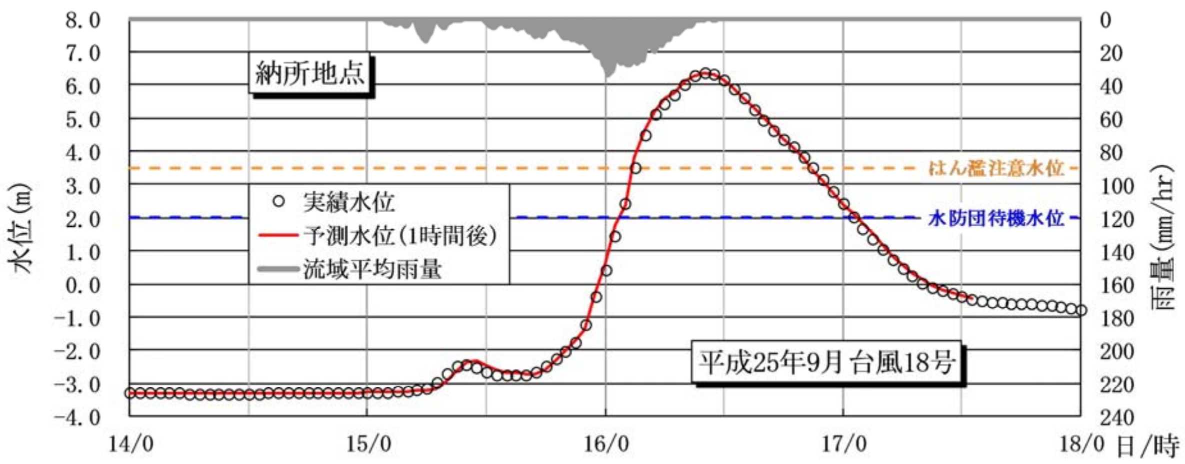


図 5.13　納所地点（桂川）の 1 時間先予測水位（2013 年 9 月・台風 18 号）

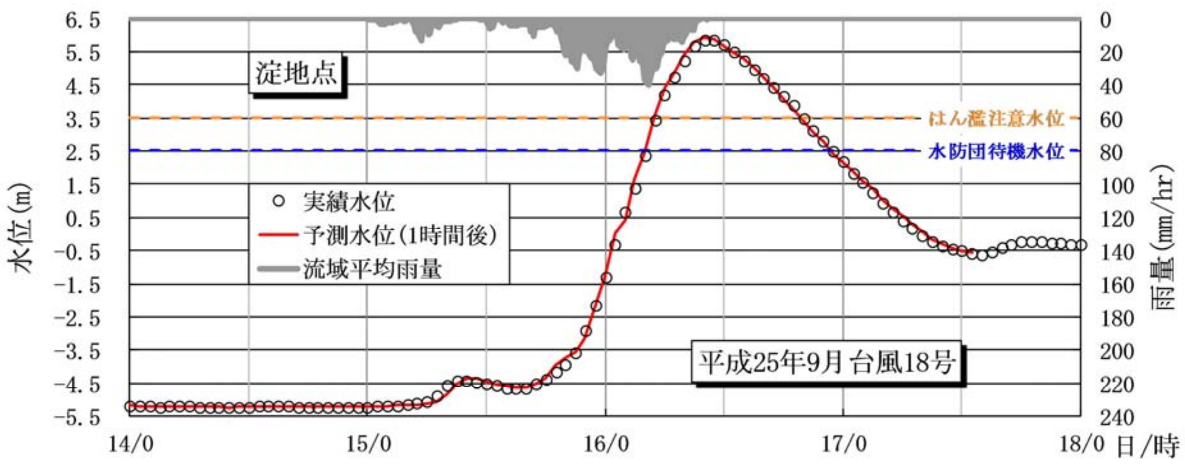


図 5.14　淀地点（宇治川）の 1 時間先予測水位（2013 年 9 月・台風 18 号）

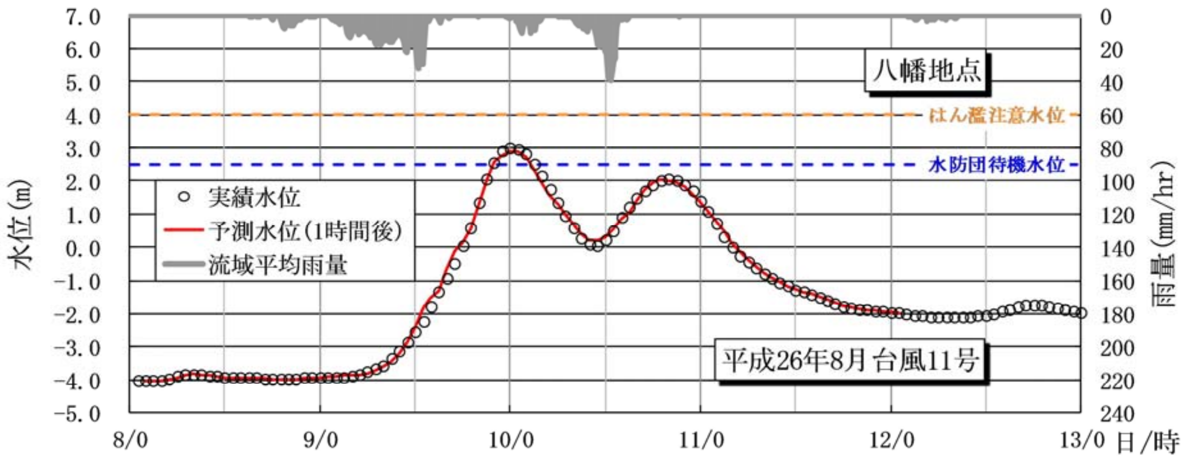


図 5.15　八幡地点（木津川）の 1 時間先予測水位（2014 年 8 月・台風 11 号）

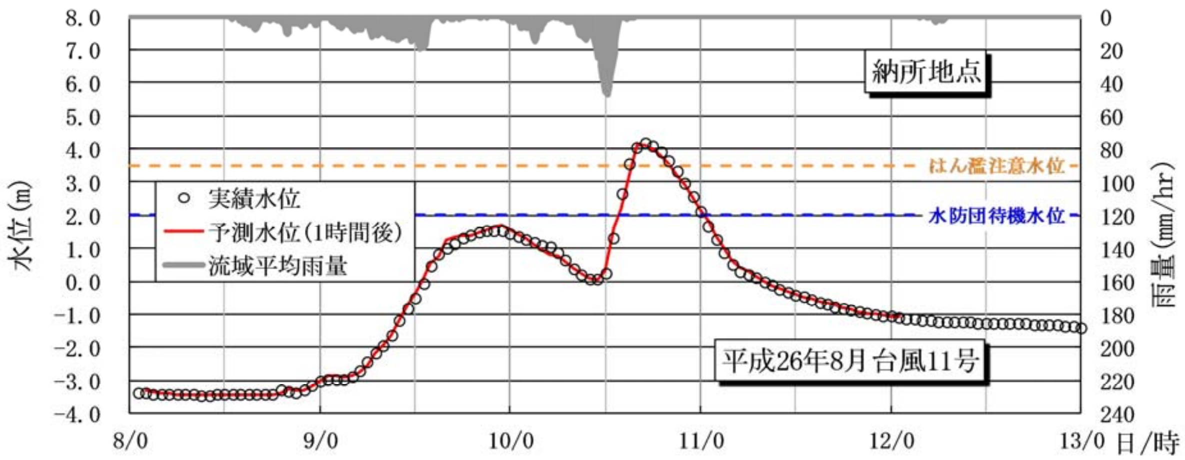


図 5.16　納所地点（桂川）の 1 時間先予測水位（2014 年 8 月・台風 11 号）

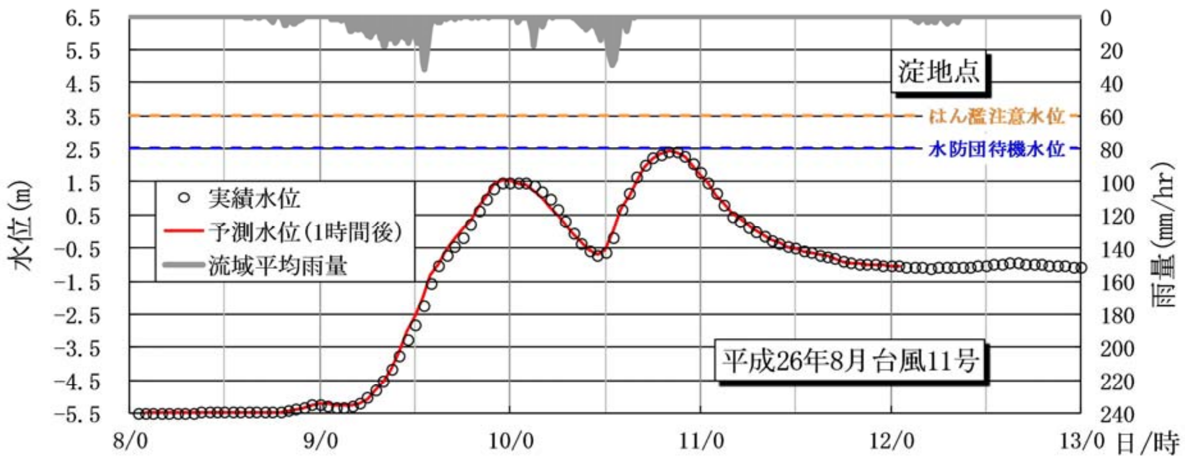


図 5.17　淀地点（宇治川）の 1 時間先予測水位（2014 年 8 月・台風 11 号）

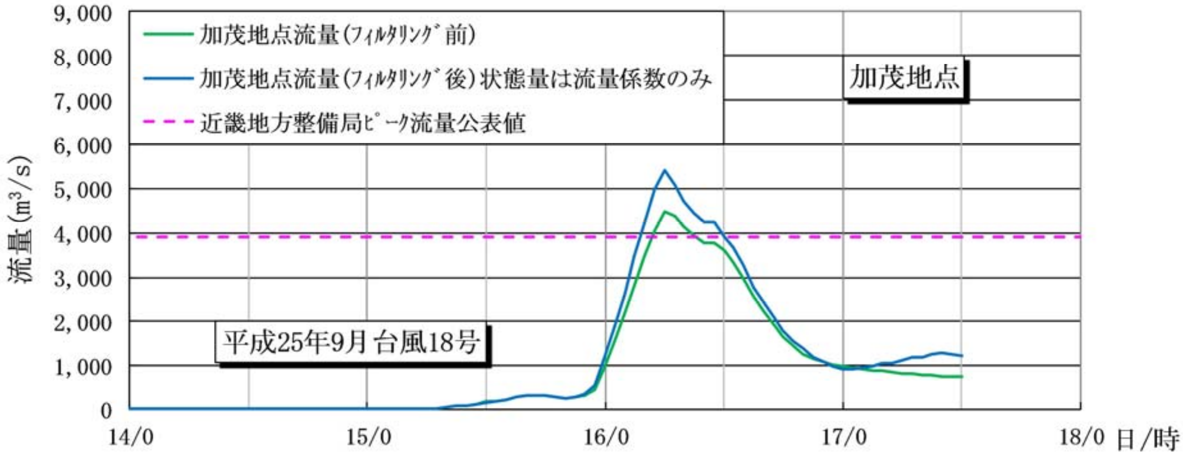


図 5.18　加茂地点（木津川）流量のフィルタリング（2013 年 9 月・台風 18 号）

【各流量にかかる係数のみを状態量とした場合】

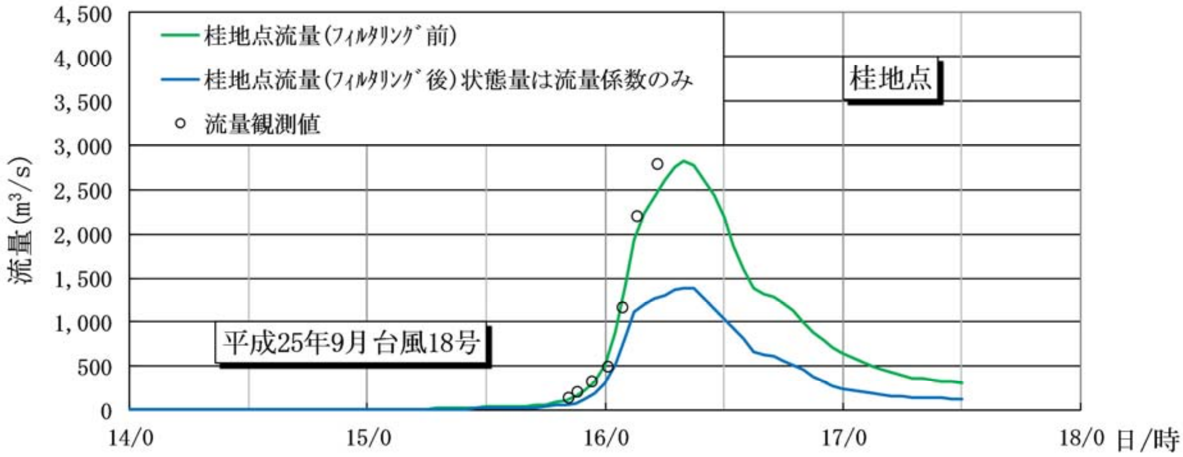


図 5.19　桂地点（桂川）流量のフィルタリング（2013 年 9 月・台風 18 号）

【各流量にかかる係数のみを状態量とした場合】

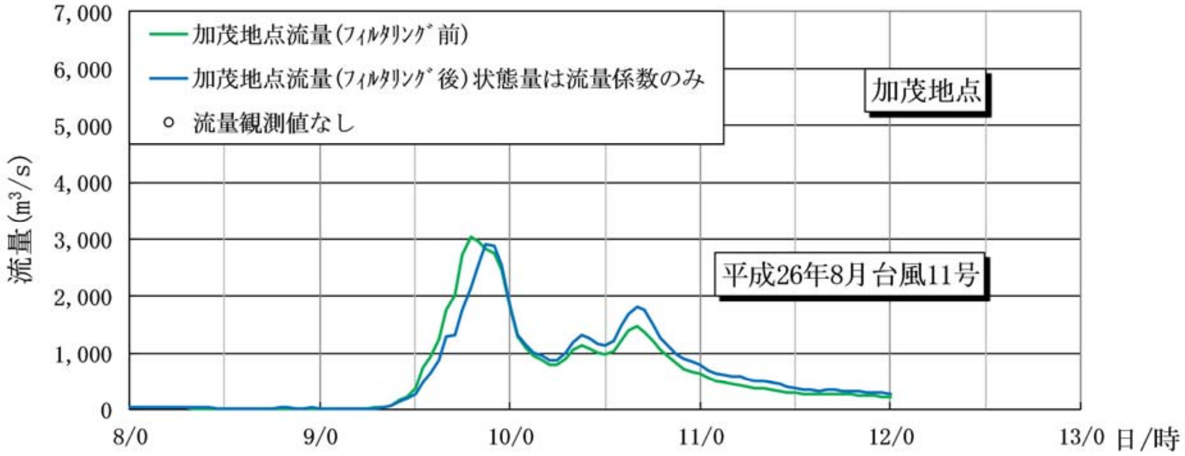


図 5.20　加茂地点（木津川）流量のフィルタリング（2014 年 8 月・台風 11 号）

【各流量にかかる係数のみを状態量とした場合】

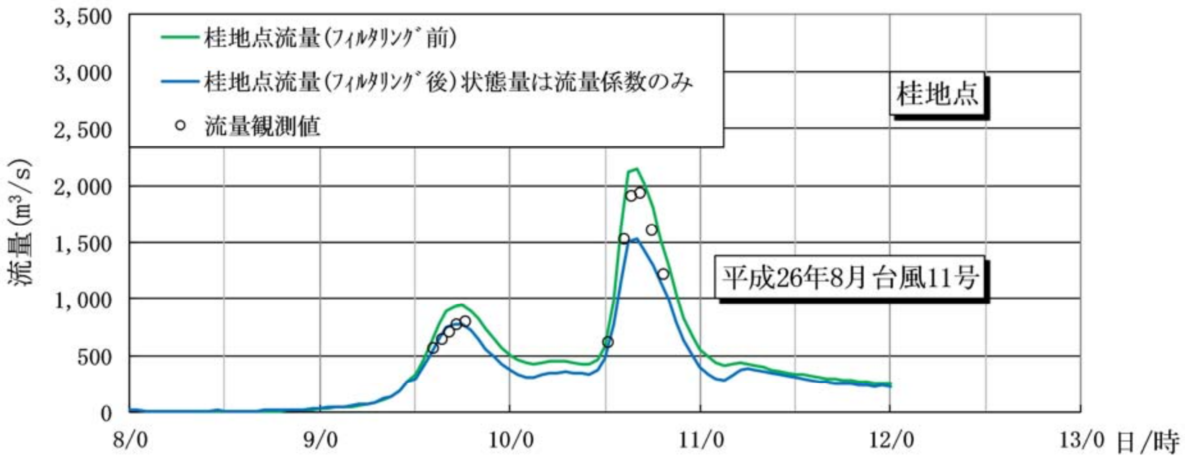


図 5.21　桂地点（桂川）流量のフィルタリング（2014 年 8 月・台風 11 号）

【各流量にかかる係数のみを状態量とした場合】

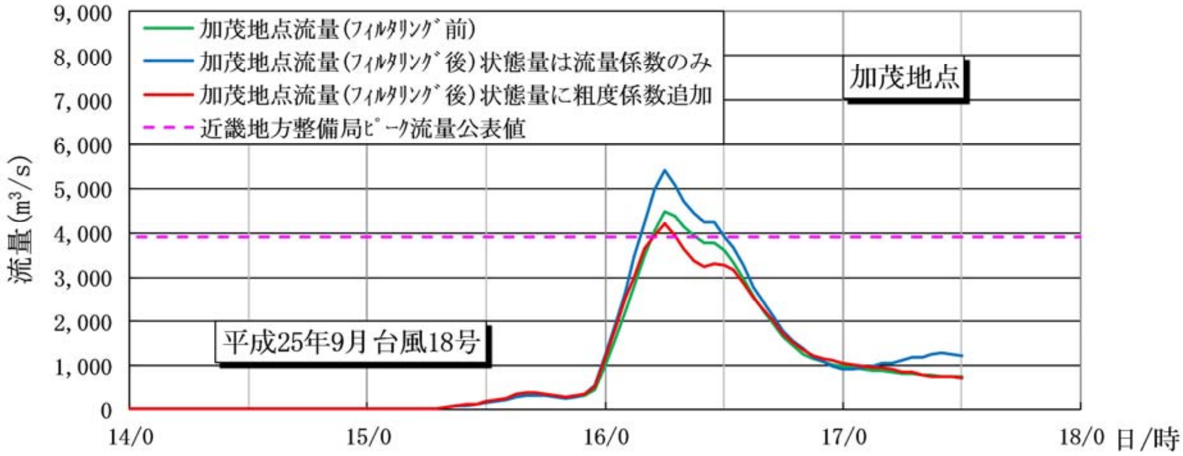


図 5.22　加茂地点（木津川）流量のフィルタリング（2013 年 9 月・台風 18 号）

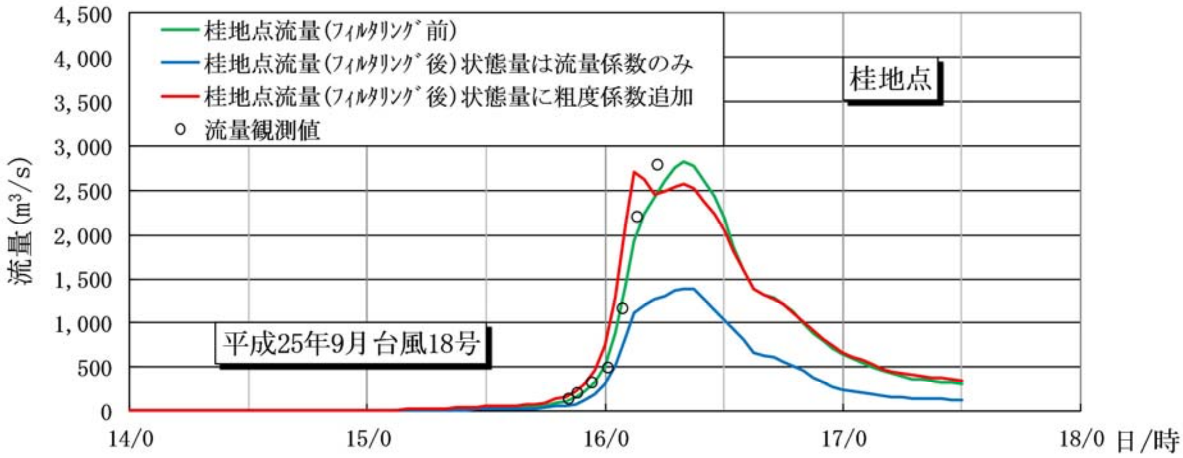


図 5.23　桂地点（桂川）流量のフィルタリング（2013 年 9 月・台風 18 号）

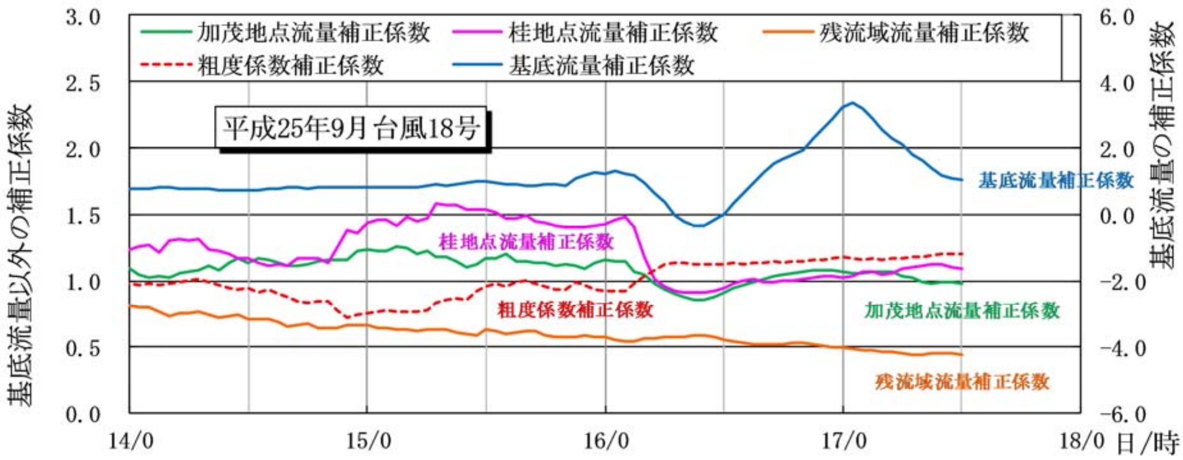


図 5.24　粗度係数補正を追加した場合の状態量変化（2013 年 9 月・台風 18 号）

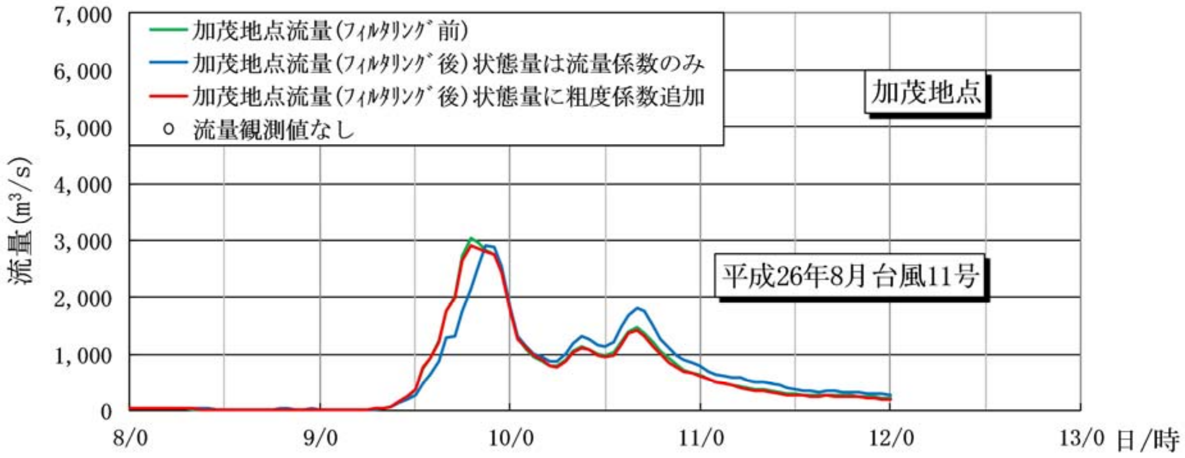


図 5.25　加茂地点（木津川）流量のフィルタリング（2014 年 8 月・台風 11 号）

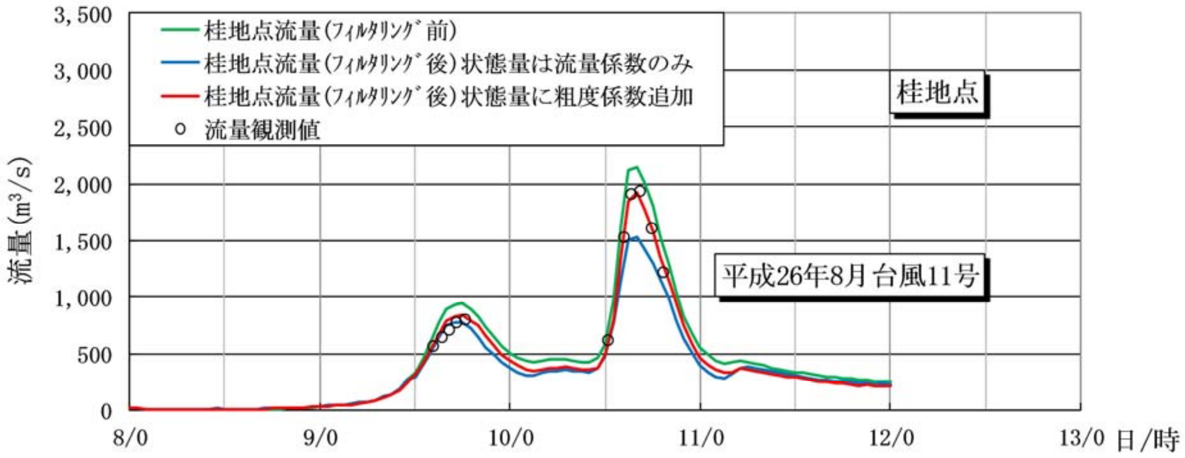


図 5.26　桂地点（桂川）流量のフィルタリング（2014 年 8 月・台風 11 号）

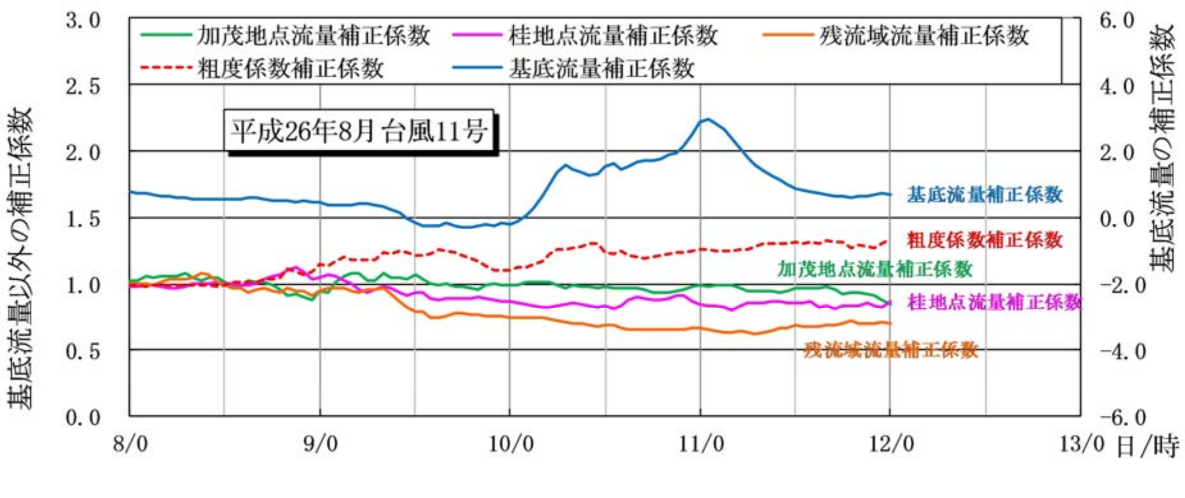


図 5.27　粗度係数補正を追加した場合の状態量変化（2014 年 8 月・台風 11 号）

5.5.2　粒子数の違いによるデータ同化結果の評価

上記までの粗度係数にかかる係数を状態量に追加した計算では，その係数を淀川三川の各河川において一律で調整することとした．ここでは，実際に各河川の河道内で生起している状況には違いがあると考え，各河川毎に粗度係数にかかる係数を用意し，各流量にかかる係数とあわせて計 8 つの状態量を設定して，初期分布を 5.5.1 と同様のガウス分布としたフィルタリング計算を実施する．粒子数を 200 個のままとした桂地点の流量のフィルタリング結果を図 5.28 に示す．また，粒子数を 500 個に増やした場合の桂地点の流量のフィルタリング結果を図 5.29 に示す．

上記の結果より，粒子数を 500 個に増やすことにより再現性は改善される傾向にあるものの，いずれの場合でもフィルタリング後の桂地点の境界流量は，流量観測値と整合していないことが分かる．粒子数 200 個については，上述のとおり，淀川水系洪水予測システムに要求される計算速度（予測結果の 10 分毎送信に対する即時性を確保できる計算時間）の観点から設定しているものである．したがって，粒子数をそれ以上に増やさなければ，その変化の妥当性が見込めないような状態量設定についてはリアルタイムの運用には適さないと評価する．

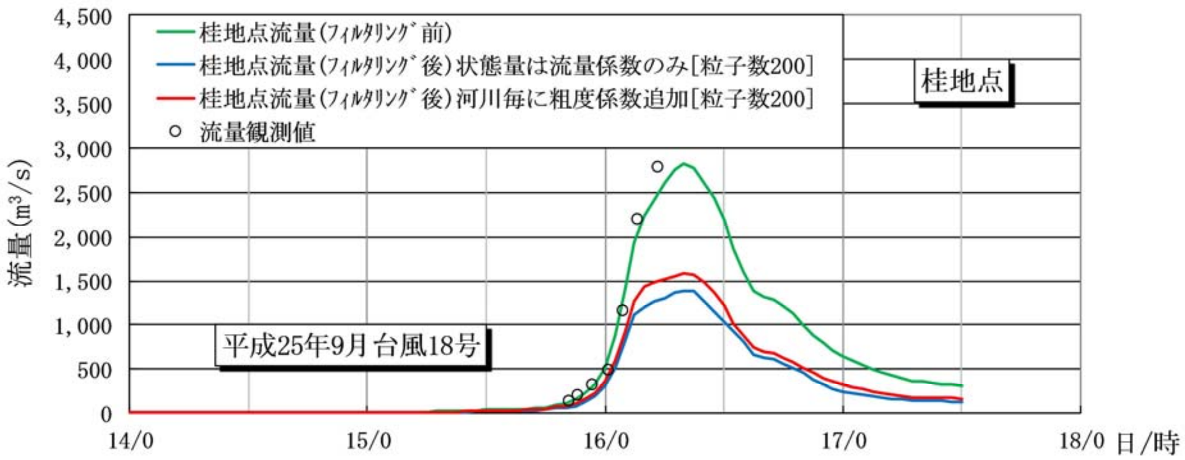


図 5.28　桂地点流量のフィルタリング（2013 年 9 月・台風 18 号）※状態量 8 つ・粒子数 200

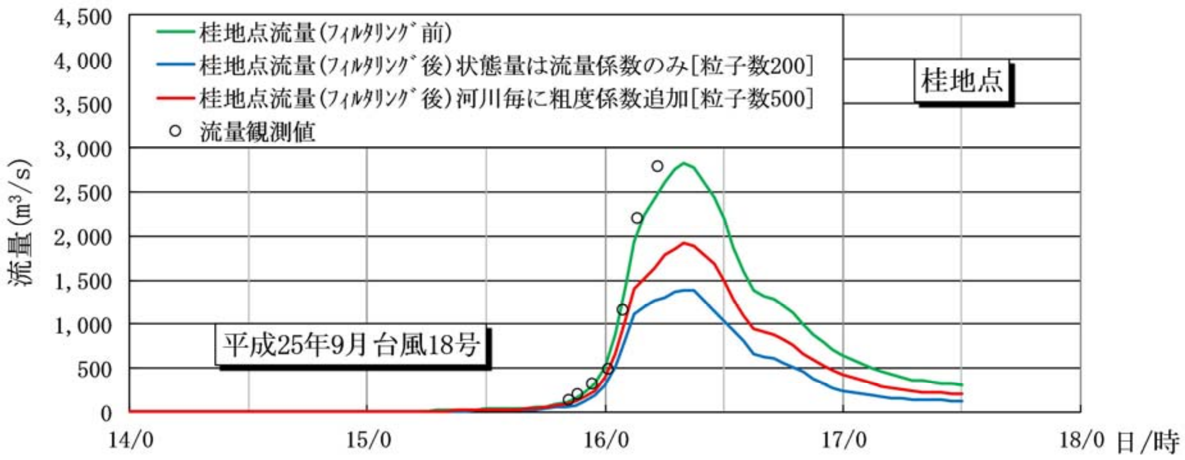


図 5.29　桂地点流量のフィルタリング（2013 年 9 月・台風 18 号）※状態量 8 つ・粒子数 500

5.5.3　観測値更新を行う対象観測所の違いによるデータ同化結果の評価

上記までのフィルタリング計算は，枚方地点の予測精度を重視する目的から，枚方地点の H-Q 換算流量のみに対して状態量の観測値更新を行う方法であった（図 5.30 上図）．しかし，この方法では，加茂地点（木津川）や桂地点（桂川）の流量や，それらの流量観測値などの再現性を左右する粗度係数にかかる係数等の状態量について，合流前の各河川の水理量に対する直接的な観測値更新が行えないため，状態量の推定結果や枚方上流地点の予測結果の妥当性を十分に説明できない場合があると考えられる．

そこで，枚方地点の流量の他に，八幡地点（木津川）と納所地点（桂川）の観測水位を用いて状態量の観測値更新を行う方法（多点フィルタ）を考える（図 5.30 下図）．これらの観測所の現時刻における観測値とある粒子の不定流解析値との間の重み（尤度）を式(5.18)より算定する．

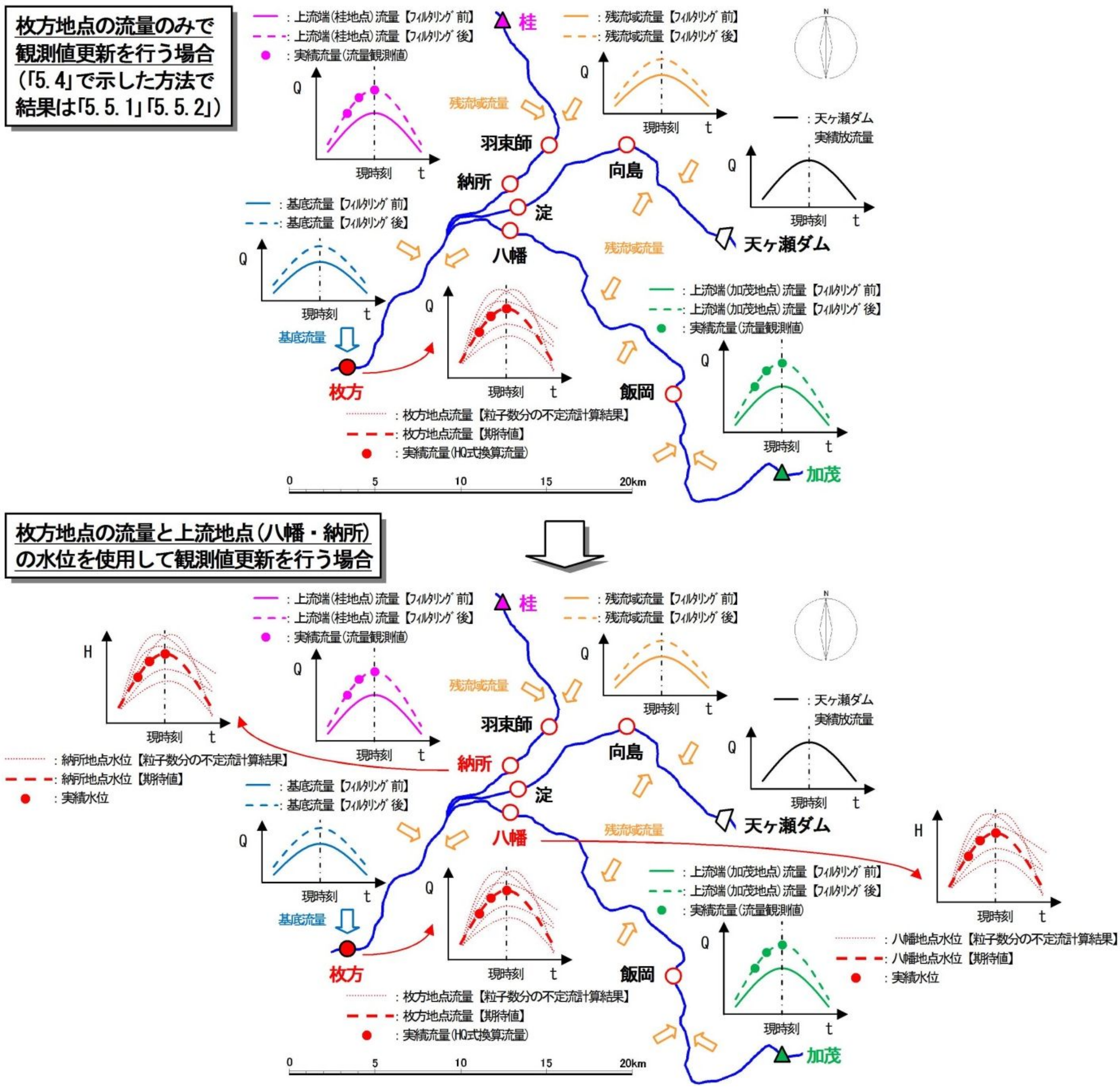


図 5.30　淀川三川合流部における水位予測モデルの構成（観測値更新を行う対象観測所）

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^k |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[X_c - X_o]^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} [X_c - X_o]\right\} \tag{5.18}$$

ここに，X_c は解析値の行列（Q_c：枚方地点流量，H_{c1}：八幡地点水位，H_{c2}：納所地点水位），X_o は観測値の行列（Q_o：枚方地点流量，H_{o1}：八幡地点水位，H_{o2}：納所地点水位）であり，Σ は誤差共分散行列，k は観測所数で，

$$X_c = [\ Q_c \quad H_{c1} \quad H_{c2}]^{\mathrm{T}} \tag{5.19}$$

$$X_o = [\ Q_o \quad H_{o1} \quad H_{o2}]^{\mathrm{T}} \tag{5.20}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_Q^2 & \rho_{QH1}\sigma_Q\sigma_{H1} & \rho_{QH2}\sigma_Q\sigma_{H2} \\ \rho_{H1Q}\sigma_{H1}\sigma_Q & \sigma_{H1}^2 & \rho_{H1H2}\sigma_{H1}\sigma_{H2} \\ \rho_{H2Q}\sigma_{H2}\sigma_Q & \rho_{H2H1}\sigma_{H2}\sigma_{H1} & \sigma_{H2}^2 \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

として,枚方地点の H-Q 換算流量の観測誤差σ_Qを 5%程度,水位の観測誤差σ_{H1},σ_{H2}を 0.5m,誤差の相互相関係数ρを全て 0.3 と設定した.

不定流解析は現時刻から遡った 12 時間前から開始し,現時刻において式(5.18)で尤度を求め,観測値更新後の枚方地点流量や八幡・納所地点水位の確率分布を推定する．また，将来の予測値は，現時刻の状態量が継続するものとして推定する．一方，八幡・納所地点以外の枚方上流地点（飯岡・羽束師・淀・向島地点）における水位予測は，別途，前述の 5.4.2 と同一の方法により実施する.

状態量を各流量にかかる係数のみとし，初期分布を 5.5.1 と同様のガウス分布として，粒子数を 200 個に設定したフィルタリング計算を実施する．枚方地点の現時刻推定水位を図 5.31 に，枚方上流地点（八幡・納所・淀地点）における 1 時間先予測水位を図 5.32～図 5.34 に示す.上記の結果より，枚方地点流量のみで観測値更新を行う方法と比較して，枚方地点の現時刻水位（図 5.10 と比較）は僅かに再現性が劣っているが，1 時間先の枚方上流地点における予測水位（図 5.12～図 5.14 と比較）は同等に再現性が高いことが伺える.

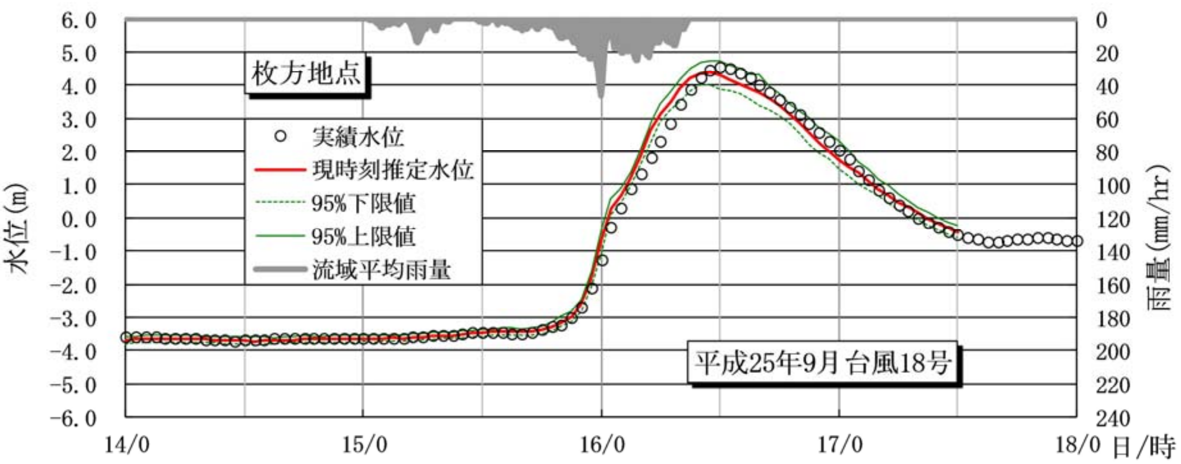


図 5.31　枚方地点（淀川）の現時刻推定水位（2013 年 9 月・台風 18 号）※多点フィルタ

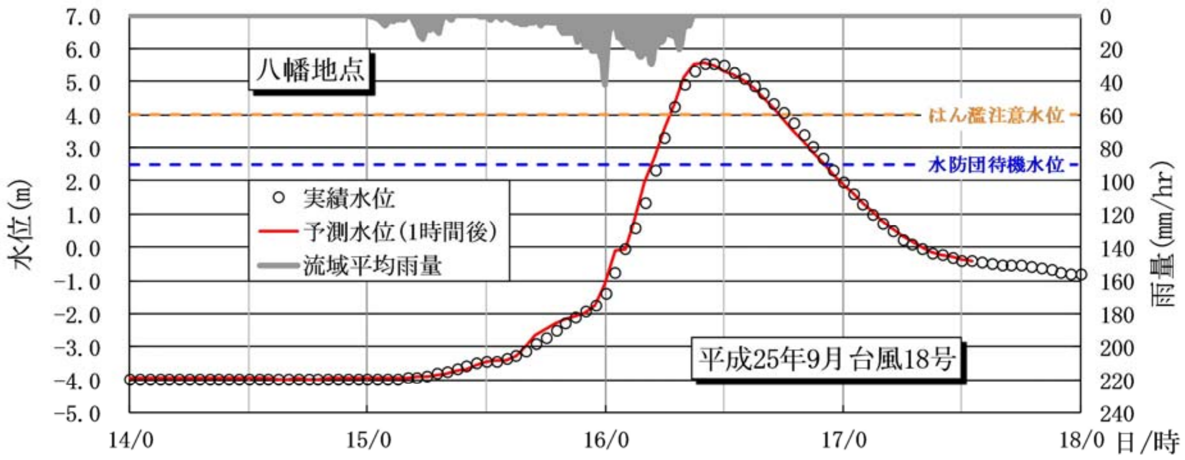


図 5.32　八幡地点（木津川）の 1 時間先予測水位（2013 年 9 月・台風 18 号）※多点フィルタ

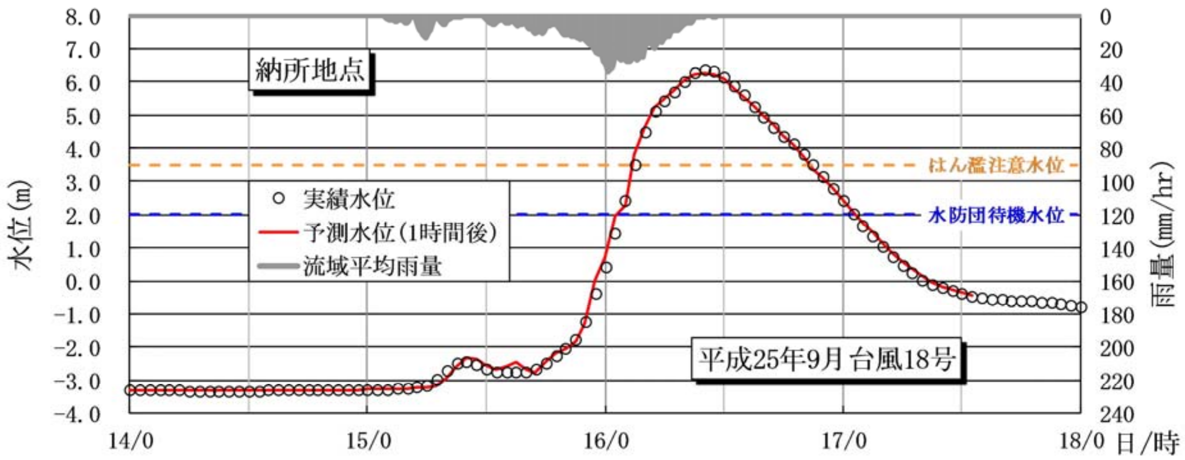


図 5.33　納所地点（桂川）の 1 時間先予測水位（2013 年 9 月・台風 18 号）※多点フィルタ

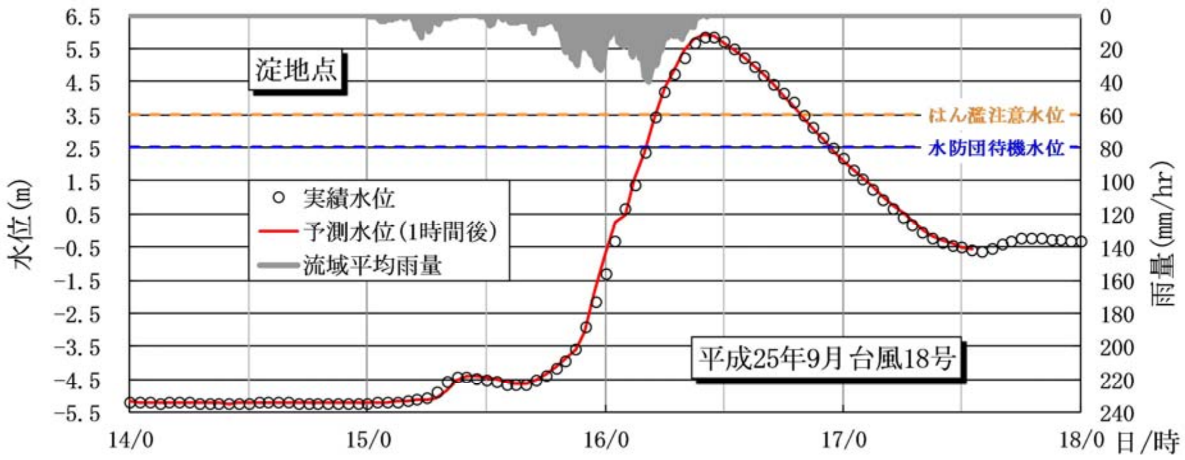


図 5.34　淀地点（宇治川）の 1 時間先予測水位（2013 年 9 月・台風 18 号）※多点フィルタ

また, この場合の加茂地点や桂地点の流量のフィルタリング結果を図 5.35 と図 5.36 に示す. これらの図より，枚方地点の流量のみで観測値更新を行う方法と比較して，フィルタリング後の加茂地点や桂地点の流量（図 5.18 や図 5.19 と比較）については，流量観測値などとの乖離が軽減していることが分かる．このことは，多点フィルタによる効果を示していると評価できる．

さらに, 木津川の粗度係数にかかる係数と桂川の粗度係数にかかる係数を分けて追加することにより計 6 つの状態量を設定し，初期分布を 5.5.1 と同様のガウス分布として，粒子数を 200 個に設定したフィルタリング計算を行う．図 5.35 と図 5.36 に，この場合の加茂地点や桂地点の流量のフィルタリング結果を併示する．また，各状態量の時系列変化を図 5.37 に示す．上記の結果より，枚方地点の流量のみで観測値更新を行う方法と比較し，フィルタリング後の加茂地点や桂地点の流量（図 5.22 や図 5.23 と比較）について，流量観測値などの再現性がさらに向上していることが分かる．したがって，多点フィルタにより観測値更新を行うことと，粗度係数を補正する状態量を追加することが妥当なデータ同化結果を得るために有効であると評価できる．

5.6 結　語

本章では，淀川三川合流部の複雑な流況に対して一次元不定流モデルを用い，Particle Filter を適用したデータ同化と水位予測結果から, 洪水中の粗度係数等の変化に着目した水位予測手法の適用上の課題とその対応方法のあり方を示した. 本章で得られた成果は, 以下のとおりである.

- 本章では，田中ら[6)] が提案している手法を基本とし，近年生起した規模が大きい 2013 年 9 月台風 18 号および 2014 年 8 月台風 11 号を対象に，Particle Filter によるデータ同化と水位予測を行った．それらの結果から，状態量を各流量にかかる係数のみとした場合のフィルタリング後の境界流量の再現性には不整合が認められることが分かった.
- そこで，粗度係数にかかる係数（全河川一律）を状態量に追加することにより境界流量の再現性の向上を試みた結果, 流量観測値等と整合しつつ粗度係数が適切な範囲で変化するといったデータ同化結果を得ることができ，本手法の妥当性が示された.
- 粗度係数にかかる係数を各河川毎に個別に設定するなど，状態量の数を多く設定すると，粒子数を増やしても境界流量の再現性について妥当な結果が得られないことが分かった. 洪水予測システムに要求される計算速度等の観点から設定される粒子数以上に粒子数を増やさなければ，その変化の妥当性を見込めないような状態量の設定は，リアルタイムの運用には適さないことが示唆された.
- 観測値更新を行う対象を枚方地点流量のみだけではなく, 合流前の各河川の観測所水位も追加した多点フィルタとすることにより，枚方地点の水位の再現精度は若干低下するが, 境界流量の再現性は向上することが分かった.
- Particle Filter を用いた水位予測では，上記までの手順等により，システムに求められる即時性と，状態量や粒子数の設定とのバランスに留意することが重要である．また，ある地点の予測精度を重視するか，系全体としての妥当性を重視するかにより，多点フィルタの採用を判断することが求められる.

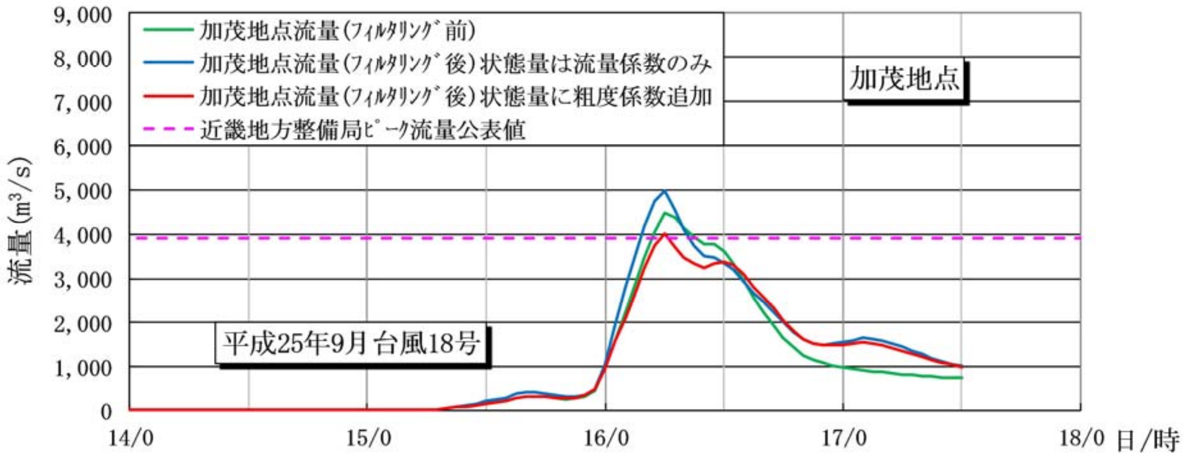


図 5.35　加茂地点（木津川）流量のフィルタリング（2013 年 9 月・台風 18 号）※多点フィルタ

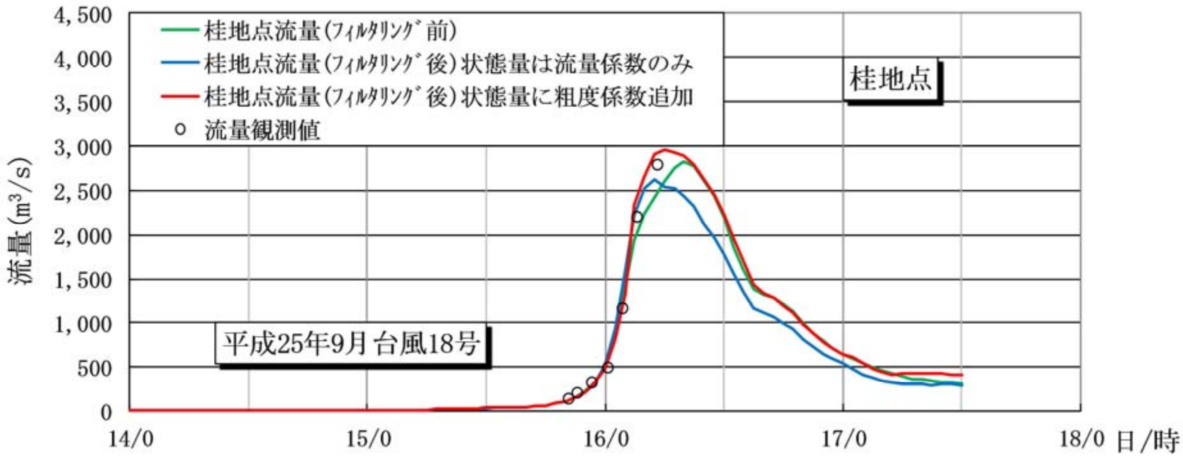


図 5.36　桂地点（桂川）流量のフィルタリング（2013 年 9 月・台風 18 号）※多点フィルタ

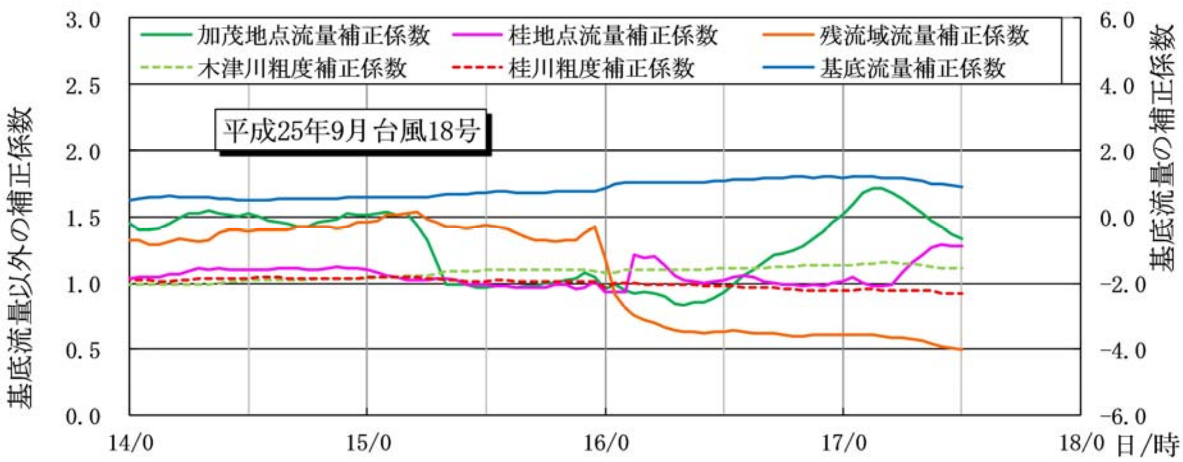


図 5.37　粗度係数補正を追加した場合の状態量変化（2013 年 9 月・台風 18 号）※多点フィルタ

参考文献

1) (財)北海道河川防災研究センター・研究所：「実時間洪水予測システム理論」解説書，2004.
2) 佐山敬洋，立川康人，寶馨：バイアス補正カルマンフィルタによる広域分布型流出予測システムのデータ同化，土木学会論文集 B，Vol.64/No.4，pp.226-239，2008.
3) M. Shiiba, X. Laurenson and Y. Tachikawa：Real-time stage and discharge estimation by a stochastic-dynamic flood routing model, *Hydrological Process.*, Vol.14, pp.481-495, 2000.
4) 立川康人，須藤純一，椎葉充晴，萬和明，キムスンミン：粒子フィルタを用いた河川水位の実時間予測手法の開発，水工学論文集，Vol.55，pp.S511-S516，2011.
5) Y. Kim, Y. Tachikawa, S. Kim, M. Shiiba, K. Yorozu, S. Jin Noh：Short term prediction of water level and discharge using a 2D dynamic wave model with Particle Filters, *Journal of Japan Society of Civil Engineers*，Vol.68/No.4，pp.I_25-I_30，2012.
6) 田中耕司，辻倉裕喜，大八木豊，杉浦正之，森田宏，志鹿浩幸，井川智博：淀川三川合流区間を対象にした水位予測システムの開発，河川技術論文集，Vol.19，pp.241-246，2013.
7) 辻倉裕喜，田中耕司，宮本賢治：水位予測における粒子フィルタの適用上の課題とその対応，土木学会論文集 B1(水工学)，Vol.72/No.4，I_181-I_186，2016.
8) 伊藤剛：数値解析の応用と基礎（水理学を中心として），pp.89-99，アテネ出版，1971.
9) 北川源四郎：時系列解析入門，pp.209-222，岩波書店，2005.
10) 樋口知之：粒子フィルタ，電子情報通信学会誌，Vol.88/No.12，pp.989-994，2005.

第6章

河口砂州崩壊の影響を受ける河道区間の水位予測手法の開発に関する研究

6.1　概　説

2011 年 9 月台風 12 号の襲来では，熊野川において既往最大規模の洪水が発生し，紀伊山地で深層崩壊が多発して尊い命が失われた．熊野川では，この洪水に限らず，その地理的な要因から毎年のように大中様々な洪水が発生しており [1)] , 土砂流出量の多い川としても知られている [1)] .

本章で対象にしている洪水予測は，熊野川と支川の相野谷川の直轄管理区間における洪水予報基準点である成川地点や高岡地点の水位予測を目的としたものである．この際，図 6.1 や図 6.2 に示すような河口砂州の存在が水位予測を難しくしている．河口砂州は，毎年同じような形状・位置で存在しているわけではない. その年の砂州は前年の洪水によって崩壊した後に形成されるため，崩壊の程度によっても異なることが想定される．過去の観測記録から，河口砂州の崩壊が開始する流量は，平均的に 8,000m^3/s 程度と推察される．しかしながら，同一年で数回も洪水が発生した場合は，河口砂州が形成されないためその影響を受けない洪水もある（図 6.4 参照).

このような特性を有する河川の洪水予測では，河口砂州形状の逐次観測と，砂州崩壊の推定，ならびに水位予測を並行的に実施することが考えられる．しかし，観測施設・体制の整備という観点から，予測計算に必要なデータを取得して，所定の時間内で予測結果を提供することは困難であると言わざるを得ない.

河口砂州の崩壊過程について，河口砂州そのものの物理的な変動量を捉えるのは，現在の観測体制からは困難であるため，本章では，熊野川の現在までの状態を推定する方法として，非線形フィルタリング手法を用いる. この手法は, システム方程式から算出される水位と観測水位から, 時々刻々の観測水位を説明する変数をフィルタリングし, その挙動を捉えようとするものである. すなわち, 現時刻における観測水位との誤差を補正する方法に非線形フィルタリング手法を用い, 河口砂州の挙動等を追跡した上で, 同時に現時刻より先の水位を予測しようと試みるものである.

このような取り組みの事例として，立川ら[2)]，Kim et al.[3)]，田中ら[4)]は，Particle Filter を用いた水位予測システムの適用性について検討している．立川らは，淀川水系桂川の流況再現に一次元不定流モデルを用い，現時刻の計算水位を観測水位に同化させるために Particle Filter を適用しており，粗度係数と河道断面形状および上流端に与える流量にかかる係数を状態量とし，逐次推定して水位予測を行う方法を示した[2)]．Kim et al.は，河道地形や粗度係数等の平面的な変化を適切に考慮するために平面二次元不定流モデルを用い，Particle Filter により粗度係数と境界条件を時々刻々推定しながら水位を予測する方法を示した[3)]．また，田中らは，淀川水系の洪水予測システムを構築するにあたって，Particle Filter を適用して，水位流量関係式（以下，H-Q 式という）の一意的な関係が担保できない背水区間の予測水位の精度を向上させている[4)]．

上記のような取り組みは，未だ，研究事例が蓄積されつつある検討手法であるが，実務上は，計算速度やシステム運用上の課題を如何に解決していくかが重要になる．本研究は，熊野川水系の洪水予警報や水防警報の業務に資する洪水予測システムの構築の一貫として行うものである．本章の対象である成川地点や高岡地点などの河口砂州の背水区間における水位予測の手法には，現時刻までの観測水位に対して，これに適合させる状態量（流域流出量，河口砂州変動高等）を推定し，現時刻時点での最も確からしい水位を予測する方法が有効であると考える[5)]．河口砂州の崩壊を伴う非線形的な現象に対して，Particle Filter 等の非線形フィルタリング手法を用いて，モデル上で河口砂州の変動等を説明する状態量変化や水位変化の把握が可能であるかを検討し，現時刻より先の水位を予測するためのフィードバック・システムを構築することを目的とする．

6.2　熊野川の河口砂州の変動

熊野川の河口付近は砂州が発達しやすい状況下にあり，河口砂州が存在する場合に洪水が生起すると，上流の成川地点等の水位は背水の影響を受けることとなる．また，洪水中には発達した河口砂州の崩壊（以下，河口砂州フラッシュという）が発生する．例えば 2011 年 7 月台風 6 号では，図 6.1 や図 6.2 に示すように，河口砂州は洪水前後で横断方向約 600m にわたって崩壊していることが目視観測により確認されている．

このとき，河口付近のあけぼの地点の観測水位と流量観測所である相賀地点の H-Q 換算流量を整理したものを図 6.3 に示す．同図より，洪水中の水位流量関係（以下，H-Q 関係という）は一意的な関係とならず，流量が増加しているにも関わらず水位は低下しているといった現象が生じており，河口砂州の崩壊が水位に及ぼす影響は大きいことが分かる．

複数の洪水を対象とした現地観測による河口砂州フラッシュの状況と H-Q 関係からみると，河口砂州フラッシュは相賀地点流量が概ね 8,000m^3/s 程度で発生すると推察されるが，一方で，河口砂州フラッシュの影響の大きさについては，洪水前の砂州の発達状況により大きく異なる．上記の 2011 年 7 月台風 6 号以降の 3 洪水について，洪水前後の河口砂州の状況を図 6.4 に示す．2011 年 7 月台風 6 号により大きくフラッシュされた後，再堆砂が進むまでに発生したこれらの洪水では，洪水前後の河口砂州の状況に大きな変化がないため，水位に及ぼす河口砂州の影響は小さいことが想定される．

図 6.1　河口砂州の崩壊状況（2011 年 7 月・台風 6 号）

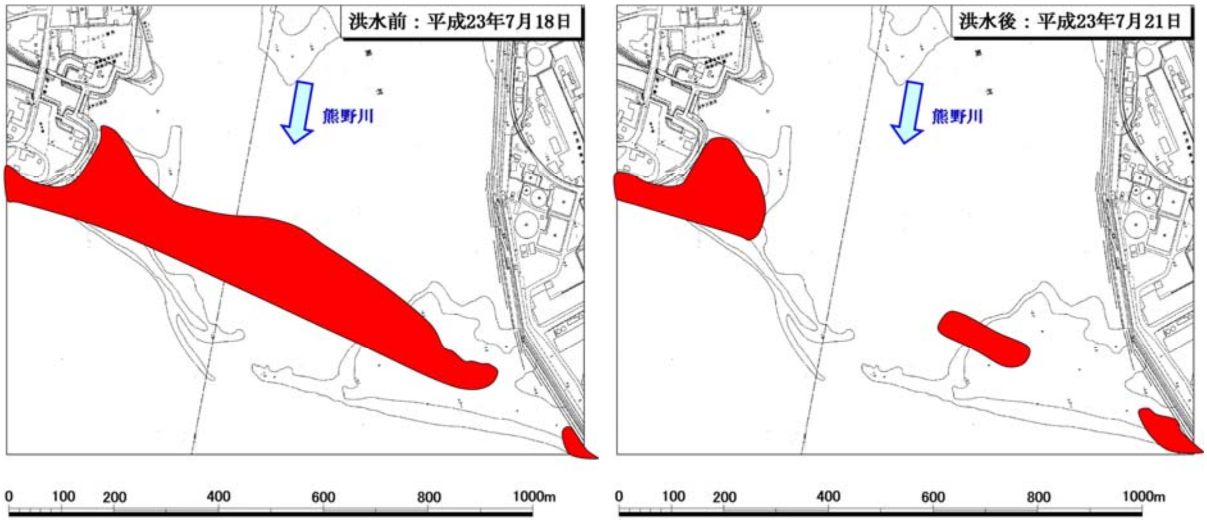


図 6.2　洪水前後の河口砂州の状況（2011 年 7 月・台風 6 号）

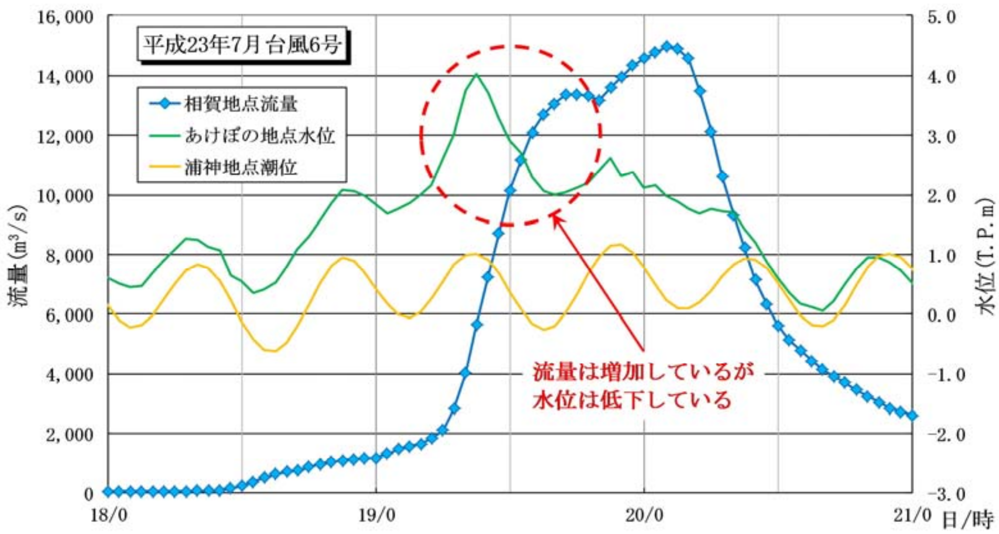


図 6.3　河口部の水位流量関係（2011 年 7 月・台風 6 号）

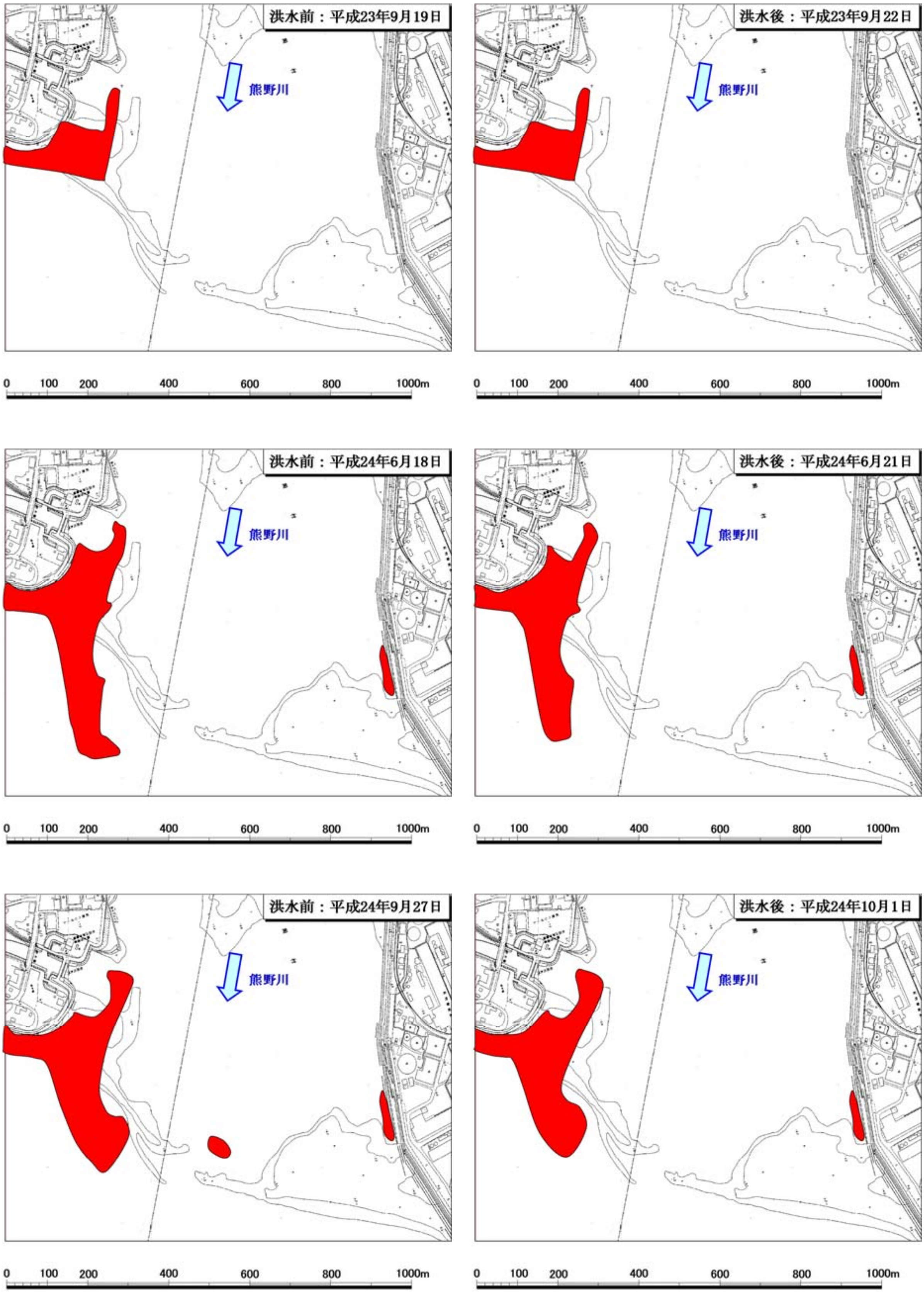


図 6.4　洪水前後の河口砂州の状況

（上：2011 年 9 月・台風 15 号，中：2012 年 6 月・台風 4 号，下：2012 年 9 月・台風 17 号）

このように，河口砂州フラッシュの影響により，H-Q 関係は一価性の H-Q 式では表すことができないため，H-Q 式により推定あるいは予測流量を水位に変換する手法の洪水予測への適用は困難であると考えられる．言い換えると，現時刻の状態を推定できないということは，その後の予測計算の精度を低下させる大きな原因となる．

また，不定流モデル（水位追跡モデル）を使用するとしても，このような砂州の崩壊等による水位変動を反映できるモデルが必要となる．日々稼動する水位予測システムを想定すると，砂州フラッシュを含めた現況の河口砂州の状況を再現できるようなモデルが求められることになる．このとき，洪水中のリアルタイムの河床状況が観測できないため，河床変動モデルなどを観測値に対してデータ同化させることは実質的に難しい．仮に，河床高等がリアルタイムでかつ面的に観測できたとしても，水流・流砂のシステム方程式（支配方程式）を観測値に対してデータ同化させるために要する時間は増大してしまい，実用的ではない．

以上から，河口砂州の背水区間における水位予測手法には，現時刻までの観測水位に対して，不定流モデルによる計算水位を適合させる状態量（流域流出量，河口砂州変動高等）を推定するフィルタリング手法が有効であると考えられる．

6.3　洪水予測（水位予測）モデルの構築

6.3.1　分布型流出モデルの適用

流域流出量の算定には，流域全メッシュに鉛直方向に設定した 3 層のモデル（表層，不飽和層，地下水層モデル）と河道モデルから構成される分布型流出モデル（図 6.5）を適用する．各層の流出成分をメッシュ標高（図 6.6）より作成した落水線（図 6.8）に沿った河道モデルに入力し，Kinematic Wave 法で河道流量を逐次計算するモデルである．特徴としては，各層・各メッシュのパラメータに土地利用（図 6.9），土壌（図 6.10），表層地質（図 6.11）の水文学的な特性を反映できることである．なお，猪俣ら[6)] が適用したモデルを参考に，250m メッシュで構築する．

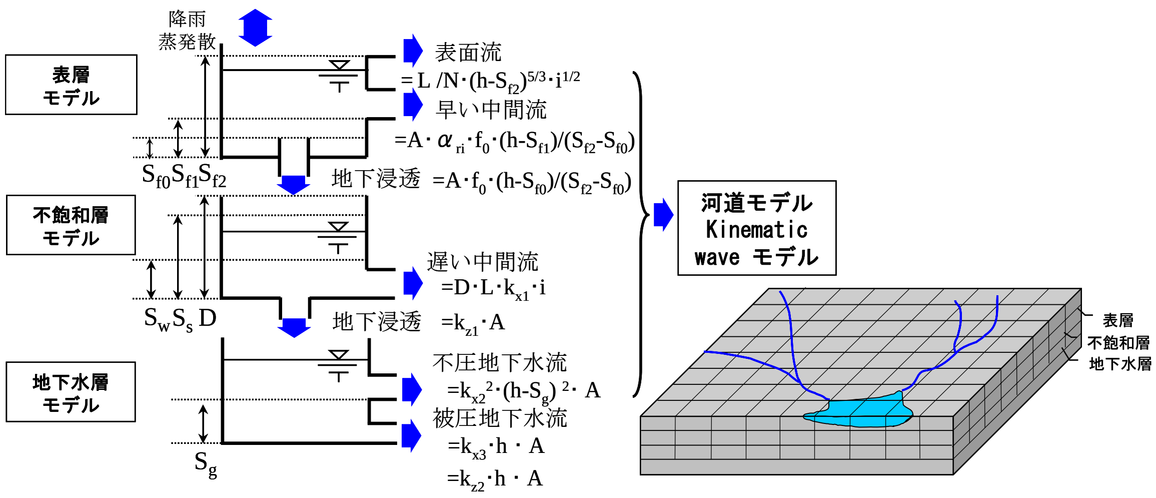
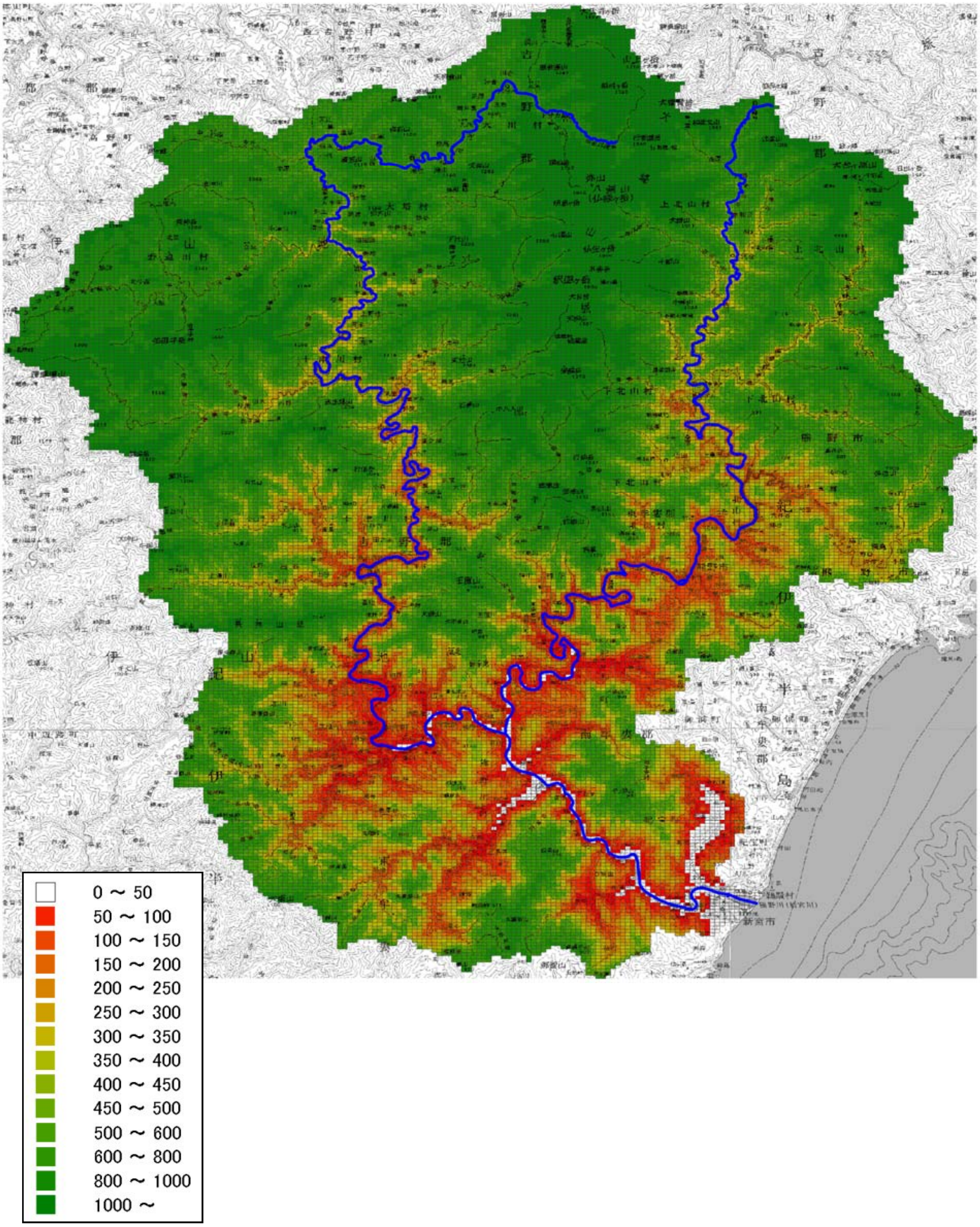


図 6.5　分布型流出モデルの概念図（土木研究所モデル）



単位：T.P.m

図 6.6　メッシュ標高分布図

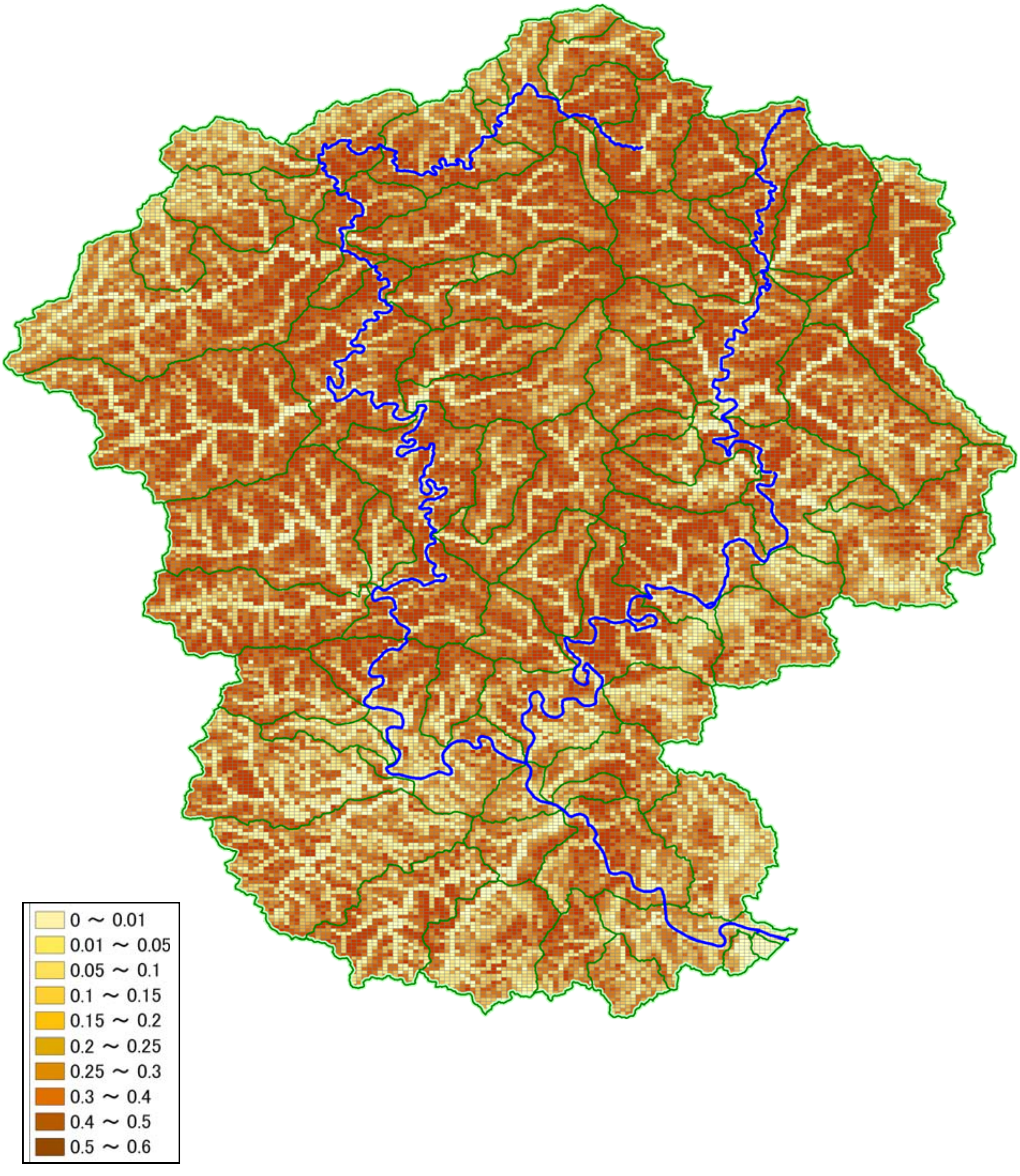


図 6.7　地表勾配分布図

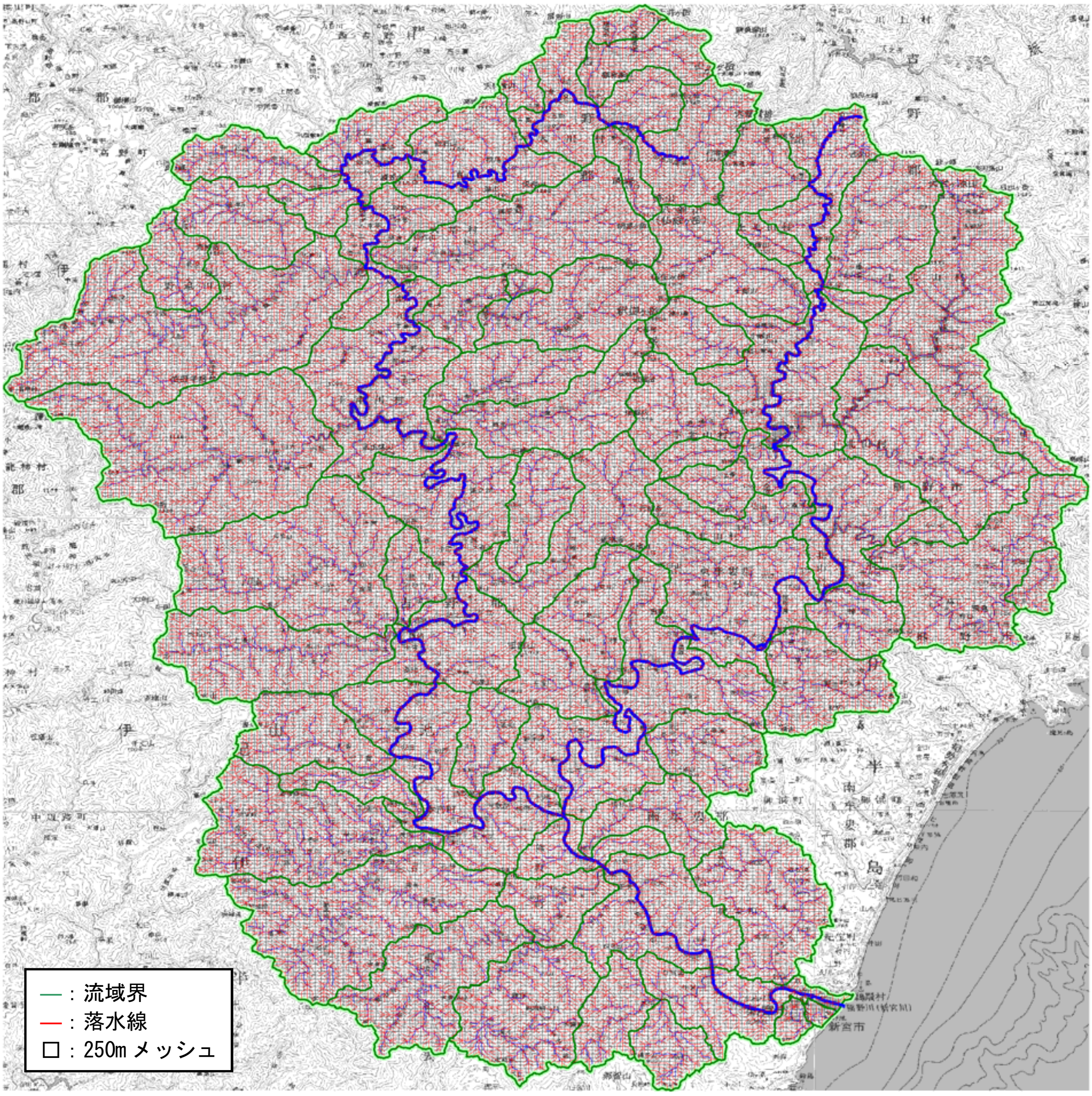


図 6.8　落水線図

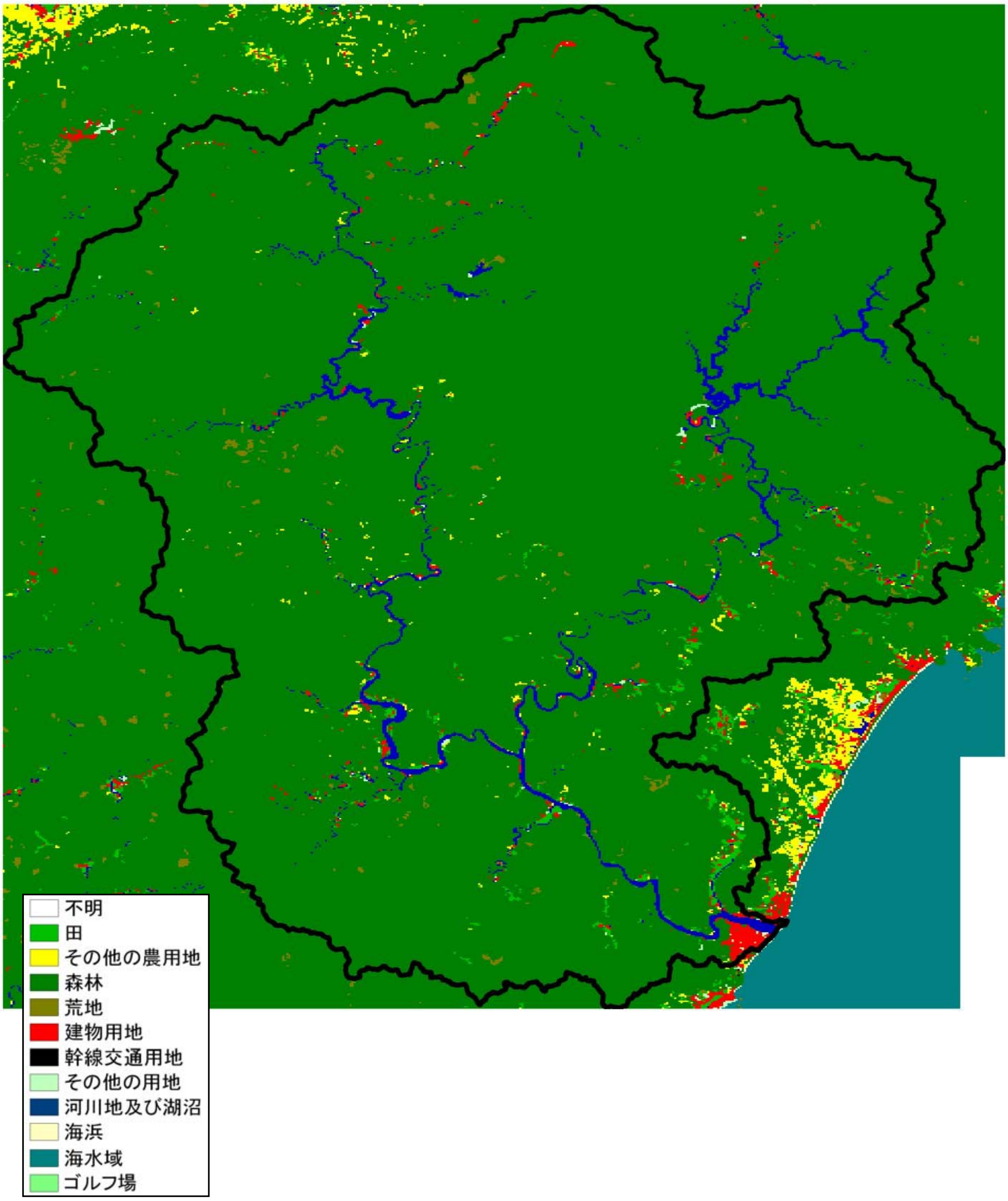


図 6.9　土地利用分布図

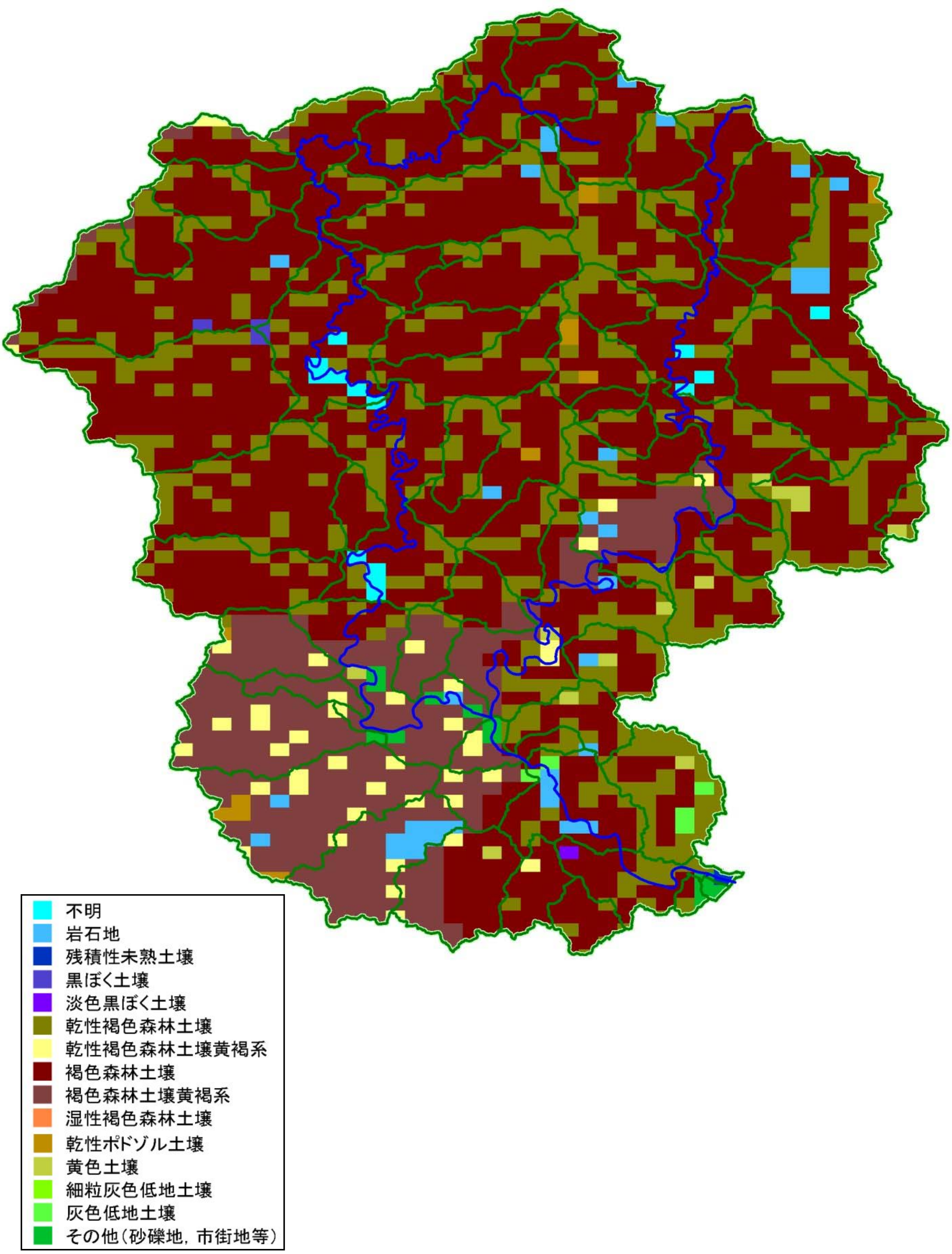

不明
岩石地
残積性未熟土壌
黒ぼく土壌
淡色黒ぼく土壌
乾性褐色森林土壌
乾性褐色森林土壌黄褐系
褐色森林土壌
褐色森林土壌黄褐系
湿性褐色森林土壌
乾性ポドゾル土壌
黄色土壌
細粒灰色低地土壌
灰色低地土壌
その他（砂礫地，市街地等）

図 6.10　土壌分布図

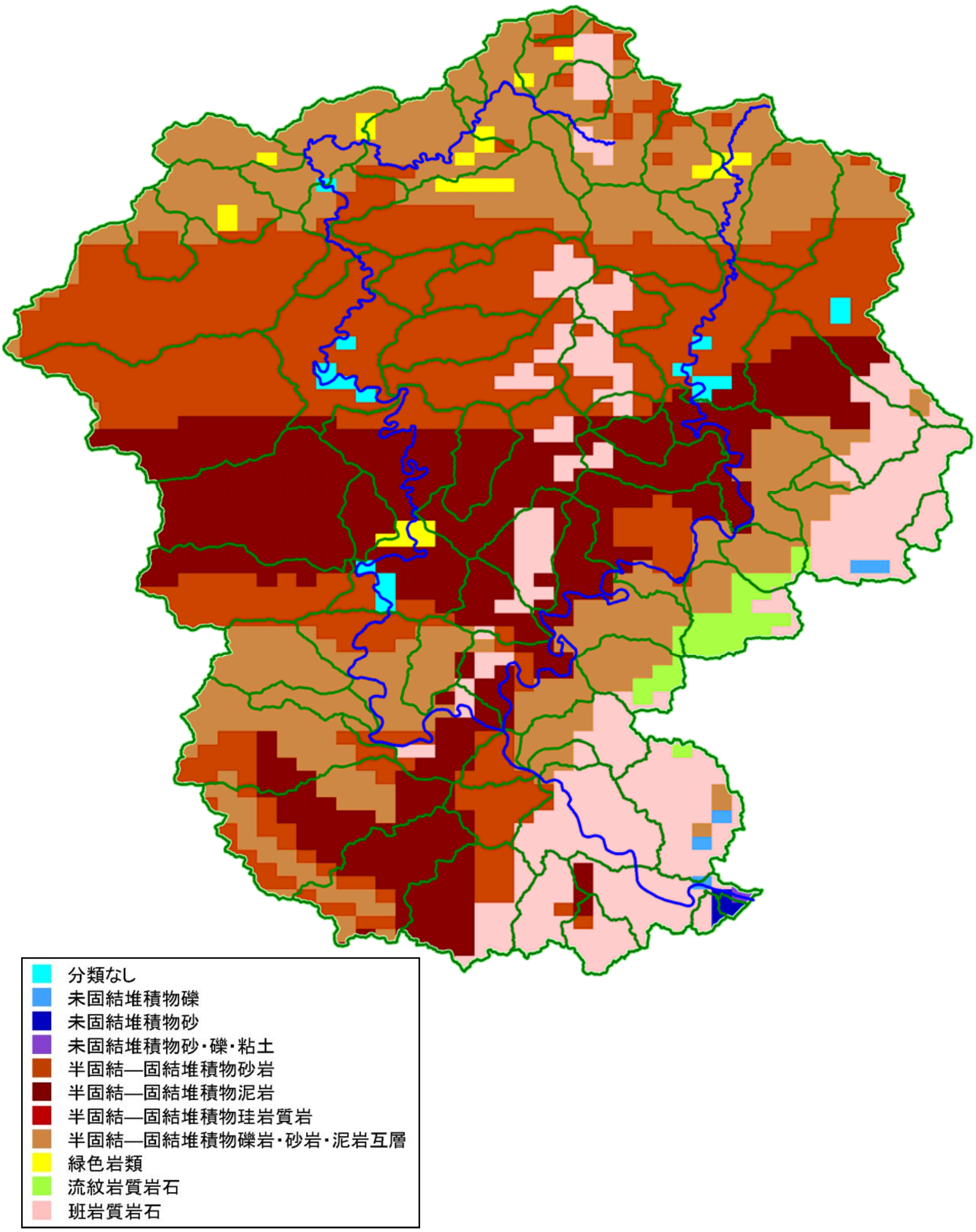


図 6.11　表層地質分布図

6.3.2　水位予測モデルの構築

水位予測モデルは，図 6.12 に示す熊野川本川および支川相野谷川の直轄区間を対象として，分布型流出モデルによる計算流出量を上流端および横流入条件，浦神地点の潮位（予測計算では天文潮位）を下流端条件にした不定流モデルを構築し適用する．

本章では，成川地点の水位をフィルタリングの対象とし，河口砂州の状況を表現する状態量や境界条件として与える流量等を逐次推定しながら，区間内の水位を予測することを考える．なお，次節で概説する 2 種類のフィルタリング手法による精度検証を実施し，その適用性を検討する．ここで，河口砂州フラッシュなどの状況を表現する状態量には下流端断面の河床変動高（dz）を選択し，熊野川上流端，相野谷川上流端，残流域の流量にかかる係数を合わせた計 4 つの変数を状態量として設定する（図 6.13 参照）．

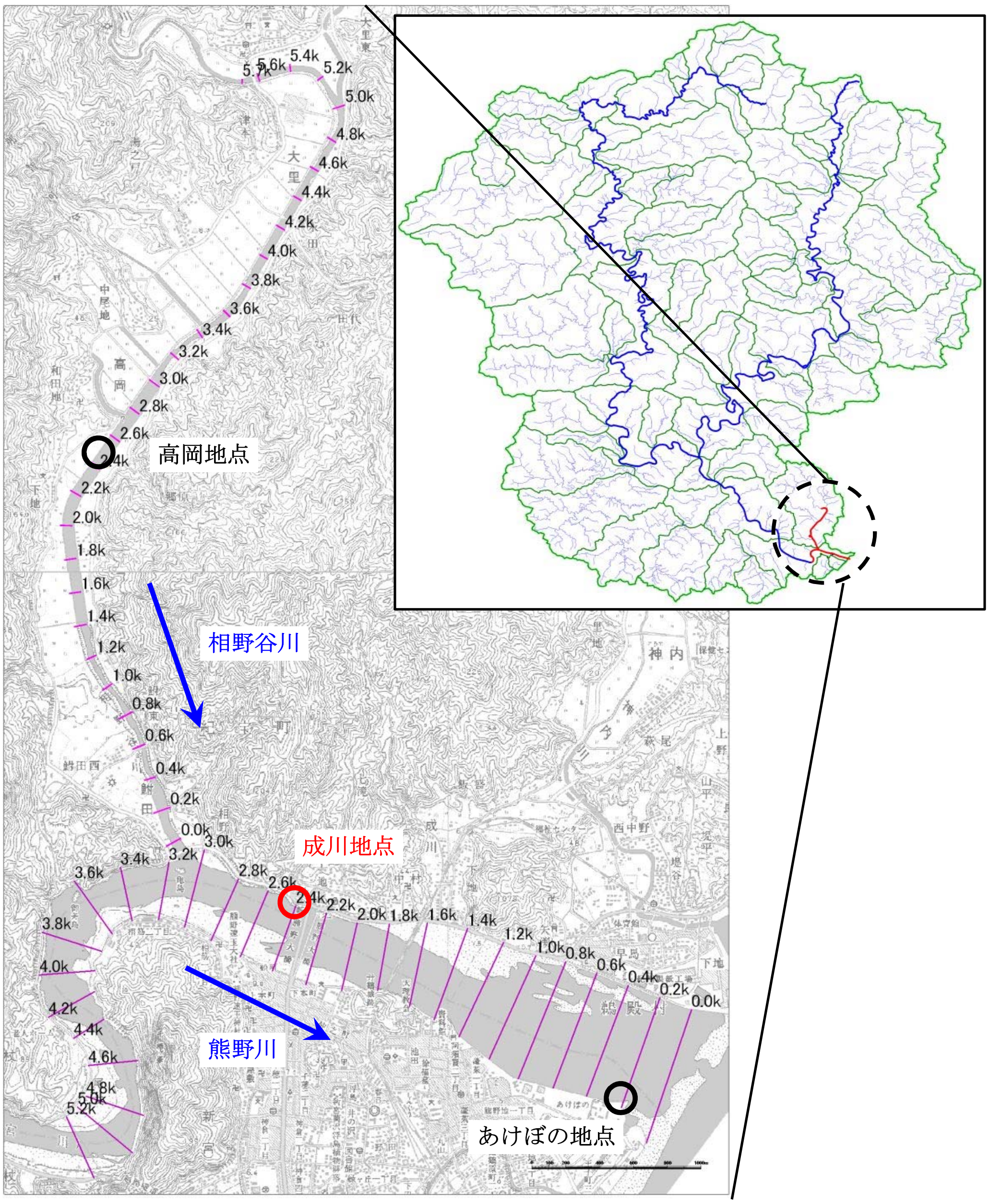


図 6.12　不定流モデルの適用区間

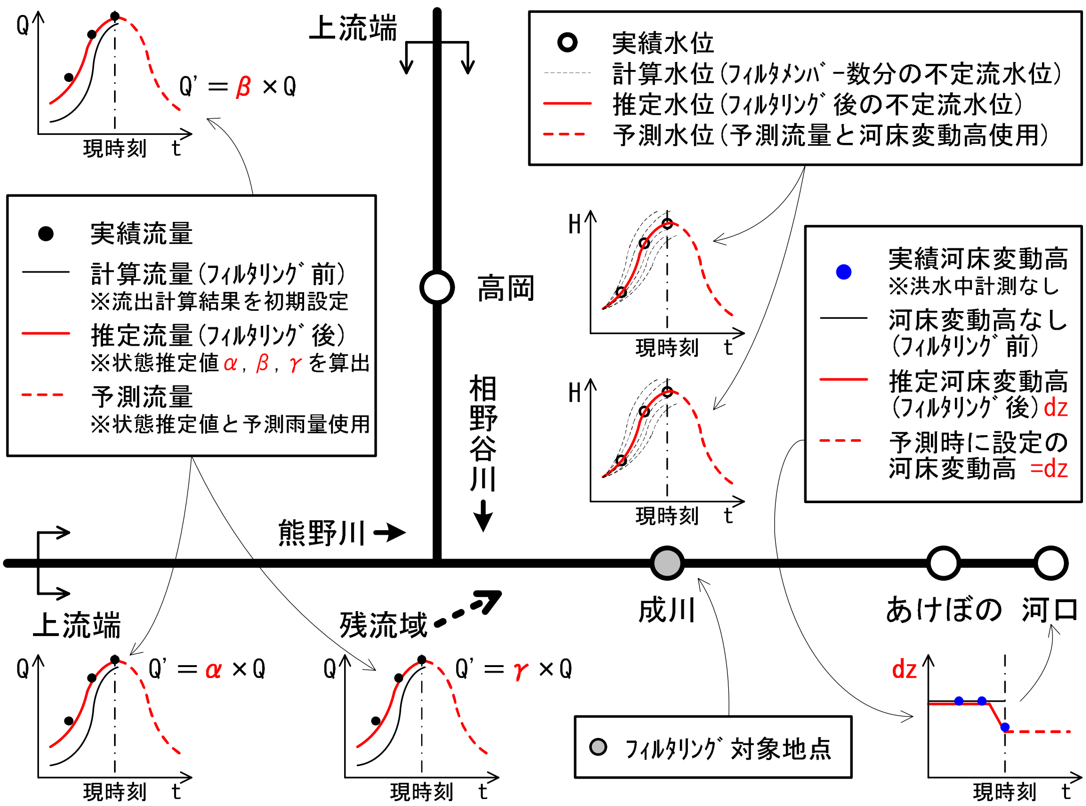


図 6.13　水位予測モデルの概要

6.3.3　不定流モデルの基礎式

熊野川および相野谷川の対象区間における水位予測モデルに適用する不定流モデルの基礎式を以下に示す．

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t}=q \tag{6.1}$$

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{n^2|Q|Q}{A^2R^{4/3}} \tag{6.2}$$

t は時間座標，x は流下方向にとった空間座標，A は通水断面積，Q は流量，g は重力加速度，H は水位，R は径深，n は粗度係数である．

式(6.1)と式(6.2)を陽形式差分法（2step Lax Wendroff 法）により解く．計算の安定性を考慮し，差分時間間隔を 2.5s，空間間隔を約 200m として差分計算を行う．2step Lax Wendroff 法においては，下流端の格子に式(6.2)を使用できず，式(6.1)のみ使用することとなる．このため，水位，流量，H-Q 式のいずれかを与えることにより，下流端の水位や流量を求めることになる．ここでは，下流端条件に浦神地点の潮位を与えることにより，式(6.1)を用いて流量を計算する．

以下では，図 6.1～図 6.4 に示す 4 洪水を対象とし，構築した洪水予測（水位予測）モデルや次節に示す水位予測方法の適用性を検証する．

6.4　水位予測方法

6.4.1　フィルタリング手法の適用

フィルタの基礎式は, 式(6.3)の状態方程式と式(6.4)の観測方程式で表現される. ここで, 式(6.3)は一期前の状態量から現時刻の状態量を推定するものであり, 一期前における時間更新後の値を現時刻からみると誤差があるため，状態方程式にシステムノイズ w が加わる．また，式(6.4)は観測推定値 $h(x_t)$ と観測値 y_t の関係を示しており，観測方程式にも観測ノイズ v が加わる.

$$x_t = f(x_{t-1}) + w \tag{6.3}$$

$$y_t = h(x_t) + v \tag{6.4}$$

不定流モデルの状態量は上流端流量, 残流域流量にかかる係数, 下流端断面の河床変動高（dz）である．これらのパラメータの変化を示した式が状態方程式である．また，式(6.4)の $h(x_t)$ は，状態量から観測推定値を算出するもので，不定流モデルで解析することを示している.

非線形性が強い水位変化などには，Kalman Filter 等の誤差分布にガウス分布を仮定した手法の適用性は低いとされてきたが，近年の研究の進歩により，非線形の状態空間モデルへの拡張が試みられている．本章では，ガウス分布の制約は比較的強いが計算速度は比較的速い Unscented Kalman Filter [7] と，ガウス分布の制約はないが粒子数によっては計算速度が比較的遅くなる Particle Filter [8] の 2 種類の手法について, その適用性を検討する. 以下に両手法の特徴を示す.

(1)　Unscented Kalman Filter（UKF）

Ensemble Kalman Filter では安定的に解を得るためにアンサンブルメンバーを多く用意する必要があり，不定流モデル等の解析に時間を要する場合には，リアルタイムでの運用が難しい [9]．この問題解決のため Unscented Transformation（UT）法を用いてメンバー数を減少させたものが Unscented Kalman Filter である.

Unscented Transformation や，Unscented Kalman Filter のアルゴリズムについては，第 2 章および第 3 章を参照されたい.

(2)　Particle Filter（PF）

個々の粒子に状態量を与え, 粒子の密度で確率分布を近似するモンテカルロ近似を用いる. 時間更新と観測値更新にはベイズの定理を用いることにより，Kalman Filter において前提となっていたガウス分布の制約をなくし任意分布のフィルタリングを可能としたものである.

Particle Filter の概要やアルゴリズムについては，第 2 章および第 5 章を参照されたい.

ここでは，Particle Filter の特徴でもある重み付きサンプリングと，Kalman Filter で使用する Kalman Gain との違いを整理する.

図 6.14 の観測推定値と状態量の空間において，粒子あるいはメンバーの値のバラツキの傾向が理論解を示す．理論解を直線近似した場合の勾配が Kalman Gain であり，観測値が得られたときに近似した直線から状態量の期待値を逆算するものである．一方で，重み付きサンプリングは観測値周辺の状態量を重み付き平均したものを期待値とする.

粒子のバラツキの中に観測値がある場合で，理論解の非線形性が強いときには，重み付きサンプリングが良い結果を与える．粒子のばらつきの外に観測値がある場合には，重み付きサンプリングでは観測値に最も近い粒子の値が期待値となり，外挿できないことが分かる．一方で，Kalman Gain を使用する方法は直線の外挿により期待値を求めるため，ある程度の精度を維持することができる．これより，Particle Filter では，外挿にならないようにするために，粒子数を多くとる必要があることが分かる．

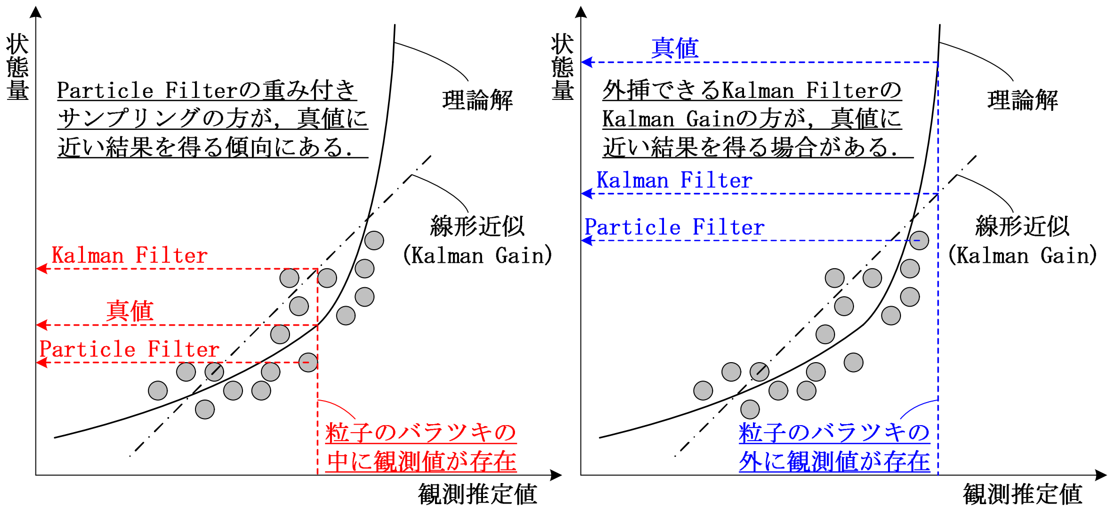


図 6.14　Kalman Gain と重み付きサンプリングの違い

6.4.2　成川地点等の水位予測方法

成川地点の水位を対象として，熊野川上流端，相野谷川上流端，残流域の流量にかかる係数，下流端断面の河床変動高(dz)などの状態量を，上記の 2 つの手法を用いてフィルタリングする．

一期先の状態量の確率分布を推定する時間更新では，一期前の状態量にシステムノイズを追加（$x_t = x_{t-1} + w$）するのみとする．各流量にかかる係数のシステムノイズを平均 0，分散 0.13^2 のガウス分布とした．下流端断面の河床変動高のシステムノイズは，洪水前後の河口砂州の状況に変化がない洪水（2011 年 9 月台風 15 号，2012 年 6 月台風 4 号，2012 年 9 月台風 17 号）で平均 0(m)，分散 $0.001(\mathrm{m})^2$ のガウス分布として，2011 年 7 月台風 6 号では，河口砂州の崩壊の開始が想定される流量（$8{,}000\mathrm{m^3/s}$ と設定）以下の時で平均 0(m)，分散 $0.001(\mathrm{m})^2$，それ以上の流量の時で平均 0(m)，分散 $2.5(\mathrm{m})^2$ のガウス分布とした．dz のシステムノイズの値については，河口砂州の状況が変化しない洪水・期間は下流端断面の河床変動が生じないような設定として，河口砂州フラッシュが生じる洪水・期間（2011 年 7 月台風 6 号・流量 $8{,}000\mathrm{m^3/s}$ 以上）では，図 6.3 に示す流量増加時における水位低下量に着目して初期設定を行い，各流量にかかる係数のシステムノイズとともに感度分析により最終設定した．また，観測ノイズについては，平均 0(m)，分散 $0.5(\mathrm{m})^2$ のガウス分布とし，これらのノイズを 2 種類のフィルタリング手法共通に設定した．

不定流解析は現時刻から遡った 12 時間前から開始する．これは，現時刻における成川地点の水位や流量は，洪水到達時間（12 時間）程度前からの降雨量や上流端流量，残流域流出量等の影響を受けていると考えたことによる．現時刻において観測値更新後の水位の確率分布を推定し，将来の予測値と高岡地点の現時刻の推定値や予測値は，現時刻の状態量の期待値を用い計算する．

6.5　フィルタリング手法の違いによるデータ同化結果の評価

分布型流出モデルから算定した熊野川上流端，相野谷川上流端，残流域の各流量を初期の境界条件とした不定流解析を基本として，これらの流量にかかる係数および下流端断面の河床変動高を状態量に設定した 2 種類のフィルタリング手法（Particle Filter と Unscented Kalman Filter）によるフィードバック計算を行い，データ同化結果ならびに水位予測結果を評価する．

対象洪水は，近年の 2011 年 7 月台風 6 号，2011 年 9 月台風 15 号，2012 年 6 月台風 4 号，2012 年 9 月台風 17 号の 4 洪水とする．

6.5.1　状態量の変化

熊野川上流端，相野谷川上流端，残流域の各流量にかかる係数の初期分布については，全てを平均 1.0，分散 0.1^2 のガウス分布に従って独立に発生させた．また，下流端断面の河床変動高の初期分布については，平均 0(m)，分散 $0.1(m)^2$ のガウス分布に従って発生させ計算を開始する．これら 4 つの状態量の初期分布についても，2 種類のフィルタリング手法共通に設定した．なお，Particle Filter については，粒子数を 200 個に設定してフィルタリング計算を実施する．これは，リアルタイムのシステムに要求される計算速度（予測結果の 10 分毎送信に対する即時性を確保できる計算時間）の観点から，200 個程度が上限と判断したものである．

Particle Filter による状態量の時系列変化の推定結果を図 6.15 に，Unscented Kalman Filter による状態量の時系列変化の推定結果を図 6.16 に示す．ここでは，成川地点のフィルタリング前後の計算流量と下流端断面の河床変動高の時系列変化を示す．

図 6.15 より，成川地点の流量観測値が存在する 2011 年 7 月台風 6 号，2012 年 6 月台風 4 号について，逆解析的な側面から整合する必要のあるこれらの実測値に対してフィルタリング後の計算流量の再現性が高いことが伺える．また，実績洪水において河口砂州フラッシュが発生した 2011 年 7 月台風 6 号での下流端断面の河床変動高については，フラッシュの開始が想定される流量（8,000m^3/s と設定）に達した時点で-3.0m 程度となり，その後，この流量を下回るまではシステムノイズを一定としている（平均 0(m)，分散 $2.5(m)^2$ のまま）にも関わらず，この流量を下回った後も含めて変動が小さいことが伺える．河床変動高に関する実績データは存在しないが，成川地点の水位を対象としたフィルタリングにおけるこれらの変動は，河口砂州フラッシュ後の計算流量が流量観測値に整合していることからも妥当性が高いものと評価できる．

Particle Filter により，洪水前後の河口砂州の状況に変化がない洪水と河口砂州フラッシュが発生した洪水の 2 洪水に対し，下流端断面の河床変動高を考慮した上でフィルタリング後の計算流量を流量観測値と整合させることができた．この各状態量のシステムノイズの設定値を用いて，Unscented Kalman Filter によるフィルタリング計算を実施した．

図 6.16 より，特に 2011 年 7 月台風 6 号について，フィルタリング後の計算流量の再現性が Particle Filter に比べ低いことが伺える．また，同洪水での下流端断面の河床変動高については，フラッシュの開始が想定される流量に達した時点で-2.2m 程度となり，その後，上昇傾向に転じ洪水終盤には-1.0m 程度まで河床上昇していることが伺える．一洪水期間中にフラッシュされた河口砂州が上記程度まで再形成されるとは考えにくく，こうした変動が河口砂州フラッシュ後の計算流量と流量観測値が整合しない一つの要因であると推察される．

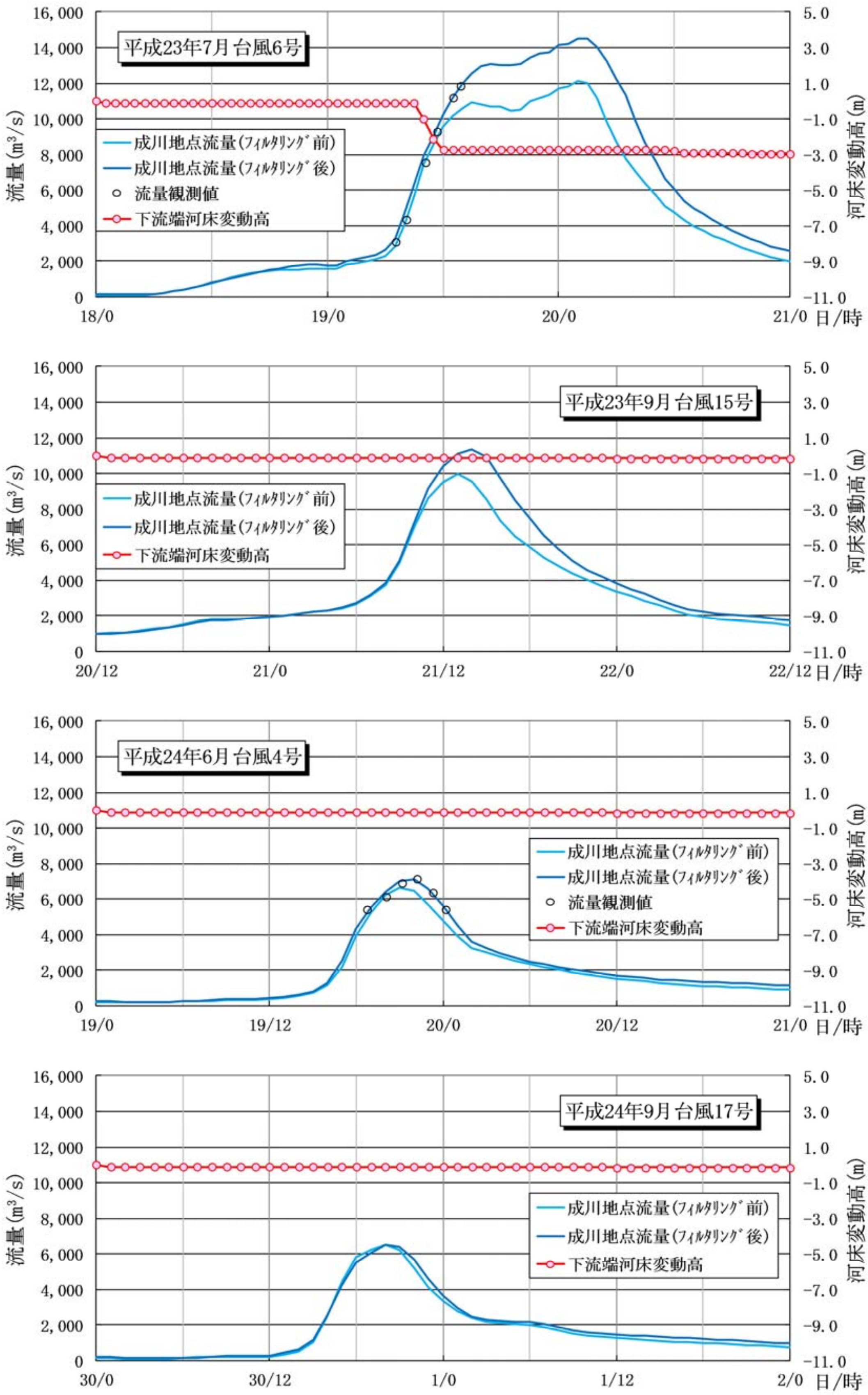


図 6.15　成川地点流量（フィルタリング前後）と下流端河床変動高の時系列変化 PF

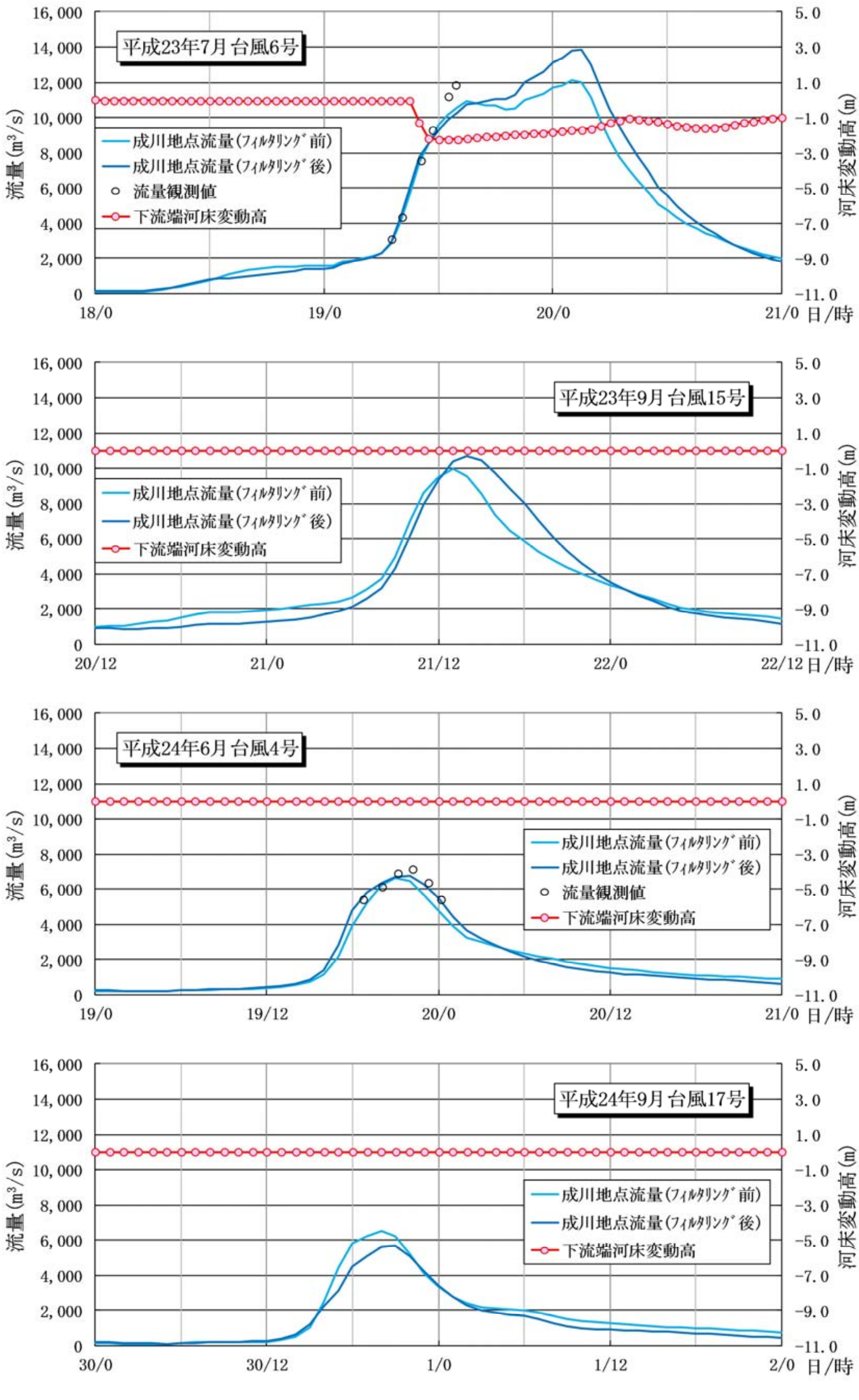


図 6.16　成川地点流量（フィルタリング前後）と下流端河床変動高の時系列変化 UKF

6.5.2　予測水位の精度検証

実績雨量を予測雨量に見立てた 1 時間先・3 時間先・6 時間先の予測水位と観測水位の誤差を式(6.5)の Nash-Sutcliffe 係数（以下，NASH 値という）を指標として比較検証する．

$$NASH = 1 - \frac{\sum (H_o - H_c)^2}{\sum (H_o - \overline{H}_o)^2} \tag{6.5}$$

ここに，$NASH$ ：NASH 値，H_o ：観測水位，H_c ：計算水位，$\overline{H}_o$ ：観測水位の平均値であり，値が 1 に近いほどモデルの精度は良いとされ, 0.7 以上でモデルの適合性は高いとされている [10)] .

表 6.1（Particle Filter），表 6.2（Unscented Kalman Filter）に，成川地点および高岡地点における両手法による NASH 値の比較を示す．1 時間先，3 時間先では両手法ともに 0.8 以上と高い適合度を示している．6 時間先まで見ると，特に高岡地点において，Particle Filter に比べ Unscented Kalman Filter の精度は低く，上記の状態量推定の課題に要因があると考えられる．

表 6.1　Nash 値による予測水位の精度評価　PF

洪水名	地点名	1hr先予測	3hr先予測	6hr先予測
H23.07 T06	成川	0.995	0.974	0.943
	高岡	0.996	0.977	0.942
H23.09 T15	成川	0.994	0.962	0.906
	高岡	0.994	0.964	0.921
H24.06 T04	成川	0.993	0.963	0.955
	高岡	0.994	0.968	0.951
H24.09 T17	成川	0.973	0.878	0.845
	高岡	0.974	0.880	0.849

表 6.2　Nash 値による予測水位の精度評価　UKF

洪水名	地点名	1hr先予測	3hr先予測	6hr先予測
H23.07 T06	成川	0.995	0.975	0.947
	高岡	0.996	0.976	0.932
H23.09 T15	成川	0.994	0.958	0.886
	高岡	0.994	0.964	0.900
H24.06 T04	成川	0.992	0.960	0.959
	高岡	0.993	0.946	0.839
H24.09 T17	成川	0.971	0.874	0.847
	高岡	0.970	0.855	0.790

図 6.17～図 6.22 には，成川地点における 1 時間先・3 時間先・6 時間先の予測水位の両手法による比較を，図 6.23～図 6.28 には，高岡地点における同様の比較を示す．これらの図より，Unscented Kalman Filter の 3 時間先や 6 時間先の予測で一部遅れはあるが, 概ね全対象洪水で実績洪水の立ち上がりを遅れなく予測していることが伺える．また，平成 23 年 9 月台風 15 号，平成 24 年 9 月台風 17 号においては，ピーク付近で 3 時間先などの予測水位が観測水位よりも低くなっており，フィードバック計算の信頼性等に課題を残していると推察される．全体として，Particle Filter による予測水位の方が観測水位に対する適合性は高いことが認められる．

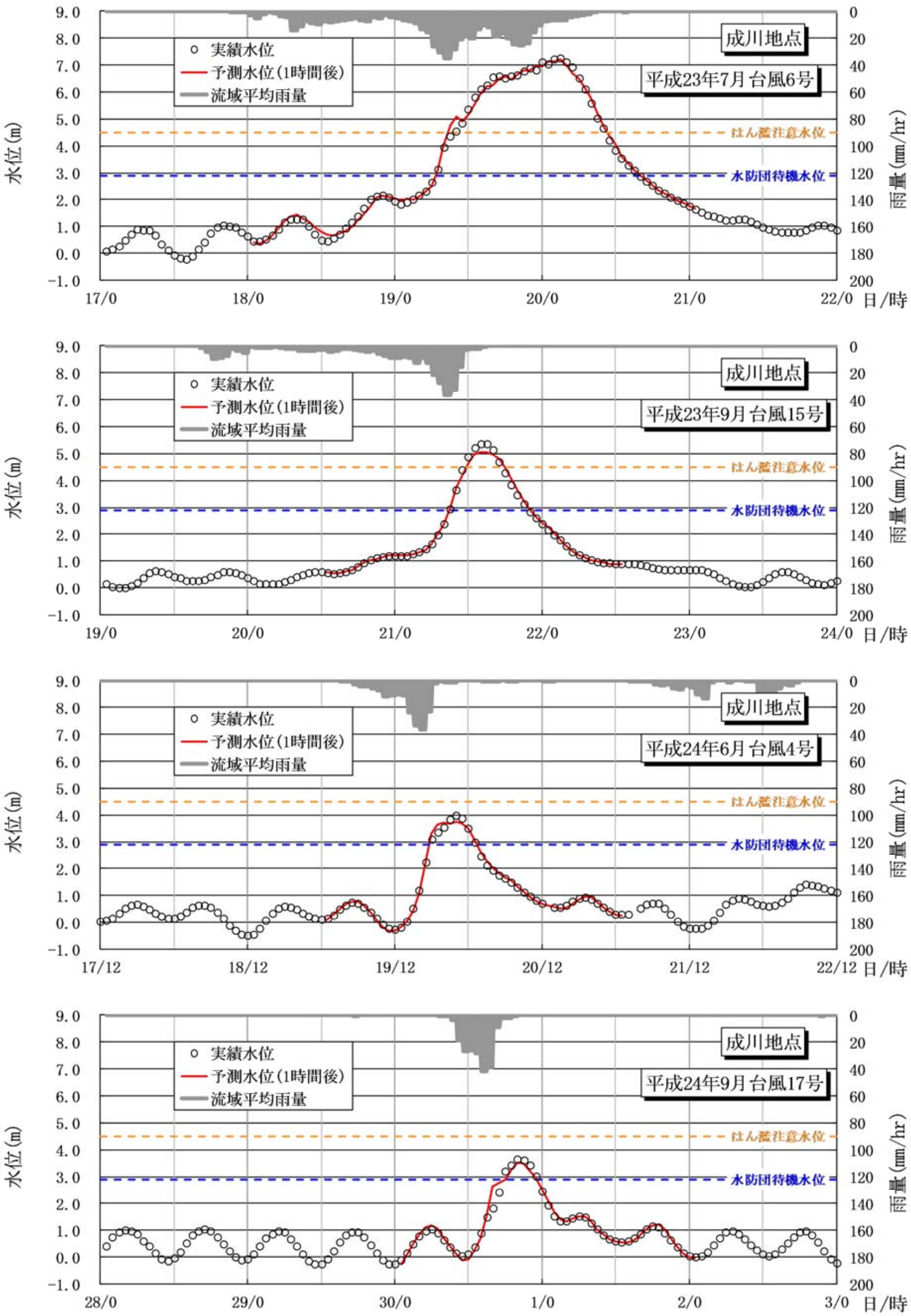


図 6.17　現時刻から１時間先の予測水位の変化（成川地点）PF

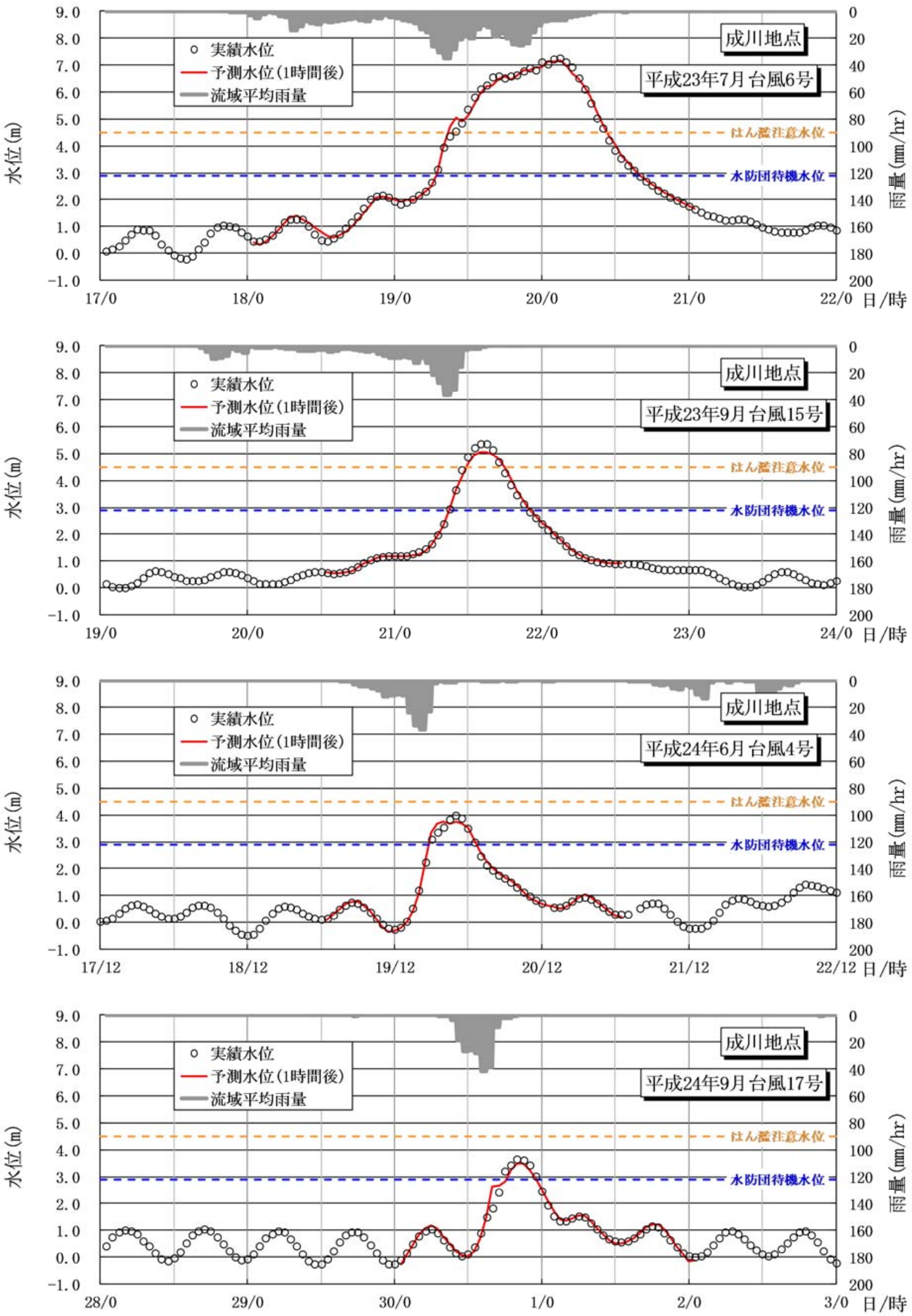


図 6.18　現時刻から１時間先の予測水位の変化（成川地点） UKF

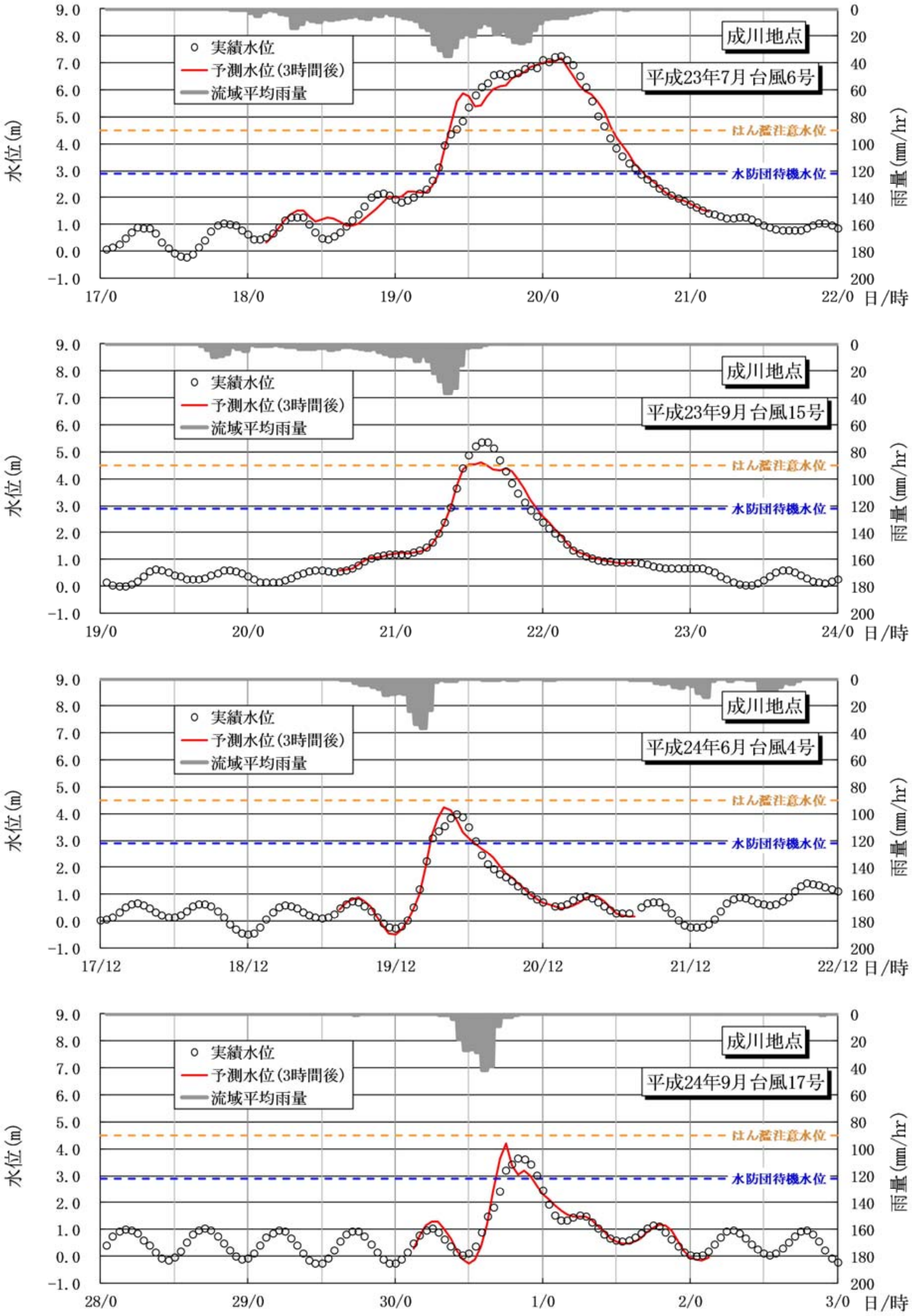


図 6.19　現時刻から 3 時間先の予測水位の変化（成川地点）$\boxed{\text{PF}}$

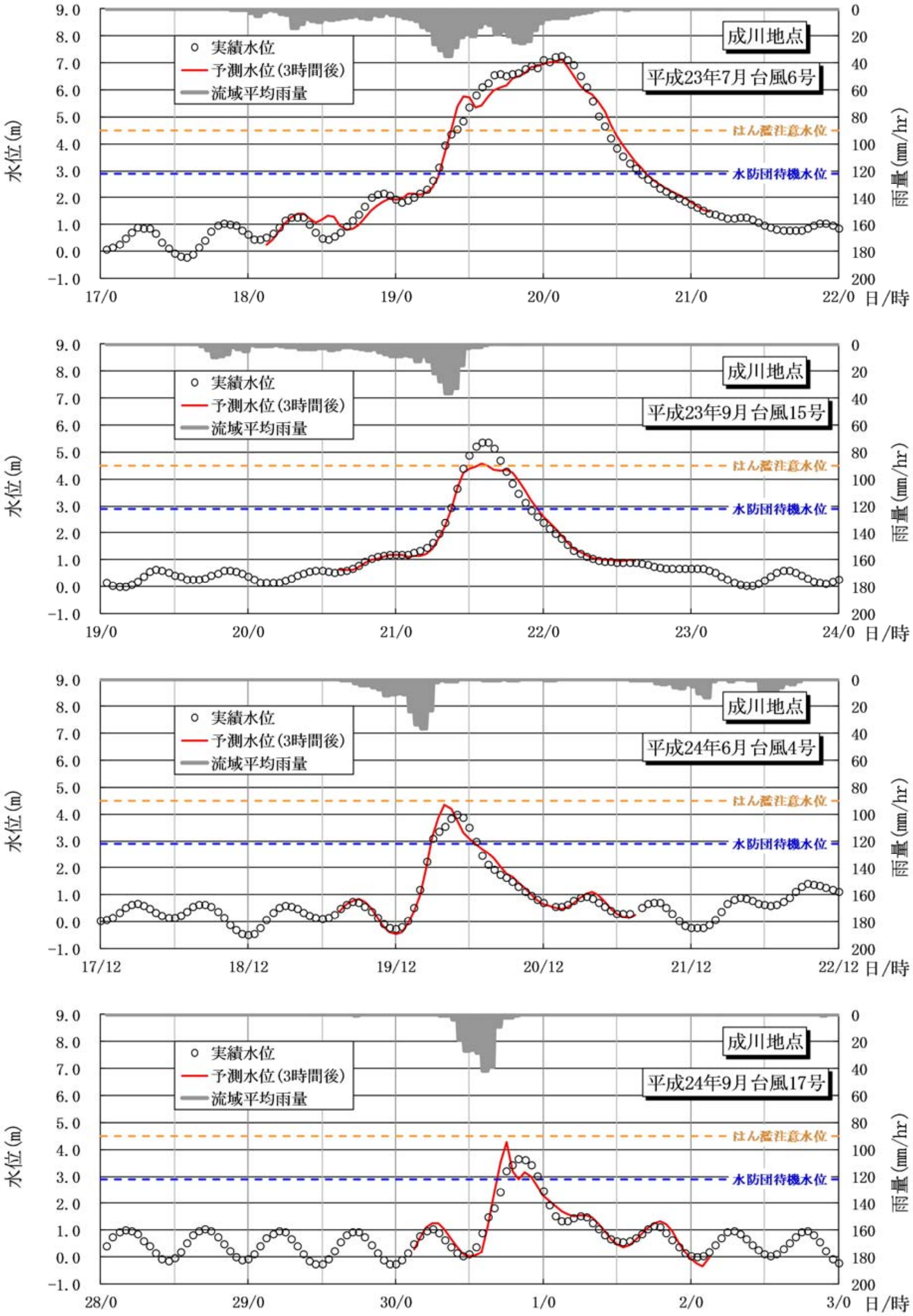


図 6.20　現時刻から 3 時間先の予測水位の変化（成川地点） UKF

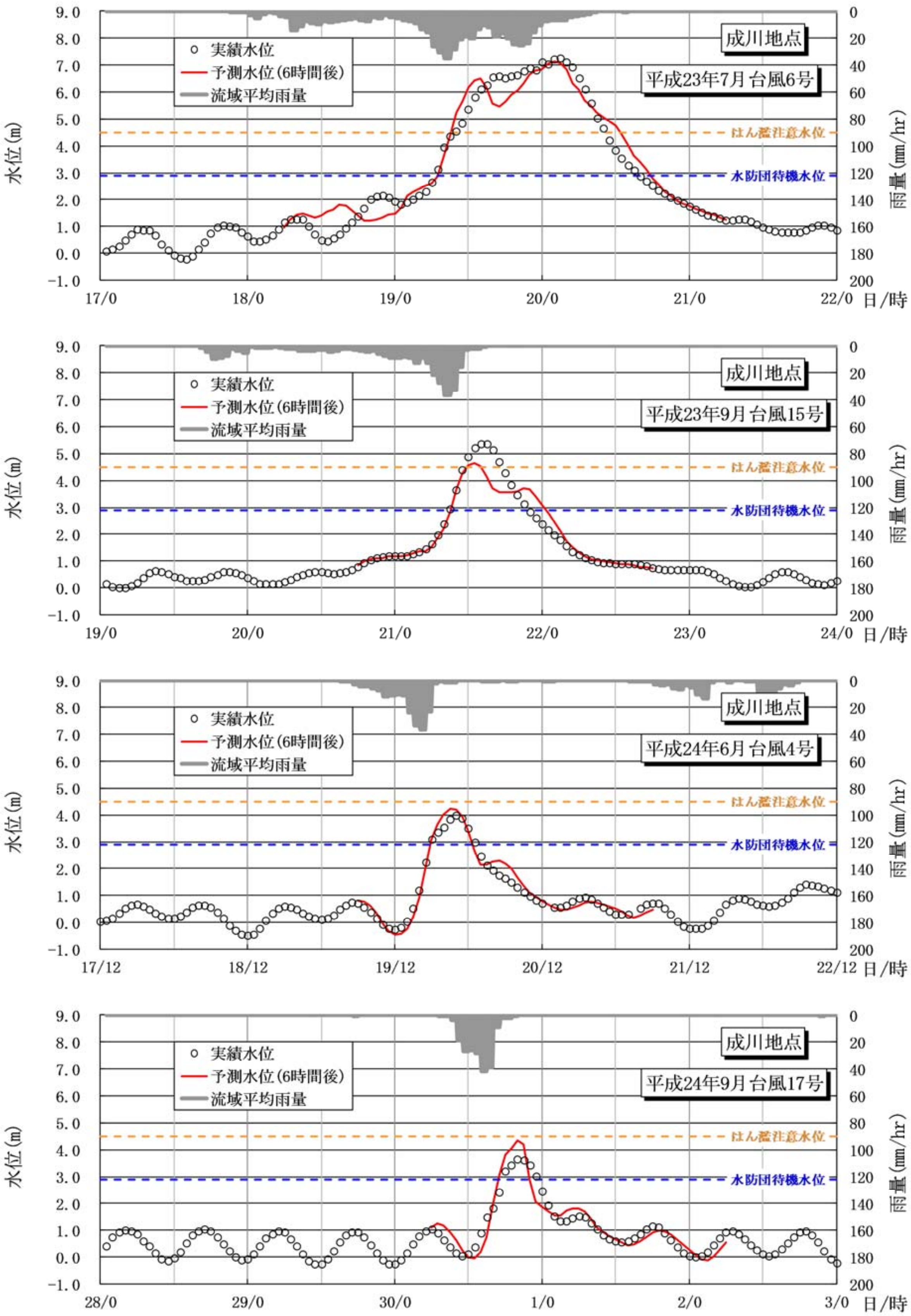


図 6.21　現時刻から 6 時間先の予測水位の変化（成川地点）$\boxed{\text{PF}}$

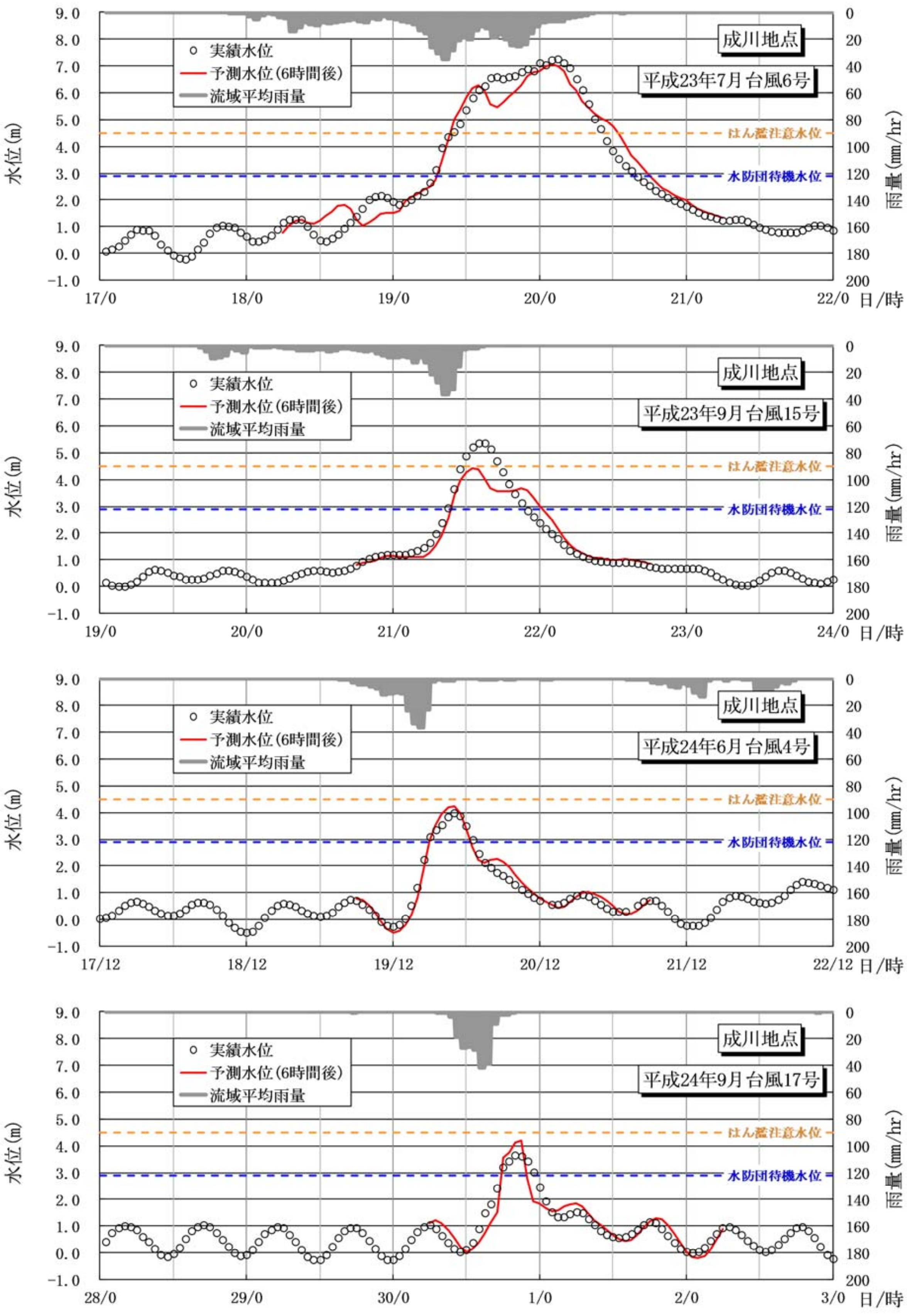


図 6.22　現時刻から 6 時間先の予測水位の変化（成川地点） UKF

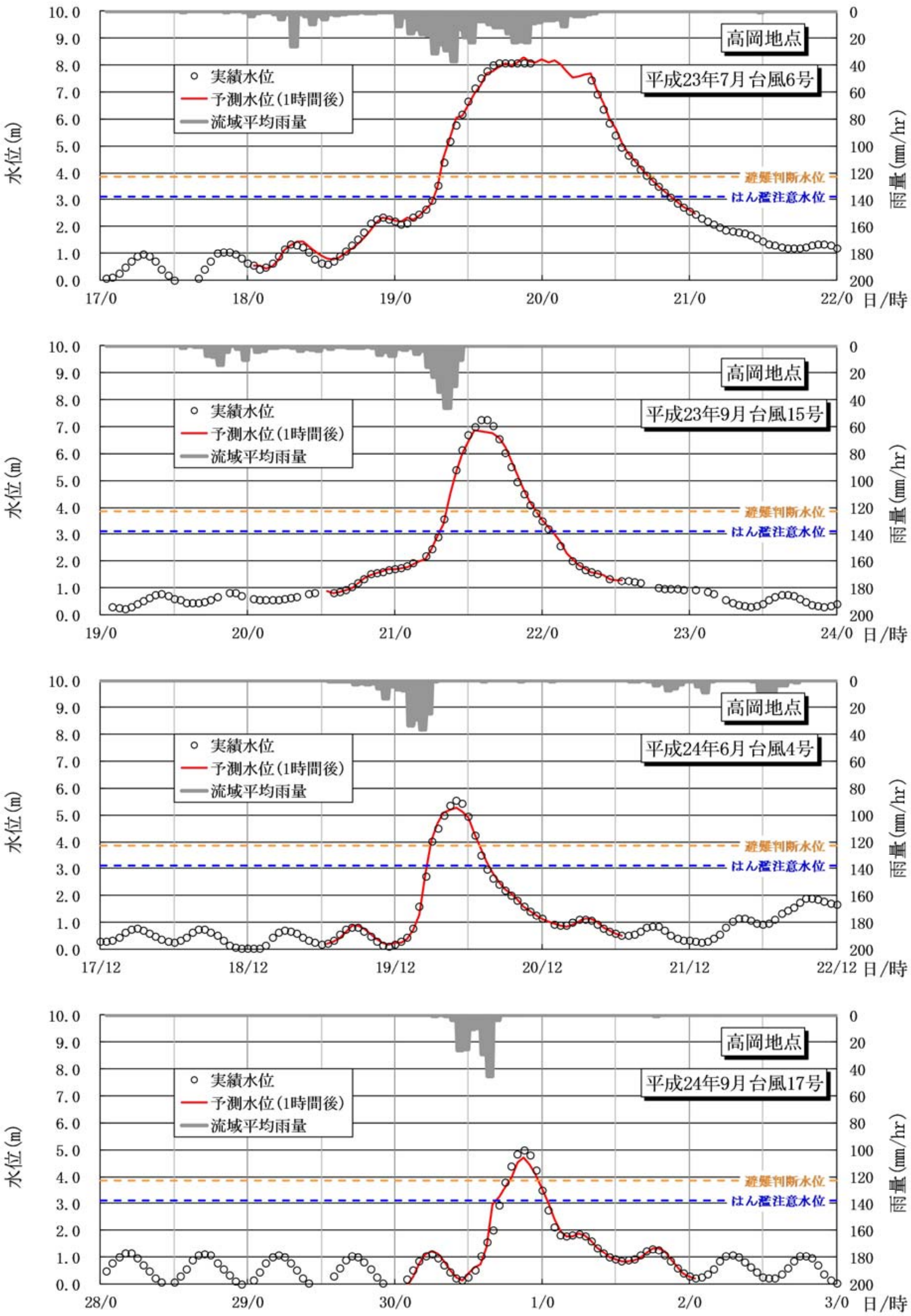


図 6.23　現時刻から 1 時間先の予測水位の変化（高岡地点）PF

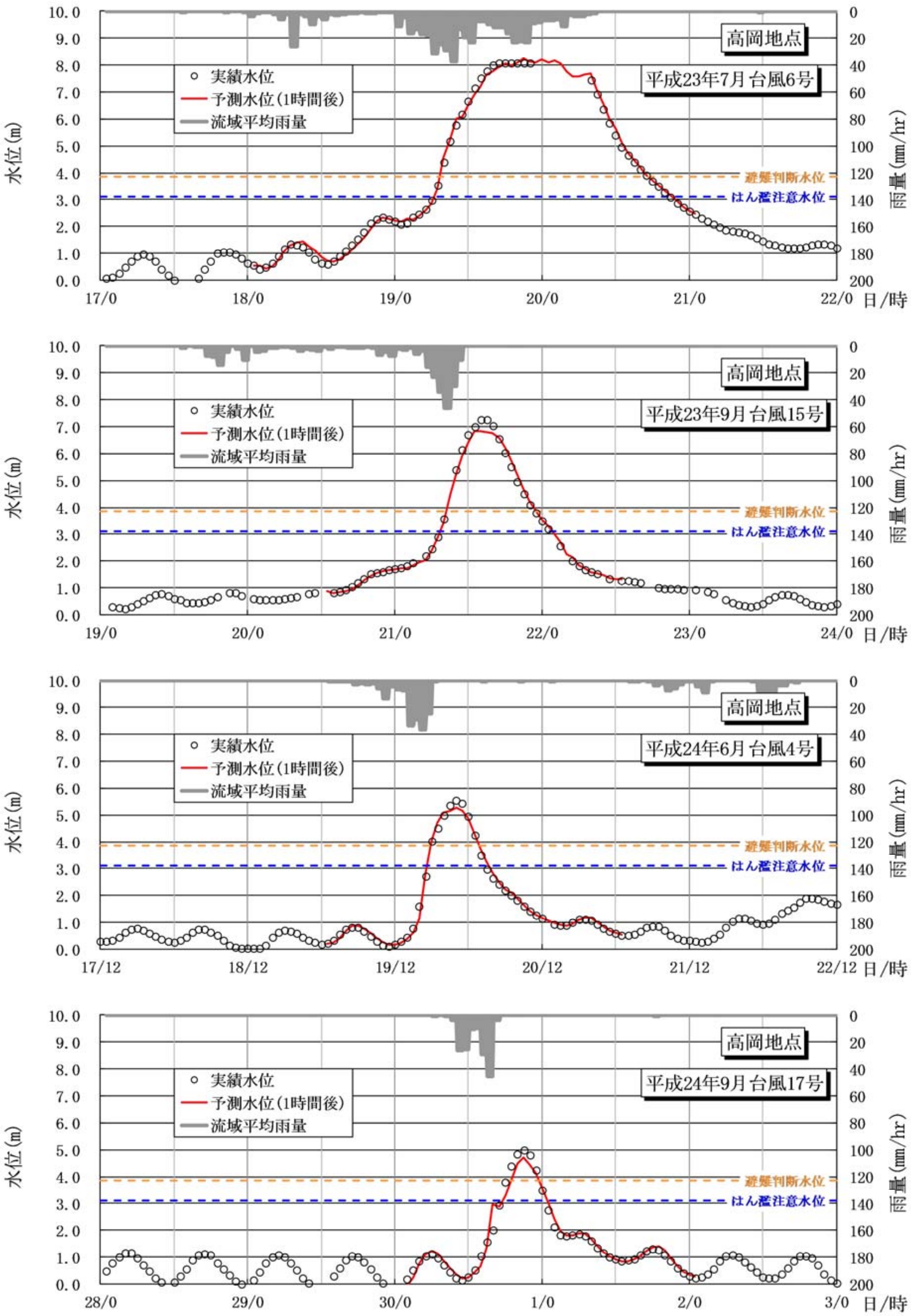


図 6.24　現時刻から１時間先の予測水位の変化（高岡地点） UKF

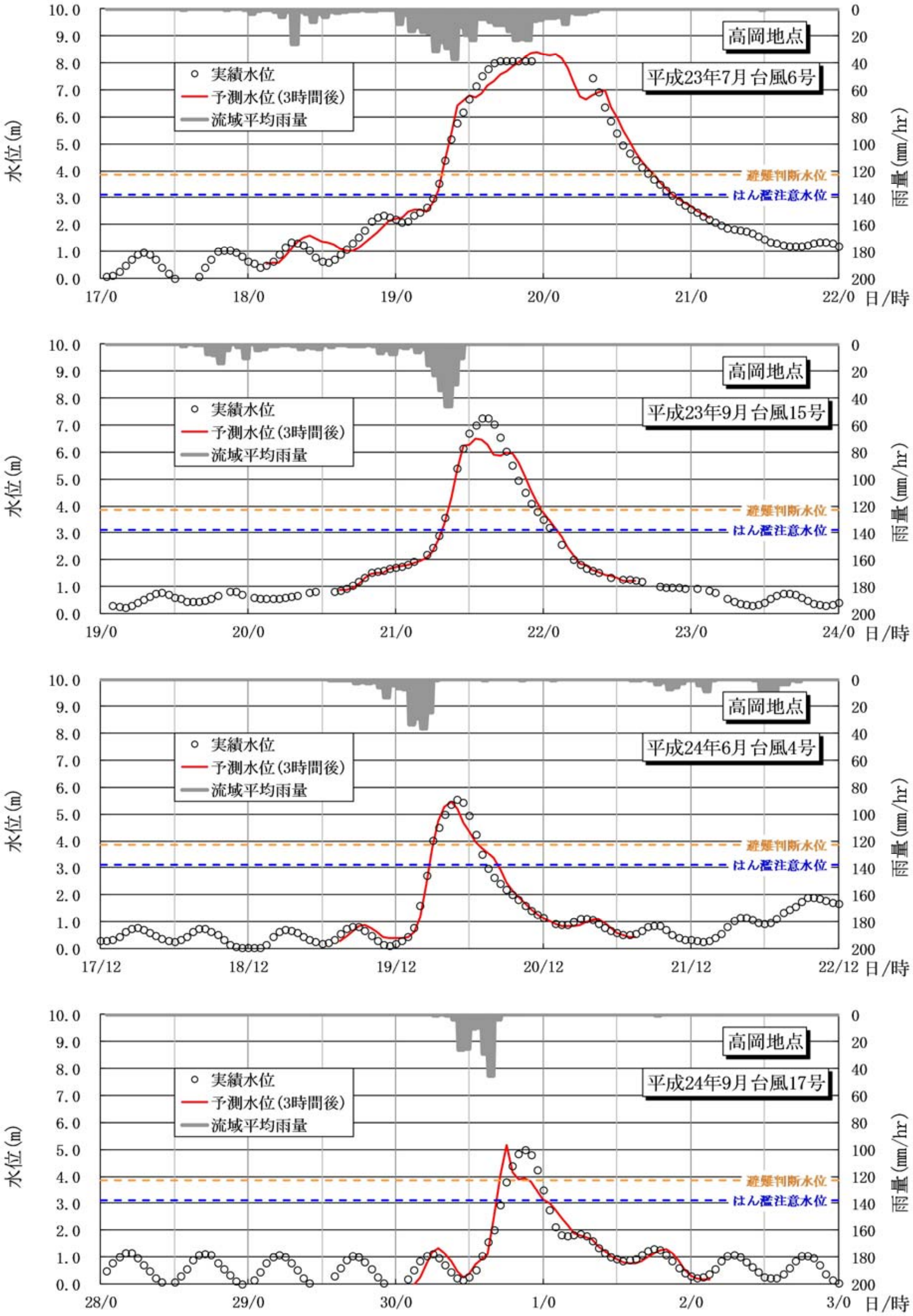


図 6.25　現時刻から 3 時間先の予測水位の変化（高岡地点）PF

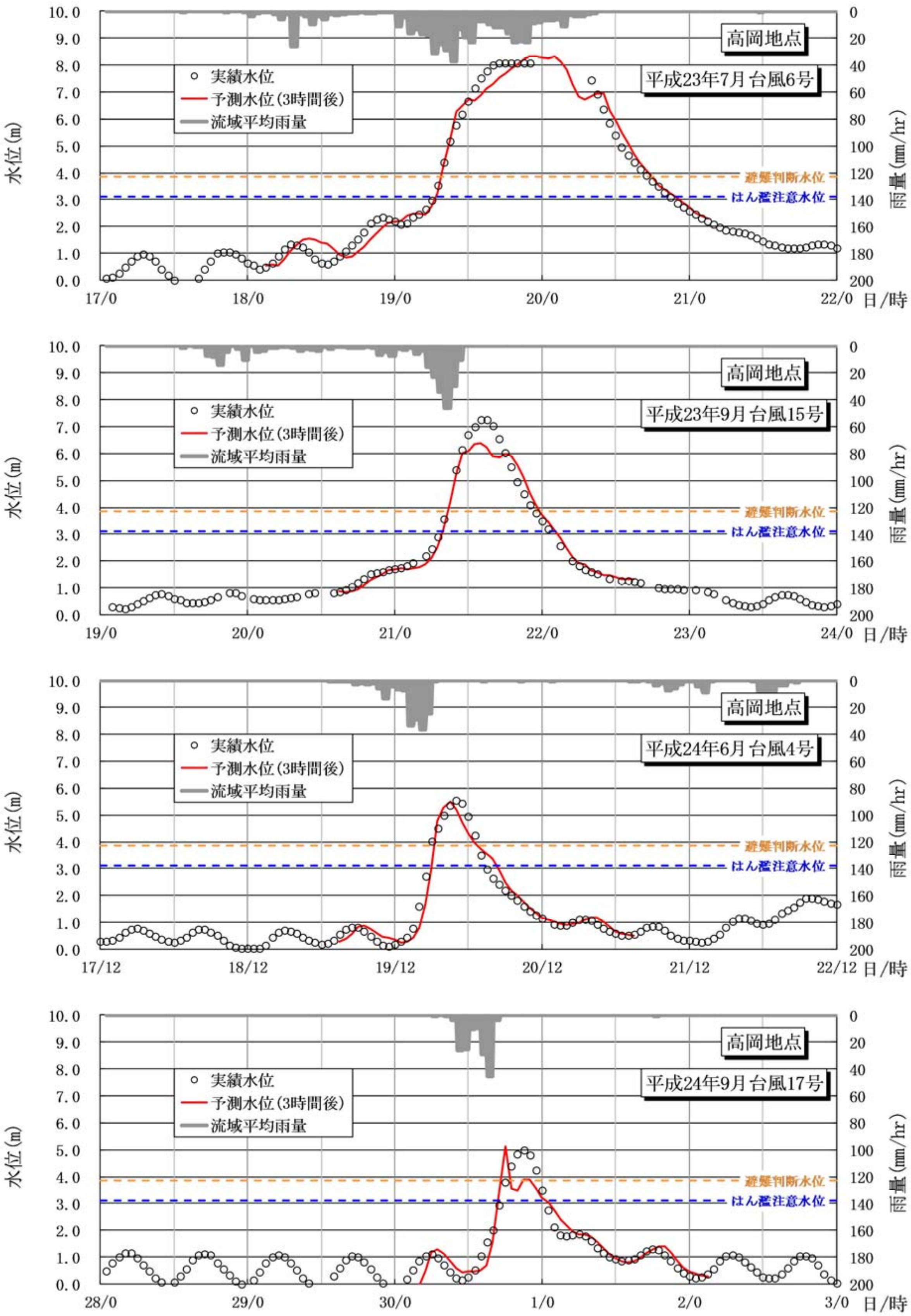


図 6.26　現時刻から３時間先の予測水位の変化（高岡地点） UKF

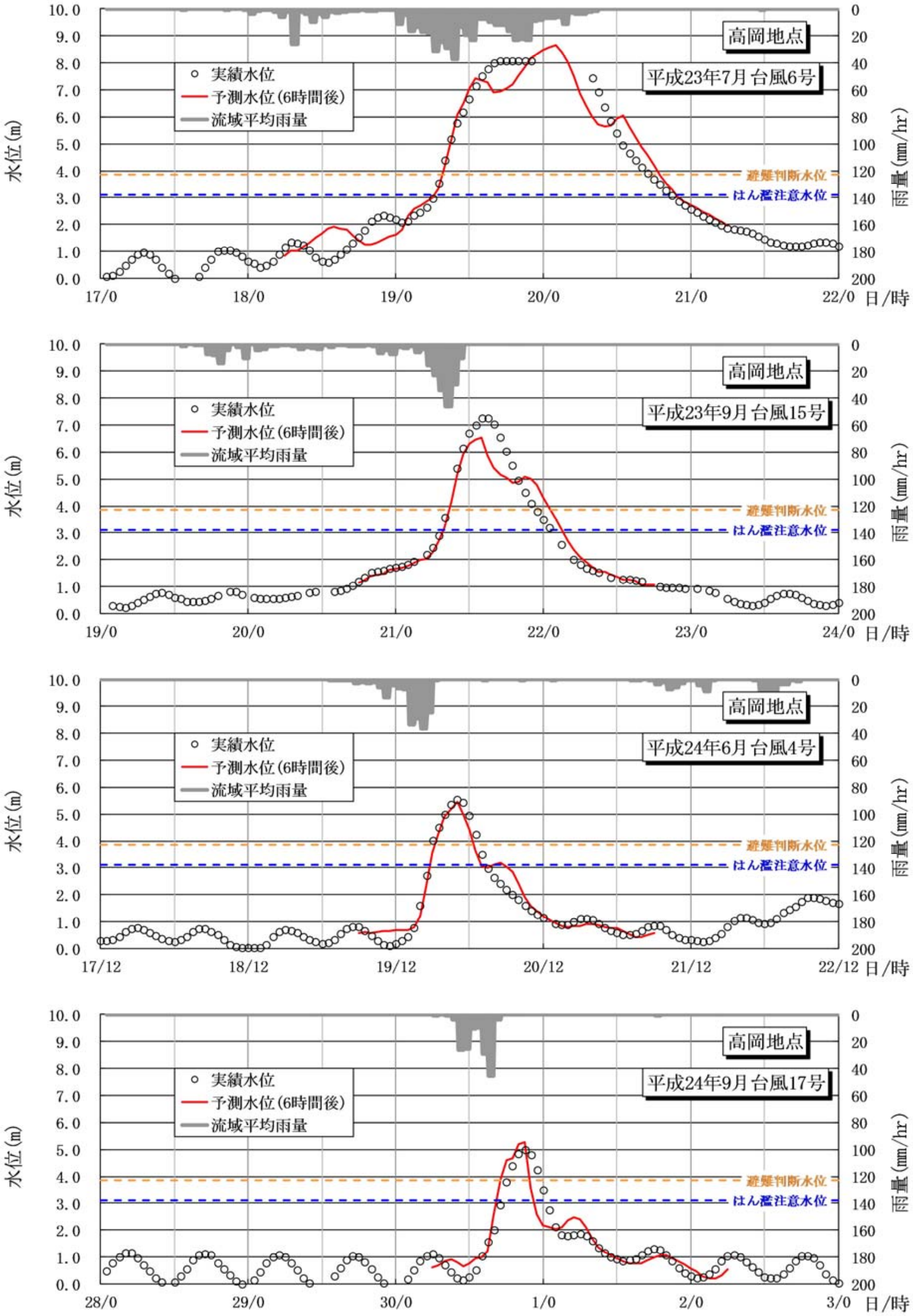


図 6.27 現時刻から 6 時間先の予測水位の変化（高岡地点） PF

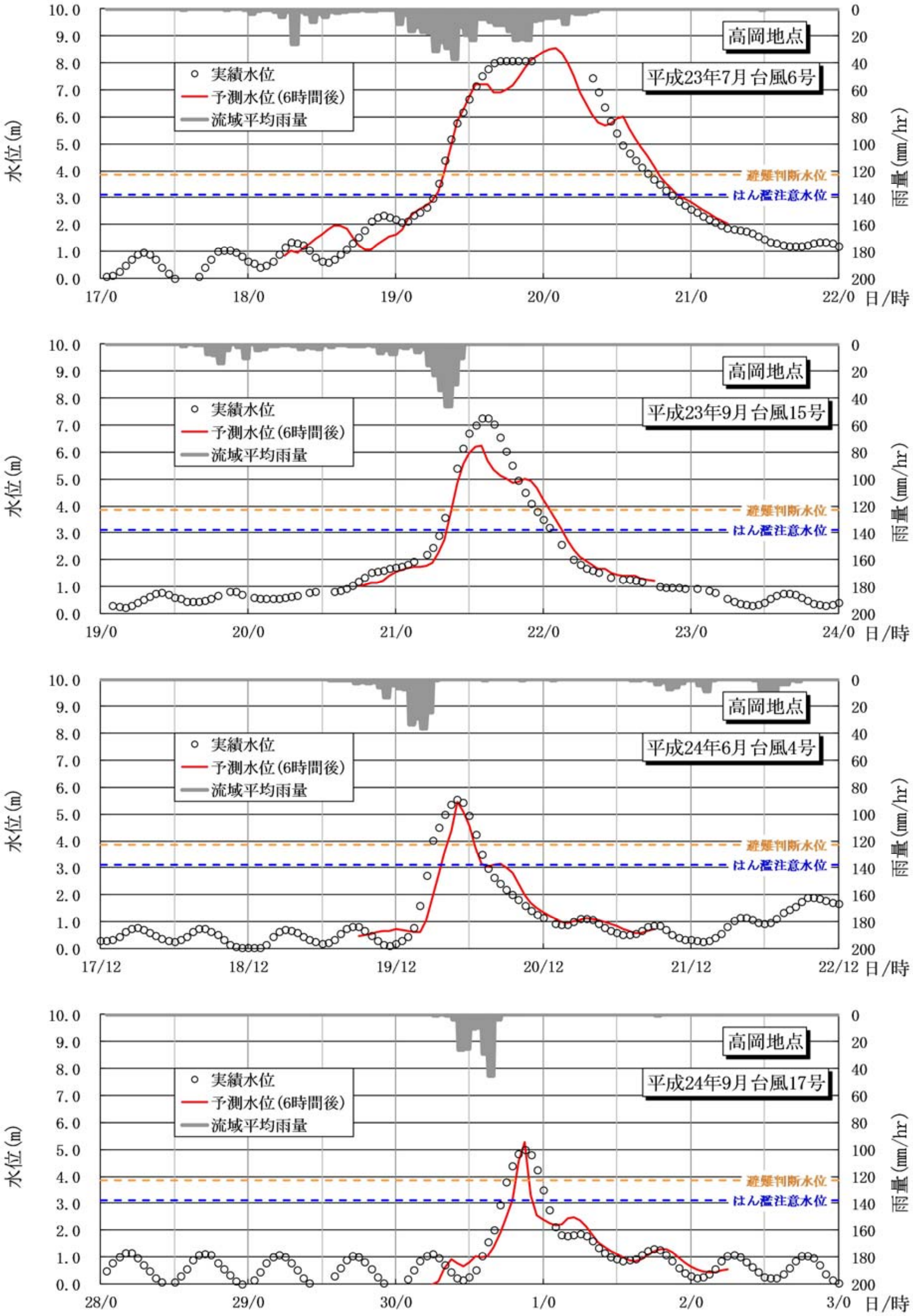


図 6.28　現時刻から 6 時間先の予測水位の変化（高岡地点） UKF

6.5.3 フィルタリング手法の適用性評価

以上の結果より，Particle Filter では，下流端断面の河床変動高を妥当性の高い変動としつつ，河口砂州フラッシュ後の計算流量を流量観測値に整合させることができる可能性が示唆された．一方，Particle Filter と各状態量のシステムノイズを同一値とした Unscented Kalman Filter では，下流端断面の河床変動高は妥当な変動とならずに，このことが，河口砂州フラッシュ後の計算流量と流量観測値が整合しない要因の一つとなっていると推察された．また，上記の状態量推定の違いにも起因し，Particle Filter による予測水位の方が Unscented Kalman Filter による予測水位より観測水位に対する適合性は高いことが示された．

ここでは，両手法の適用性の違いについて，状態推定値（期待値）に対する信頼区間（±2σ）の側面から考察を行う．図 6.29（Particle Filter），図 6.30（Unscented Kalman Filter）に，両手法による下流端河床変動高の信頼区間の時系列変化を示す．これらの図より，Particle Filter の河口砂州フラッシュ時の信頼区間は，Unscented Kalman Filter と比べて狭いことが伺える．また，Particle Filter のフラッシュ後の信頼区間はフラッシュ前と同様の狭い範囲に戻っており，Unscented Kalman Filter のようにフラッシュ後も広い範囲の信頼区間により推移していない．信頼区間については，狭い方が状態推定値の信頼性が高いことを示しており，このことからも，非線形性の強い状態量の推定には，Particle Filter の方が適用性は高いと評価できる．

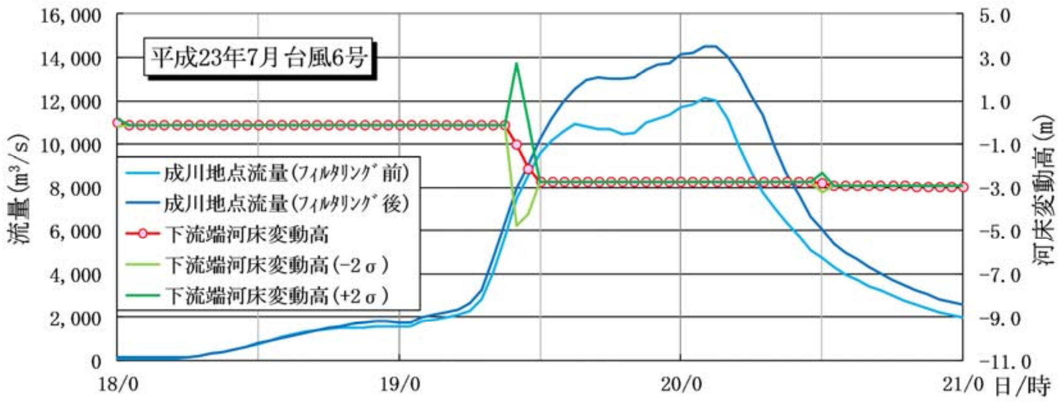


図 6.29 下流端河床変動高の信頼区間の時系列変化 PF

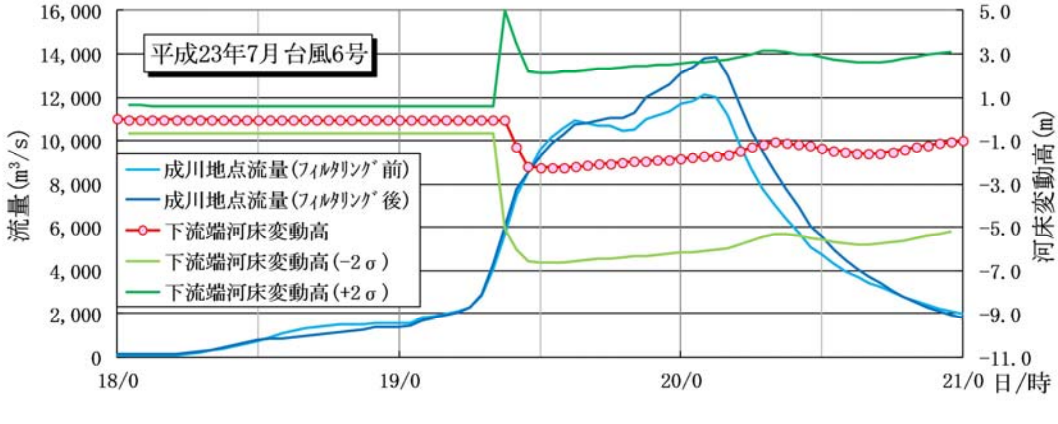


図 6.30 下流端河床変動高の信頼区間の時系列変化 UKF

6.6　結　語

本章では，熊野川における河口砂州崩壊の影響を受ける区間に対し，砂州崩壊等の影響による水位変動を考慮できる水位予測手法として，不定流モデルに非線形フィルリング手法を適用した結果を示した．本章で得られた成果は，以下のとおりである．

- ➢ 分布型流出モデルによる流域流出量の算出を基本としたシステムに対し，河口砂州による背水や崩壊の影響を受ける河道区間の水位の解析に不定流モデルを適用した．その結果，河口砂州フラッシュを表す状態量として下流端断面の河床変動高を設定することにより，砂州崩壊の影響を考慮できるようになった．さらに，流量にかかる係数も合わせて状態量として設定することにより，観測水位に対するデータ同化が可能であることが分かった．
- ➢ Particle Filter では，下流端断面の河床変動高を妥当性の高い変動としながら，河口砂州フラッシュ後の計算流量を流量観測値に整合させることが可能であることが示唆された．一方，Unscented Kalman Filter では，下流端断面の河床変動高が妥当な変動とならないことが一要因となり，フラッシュ後の計算流量と流量観測値が整合しないと推察された．
- ➢ 予測水位については，概ね全対象洪水で，実績洪水の立ち上がりを遅れなく予測できた．また，全体的に，Particle Filter による予測水位の方が Unscented Kalman Filter による予測水位より観測水位に対する適合性は高いことが認められた．
- ➢ 河口砂州フラッシュ時からフラッシュ後における下流端断面の河床変動高の信頼区間は Particle Filter の方が Unscented Kalman Filter よりも狭く，状態推定値の信頼性が高いことが分かった．非線形性の強い状態量の推定には，Particle Filter の方が適用性は高いことが確認できた．

参考文献

1) 国土交通省：新宮川水系河川整備基本方針，2008.
https://www.mlit.go.jp/river/basic_info/jigyo_keikaku/gaiyou/seibi/pdf/shingugawa66-1.pdf
2) 立川康人，須藤純一，椎葉充晴，萬和明，キムスンミン：粒子フィルタを用いた河川水位の実時間予測手法の開発，水工学論文集，Vol.55，pp.S511-S516，2011.
3) Y. Kim, Y. Tachikawa, S. Kim, M. Shiiba, K. Yorozu, S. Jin Noh：Short term prediction of water level and discharge using a 2D dynamic wave model with Particle Filters, *Journal of Japan Society of Civil Engineers*，Vol.68/No.4，pp.I_25-I_30，2012.
4) 田中耕司，辻倉裕喜，大八木豊，杉浦正之，森田宏，志鹿浩幸，井川智博：淀川三川合流区間を対象にした水位予測システムの開発，河川技術論文集，Vol.19，pp.241-246，2013.
5) 佐々木昌俊，辻倉裕喜，田中耕司，白波瀬卓哉，藤井未知：河口砂州崩壊の影響を受ける河道区間の水位予測手法の開発，河川技術論文集，Vol.20，pp.223-228，2014.

6) 猪股広典，深見和彦：吉野川流域広域洪水危険度判断支援システムの開発，河川技術論文集，Vol.13，pp.433-438，2007.
7) 片山徹：非線形カルマンフィルタ，朝倉書店，pp.103-109，2011.
8) 北川源四郎：モンテカルロ・フィルタおよび平滑化について，統計数理，Vol.44/No.1，pp.31-48，1996.
9) 辻倉裕喜，田中耕司，杉浦正之：Unscented Kalman Filter を用いた洪水到達時間の短い流域を対象にした水位予測システムの適用，河川技術論文集，Vol.19，pp.253-258，2013.
10) R. Ragab, D. Moidinis, J. Albergel, J. Khouri, A. Drubi and S. Nasri : The HYDROMED model and its application to semi-arid Mediterranean catchments with hill reservoirs 2: Rainfall-runoff model applications to three Mediterranean hill reservoirs, *Hydrology and Earth System Sciences*, Vol.5/No.4, pp.554-562, 2001.

第7章

結　論

本研究では，洪水到達時間が短く，流量観測データが乏しい中小河川流域や，洪水到達時間が長く，流域や河道の状況が洪水中に時々刻々と変化する大河川流域について，誤差の要因となる水位流量関係式（以下，H-Q 式という）を介さず，非線形フィルタを応用することにより水位・流量を高精度に予測する手法を開発してきた. 以下, 各章で得られた成果をまとめて結論とする.

第 2 章では，非線形フィルタ理論に基づくデータ同化手法として，Kalman Filter 等を基礎とする Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter, および Ensemble Kalman Filter と，Particle Filter の理論やアルゴリズムについて記述した.

また，各手法の特徴や長所・短所を踏まえた上で，洪水予測分野への適用性を比較して，次章以降の水位予測手法の開発に使用するフィルタリング手法を評価した.

第 3 章では，洪水到達時間の短い中小河川流域を対象として，観測水位に対してデータ同化を行いながら降雨から水位を直接予測するモデル（水位予測モデル）を開発し，適用性を評価した.

貯留関数法の基礎式と H-Q 式を組み合わせた「水位予測モデル」の基礎式を導出して，基礎式における定数等を自己回帰モデルで表現した.

観測水位に対するデータ同化手法には，洪水到達時間が短く，計算時間を短縮する必要がある中小河川流域を対象とすることを考慮して，複雑な非線形モデルにも対応でき，かつ計算機への負荷も軽減できる Unscented Kalman Filter を選定した.

河床変動や背水等の影響により洪水中に H-Q 式が変化すると考えられる急流河川（土器川）と緩流河川（旧吉野川）を対象として，実洪水における水位予測モデルの適用結果を示し，水位の再現性，定数の推定結果，流量の推定結果に対する評価を行い，本章で開発した水位予測モデルの適用性を確認した.

貯留関数法の定数kの設定に課題は残るものの，Unscented Kalman Filter は水位予測モデルにおける定数（状態量）のフィルタリング手法として有効な手法の一つであり，本章で開発した水位予測モデルの適用性は高いことを確認した.

第 4 章では，第 3 章で用いた貯留関数法のモデルパラメータの変動要因を分析し，流出予測の精度向上を図った.

まず，18 ダムにおける洪水低減部の実績流入量を整理・分析し，流域面積の関数として，飽和状態（流出係数が 1.0 の場合）における貯留関数法のモデル定数の推定式を求めた.

この推定式から得られる値を用いて変動幅を規定した貯留関数法のモデル定数や，流出係数等を自己回帰モデルで表現し，第 3 章と同じ Unscented Kalman Filter によりダム流入量に対してデータ同化させた洪水予測モデルの適用結果を示した.

これより，ダム流入量の再現性が高いことを確認して，貯留関数法のモデル定数と流出係数を逐次推定することの必要性を示した.

第 5 章では，淀川三川合流部の複雑な流況を表現するために，不定流モデルに Particle Filter をデータ同化手法として組み合わせた水位予測手法を開発し，本予測手法の適用上の課題とその対応方法を示した.

状態量として淀川三川の流量と残流域等の流量に乗じる補整係数を考え，これらの係数のみをデータ同化の対象とした場合は，フィルタリング後の境界流量の流量観測値等に対する再現性に不整合が認められた.

そこで，粗度係数に乗じる補整係数を状態量に追加することにより境界流量の再現性の向上を試みた結果，流量観測値等と整合しつつ，粗度係数が適切な範囲で変化するといったデータ同化結果が得られ，本手法の妥当性を確認することができた.

また，粗度係数に乗じる係数を三川毎に個別に設定するなど状態量の数を増やすと，粒子数を増やしても境界流量の再現性について妥当な結果が得られないことが分かった.

さらに，観測値更新を行う対象を枚方地点流量のみではなく，合流前の各河川の観測所水位も追加した多点フィルタとすることによって，枚方地点の水位の再現精度は若干低下するが，境界流量の再現性はさらに向上することが分かった.

以上より，Particle Filter を適用した水位予測手法では，求められる即時性と状態量や粒子数の設定とのバランスに留意することが重要であるという知見を得た．また，ある地点の予測精度を重視するか，系全体の妥当性を重視するかによって多点フィルタの採用を判断することも重要であることを示した.

第 6 章では，熊野川の河口砂州崩壊の影響を受ける河道区間に対して，不定流モデルを用い，砂州崩壊の影響による水位変動を考慮するために Particle Filter と Unscented Kalman Filter の 2 種類のフィルリング手法を適用した結果を示した.

河口砂州フラッシュを表現する状態量として，下流端断面の河床変動高を設定することにより，砂州崩壊の影響を考慮できるようになり，さらに流量に乗じる補整係数も合わせて状態量として設定することにより，観測水位に対するデータ同化が可能であることを示した.

下流端断面の河床変動高の妥当性，河口砂州フラッシュ後の計算流量と流量観測値の整合性，予測水位の観測水位に対する適合性，状態推定値の信頼性などの観点による比較から，非線形性の強い状態量推定には，Particle Filter の方が，適用性が高いことを確認した.

以上のように，特性の異なる河川における水位・流量予測モデルに対し，非線形フィルタ理論に基づくデータ同化手法を適用した結果，洪水予測の精度を向上させる可能性のある有効な手段であることが分かった．以下に，今後の課題を示す．

第 3 章で開発した『観測水位に対してデータ同化を行いながら，降雨から水位を直接予測する水位予測モデル』に，第 4 章で得た知見（貯留関数法の定数と流出係数を逐次推定する必要性）を反映し，様々な特性を持つ中小流域に対して適用性を検討する必要がある．

第 5 章で開発した『不定流モデルにデータ同化を組み合わせた水位予測手法』は，並列計算を前提としていない現業システムでの稼働を想定したものであり，時間的制約の下，Particle Filter の粒子数を限定している．今後，計算の並列化に伴って時間的制約が緩和されることを念頭に，状態量を増やした場合に必要な粒子数などを検討しておく必要がある．

第 6 章で開発した『不定流モデルにデータ同化を組み合わせた水位予測手法』について，現業で稼働するシステムを想定した場合，特に，河床変動高のノイズ設定に留意を要する．洪水前の堆積状況に応じてノイズ設定を調整することに対する代替手段を検討していく必要がある．

一方で，例えば物理型モデルで評価された流出量に対してデータ同化を適用するということは本来の物理型モデリングの特性を変更している点に留意する必要がある．観測値と予測値の差が生じる原因の解明を行い，その原因の本質的改善を検討していくことも，より洪水予測の精度を向上させるとともに，予測の透明性を確保する上で重要であると考える．

付　録

主な記号の説明

集合

$\forall x$（= for all x）	すべて（任意）の x について
$a := b$	b を a と定義する
$a \in A$	a は A の要素である
$A \subset B$	A は B に含まれる（B の部分集合）

ベクトル・行列

$\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n\times m}$	n 次元実ベクトルの集合，$n\times m$ 実行列の集合
$x^{\mathrm{T}}, A^{\mathrm{T}}$	x の転置ベクトル，A の転置行列
I_n	$n\times n$ 単位行列
$\lvert A\rvert, \det A$	A の行列式
A^{-1}	A の逆行列（$\lvert A\rvert \neq 0$）
$A > 0$	正定値対称行列（$A = A^{\mathrm{T}}$ も条件）
$A \geq 0$	非負定値対称行列
$\sqrt{A}, A^{1/2}$	$A \geq 0$ の平方根行列
$\lVert x\rVert$	x のノルム，$\lVert x\rVert = \sqrt{(x^{\mathrm{T}}x)}$
$\lVert x\rVert_{A^{-1}}^2$	$x^{\mathrm{T}}A^{-1}x$，$A > 0$（x の 2 次形式）

確率・統計

$p(x), p(x,y)$	x の確率密度関数，(x,y) の結合確率密度関数
$p(x\mid y)$	y に関する x の条件付き確率密度関数
$E\{x\}, E\{x\mid y\}$	x の期待値，y に関する x の条件付き期待値
$\mathrm{cov}(x,y)$	x と y の共分散行列
$\mathrm{cov}(x,y\mid z)$	z に関する (x,y) の条件付き共分散行列
$\mathrm{var}(x), \mathrm{var}(x\mid z)$	$\mathrm{cov}(x,x)$，$\mathrm{cov}(x,x\mid z)$
$N(\mu,\Sigma)$	平均値 μ，共分散行列 Σ の正規分布，ガウス分布
$x \sim N(\mu,\Sigma)$	x は $N(\mu,\Sigma)$ に従う確率変数（確率ベクトル）
$p(x) = N(x\mid\mu,\Sigma)$	$p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\lvert\Sigma\rvert}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(x-\mu)}$

謝　辞

本論文をまとめるにあたって，研究方針，課題設定，理論解析等に至るまで，終始懇切丁寧なご指導を賜りました，京都大学大学院工学研究科 立川 康人 教授に深甚なる感謝の意を表します．先生には，浅学な著者の意見をお聞き頂き，本質を捉えた的確なご助言を各局面で頂戴しました．また，研究活動においても，取り組む姿勢や進め方など先生に多くのことをご教示頂きました．ここに，深く御礼申し上げます．

京都大学大学院工学研究科 戸田 圭一 教授には，本論文に対し貴重なご指摘と適切なご指導を頂きました．ここに，深く感謝を申し上げます．

京都大学防災研究所 中北 英一 教授には，研究活動における励ましのお言葉と本論文に対するご指摘を頂いたことに，厚く御礼申し上げます．

京都大学大学院工学研究科 市川 温 准教授，萬 和明 助教には，研究を進めるにあたり適切なご指導を頂くとともに，研究活動をご支援頂きました．ここに，深く感謝の意を表します．

著者は，金沢大学大学院工学研究科土木工学専攻の修士課程在学中に，恩師である 辻本 哲郎 現名古屋大学名誉教授のご指導の下で研究を進めるうちに河川関係の仕事に就きたいと希望するようになり，就職したのが現在在籍している株式会社 建設技術研究所でした．先生との出会いがなければ，河川関係の仕事を選び，さらには学位取得に挑戦するといった思いに至らなかったと感じています．先生にご指導頂けた幸運に感謝します．

本論文の作成にあたって，株式会社 アスコ大東 杉浦 正之 氏（元 株式会社 建設技術研究所 大阪本社 水システム部），株式会社 建設技術研究所 大阪本社 水システム部 田中 耕司 博士，同 佐々木 昌俊 氏，同 宮本 賢治 氏には多大なご助言を頂き，幾度も議論をさせて頂きました．ここに，謝意を表すとともに，御礼申し上げます．

また，社会人大学院生としての研修を承諾頂いた，株式会社 建設技術研究所 村田 和夫 社長，株式会社 建設技術研究所 大阪本社 栗田 秀明 本社長に感謝の意を表します．

さらに，大学での研究活動を快く承諾するとともに，研究活動において終始励ましのお言葉を頂き温かく見守って頂いた，株式会社 建設技術研究所 大阪本社 水システム部 北川 照晃 部長，同 澤田 典靖 次長，同 伊藤 禎和 次長に感謝申し上げます．

最後に，本論文の完成を陰で見守り支えてくれた亡父，母，妻 順子，互いに励まし合ってきた二人の娘 和と望に感謝します．ありがとうございました．