

感覚情報を用いた脚ロボットの 歩容生成に関する研究

平成29年3月

京都大学大学院

安部 祐一

要約

本研究は、生物の感覚情報をもちいた適応的な歩容生成の重要性に着目し、6脚步容や多脚步容におけるセンサフィードバックの影響を解析的な表現をもちいて論じ、感覚情報を用いたロボットの歩容生成の応用例を示したものである。

近年、災害救助や未知環境の探索において、運動性能の高さから脚型歩行ロボットが注目されている。しかし、その自由度の高さ故に、適応的な運動を実現する設計論は構築できていない。一方で、脚をもった生物に着目すると、環境に応じて適応的な運動を実現しており、生物の歩容生成メカニズムを分析することで、適応的な運動が可能なロボットの設計論を構築することができる注目されている。生物はCPG(Central Pattern generator)と呼ばれる振動子と、環境を通じた感覚情報(センサフィードバック)との相互作用の結果として、適応的な歩容を行うことが示唆されており、多くの研究者によって、この相互作用の結果として適応的な歩容が生成されることが確認されている。しかし、その歩容生成のメカニズムや原理の解析的な表現を介した理解はほとんどなされておらず、メカニズムの適用範囲などはよく分かっていない。

本研究では、生物(昆虫や多足類)の歩容生成におけるセンサフィードバックの影響を、独自のミニマルモデルを用いて解析的に表現することで明らかにする。ミニマルモデルとは現象を説明できる最小限のモデルであり、モデル化を通じて現象の本質を取り出すことができる。加えて、感覚情報を用いた適応的な歩容生成の応用例として、脆弱な環境における力フィードバックを用いた4脚ロボットの歩行方法を提案する。

はじめに、本研究では昆虫に代表される6脚ロボットの歩容生成におけるセンサフィードバックの影響を解析する。剛体に6つの脚がついた昆虫型ロボットを構築し、各脚はCPGを模した位相振動子で駆動する。センサフィードバックの影響を明確にするために、振動子は昆虫のセンサフィードバックを単純化した位相リセットの影響のみを受けているとする。結果、前後の振動子間には直接の相互作用がないにも関わらず、環境との相互作用の結果として、昆虫に対応する歩容が速度に応じて創発することがロボット実験で確認された。一方で、本ロボットではムカデに見られるような遊脚が前から後ろに進んでいく(後退波)歩容も創発した。これらの結果から、位相リセットは6脚ロボットの歩容生成に重要な役割を担っている可能性が示唆される。さらに、本モデルにおける歩容は力学系における解構造であらわされることから、独自のミニマルモデルを用いて、解とその安定性を解析的に表現することで歩容生成メカニズムを明らかにした。このミニマルモデルは、脚を質量のないバネで表し、物理パラメータのオーダー評価の元にモデルの運動方程式を振動子の位相で表現している。そのため、摂動論

を使った解析解と安定性導出が可能である。このモデルの解析により、胴体のピッチ方向の回転が歩容生成に重要な影響を及ぼしていることが明確にされ、この現象が起こりうるパラメータの範囲を明確にできた。

これらの結果を脚の数に対して一般化するため、次に多足生物を模した多足ロボットに関する解析を行う。多足生物の歩容では、遊脚が進行方向に進んでいく進行波と、戻っていく後退波の2つの歩容が確認されている。また、ヤスデにおいて、進行波と後退波がわきだす部分をもって共存することが報告されている。これらの歩容生成メカニズムに示唆を与え、またセンサフィードバックを用いたロボットの設計論を構築するために、多足歩容生成に対してセンサフィードバックの及ぼす影響を解析する。多足生物やロボットを脚のついた質点が弾性項を通して鎖状につながったモデルで近似する。各脚はCPGを模した位相振動子で駆動し、振動子は昆虫のセンサフィードバックを単純化した位相リセットの影響のみを受けているとする。シミュレーションの結果、振動子間には直接の相互作用がないにも関わらず、環境との相互作用の結果として、進行波、後退波歩容が創発する。さらに、進行波と後退波がわきだし部分をもって共存するような歩容(わきだし波歩容)も創発した。多足歩行の解析解導出は、状態量と接地パターンの場合分けが非常に多く容易ではないが、本研究ではモデルに即した物理的な仮定を行うことで、脚数を一般化したうえで解析解とその安定性を導出した。結果、脚の数に依存せずに3種類の波が存在する可能性が示唆され、質点間の弾性項が歩容生成に重要な影響を及ぼしていることが明確にされた。また、センサフィードバックは多足歩行の生成においても重要な役割を果たすことが示され、この影響が有効なパラメータ領域も明確になった。

一方で、生物の動きを参考にして、感覚情報を用いたロボットの歩容生成手法も研究されている。本研究では最後に、生物の動きを参考にして、感覚情報を用いた適応的な歩容生成のロボットへの応用例を示す。静的な歩行と動的な歩行が可能である最小の脚の数は4脚であり、これまで多くの4脚ロボットが開発されてきた。しかし、足場が崩壊する危険のある脆弱な不整地環境における安全な歩行方法はほとんど提案されてこなかった。一方で、人が脆弱な環境を歩行する場合には、脚に体重を乗せる前に、足場に力をかけて環境が脆弱でないかどうかを判別する。そこで、本研究では人間が脆弱な環境を歩行する場合を参考に、傾斜面から構成される環境における滑りを考慮した脚探り歩行方法を提案する。本手法により、4脚ロボットは脆弱な不整地で感覚情報を用いて安全に歩行することが出来る。手法の有効性はシミュレーションおよび実機実験によって示された。

目次

1	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	従来研究	2
1.2.1	生理学的観点からの研究	2
1.2.2	ニューロメカニカルな観点からの研究	3
1.2.3	ミニマリスティックモデリングアプローチ	4
1.3	目的	4
1.4	論文の構成	5
2	昆虫の歩容に対してセンサフィードバックが及ぼす影響	7
2.1	はじめに	7
2.2	6脚ロボットの歩容生成と遷移	9
2.2.1	6脚ロボット	9
2.2.2	制御系	10
2.2.3	シミュレーション結果	13
2.2.4	ロボット実験結果	15
2.3	シンプルモデルを用いた解析	16
2.3.1	シンプルモデル	17
2.3.2	周期解と安定性の導出	21
2.3.3	ロボットシミュレーションとの比較	25
2.4	議論	26
2.4.1	局所センサフィードバックによる肢間協調	26
2.4.2	進行波と後退波歩容	27
2.4.3	連続な歩容遷移と不連続な歩容遷移	28
2.4.4	速度の異なる運動に対するセンサフィードバックの役割	28
2.4.5	限界と今後の課題	29
3	多足歩容に対してセンサフィードバックが及ぼす影響	31
3.1	はじめに	31

3.2	多足歩行の動力学シミュレーション	32
3.2.1	シンプルモデル	32
3.2.2	コントローラ	34
3.2.3	シミュレーション結果	36
3.3	多足歩行の数理解析	41
3.3.1	物理的仮定	41
3.3.2	位相ダイナミクス	42
3.3.3	接地条件	42
3.3.4	わきだし波, 後退波解集合の導出と安定解析	43
3.3.5	進行波解集合の導出と安定解析	50
3.3.6	シミュレーション結果との比較	51
3.3.7	得られた解析解の空間的な特徴	52
3.4	議論	53
3.4.1	センサフィードバックが歩容生成に及ぼす影響	53
3.4.2	位相差が一意に決まらない物理的解釈	53
3.4.3	多足生物の歩容生成メカニズムへの知見	54
3.4.4	適応的なロボット制御系開発への知見	56
3.5	おわりに	56
4	感覚情報を用いた4脚ロボットの脆弱な環境における歩行方法	58
4.1	はじめに	58
4.2	手法	59
4.2.1	4脚ロボットとモデル	59
4.2.2	脚探り歩行の戦略	61
4.2.3	脚探りの幾何的領域	64
4.2.4	力分散手法	69
4.3	結果と議論	71
4.3.1	シミュレーション	71
4.3.2	実機実験	75
4.4	結論	82
5	結論と今後の展望	83
5.1	結論	83
5.2	今後の展望	84
	参考文献	86

研究業績	96
謝辞	101
付録	102
A	6脚シンプルモデルの解析解導出に関する付録 102
A.1	左右の位相拘束が位相リセット量に及ぼす効果 102
A.2	進行波歩容における接地イベント時の接地脚集合の推定 104
A.3	進行波歩容の周期解の導出 105
A.4	進行波歩容の安定解析 108
B	多足シンプルモデルの解析解導出に関する付録 110
B.1	解に対する仮定(B1-5)に基づく接地条件式(3.17)の導出方法 . . . 110
B.2	わきだし波解集合の周期解の詳細な導出 115
B.3	仮定した接地脚集合の物理的妥当性の確認 119
B.3.1	準備 119
B.3.2	接地脚集合が物理的に妥当であるための位相条件 120
B.3.3	解が位相条件を満たすことの確認 121
B.4	わきだし波解集合の安定解析 123

第1章

序論

1.1 研究背景

近年，災害救助や危険な未知環境の探索において，人間の代わりにロボットを活用することが期待されている．特に，不整地における運動能力の高さから，脚型歩行ロボットが注目されている．これまで，脚型歩行ロボットの設計・制御に関して様々な研究がおこなわれており，特に有名なものはBostonDynamics社によるBigDogをはじめとするロボットである [1]．しかし，自由度の高さ故に適応的な運動を実現するための設計論は構築できていない．

一方で，脚をもった生物に着目してみると，現状のロボットでは実現できていない優れた適応性をもつ．例えば，速度に対する適応では，昆虫や動物は歩行速度に合わせて歩容を変化させることが知られている [2, 3]．これは，歩行に使うためのエネルギーを小さくするという視点や，脚にかかる荷重を減らしているという視点で説明される [4, 5]．あるいは，環境に対する適応では，多足類，昆虫，動物は様々な環境を移動することができる．さらに，たとえ脚が切断されたとしても，それに適応して歩き方を変えることが知られている [6, 7, 8]．

このような生物の見せる適応的な歩容メカニズムを探るべく，これまで多くの研究がなされてきた．特に昆虫については生理学的な知見も豊富であり，生物の歩行には以下の重要な要素があるのではないかと考えられる．

1. 分散システム

生物の基本的な歩容パターンは，脳が中央集権的に生成しているわけではなく，CPG(Central Pattern Generator)と呼ばれるニューラルネットワークによって生成されることが知られている [9]．CPGは下位処理系に属しており，歩容生成のためのリズムを生成し，それに応じて脚が周期的な運動を行う．例えば，除脳ネコは脳がないにも関わらず歩行することができ，さらに歩行速度の変化に応じて歩容を遷移させることが確認されている [10]．昆虫のナナフシでは各脚の関節は別々のCPGで駆動され，それらが環境との相互作用を通して協調することで歩容が生まれることが知られている [11]．多くの研究において，生物の制御系は

階層構造を持つが，それぞれの階層は近くの階層としか相互作用を持たず，分散的に制御を行っていると言われている [12, 13].

2. 環境との相互作用

歩行は環境との相互作用によって生まれる現象である．生物は様々な感覚器を持っており，環境からの情報を使って歩容を生成すると示唆されている．例えば，ナナフシは環境と相互作用することで秩序だった歩容を生成することが知られており，環境との相互作用なしには秩序だった歩容は生まれない [11]. また，4足動物や人間のような動的な歩容を，単純な受動モデルを使ってよく再現できることも知られている [14, 15].

このような背景を基に，本研究では上述した2つの要素に着目して，生物の適応的な歩容生成メカニズムを探ることを目標とする．このメカニズムが理解できれば，ロボットの設計論に還元することで，より不整地環境で活躍できるロボットを設計することが出来ると期待される．

1.2 従来研究

これまで，生物の適応的な歩行に関する研究は様々に行われてきた．特に昆虫については生理学的な知見が多く，主に昆虫に関する研究成果を中心にまとめる．

1.2.1 生理学的観点からの研究

昆虫は哺乳類と比べると神経回路が複雑ではないことから，生理学的な観点から歩容のメカニズムについて様々な研究がなされてきた．昆虫は胸部神経節にCPGと呼ばれる周期的な信号を発生させるニューラルネットワークを持っており，その信号が周期的な歩行運動を生成すると考えられてきた [16, 17, 18](もちろん他の説もある [19]). このCPGを一つだけ持っているのか，それとも分散して持っているのかという点についてはいまだ不明確だが，ナナフシにおいては，独立したCPGを各脚の関節にそれぞれ持っていると考えられている [11, 20].

CPGはそれぞれ発火性のニューロンや他のCPGと結合しており，CPGの振動は昆虫の感覚受容器の影響を受けていることが指摘されている [16, 17]. 昆虫の感覚受容器には，接地，脚の負荷，位置などを知覚するさまざまなものがある [21]. 特にナナフシは，感覚受容器からの情報なしには秩序だっ

た歩容を生成しないことが知られており、CPGは脚にかかる負荷荷重や関節角度などのセンサフィードバックの影響を強く受けていると考えられている [11]. 特にナナフシの真ん中の脚については、センサフィードバックが関節のCPGに対して及ぼす影響について生理学的によく分析されている [22].

以上のように、生物の歩容は、CPGとセンサフィードバックとの相互作用の結果として生成されることが生理学的に示唆されている。しかし、歩容は環境と相互作用して生まれるため、歩容のメカニズムを探るには、生物の脳神経系と身体機構系のダイナミクスの双方を考える必要がある。

1.2.2 ニューロメカニカルな観点からの研究

前節の議論に基づき、身体と神経系の環境を通したカップリングを考慮した歩容メカニズムの研究が近年多くなされている(ニューロメカニカルな観点からの研究).

Cruseらは、昆虫の行動の観測に基づいて、ナナフシのような歩容を作るための6つのルールを見つけ出した [23, 24, 25, 26]. そのルールとは、脚の位置や接地情報に応じて、近隣の脚の位相関係を調節するというものであり、これに基づいて制御系を設計することで(Walknet), ナナフシに対応した適応的な歩容が得られることが示された。具体的には、肢間協調, 回転時の運動, 脚がなくなった時の運動などについて分析されている。

一方で、ナナフシの真ん中の脚の生理学的な知見は多く存在している。これをもとに、ナナフシの1つの脚の数理モデルを構築し、環境との相互作用の結果として肢内協調が生まれることを示した研究がある [27]. また、これらの知見をすべて組み合わせることで、ゴキブリの回転運動を模擬できるモデルも構築されている [28]. なお、その他の生物に対しても、センサフィードバックが適応的な歩容に寄与していることは多く報告されている [29].

以上のように、生物の適応的な歩容にとってセンサフィードバックが重要であることが示唆されている。しかし、センサフィードバックが歩容に及ぼす影響は、これまでのアプローチではあまり明確にはなっていない。それは、生物の知見をもとにさまざまなセンサフィードバック, ニューロンモデル, 筋モデルを組み合わせているため、モデルが複雑であるからである。

1.2.3 ミニマリスティックモデリングアプローチ

以上の欠点をもとに，近年では工学者らによって，できるだけモデルを単純にして現象の本質に迫ろうというミニマリスティックモデリングアプローチが多くとられている．このアプローチでは，生物の単純な物理モデルを構築し，ニューロンモデルも単純化し，特定のセンサフィードバックのみに着目する．

直接相互作用をしていない分散した振動子で脚が駆動される4脚ロボットをデザインする．その振動子は局所的な力フィードバックのみの影響を受けている．このときに，環境との相互作用によって，生物のような肢間協調が速度に応じて生成されるという報告がある [30, 31]．また，昆虫のモデルにおいても，センサフィードバックの効果によって，分散した振動子で前後の肢間協調が実現できるという報告がある [32, 33]．

しかし，これらの研究の現状は現象の確認にとどまっており，その現象が起こる本質的なメカニズムについてはあまりよく分かっていない．特に，解析的な理解はほとんどない．そのため，どのような場合にその現象が起こりうるのかという点が明確ではない．適応的なロボットの設計論を組み立てるうえで，歩容生成メカニズムに対する単純モデルによる解析的な理解は重要であろうと考えられる．その例証として，近年のBigDogのような走行運動における成功は，生物の走行原理を単純モデル(SLIPモデル)を使って表現したところから始まっていることが挙げられる [34, 35, 36]．

1.3 目的

以上の議論をもとに，本論文では，感覚情報を用いた適応的な歩容生成の重要性に着目して，

「生物(昆虫や多足類)の歩容生成におけるセンサフィードバックの影響を数理的に明らかにする．単に現象の確認にとどまらず，解析的にその本質を理解し，現象の起こる範囲を明確にする」ことを目的とする．大目標に沿うならば，本来は適応的な歩容へのセンサフィードバックの影響を分析すべきである．しかし，歩行は環境との相互作用が絡む非常に複雑な現象であるため，歩容生成におけるセンサフィードバックの役割ですらあまり明確にされていない．そのため，本研究では歩容生成を議論の対象とした．また，生物の環境との相互作用の仕方は，運動の支配的な項(慣性項が支配的なのか否かとか)や胴体の形状によって大きく異なると考えられる．よって，本研

究では第1段階として運動の慣性項が支配的ではない場合に議論を限定し、昆虫(特にナナフシ)と多足生物(特にヤスデ)の歩容を研究対象とする。

なお、各生物の歩容生成の解析にあたり、本研究では従来研究で説明したようなミニマリスティックモデリングアプローチを使って分析を行う。まずは、システムを単純にするために、対象とする生物の単純な物理・制御モデルを構成し、ある特定のセンサフィードバック(位相リセット)のみに着目する。その後、物理シミュレーション、実機実験によってセンサフィードバックの歩容に対する影響を確認し、その現象を説明するための解析モデルを構築、現象の本質を明らかにする。

また、センサフィードバックは実用的なロボットの歩行方法を提案するうえでも有用である。感覚情報を用いた歩容生成の応用例として、最後に「脆弱な環境における力フィードバックを用いた4脚ロボットの歩行方法」を提案する。

1.4 論文の構成

第1章では、本研究の背景と従来研究を踏まえ、本研究の目的を述べた。

第2章では、昆虫(ナナフシのような生物)の歩容生成におけるセンサフィードバックの影響を解析する。本分析では、昆虫を剛体に6つの脚がついたモデルで近似して、ロボットを用いた分析を行う。結果、遊脚が前に進んでいく昆虫のような歩容(進行波歩容)と、後ろに進んでいく歩容(後退波歩容)が、センサフィードバックの効果により創発する。シンプルモデルの解析の結果、胴体の回転を通じた歩容生成メカニズムが明確にされる。

第3章では、6脚モデルで得られた進行波・後退波をより一般的に議論するため、多足生物(ヤスデのような生物)の歩容生成におけるセンサフィードバックの影響を解析する。本分析では、多足生物を、脚をもつ質点が弾性項をとおして鎖状につながったものと近似した。結果、連結部分の弾性によってセンサフィードバックが調節され、ヤスデやムカデに似た進行波、後退波をもつ歩容が生成される。さらに、進行波と後退波が共存するような現象(わきだし波)も確認され、これらの数理メカニズムを解析モデルの分析で明確にする。

第4章では、センサフィードバックを用いたロボットの設計例として、感覚情報を用いた脆弱な不整地における4脚ロボットの歩行方法を提案する。感覚情報を用いることで、これまで適応不可能であった環境における安全な歩行方法が提案される。

第5章では，本論文の結論を述べて，今後の課題を示す。

第2章

昆虫の歩容に対してセンサフィードバックが及ぼす影響

2.1 はじめに

本章では，昆虫を対象にして，センサフィードバックが歩行に及ぼす影響について分析する

脚をもつ動物は，特定の歩容パターンを好み，速度に応じて歩容を変化させることが知られている．例えば，四足動物は，ウォーク，トロットのようになり，速度に応じて歩容を変化させることが知られており，肢間の位相関係によって歩容が特徴づけられる [2, 37]．例えば，多くの動物で観測されるウォークは，左右逆相で遊脚が後ろから前に進むような歩容であり，トロットは前後と左右が逆相で動く歩容である．ウォークからトロットに歩容が変化するとき，前後の肢間関係の変化は2つのパターンが観測されている．急に变化する動物(犬)と，徐々に变化する動物(羊)である (Fig. 2.1A [38])．

昆虫においても同様に，肢間位相関係によって歩容は特徴づけられ，速度に応じてメタクロナル歩容 (Metachronal gait) やトライポッド歩容 (Tripod gait) を行うことが知られている (ナナフシ [39, 3, 40, 7], ゴキブリ [41, 42, 43], ハエ [6] など)．メタクロナル歩容においては，遊脚の動きが後ろから前に向かって進んでいく (進行波歩容 (Direct wave gait) と呼ぶ)，一方で，トライポッド歩容では3つの脚が同相で動く．歩行速度に関係なく，左右の脚は逆相の関係を持っている．ある種のムカデ [44] のように，遊脚の動きが前から後ろに進んでいくような歩容 (後退波歩容 (Retrograde wave gait) と呼ぶ) でも昆虫は歩けると思われるが，昆虫は4足動物のように進行波歩容を好むことが知られている．さらに，羊と同様に，昆虫は前後の肢間位相差を速度に応じて連続に変化させることが知られている (Fig. 2.1B)．歩容は，振動子と胴体のセンサフィードバックを通じた複雑な相互作用の結果として得られるものである．特にナナフシでは環境との相互作用なしに秩序だった歩容が生まれないことが報告されており [17]，昆虫の歩容のメカニズムを探るために，多くの研究者が生物規範のコントローラをデザインしてきた．

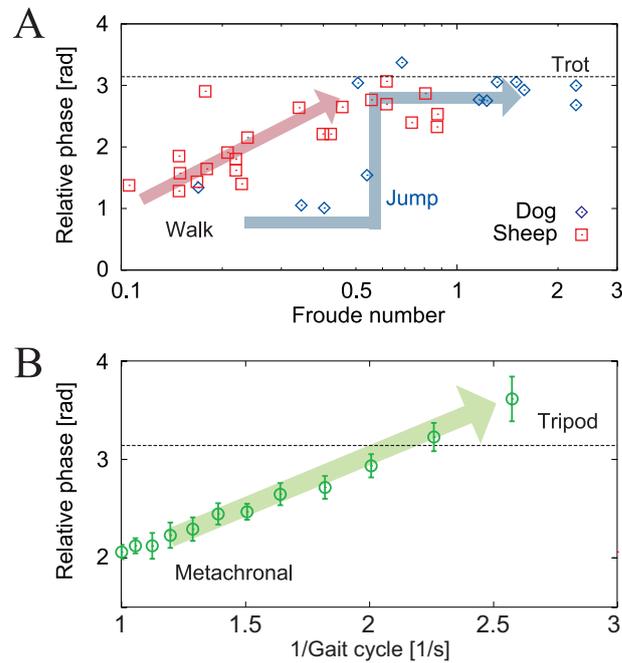


Fig. 2.1: **Interlimb phase relationship for locomotion speed.** **A:** Ipsilateral relative phase (fore leg–hind leg) of dogs and sheep for the Froude number (locomotion speed increases as the Froude number increases) [38]. Dogs change their phase relationship suddenly around a Froude number of 0.5, while sheep change their phase relationship smoothly based on locomotion speed. **B:** Ipsilateral relative phase ((fore leg–hind leg)/2) of stick insects for gait cycle (locomotion speed decreases as gait cycle increases) [39]. Data points and error bars show the average and the error of the mean of the measured results. Stick insects change their phase relationship smoothly based on locomotion speed, similar to sheep.

Cruseらは、昆虫の行動の観測に基づいて、肢間協調を作るための6つのルールを見つけ出した [23, 24, 25, 26]. それを人工的なニューラルネットワークを用いて実現し (Walknet), 肢間協調だけではなく, ナナフシで観測されるような様々な歩容を実現した. また, CPGに基づいた振動子ネットワークモデルも構築されている [45]. 昆虫のニューロメカニカルなモデルも生理学的な知見に基づいて多く提案され, 適応的な歩容が生成されている [28, 46].

しかし, これらのモデルは昆虫の歩容を再現しているものの, センサフィードバックの肢間協調への影響については明確には分かっていない. これは, これらのシステムが非常に複雑なためである (多くのセンサフィードバック, ニューロン, 筋モデルなど). 特に, 環境とのセンサフィードバックを通じた相

相互作用は非常に複雑であり、昆虫の歩容で解析的にこれを議論した研究は我々の知る限り見つかっていない。そのため、どの範囲でセンサフィードバックがどのような効果を及ぼすかについてよくわかっていない。センサフィードバックは、適応的な歩行において重要な要素なので[29, 47, 48, 49, 50, 51], このセンサフィードバックの肢間協調への影響を理解することは重要である。

よって、我々は秩序だった昆虫の歩容と、その速度に対する連続な遷移を行うためのミニマルモデルを提案する。その後、このメカニズムを解析的に説明する。特に、我々は以下の昆虫の主要な特徴について着目する。

P1 遊脚運動は後ろから前に向かって進んでいく(進行波歩容)

P2 前後の肢間位相関係は歩行速度に応じて連続的に変化する(メタクロナル歩容からトライポッド歩容)

具体的には、生物学的知見に基づいて、6脚ロボットとその振動子によるコントロール則を提案する。それぞれの脚は各振動子によって駆動され、各振動子は局所的なセンサフィードバックの影響のみを受けている(つまり、前後の振動子間には直接的な相互作用はない)。我々は位相リセットという局所的なセンサフィードバックに着目し、それがP1,2を満たすような歩容を生成するかどうかについて、シミュレーションとロボット実験を使って分析する。さらに、我々は単純な物理モデルを構築し、その歩容メカニズムを解析的に説明する。このモデルは、脚を質量のないバネで表し、物理パラメータのオーダー評価の元にモデルの運動方程式を振動子の位相で表現している。そのため、摂動論を使った解析解と安定性導出が可能となり、歩容メカニズムの解析的表現を可能にした。

2.2 6脚ロボットの歩容生成と遷移

2.2.1 6脚ロボット

本章ではFig. 2.2Aに示される6脚ロボット(AMOS II [48])を用いる。Fig. 2.2Bにこのモデルを示す。このロボットは昆虫を模して作られており、1つの胴体(2つに分かれているが、機構的に完全に拘束されている)と6つの脚(脚1-6)からなる。各脚は3つのリンクから構成され(リンク1-3)、それらはサーボモーターで制御される関節(関節1-3)を介して結合され、足先には接地センサが搭載されている。関節1はヨー軸回転であり、足先を前後に動かす。それに対して関節2, 3はピッチ軸回転であり、脚先を重力に抗して持ち上げ

Table 2.1: Physical parameters of the robot.

Link	Parameter	Value
Body	Mass [kg]	4.6
	Width [mm]	100
	Length [mm]	400
Leg link 1	Mass [kg]	0.27
	Length [mm]	65
Leg link 2	Mass [kg]	0.27
	Length [mm]	65
Leg link 3	Mass [kg]	0.27
	Length [mm]	115

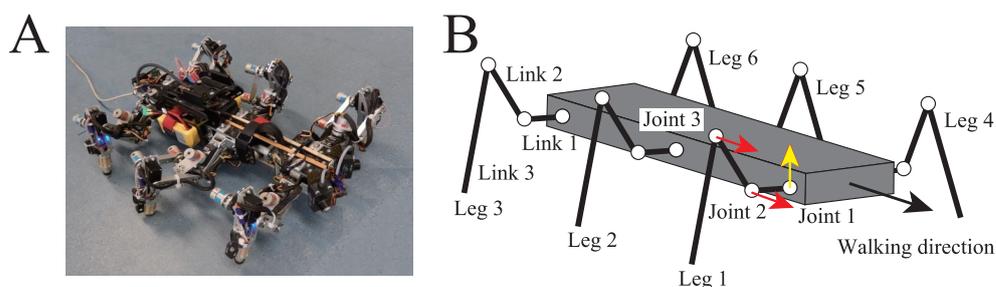


Fig. 2.2: Hexapod robots A: Robot and B: Model.

る． Tab. 2.1はこのロボットの物理パラメタを示す．ただし，各脚で同じ値を用いている．

ロボットはバッテリーを積んでおり，外部のコンピュータによっておよそ30Hzで制御される (CPU: Intel Core i5 2.5 GHz, Memory: 8 GB)．ロボットとコンピュータの通信はシリアル通信であり，そのケーブルは歩容に影響しないようにたわませてある．我々はODE(Open Dynamics Engine)ベースのLPZROBOTS [52]というシミュレータを用いて物理シミュレーションを行った．

2.2.2 制御系

生理学的知見によって，昆虫の脚の運動はCPGによって制御されていることが示唆されている [16, 17, 18, 53]．また，CPGからの信号はセンサフィードバックの影響を受け，それが歩容生成にとって重要であることが示唆されて

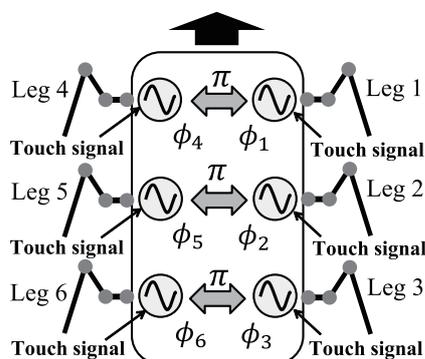


Fig. 2.3: **Locomotion control system using phase oscillators.** Each oscillator controls one leg movement. Contralateral oscillators of the same segment are set to be alternate in phase. Each oscillator is affected by the local sensory feedback.

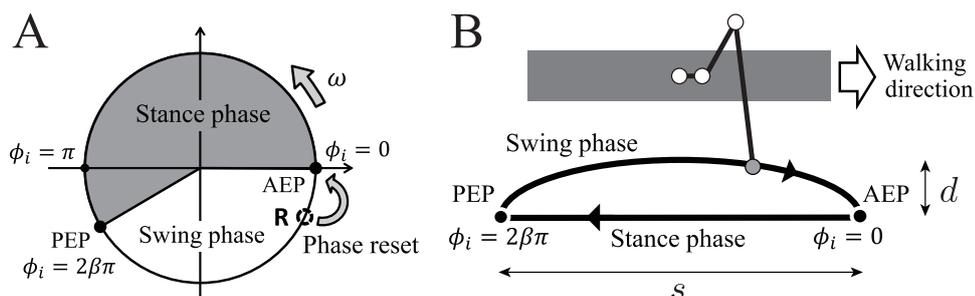


Fig. 2.4: **Leg movement based on the oscillator phase.** **A:** Oscillator phase. **B:** Desired leg movement. AEP and PEP are anterior extreme position and posterior extreme position.

いる [11, 16, 17, 21, 54, 55]. 我々はミニマリスティックモデリングアプローチに基づいて、単純な制御系をデザインする。

位相振動子と脚軌道生成

CPGを模擬して、6つの位相振動子(振動子1-6)を用いてそれぞれの脚の動き(Fig. 2.3)を制御する。振動子の位相は ϕ_i ($0 \leq \phi_i < 2\pi$, $i = 1, \dots, 6$)であり、以下のダイナミクスを持つ。

$$\dot{\phi}_i = \omega + g_i + y_i, \quad (2.1)$$

$$\tau \dot{y}_i = k_t^i - y_i, \quad (2.2)$$

ω は歩容の基準となる角速度であり, g_i は振動子間の相互作用項である(詳細は後述). k_c^i はセンサフィードバック項を表し, 時定数 $\tau(=1\text{ s})$ の一次フィルタ(状態量 y_i)で平滑化されている(詳細は後述).

脚 i の脚先は位相 ϕ_i に基づいて脚軌道上を移動する. 各脚の軌道は接地相($0 \leq \phi_i < 2\beta\pi$)と離地相($2\beta\pi \leq \phi_i < 2\pi$)から構成される. ここで, β はデューティ比である. 接地相では脚先はAEP(anterior extrem position)とPEP(posterior extrem position)を結ぶ直線軌道, 離地相では楕円軌道をなす. AEPとPEPの間の直線距離を $s = 6\text{ cm}$, 遊脚軌道の高さを $d = 6\text{ cm}$ と設定する. 各脚の目標関節角は逆運動学から決まり, PD制御を用いて制御される.

昆虫で観測されるように, 離地相の時間を $T_{\text{sw}} = \text{const.}$ とする[3, 39]. この時間 T_{sw} を使って, 歩行周期は $T_p = T_{\text{sw}}/(1 - \beta)$, 基準角速度は $\omega = 2\pi/T_p$, 歩幅は s/β , 歩行速度は $v = (1 - \beta)s/\beta T_{\text{sw}}$ とかける. なお, 実機実験では $T_{\text{sw}} = 5\text{ s}$, シミュレーションでは $T_{\text{sw}} = 10\text{ s}$ とパラメタを設定した.

位相振動子モデルにおける歩容

ロボットの脚の動きは振動子の位相によって決定されるので, 本システムにおいて振動子間の位相差は歩容を表す. なお, 振動子間の位相差は, 振動子とセンサフィードバックの環境を通じた相互作用によって創発する.

昆虫の歩容では, 速度に応じて前後の位相差関係は変化するが, 左右の振動子の位相差はおよそ逆相である[3]. システムを簡単にするために, 本章では左右の位相差は逆相であることを仮定した. 結果, 振動子間の相互作用項 g_i ((2.1)式)は以下で与えられる(Fig. 2.3).

$$g_i = - \sum_{j=1}^6 k_c^{ij} \sin(\phi_i - \phi_j - \pi), \quad (2.3)$$

なお,

$$k_c^{ij} = \begin{cases} k_c & (i, j) \in \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

なお, 左右の位相差が π に拘束されるように, 大きな値の $k_c(=10)$ を用いた. また, それ以外の振動子間の直接的な相互作用は存在しない. 左右の位相差が逆相と固定したので, 本システムの歩容は前後の2つの位相差 $\psi_1(= \phi_2 - \phi_1)$, $\psi_2(= \phi_3 - \phi_2)$ によって特徴づけられる.

センサフィードバック

センサフィードバックは秩序だった歩容生成にとって重要である [11, 16, 17, 21, 54, 55]. 生理学的な知見から, 昆虫は脚の荷重が増えた時に脚を蹴り出すことが知られている [22, 56]. また, モータニューロンの活動をリセットするニューロンの存在も知られている [57]. よって, 本章ではCPGの出力を接地情報に応じてリセットするようなセンサフィードバックを考慮し [32], (2.2) 式の k_f^i を以下で決定する.

$$k_f^i = \begin{cases} 0 & 0 \leq \phi_i(t_0^i) < 2\beta\pi \\ \{2\pi - \phi_i(t_0^i)\} \delta(t - t_0^i) & 2\beta\pi \leq \phi_i(t_0^i) < 2\pi, \end{cases}$$

なお, t_0^i は脚 i が接地した時の時間であり, $\delta()$ はディラックのデルタ関数である. Fig. 2.4A の点 R で示すように, 脚 i が離地相 ($2\beta\pi \leq \phi_i < 2\pi$) で地面に接地した場合, 位相 ϕ_i はゼロにリセットされる. 本稿では, 位相を滑らかに変化させるために, 時定数 τ の一次フィルタを出力に通している [58]. この位相リセットの効果によって, 脚の荷重を感知することで脚を蹴りだし始める. つまり, 昆虫で観測されるセンサフィードバックを単純化したものになっている [22, 56].

2.2.3 シミュレーション結果

ここまでで述べたように, デューティー比 β はロボットの歩行速度 v を決定する. シミュレーションでは, デューティー比 β を変化させることで歩行速度 v を変化させて, 昆虫の歩容の特徴 P1,2 を満たすような歩容が環境との相互作用の結果として生まれるかどうかを分析する. なお, これらの歩容はあらかじめ決められているわけではなく, 環境との相互作用の結果として創発する.

デューティー比 $0.5 \leq \beta \leq 0.65$ の範囲で, さまざまな初期条件 (ψ_1, ψ_2) でシミュレーションを行い安定な歩容を探した. Fig. 2.5A,B に, それぞれの β に対して見つかった安定な歩容における脚 2 が接地した瞬間 (ポアンカレ断面) の (ψ_1, ψ_2) を示す. また, Fig. 2.5C に, (ψ_1, ψ_2) の摂動を用いて安定解析を行った最大固有値を示す. これらの結果より, 2つの安定な歩容 (進行波歩容と後退波歩容) が存在し, 歩行速度とともに歩容が滑らかに変化していることが分かる (P2).

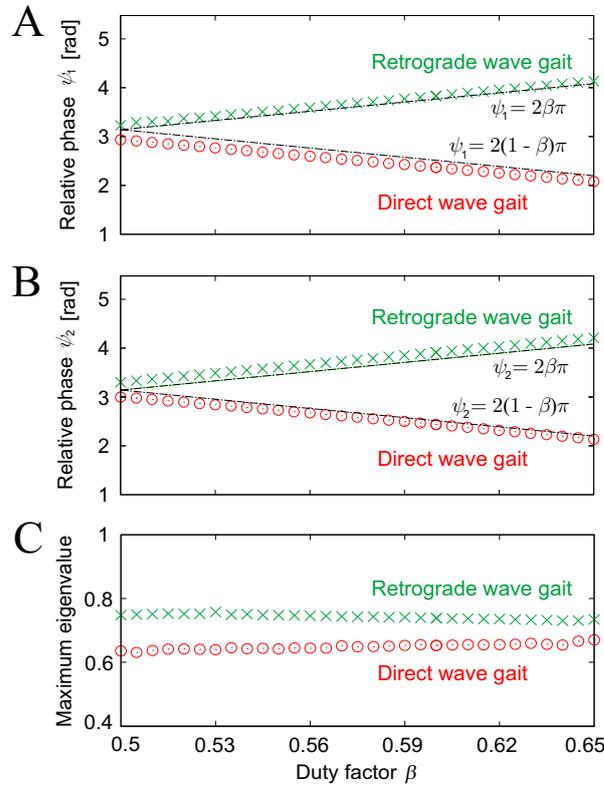


Fig. 2.5: Relative phases and maximum eigenvalue of obtained gaits for duty factor β in computer simulation. A: Relative phase ψ_1 , B: Relative phase ψ_2 , and C: Maximum eigenvalue. Two stable gaits were found for each duty factor (direct and retrograde wave gaits).

一つ目の解の進行波歩容は，Fig. 2.5より以下の位相関係を持つことが分かる．

$$\psi_1 \sim \psi_2 \sim 2(1 - \beta)\pi. \quad (2.4)$$

これは、「後脚(中脚)が接地した時に中脚(前脚)が離地する」歩容であり (Fig. 2.6A)，遊脚の動きが後ろの脚から前の脚に向かって移動しているため，昆虫の歩容の特徴P1,2を満たしている． $\beta = 0.5$ のとき，少なくとも3つの脚が常に接地しているトライポッド歩容に対応しており，3つの脚は同時に動く．一方で， $\beta = 0.65$ のときは，少なくとも4つの脚が常に接地しており，遊脚の動きが後ろの脚から前の脚に向かって移動している．これはメタクロナル歩容の接地パターンになっている．もう一方の解の後退波歩容は，Fig. 2.5より以下の位相関係を持つことが分かる．

$$\psi_1 \sim \psi_2 \sim 2\beta\pi. \quad (2.5)$$

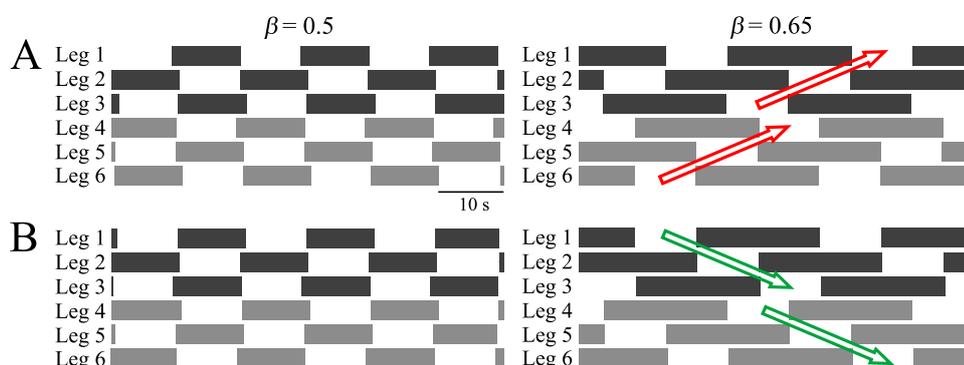


Fig. 2.6:Footprint diagrams of the obtained gaits at duty factors $\beta = 0.5$ and 0.65 in computer simulation. **A:** Traveling wave gait. **B:** Retrograde wave gait.

これは、「前脚(中脚)が接地した瞬間に中脚(後脚)が離地する」歩容であり(Fig. 2.6B), 進行波歩容とは逆に遊脚の動きが前から後ろに伝わる. よって, 昆虫の歩容の特徴P1を満たさない. $\beta = 0.5$ の場合は, 少なくとも3つの脚が常に接地しているトライポッド歩容に対応しており, 3つの脚は同時に動く. しかし, $\beta = 0.65$ の場合は, 少なくとも4つの脚が常に接地しているものの, 遊脚の動きは前の脚から後ろの脚に向かって移動している. これは, 昆虫に見られるメタクロナル歩容とは異なっている. 加えて, 周期解に対する誤差発展行列の最大固有値の大きさは, 後退波歩容のものが進行波歩容のものよりも大きい(Fig. 2.5C)ため, 進行波歩容の方が後退波歩容よりも安定である.

2.2.4 ロボット実験結果

シミュレーション結果の妥当性を検証するために, 6脚ロボット(Fig. 2.2A)を使って実験を行った. 0.5 から 0.65 の範囲のデューティー比 β において, 位相差(ψ_1, ψ_2)に対して6つの初期値をそれぞれ与えてロボットを動かした. Fig. 2.7A,Bは, それぞれデューティー比が $\beta = 0.5, 0.575$ であるときに, 位相差(ψ_1, ψ_2)がどのように時間発展したかを表す. なお, 位相差の値はポアンカレ断面上のものである. β の値に関係なく, 位相差は2つの集合のどちらかに収束しており, 2つの安定な歩容が存在している. これらの歩容は, シミュレーションにおける進行波歩容と後退波歩容に対応している.

Fig. 2.8は, すべての試行における位相差の収束値(ψ_1, ψ_2)をデューティー比に対してプロットしたものである. 2つの異なる歩容(進行波歩容と後退波歩容)が存在し, シミュレーション結果(Fig. 2.5A,B)と同様に位相差は歩行速

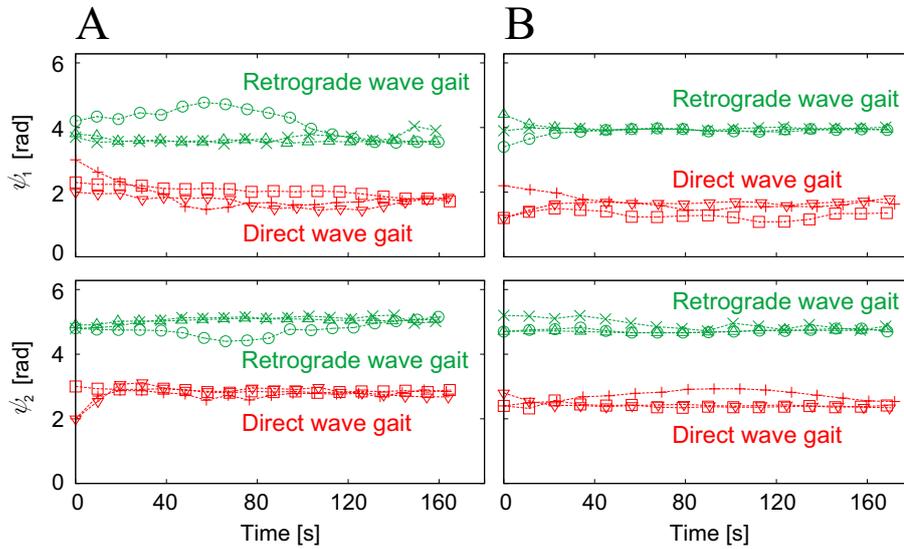


Fig. 2.7: **Relative phases (ψ_1, ψ_2) of the robot experiments plotted at foot contact of Leg 2.** Relative phases are plotted for six initial conditions with (A) $\beta = 0.5$ and (B) $\beta = 0.575$. Six different markers represent the results of six initial conditions. Irrespective of β , the robot established two different gaits depending on the initial conditions.

度とともになめらかに変化している。進行波歩容の ψ_1 と後退波歩容の ψ_2 はシミュレーション結果とは少々異なっている。この理由は、実機のサーボのトルクが不十分であったためである。実際に、関節のPDゲインを下げた場合の物理シミュレーションを行うと、ゲインが下がるにつれて、シミュレーションの結果はロボット実験の結果に近くなっていくことが分かる。実機の制約でシミュレーション結果と実機実験結果は少し異なるものの、傾向は一致していることが分かり、シミュレーションの妥当性が示された。

2.3 シンプルモデルを用いた解析

前章のシミュレーションにおいて、センサフィードバックを通じた環境との相互作用によって、振動子の前後位相差は安定解を持つことが示された。そして、各振動子は位相リセットのみの影響を受けていた。この結果から、ある振動子の位相リセット量は、物理的な相互作用を通して、他の振動子の位相によって決定されることが予測できる。その物理的な相互作用を簡潔に分析するために、脚の関節のPD制御の効果をバネによってモデル化したシンプルモデルを提案する。結果、このコンプライアンスのために、振

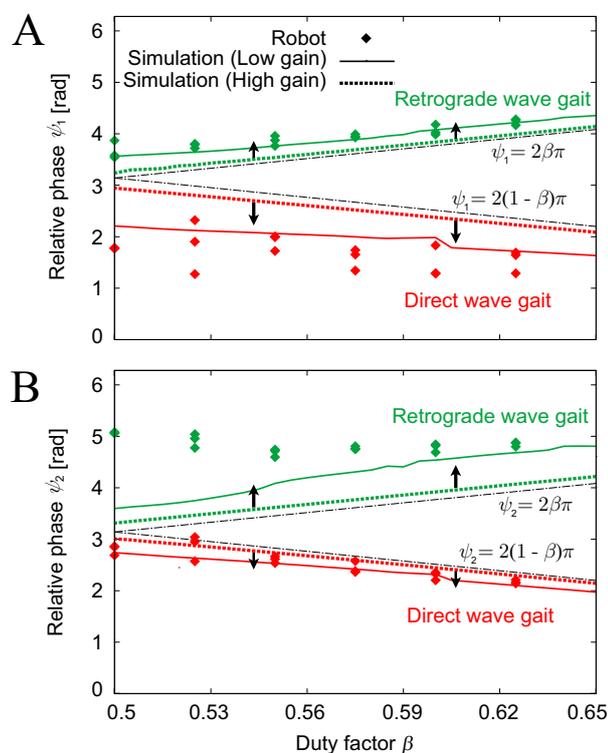


Fig. 2.8: Relative phases (A) ψ_1 and (B) ψ_2 of obtained gaits for duty factor β in the robot experiments and computer simulations. The robot experiments obtained two stable gaits: direct and retrograde wave gaits. The computer simulations used high and low feedback gains. By decreasing the feedback gain, the simulation results get closer to the robot experimental results.

動子の位相に応じて位相リセット量が変化し，安定性や固定点が決定されていることが解析的に説明できる。

2.3.1 シンプルモデル

物理的仮定

前節で得られた歩容の生成原理を理解するために，以下のような物理的仮定のもとで成立するシンプルな力学モデル (Fig. 2.9) を用いて安定解析を行う。

A1 ロボットの脚は胴体に比べて軽いため脚の質量は無視し，関節にかかる PD 制御による脚の胴体への力学的効果をバネに置き換える．具体的に

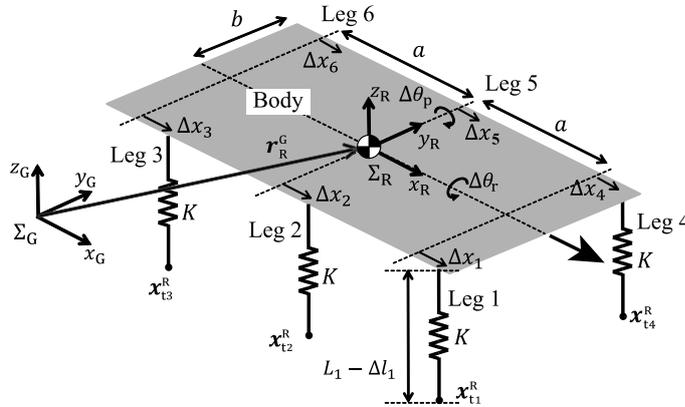


Fig. 2.9: Simple physical model with a rigid body and four massless spring legs. The body is represented by a flat plate to clearly show the geometric relationship between the model and the variables.

は胴体 (質量 M , 長さ $2a$, 幅 $2b$) に対して垂直下方に6つの質量の無視できるバネ (バネ定数 K) からなる脚を接続する (基準間隔 a).

- A2** ロボットの歩行は周期が $20[s]$ 以上と十分ゆっくりで準静的であったため, ここでは静的な運動を考え (加速度を持たない), 脚先と地面との間の水平方向の摩擦を無視する.
- A3** Fig. 2.4B で設計した脚軌道よりロボットは直線歩行するため, 胴体のヨー方向の回転を無視する.
- A4** Fig. 2.4B で設計した脚運動に基づいて, バネの自然長 L_i と付け根の位置 Δx_i を振動子の位相 ϕ_i に応じて変化させる ($L_i = L_i(\phi_i)$, $\Delta x_i = \Delta x_i(\phi_i)$).
- A5** ロボットの脚はハイゲインPD制御でコントロールされていたため, バネ定数 K は十分大きく, それぞれの物理量のオーダーを K を基準に近似する (詳細は本節後半に記載).
- A6** 左右の振動子は逆位相に強く拘束されていたため (完全ではない), $\phi_i = \phi_{i-3} + \pi$ ($i = 4, 5, 6$) とする.
- A7** センサフィードバックの1次遅れ項は, 歩行周期に対して十分小さいので無視する ($\tau = 0$).

このシンプルモデルに対して, $\Sigma_G(x_G, y_G, z_G)$ を地面に固定した座標系とし, $\Sigma_R(x_R, y_R, z_R)$ をロボット胴体の質量中心に固定した座標系とする. ただし, x_R

をロボットの進行方向と一致させ、鉛直上向きを z_G と一致させる。ロボットの姿勢はピッチ角 $\Delta\theta_p$ とロール角 $\Delta\theta_r$ を用いて表す。ロボット胴体の質量中心位置を Σ_G 上で \mathbf{r}_R^G と書き、脚先 i の位置を Σ_R 上で \mathbf{x}_{i1}^R と書く。脚 i のバネの縮みを Δl_i とすると、脚 i の長さは $L_i - \Delta l_i$ とかける。 Δx_i は脚 i の根本からの x_R 方向への変位の大きさを表す。

この時、それぞれの足先の位置はロボット座標系 Σ_R において以下のようにあらわすことができる。

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{11}^R = [a + \Delta x_1, -b, -(L_1 - \Delta l_1)]^T \\ \mathbf{x}_{12}^R = [\Delta x_2, -b, -(L_2 - \Delta l_2)]^T \\ \mathbf{x}_{13}^R = [-a + \Delta x_3, -b, -(L_3 - \Delta l_3)]^T \\ \mathbf{x}_{14}^R = [a + \Delta x_4, b, -(L_4 - \Delta l_4)]^T \\ \mathbf{x}_{15}^R = [\Delta x_5, b, -(L_5 - \Delta l_5)]^T \\ \mathbf{x}_{16}^R = [-a + \Delta x_6, b, -(L_6 - \Delta l_6)]^T. \end{cases} \quad (2.6)$$

Fig. 2.4B で設計した脚先の半楕円型の軌道に基づいて、脚 i の自然長 L_i と付け根の位置 Δx_i は、位相 ϕ_i を用いて以下の式で与える。

$$L_i = \begin{cases} L & 0 \leq \phi_i < 2\beta\pi \\ L - d \sin\left(\frac{\phi_i - 2\beta\pi}{2(1-\beta)}\right) & 2\beta\pi \leq \phi_i < 2\pi, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\Delta x_i = \begin{cases} s \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi_i}{2\beta\pi} \right) & 0 \leq \phi_i < 2\beta\pi \\ s \left(-\frac{1}{2} + \frac{\phi_i - 2\beta\pi}{2(1-\beta)\pi} \right) & 2\beta\pi \leq \phi_i < 2\pi, \end{cases} \quad (2.8)$$

ここで、 L は接地期の脚の長さである。

物理パラメタのオーダーを K を基準にして評価するために、 Mg と L を使って変数の無次元化を行う。相対バネ定数を $K^* = KL/Mg$ と定義し、長さの次元をもつ任意の物理量 p は、 $p^* = p/L$ として無次元化する。以後、無次元化されたパラメタを $()^*$ をつけて表す。なお、無次元化された(2.6)(2.7)(2.8)式はここでは省略する。以上を用いて、それぞれの物理パラメタのオーダーを K^* を用いて以下のように設定する。

$$a^*, b^*, d^* \simeq O(1), \quad (2.9)$$

$$s^* \lesssim O((K^*)^{-\frac{2}{3}}), \quad (2.10)$$

$$\Delta l_i^*, \Delta \theta_p, \Delta \theta_r \approx O((K^*)^{-1}), \quad (2.11)$$

2次以上の微小量 $O((K^*)^{-2})$ は無視する。(2.10)式は、任意の変数 $\Delta p^* \approx O(K^{*-1})$ に対して $\{\Delta p^*, s^*, (s^*)^2, s^* \Delta p^*\}$ の微小項まで扱うことを意味している。

つり合い式による位置と姿勢の位相表現

脚の根本と地面までの垂直距離が自然長 L_i^* より小さく、バネの縮みが $\Delta l_i^* \geq 0$ の時、脚は地面に接地している。地面に接地している脚番号の集合を $S = \{i \mid \text{Leg } i \text{ on the ground}\}$ とする。脚先が地面に接地しているという条件から、以下のように接地している脚の数の拘束式が得られる。

$$(\mathbf{x}_i^{G*})_z = (R_R^G \mathbf{x}_i^{R*})_z = 0 \quad i \in S, \quad (2.12)$$

ただし、 $(\cdot)_z$ は z 方向の要素を表し、 R_R^G はロボット座標系 Σ_R から絶対座標系 Σ_G への回転変換行列であり、次のように近似して書ける。

$$R_R^G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta \theta_p \\ 0 & 1 & -\Delta \theta_r \\ -\Delta \theta_p & \Delta \theta_r & 1 \end{bmatrix}.$$

拘束式(2.12)は、無次元化された高さ $h^* (= (\mathbf{r}_R^{G*})_z)$ を使って以下のように近似できる。

$$\begin{cases} \Delta l_1^* = (a^* + \Delta x_1^*) \Delta \theta_p + b^* \Delta \theta_r + L_1^* - h^* \\ \Delta l_2^* = \Delta x_2^* \Delta \theta_p + b^* \Delta \theta_r + L_2^* - h^* \\ \Delta l_3^* = (-a^* + \Delta x_3^*) \Delta \theta_p + b^* \Delta \theta_r + L_3^* - h^* \\ \Delta l_4^* = (a^* + \Delta x_4^*) \Delta \theta_p - b^* \Delta \theta_r + L_4^* - h^* \\ \Delta l_5^* = \Delta x_5^* \Delta \theta_p - b^* \Delta \theta_r + L_5^* - h^* \\ \Delta l_6^* = (-a^* + \Delta x_6^*) \Delta \theta_p - b^* \Delta \theta_r + L_6^* - h^*, \end{cases} \quad (2.13)$$

ただし、ここでは、すべての脚先の拘束式を記述しているが、接地していない脚についてはこの拘束は働かない。この拘束式より、 Δl_i^* は、ロボットの姿勢 $\Delta \theta_r, \Delta \theta_p$ と中心の相対高さ h^* と位相 ϕ_i を用いて表すことが出来る。

また、 Σ_G 座標系でみたそれぞれの脚先にかかる力は、水平方向に摩擦がないことから Σ_G 鉛直方向のみになる。この力はバネで説明され、バネの伸縮方向にかかる力は $K^* \Delta l_i^*$ と表すことができ、力のつり合いの式は以下で近似できる。

$$\sum_{i \in S} K^* \Delta l_i^* = 1. \quad (2.14)$$

さらに，ロボット胴体の質量中心回りのモーメントのつり合いの式(ピッチ方向，ロール方向)は，ロボット座標系から絶対座標系への姿勢変換行列 R_R^G を使って以下のように近似出来る．

$$\sum_{i \in S} K^* \Delta l_i^* (R_R^G \mathbf{x}_{ti}^{R*})_x = 0, \quad (2.15)$$

$$\sum_{i \in S} K^* \Delta l_i^* (R_R^G \mathbf{x}_{ti}^{R*})_y = 0, \quad (2.16)$$

なお， $(\)_x$ と $(\)_y$ は x と y 要素をそれぞれ表している．(2.14)，(2.15)，(2.16)式から， $\Delta \theta_r$ ， $\Delta \theta_p$ ， h^* は振動子の位相 ϕ_i と無次元化されたパラメタ a^* ， b^* ， d^* ， s^* ， K^* で決定される．

位相ダイナミクス

仮定A6,7のもとで，位相ダイナミクス(2.1)は以下でかける．

$$\dot{\phi}_i = \omega + \frac{1}{2} k_f^i + \frac{1}{2} k_f^{i+3} \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.17)$$

なお， k_f^i の係数 $1/2$ は，仮定A6による実際との齟齬を補償するための係数である(詳細は付録A.1)．また，左側の脚(脚4,5,6)に対するセンサフィードバックの効果は，仮定A6より第3項のようにあらわされる．

センサフィードバック項 k_f^i は脚の接地時のみ値をもつが，ロボットの位置，姿勢はすべて位相 ϕ_{1-3} で記述されるため，次小節で説明するように k_f^i も位相 ϕ_{1-3} で記述できる．すなわち，シンプルモデルの状態量は ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 であり，歩容は $\psi_1 (= \phi_2 - \phi_1)$ ， $\psi_2 (= \phi_3 - \phi_2)$ の2つの変数を用いて表すことが出来る．

脚の接地時の位相条件式

脚 i が接地する時に，脚の付け根と地面までの距離 L_i^* は自然長に等しくなるので ($\Delta l_i^* = 0$)，位相 ϕ_{1-3} の間に関係式が1つ与えられる．このモデルの位置と姿勢は ϕ_i であらわされているため，この関係式は ϕ_i に対して1つの拘束を与える．

2.3.2 周期解と安定性の導出

シンプルモデルにおける進行波解と後退波解を解析的に求め，安定性を計算する．初めに進行波歩容の解とその安定性を導出する．のちに，システムの対称性を使って後退波歩容の解とその安定性を導出する．

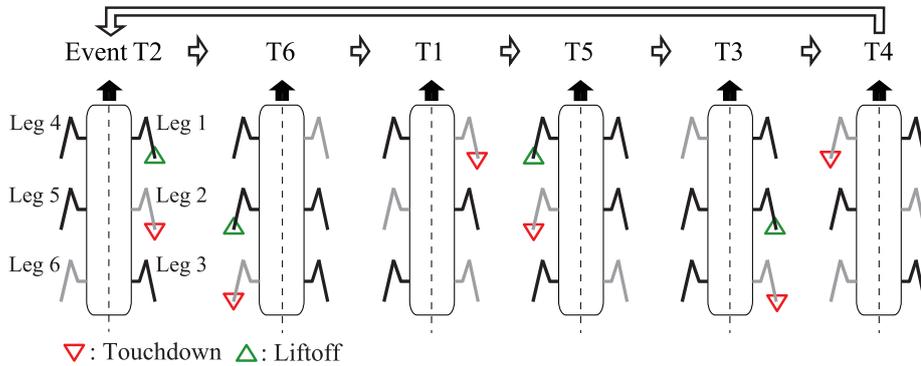


Fig. 2.10: Touchdown and liftoff events of the direct wave gait. Black and grey legs are stance and swing legs, respectively. Events T_i and $T(i+3)$ ($i = 1, 2, 3$) have axial symmetry.

ただし，振動子の位相ダイナミクスは式(2.17)であらわされ，各脚の位相関係は脚が接地した際にかかるセンサフィードバックの大きさによってのみ変化する．また，歩行1周期の間に各脚は接地相と離地相を1回ずつ経る．よって，1周期後に各脚の位相が同じ値に戻るには，各振動子が受けるセンサフィードバック量がすべて等しくならなければならない．

進行波歩容

ここで，脚 i が接地した瞬間をイベント T_i とした．1周期の歩行において，イベントは $T_2, T_6, T_1, T_5, T_3, T_4$ の順に起こる(Fig. 2.10)．本章では，左右逆位相(A7)で左右対称なシンプルモデルを考えている．そのため，それぞれの位相を $+\pi$ した変換後のシステムは，変換前と同じである(軸対称性)．位相リセット量は脚の接地時の幾何学的関係で決まるので，各接地イベント T_i ($i = 1, 2, 3$)の位相リセット量は位相を $+\pi$ したイベント $T(i+3)$ の位相リセット量と左右を入れ替えると等価である．式(2.17)より，前後方向の位相差のダイナミクスに影響を及ぼすのはイベント時にかかるリセット量だけであり，位相を $+\pi$ しても位相差は変化しない．よって，本章では，イベント T_4, T_5, T_6 をイベント T_1, T_2, T_3 と等価と扱い， $T_2, T_3, T_1, T_2, T_3, T_1$ の順にイベントが起こるとして歩行を分析する．つまり，繰り返しであるため，半分のイベント T_2, T_3, T_1 を分析すれば十分である．

イベント T_i ($i = 1, 2, 3$)直前における接地脚集合を S_{T_i} と表す．これは，シミュレーションによって得られた位相差の関係 $\psi_1 \sim \psi_2 \sim 2(1-\beta)\pi$ から以下で求め

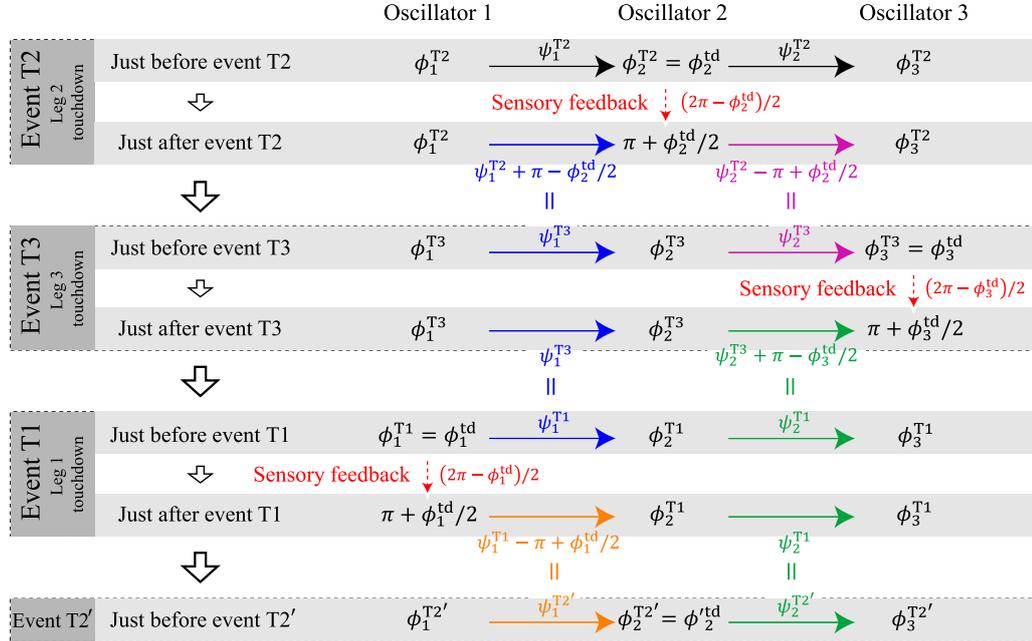


Fig. 2.11: Evolution of the oscillator phases through sensory feedback at each event. The sensory feedback at each event changes the relative phases.

られる。

$$S_{T1} = \{2, 4, 6\}, S_{T2} = \{1, 3, 4, 5\}, S_{T3} = \{1, 2, 5, 6\}. \quad (2.18)$$

なお、導出の詳細は付録 A.2 に示す。

本分析では、脚2の接地直前をポアンカレ断面として(イベント T2), 周期解に対応する位相差($\hat{\psi}_1^{T2}, \hat{\psi}_2^{T2}$)の固定点を求める。なお、それぞれのイベント i 上における変数を $()^i$, 周期解を表すものを $(\hat{\cdot})$ のように上付き添え字であらわすものとする。Fig. 2.11 は、各イベントにおけるセンサフィードバックの効果による状態量と位相差の遷移を表している。なお、イベント T2' は半周期後のイベント T2 を表しており、センサフィードバックの文字の下の量は、位相ダイナミクスの式のセンサフィードバック項(2.17)の積分量を表している。

周期解を求めるために、 $\hat{\phi}_2^{td}, \hat{\psi}_1^{T2}, \hat{\psi}_2^{T2}$ を導出する。この未知量は、各イベント Ti ($i = 1, 2, 3$) において接地条件($\Delta I_i^* = 0$) が成り立つ(3つの拘束式)ことから決定できる。詳細は付録 A.3 で議論されるが、結果として $\hat{\psi}_1^{T2}, \hat{\psi}_2^{T2}$ は、以下の

式の ψ_1^{Dw} , ψ_2^{Dw} と求められる.

$$\begin{aligned}\psi_1^{\text{Dw}} &= 2(1-\beta)\pi - 2(1-\beta)\frac{1}{d^*K^*} + \frac{2}{5}\frac{1-\beta}{\beta}\frac{1}{d^*K^*}\frac{s^*}{a^*} + O((K^*)^{-2}), \\ \psi_2^{\text{Dw}} &= 2(1-\beta)\pi - \frac{9}{10}(1-\beta)\frac{1}{d^*K^*} + \frac{1}{25}\left(\frac{11}{\beta} - 30\right)(1-\beta)\frac{1}{d^*K^*}\frac{s^*}{a^*} + O((K^*)^{-2}).\end{aligned}\quad (2.19)$$

この進行波歩容の周期解に対し, イベント T2 直前において十分小さな摂動 ($\Delta\psi_1, \Delta\psi_2$) を加えて1周期後の摂動の発展 (ポアンカレ写像のヤコビ行列を求める) から安定性を議論する. なお, ここで加える摂動は $O(K^{-1})$ 程度であり, 各イベント直前の接地脚集合 S_{T1}, S_{T2}, S_{T3} を変えないほどに十分小さいとする. 各イベントの位相リセット量を計算することで, 1周期後の誤差 ($\Delta\psi'_1, \Delta\psi'_2$) を以下のように計算することが出来る.

$$\begin{bmatrix} \Delta\psi'_1 \\ \Delta\psi'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1^{\text{Dw}}} & 0 \\ \sqrt{\lambda_2^{\text{Dw}}}(1 - \sqrt{\lambda_1^{\text{Dw}}}) & \sqrt{\lambda_2^{\text{Dw}}} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \Delta\psi_1 \\ \Delta\psi_2 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

なお,

$$\begin{aligned}\lambda_1^{\text{Dw}} &= \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{45\beta}\frac{s^*}{a^*}\right)^2, \\ \lambda_2^{\text{Dw}} &= \left(\frac{13}{18} + \frac{4}{81\beta}\frac{s^*}{a^*}\right)^2.\end{aligned}\quad (2.21)$$

この詳細な導出過程は付録 A.4 に記載する. λ_1^{Dw} と λ_2^{Dw} は誤差発展行列の固有値に対応している. λ_1^{Dw} はこの歩容の安定性を決める最大固有値であり, 小さな s^*/a^* に対して $\lambda_1^{\text{Dw}} < 1$ である.

後退波歩容

後退波歩容の解の導出とその安定解析を進行波歩容との対称性を考慮して行う. イベント T2 直前の位相 ($\phi_1^{\text{T2}}, \phi_2^{\text{T2}}, \phi_3^{\text{T2}}$) を初期値とする解の流れを, パラメタ s^* を使って $\Phi_{s^*}(t; \phi_1^{\text{T2}}, \phi_2^{\text{T2}}, \phi_3^{\text{T2}})$ と表す. $s^* > 0$ の進行波歩容と, $-s^* < 0$ の後退波歩容は進む方向を除いて同一なので, 以下の関係が成り立つ.

$$\Phi_{s^*}(t; \phi_1^{\text{T2}}, \phi_2^{\text{T2}}, \phi_3^{\text{T2}}) = \Phi_{-s^*}(t; \phi_3^{\text{T2}}, \phi_2^{\text{T2}}, \phi_1^{\text{T2}}) \quad (2.22)$$

この対称性を使うことで, 後退波歩容の周期解 $\hat{\psi}_1^{\text{T2}}, \hat{\psi}_2^{\text{T2}}$ は, 次の式の $\psi_1^{\text{Rw}}, \psi_2^{\text{Rw}}$ でそれぞれ表される.

$$\begin{aligned}\psi_1^{\text{Rw}} &= 2\beta\pi + \frac{9}{10}(1-\beta)\frac{1}{d^*K^*} + \frac{1}{25}\left(\frac{11}{\beta} - 30\right)(1-\beta)\frac{1}{d^*K^*}\frac{s^*}{a^*} + O((K^*)^{-2}), \\ \psi_2^{\text{Rw}} &= 2\beta\pi + 2(1-\beta)\frac{1}{d^*K^*} + \frac{2}{5}\frac{1-\beta}{\beta}\frac{1}{d^*K^*}\frac{s^*}{a^*} + O((K^*)^{-2}).\end{aligned}\quad (2.23)$$

さらに，誤差発展行列の固有値(λ_1^{Rw} , λ_2^{Rw})は以下になる．

$$\begin{aligned}\lambda_1^{\text{Rw}} &= \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{45\beta} \frac{s^*}{a^*} \right)^2, \\ \lambda_2^{\text{Rw}} &= \left(\frac{13}{18} - \frac{4}{81\beta} \frac{s^*}{a^*} \right)^2.\end{aligned}\tag{2.24}$$

最大固有値 λ_1^{Rw} はこの歩容の安定性を決定し，小さな s^*/a^* に対して $\lambda_1^{\text{Rw}} < 1$ である．

解の安定化メカニズムを特定の脚に着目して簡単に説明する．周期解の位相差に摂動が加わると，脚の弾性項の影響で胴体が傾き，その結果として脚の接地時の位相が変化する．結果として加えた摂動は脚の接地後に変化する．これが6つの脚に対して繰り返され，1周期分の誤差発展は(2.21)(2.24)式となる．

加えて，脚が推進力を作っている ($s^* \neq 0$) 場合，2つの歩容(進行波歩容と後退波歩容)で，脚が接地するときの脚の相対位置関係が異なる((2.22)式)．結果，摂動の結果として引き起こされる胴体の傾きは2つの歩容で異なる．結果として位相リセット量に変化し，2つの歩容の安定性は異っている((2.21)(2.24)式で s^*/a^* によって特徴付けられる)．

2.3.3 ロボットシミュレーションとの比較

解析的に導出した2つの歩容の解は $\psi_1 = \psi_2 = 2\beta\pi + O((K^*)^{-1})$ (進行波歩容)と， $\psi_1 = \psi_2 = 2(1-\beta)\pi + O((K^*)^{-1})$ (後退波歩容)である．この結果はロボットシミュレーションの結果(Fig. 2.5)とよく一致している．さらに，Fig. 2.12に示すように，シンプルモデルのバネ定数 K^* への依存性は，Fig. 2.8で示したフィードバックゲインへの依存性とよく一致する．

最大固有値((2.21)(2.24)式)は， s^*/a^* に依存する．Fig. 2.13A, B, Cは， $s^*/a^* = 0, 0.15, 0.3$ の3つの場合について，解析解の最大固有値をロボットシミュレーションのものと比べたものである．これらの歩容は $s^*/a^* = 0$ のとき同じ安定性を持っている($\lambda_1^{\text{Dw}} = \lambda_1^{\text{Rw}}$)が， $s^*/a^* > 0$ の時は進行波歩容の方が後退波歩容よりも安定である($\lambda_1^{\text{Dw}} < \lambda_1^{\text{Rw}}$)．解析解とロボットシミュレーションの結果は非常によく一致している．

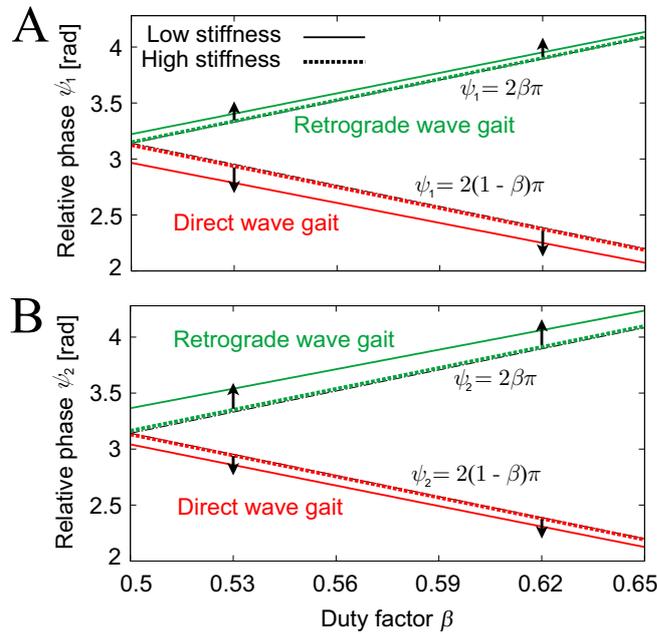


Fig. 2.12: **Relative phases A: ψ_1 and B: ψ_2 of the direct and retrograde wave gaits of the simple model.** Relative phases are derived with high stiffness ($d^*K^* = 50$) and low stiffness ($d^*K^* = 5$) for $s^*/a^* = 0.3$. As the stiffness decreases, the relative phases ψ_1 and ψ_2 move away from $2\beta\pi$ and $2(1-\beta)\pi$ as in the robot model in Fig. 2.8.

2.4 議論

2.4.1 局所センサフィードバックによる肢間協調

本章では，局所センサフィードバック(位相リセット)の肢間協調に対する役割を，ミニマリストティックモデリングアプローチを用いて分析した．先行研究 [32, 33, 59, 60] と異なり，前後の振動子は直接の相互作用をしていない．にも関わらず，環境との相互作用の結果，進行波歩容と後退波歩容が創発することがロボットで確認された．進行波歩容は昆虫の歩容に対応しており，昆虫に見られるように歩容は速度に対して連続に変化する (Fig. 2.1B) [3, 39, 41, 6]. さらに，これらのメカニズムはシンプルモデルを用いて解析的に説明され，メカニズムの成り立つ範囲が行った物理的仮定とオーダー近似により明確になった．これらの結果から，位相リセットは6脚ロボットの肢間協調に寄与することが明らかになった．そしてこれは生理学的な知見と矛盾しない．

局所的な力フィードバックを通じた環境との相互作用によって，4脚動物

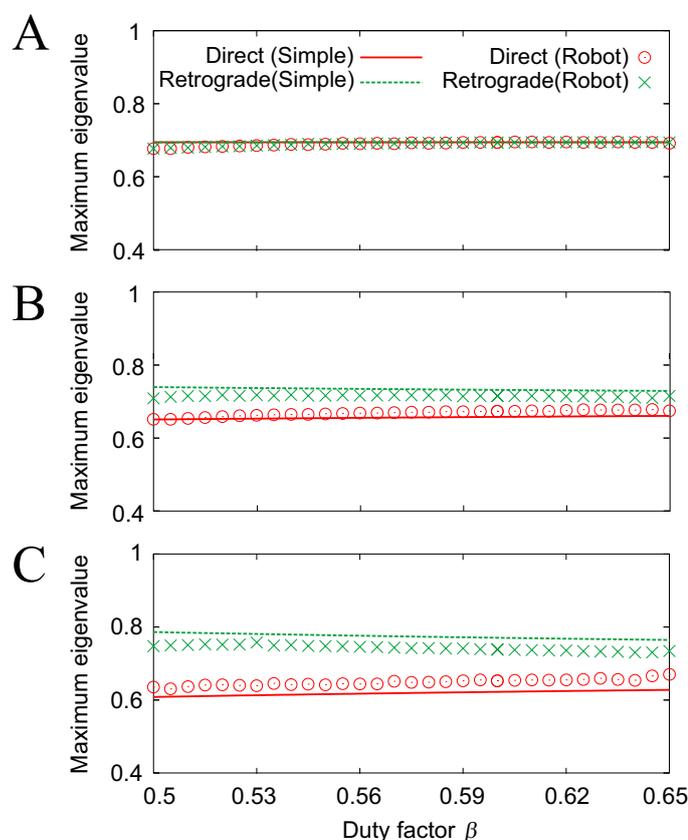


Fig. 2.13: Maximum absolute eigenvalues of the direct and retrograde wave gaits of the simple model and robot simulation for duty factor β . A: $s^*/a^* = 0$, B: 0.15, and C: 0.3.

のような歩容が創発することを示した同様な研究も存在する [30, 31]. 位相リセットはこのカフィードバックと似たような概念である. しかし, 位相リセットの方が数学的に単純であるため, 脚の多い6脚ロボットに対して, メカニズムの説明を解析的に行うことが可能となった.

2.4.2 進行波と後退波歩容

ある種のムカデは後退波歩容を行うことが知られている [44]. ナナフシなどの昆虫も後退波歩容で転倒することなく歩けると考えられるが, 進行波歩容の方を好むことが知られている. 進行波歩容の方が, 前足が離地するときの胴体の重心の位置が支持脚多角形の内側にある. これに着目し, 後ろ脚で蹴りだして進んだときにこけるリスクを減らすために, 昆虫は進行波歩容を好むと説明した論文がある [41].

本ロボットモデルでは、進行波歩容と後退波歩容が両方存在し、進行波歩容の方がシステムとして安定であった。つまり、進行波歩容の方が外乱に対する応答が早く、文献[41]と同様に外乱に対するリスクを減らすことが出来る。この傾向と昆虫の好みが一致していることは興味深い。

2.4.3 連続な歩容遷移と不連続な歩容遷移

イヌは速度に対して非連続に歩容を変化させる (Fig. 2.1A) にもかかわらず、羊やナナフシは速度に応じて連続的に歩容を変化させる (Fig. 2.1B) ことが知られている。力学系における自己組織化の結果として歩容が発現するという Schöner ら [61] の考え方に従えば、速度をパラメタとした時の解の構造の相違によって、歩容遷移が連続か非連続かが決定できる。

不連続な歩容遷移は、安定な歩容が部分的に存在し、それらが連続してないことから説明できる。ヒステリシスの存在は、このような安定構造を特徴づける [62, 63]。我々は過去に、位相リセットの影響を受ける振動子で駆動される4足モデルを使って、歩容が Walk から Trot にヒステリシスを伴って遷移することを、動的安定性の観点から示した [62]。

一方で、昆虫のような速度に応じた連続的な歩容遷移は、安定な歩容が連続して存在することで説明できる。今回の我々の結果においては、パラメタ β (速度) に対して、歩容が連続的に遷移することを示し (Fig. 2.5)、この傾向は生物の観測データとよく一致している (Fig. 2.1B)。この解の構造は、静的な仮定をもとにしたシンプルモデルをもとに解析的に説明することができた (Fig. 2.12)。以上より、連続な遷移は運動の加速度が支配的ではないことと関係があると示唆できる。

2.4.4 速度の異なる運動に対するセンサフィードバックの役割

昆虫の速度の速い運動においては、センサフィードバックの影響は小さいことが示唆されている [12]。例えば、ゴキブリの高速時の運動メカニズムについて、Schmitt ら [64, 65, 66] は単純なバネ剛体モデルを用いて走行の安定性などを分析し、高速な運動においては感覚フィードバックよりも、胴体が持つ機構ダイナミクスの自己安定性によって歩容が安定化されることを主張した。

一方で、ナナフシのような比較的速度の遅い昆虫については、センサフィードバックが大きな役割を担うことが示唆されている [17, 12]。例えば、

Ekeberg [27] は、ナナフシの肢のニューロメカニカルモデルを作成した。3つの主なジョイントは、独立した3つの Bystable circuit によって駆動され、センサフィードバックの影響をそれぞれ受けている。センサフィードバックを通じた環境との相互作用の結果として、ナナフシのような脚のステップ運動が生まれることを示した。本章では、比較的速度の遅い歩容を対象にして、センサフィードバックのみの効果によって基本的な昆虫の歩容パターンが得られることを示した。さらに、シンプルモデルの解析により、歩容生成メカニズムは、運動が準静的であるという仮定の上で十分説明できることが分かった。

2.4.5 限界と今後の課題

ミニマリストティックモデリングアプローチを用いたため、本モデルと実際の昆虫の間には相違がある。例えば、左右の振動子が逆相であると仮定したが、昆虫では左右の振動子の間には強い相互作用は確認されていない [40, 67]。また、環境によっては昆虫の歩容は秩序だったものとはならない [67]。例えば、後ろ向きに歩いている場合の定まった歩容は観測されていない [68]。これらは今後分析されるべき対象である。しかし、本章においてこれらの現象は我々の興味ではなかった。我々はセンサフィードバックの肢間協調に対する効果を明確にすることに着目し、それをシンプルモデルの解析表現を通して明確に説明した。

我々は昆虫の歩容を分析するのにロボットを使ったため、本章で扱ったモデルと昆虫の間には多くの相違がある。物理的には、ロボットの重さや大きさは完全に昆虫のものと異なる。また、ロボットは左右前後対称で、ゆっくりとした歩容を仮定した。昆虫の関節は筋肉によって動くが、ロボットの関節は高ゲインサーボモータによって駆動される。ニューラルシステムについては、単純な CPG に基づいたシステムを構築し、一部のセンサフィードバックのみを我々は考慮した。しかし、本シンプルモデルを使った解析は生物学と工学に大きな寄与を及ぼすと考えられ [34, 69, 70, 71]、以下のように今後の研究が期待される。

本シンプルモデルは、静的な6脚歩行の本質的な要素を取り出していると考えられるため、昆虫の歩容の更なる分析や、適応的な歩行を生成するための手がかりを与える。例えば、左右の振動子の相互作用は簡単に取り除くことが出来る。また、本章で対象としなかったテトラポッド歩容の分析なども、シンプルモデルを用いることで簡単に分析が可能であると考えられ

る。さらに、別のセンサフィードバック(力フィードバック)などもシンプルモデルを用いて扱うことは可能である。また、定式化が単純であるため、脚が壊れた場合に適応できる制御則のデザインにもこのモデルは使うことが出来ると考えられる。

加えて、この分析は多脚や4脚モデルの分析にも拡張できる。進行波歩容は4脚動物やヤスデにおいて観測されているが、後退波歩容はある種のムカデにおいて観測される。センサフィードバックのこれらの歩容への影響は、この分析を拡張することで可能になるだろう。さらには、このシンプルモデルは6脚ロボットの動的な運動に対する分析にも使える可能性がある。

第3章

多足歩容に対してセンサフィードバックが及ぼす影響

3.1 はじめに

本章では，前章で得られた進行波と後退波についてより一般的に分析するために，ヤスデのような多足生物を対象にして，センサフィードバックが歩容生成におよぼす影響について明らかにする．

ヤスデやムカデは，多くの脚を持つ節足動物である．ヤスデの基本的な歩容は，左右の遊脚が同相で一定間隔で前に進んでいくような歩容であり，秩序だった構造を持つ(進行波(Direct wave gait))[44, 72]. 一方で，一部のムカデの歩容は，左右の脚が逆相で，一定間隔で遊脚が後ろに進んでいくような歩容である(後退波(Retrograde wave gait))[44, 72]. さらに興味深いことに，ヤスデにおいて，進行波と後退波が共存し，波がわきだすような歩容も観測されている(わきだし波(Source wave gait))[73, 74]. これは，ヤスデが胴体をU字に屈曲させて，U字の開いている方向に形状を保ったまま進むときに観測される[73]. しかしながら，進行波や後退波を持つ歩容について，蠕動的這行運動の力学[75]との関連を論じたもの[72]はあるものの，歩容生成の生理学的メカニズムはよくわかっていない．

一方，同じ節足動物である昆虫の歩容生成メカニズムについては生理学的観点から数多くの研究がなされている．昆虫はCPG(Central pattern generator)と呼ばれる周期的な信号を発生させるニューラルネットワークを持っており，その信号で周期的な歩行運動を生成する[16, 17, 18]. CPGの出力は感覚受容器からの影響を受け，このセンサフィードバックが歩行に大きな影響を及ぼしていることが知られている[16, 17, 21, 11].

節足動物に限らず多くの生物は，このようなセンサフィードバックの効果によって適応的な歩行を行う．このため，センサフィードバックの効果を解析することは，ロボットの研究にとっても非常に大きな意味を持つ．実際，多くの研究者が，生物を模擬し，センサフィードバックを用いて適応的な歩容が得られることを実証している[29, 47, 30, 62, 76, 26].

多足ロボットの歩行に関しても、環境からの反力を用いた振動子の位相調整によってヤスデのような歩容が分散的にロボットで得られたという報告[77]や、振動子を用いずに状態遷移モデルでヤスデの歩容を再現しようとする試みも行われている[74]。さらに、胴体の振動のみを利用して受動的に多足歩行が創発するという報告[78]もなされた。しかしながら、歩容は神経系と身体機構系の環境を通じた複雑な相互作用によって生まれるため、センサフィードバックの歩容に対する影響は未だ不明瞭であり、特に数理的にはほとんど理解されていない。そのため、適応的な歩容をデザインする方法論は確立されていない。

われわれは、生物の歩行のメカニズムを理解し、適応的なロボットの歩行のための制御系を開発するためには、できるだけシンプルなシステムを使って、センサフィードバックの歩行に対する影響を分析し明確にしていくことが重要だと考える。本研究ではヤスデのような多足生物を対象に、シンプルな数理モデルを構築し、センサフィードバックの歩容生成への影響を解析する。具体的には、多足生物を模したシンプルな力学モデルを構築し(身体)、CPGを模擬した振動子で各脚を独立に動かす(神経系)。それぞれの振動子は、脚が接地した瞬間に位相を支持脚相にするという局所的なセンサフィードバック(位相リセット)のみの影響を受けているとする(環境との相互作用)。シミュレーションにより、センサフィードバックによる振動子間の相互作用によって、生物で見られるような3つの秩序だった歩容(進行波、後退波、わきだし波)が確認された。さらに、いくつかの物理的仮定のもとで、周期解(歩容)を解析的に導出した。その結果、シミュレーションで得られた結果をより一般的にとらえることができ、センサフィードバックの多足歩容に与える重要な特徴が明確になった。これらの結果は、ヤスデなどの多足生物の歩容生成メカニズムに対する示唆を与え、かつ、多足ロボットの適応的な歩行を実現するための制御系の開発に寄与すると考えられる。

3.2 多足歩行の動力学シミュレーション

3.2.1 シンプルモデル

本研究ではヤスデのような多足生物を参考に、以下の仮定のもとにシンプルモデル(Fig. 3.1)を構築する。

(A1) 対象とする生物の体幹は柔らかいと考えられる。この効果は運動に必要な影響を及ぼすと考え、各セグメントをバネ定数 k_t の鉛直方向に動

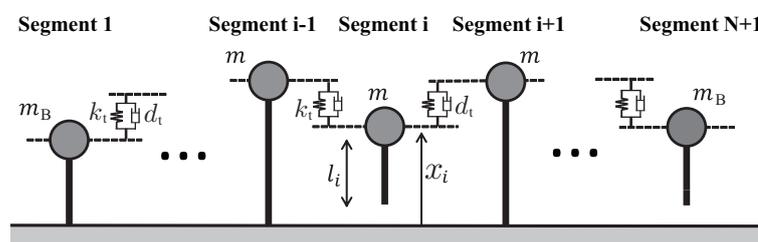


Fig. 3.1: Simple model. Dotted lines represent the positions of mass points.

く線形バネとダンパ(ダンパ係数 d_i)によって接続する。なお、バネの自然長は0とする。

(A2) 対象とする歩行は多足歩行であり、常に重心を支持多角形の内側に入れて比較的低速で歩く。そのため、胴体の加速度の影響は大きくないと考え、静的なつり合いをほぼ満たすような状況を考える。また、胴体の上下運動が歩容生成に重要であると考え、脚を上下方向のみに動かすモデルを扱う。具体的には、 $N+1$ 個の接続されたセグメントを考え、各セグメント i は鉛直方向のみに動くように拘束された質量 m_i の質点と質量のない上下に動く脚 i から構成される。なお、本モデルの脚は質量のない棒であり、弾性要素はない。また、体幹のダンパ係数 d_1 は過減衰に近い値である場合を考える。

(A3) 対象とする生物の左右の位相関係は同位相、あるいは逆位相にある。本モデルは矢状面で片側の脚の運動のみを扱う。

(A4) 脚の長さ l_i はそれぞれの振動子(後に説明)の位相 ϕ_i によって決まっているものとする($l_i = l(\phi_i)$)。

各セグメント i の質点と地面までの距離を x_i 、重力加速度を g とし、地面はバネダンパ系でモデル化する(バネ定数 k_g 、ダンパ係数 d_g)。なお、地面は十分堅く、 $k_g \gg k_t$ とし、ダンパ係数 d_g は過減衰に近い値をとるとする。本研究では各セグメント $i \in [2, N]$ の質量を $m_i = m$ 、先頭と最後尾のセグメント $i = 1, N+1$ の質量を $m_i = m_B$ とし、 $m/2 < m_B < m$ である場合を考える。なお、 $m_B = m/2, m$ であれば解析が困難になるため対象外とした¹。また、静的な多足歩行の運動を対象とするため $N \geq 3$ とする。このとき、本システムの運動

¹具体的には、シミュレーションで得られる解集合(3.2.3節)が線分ではなく平面になり、分析する自由度が1つ増える。

方程式は以下で書ける．

$$m_i \ddot{x}_i = \begin{cases} p_1 \left\{ -k_g (x_1 - l_1) - d_g (\dot{x}_1 - \dot{l}_1) \right\} - k_t (x_1 - x_2) - d_t (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - m_B g, & i=1 \\ p_i \left\{ -k_g (x_i - l_i) - d_g (\dot{x}_i - \dot{l}_i) \right\} - k_t (2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}) - d_t (2\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_{i-1}) - mg, & i=[2, N] \\ p_{N+1} \left\{ -k_g (x_{N+1} - l_{N+1}) - d_g (\dot{x}_{N+1} - \dot{l}_{N+1}) \right\} - k_t (x_{N+1} - x_N) - d_t (\dot{x}_{N+1} - \dot{x}_N) - m_B g, & i=N+1 \end{cases} \quad (3.1)$$

なお， p_i は以下で定義される接地か非接地を表す量である．

$$p_i = \begin{cases} 0, & l(\phi_i) < x_i \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.2)$$

ここで，脚 $1, 2, 3, \dots, N+1$ の順に前から後ろと方向を定義する．

ただし，本モデルは各セグメントを上下一次元の運動で表しているため，転倒などを扱うことはできない．

3.2.2 コントローラ

また，CPGはセンサフィードバックの影響を受けている[16, 17, 21, 11]．これらの知見に基づき，できるだけシンプルな構造になるように制御系を設計する．

位相ダイナミクスと脚軌道

本研究では，各脚の長さ l_i を振動子 i の位相 $\phi_i \in [0, 2\pi) \pmod{2\pi}$ を用いて駆動する．その位相ダイナミクスは以下のように定義する．

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + y_i \quad (3.3)$$

ここで， ω は角振動数を表す定数であり， y_i はつぎの節で説明するセンサフィードバックを表す項である．本研究では，仮定(A2)に基づいて，静的なつり合いが本質になるように， $\omega \ll \sqrt{k_t/m_i}$ であるようなパラメータを扱う．この位相を用いて，脚の長さ l_i を以下の式で定める(Fig. 3.2B)．

$$l_i = l(\phi_i) = \begin{cases} L & 0 \leq \phi_i \leq 2\beta\pi \\ L - a_s \frac{\phi_i - 2\beta\pi}{(1-\beta)\pi} & 2\beta\pi < \phi_i < (1+\beta)\pi \\ L - a_s \frac{2\pi - \phi_i}{(1-\beta)\pi} & (1+\beta)\pi \leq \phi_i < 2\pi \end{cases} \quad (3.4)$$

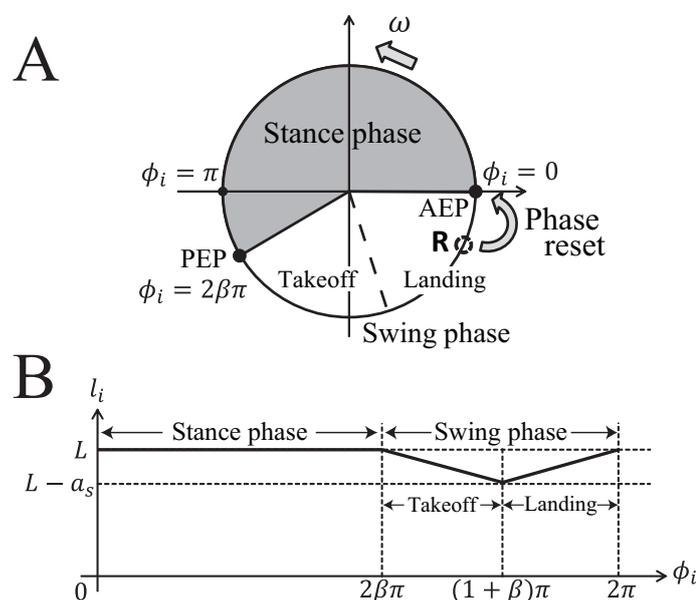


Fig. 3.2:A: Phase oscillator model. B: Leg length l_i depending on phase ϕ_i .

ここで、 L は接地期の脚の長さ、 $a_s (< L)$ は脚の運動の振幅、 $1/2 < \beta < 1$ は脚の接地率(デューティー比)である。遊脚期に脚が地面から浮くように、脚の振幅 a_s は $mg/k_t < a_s$ とする。 $\phi_i \in [0, 2\beta\pi]$ (支持脚相 (Stance phase))では、脚の長さは L で一定であり、 $\phi_i \in (2\beta\pi, (1 + \beta)\pi)$ (遊脚相 (Swing phase) の Takeoff 相)では、脚を縮める。 $\phi_i \in [(1 + \beta)\pi, 2\pi)$ (遊脚相の Landing 相)では、脚を伸ばす。振動子の位相に基づいて脚を上下に動かす区分線形モデルとなっている。

位相リセット

センサフィードバックは、脚間協調を行うのに重要な役割を持つことが示唆されている [16, 17, 21, 11]。特に昆虫においては、脚にかかる荷重が増えると脚を蹴りだすことが知られており [22, 56]、モータニューロンの活動をリセットするニューロンの存在も示唆されている [57]。一方、多足生物におけるセンサフィードバックについてはあまり調べられておらずよくわかっていない。本研究では、昆虫の知見を参考に、昆虫のセンサフィードバックを単純化したものとして位相リセット [62, 76, 79]を用いる。位相リセットのダイナミクスを以下のように表す。

$$\tau \frac{dy_i}{dt} = -y_i + u_i \quad (3.5)$$

$$u_i = \begin{cases} 0 & 0 \leq \phi_i < (1+\beta)\pi \\ (2\pi - \phi_i^{\text{td}}) \delta(t - t_i^{\text{td}}) & (1+\beta)\pi \leq \phi_i < 2\pi \end{cases} \quad (3.6)$$

ここで、 τ は1次フィルタの時定数であり、 t_i^{td} と ϕ_i^{td} は脚 i が接地した瞬間の時間と位相(接地位相)である。Fig. 3.2Aに示されるように、脚が接地した直後に位相をゼロにリセットし、位相の変化を滑らかにするために、シミュレーションにおいて時定数 τ の一次フィルタが入っている[79]。

本システムにおける歩容

本システムにおける歩容は、以下で定義する隣り合う振動子の位相差 $\psi_i \in [0, 2\pi) \pmod{2\pi}$, ($i = 1, \dots, N$)より決定される。

$$\psi_i = \phi_{i+1} - \phi_i \quad (3.7)$$

振動子の間には直接的な相互作用はないので、位相リセットを通じた環境との相互作用によって、位相差 ψ_i がどのように決定されるかをシミュレーションで調べる。

なお、シミュレーションのパラメータは以下のように設定した。 $g=9.8 \text{ m/s}^2$, セグメントの数 $N+1=4$, 先頭と最後尾のセグメントの重さ $m_B=0.9 \text{ kg}$, それ以外のセグメントの重さ $m=1 \text{ kg}$, セグメント間のバネ, ダンパ定数 $k_t=100 \text{ N/m}$, $d_t=2\sqrt{k_t}$, 地面のバネダンパ定数 $k_g=10^5 \text{ N/m}$, $d_g=2\sqrt{k_g}$, 接地時の脚の長さ $L=1 \text{ m}$, 脚の振幅 $a_s=0.4 \text{ m}$, 角速度 $\omega=0.4 \text{ rad/s} (\ll \sqrt{k_t/m})$, フィルタの時定数 $\tau=0.5$, デューティ比 $\beta=0.8$ とした。

3.2.3 シミュレーション結果

上述したシステムのもとで安定な周期解を見つけるためにシミュレーションを行った。脚1が接地する直前をポアンカレ断面 Σ^1 と定義し、断面上の振動子の位相差を $\Psi^1 \equiv [\psi_1^1 \psi_2^1 \psi_3^1]^T$ と表す。ただし、位相・位相差の上付き添え字 (i) は、脚 i が接地する直前の位相・位相差を表す。

3種類の歩容の存在

様々な初期位相差 Ψ_0^1 を Σ^1 上で与えて、位相差 Ψ^1 が時間発展とともに収束するかどうかを調べる。例として、6つの初期位相差の Σ^1 上での時間発展を

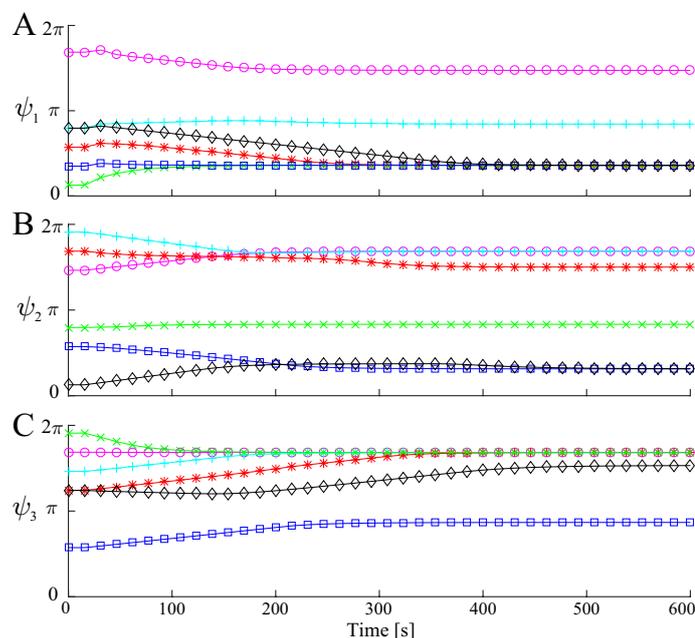


Fig. 3.3: Relative phases of simulation results plotted at Poincaré sections. A: ψ_1 , B: ψ_2 and C: ψ_3 . Six initial conditions are used and they converged.

Fig. 3.3 に示す. 初期位相差に応じて, 位相差はそれぞれ数種類の値 (1 周期解) に収束していることがわかる.

この収束先を詳しく分析するために, Σ^1 上で様々な初期位相差 Ψ_0^1 (具体的には 25^3 個の等方的な格子点 (一辺 0.08π rad)) を与えて, 得られたすべての収束点をプロットしたものが Fig. 3.4 である. Fig. 3.4A は収束した時の位相差 $\hat{\Psi}^1$ を, ψ_1 - ψ_2 - ψ_3 空間上にプロットしたものである. Fig. 3.4B,C は $\hat{\Psi}^1$ を ψ_1 - ψ_2 平面, ψ_2 - ψ_3 平面にそれぞれ射影したものである. ここで, 大きい点 (点が多いため直線に見える) はシミュレーションにおいて収束した位相差 $\hat{\Psi}^1$ を表しており, それとほぼ重なっている線分は後に説明する解析解を表している. Fig. 3.4 より, 収束点の集合は位相差の空間でおおよそ 3 つの直交する線分から構成されており, 本論文では周期解をこの 3 つの集合に分けて議論する (Fig. 3.4 の Source wave gaits, Retrograde wave gaits, Direct wave gaits と表記された点集合).

この 3 つの集合に収束する初期位相差の領域 (3 つの解集合の吸引領域) を表したものが, Fig. 3.5 である. Fig. 3.5A,B,C は, それぞれ平面 $\psi_3^1 = 2(1-\beta)\pi, \pi, 2\beta\pi$ 上での 3 つの解集合の吸引領域を表している. なお, 本シミュレーションで与えたすべての初期値は 3 つの解集合のうちのどれかに収束する. つまり, これらの解集合は少なくとも中立安定である. 以上の分析より, 本システ

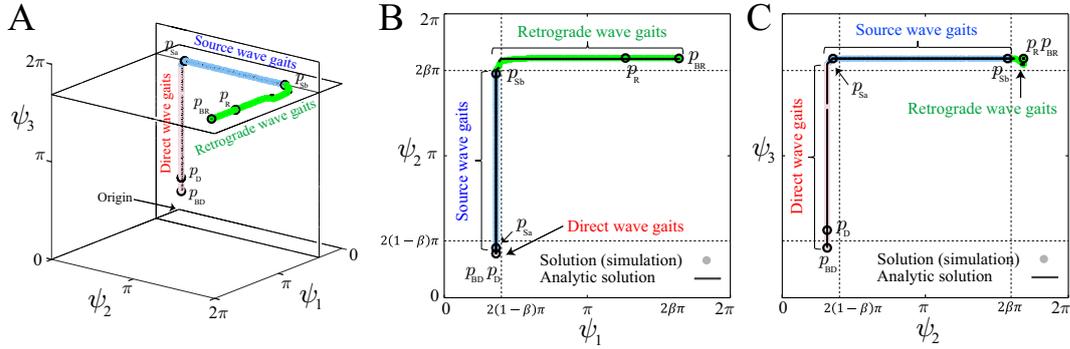


Fig. 3.4: Relative phases of obtained gaits in simulated and analytic solutions. Filled points and lines represent the simulated and analytic solutions, respectively. A: solutions on ψ_1 - ψ_2 - ψ_3 space, B: solutions projected on ψ_1 - ψ_2 plane and C: solutions projected on ψ_2 - ψ_3 plane. Points p_{Sa} , p_{Sb} , p_R and p_D are solutions to show footprint diagrams (See section 3.2.3). Points p_{BR} and p_{BD} represent boundaries of the solution set.

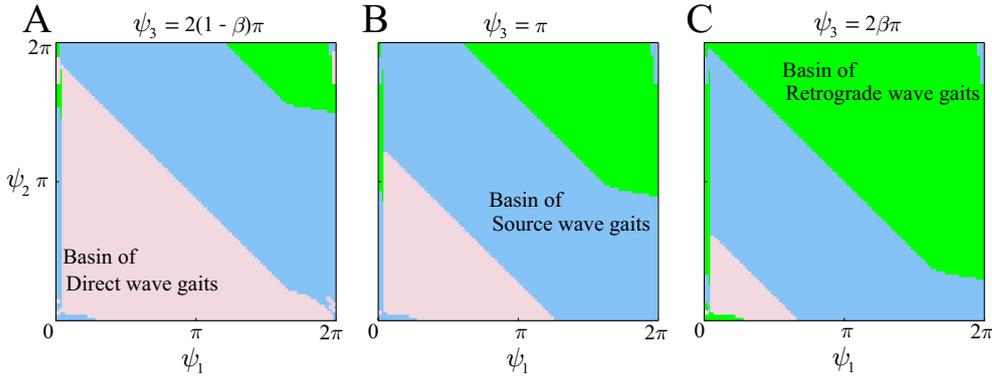


Fig. 3.5: Basins of attraction of obtained three types of gaits in simulation. A: $\psi_3 = 2(1-\beta)\pi$, B: $\psi_3 = \pi$ and C: $\psi_3 = 2\beta\pi$. Three shaded regions represent the basins of attraction for three types of gaits.

ムの運動は初期位相差に応じて3つの種類の歩容に収束することがわかる。

歩容の特徴

それぞれの解集合に対応する歩容の特徴について分析する。Fig. 3.4の Source wave gaits と表記された解集合は、つぎのような位相差を示す。

$$\hat{\psi}_1^1 \approx 2(1-\beta)\pi, 2(1-\beta)\pi \lesssim \hat{\psi}_2^1 \lesssim 2\beta\pi, \hat{\psi}_3^1 \approx 2\beta\pi$$

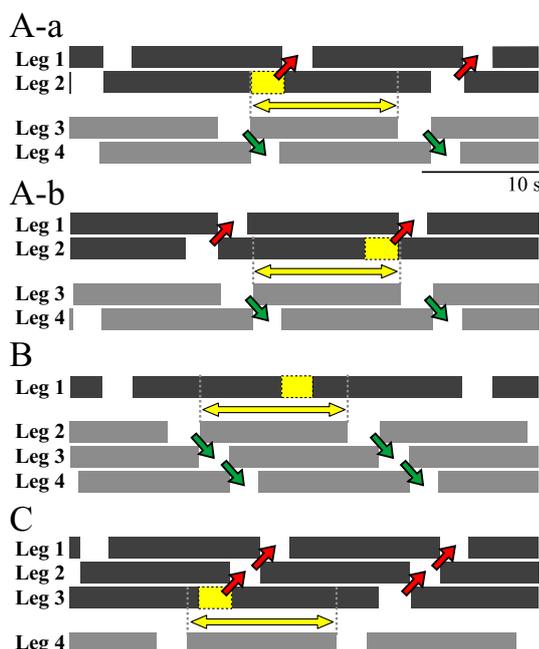


Fig. 3.6: Footprint diagrams of the obtained gaits in computer simulation. A-a,b: Source wave gaits (points p_{Sa} , p_{Sb} , respectively), B: Retrograde wave gait (point p_R) and C: Direct wave gait (point p_D).

この解集合の要素 $\hat{\Psi}^1(p_{Sa}) = [1.13 \ 1.10 \ 5.28]^T$ と $\hat{\Psi}^1(p_{Sb}) = [1.13 \ 4.95 \ 5.29]^T$ (Fig. 3.4 の点 p_{Sa} , p_{Sb}) の足跡図をそれぞれ Fig. 3.6A-a,b に示す. 斜め下方向の緑矢印で示されているように, 脚3-4では遊脚運動が前から後ろの脚へと伝搬しており, 前脚3の接地と後脚4が離地がほぼ同時に起こっている. 前脚3の接地位相は $\phi_3 \approx 0$ であり, 後脚4の離地位相は $\phi_4 \approx 2\beta\pi$ である (Fig. 3.2A の点 AEP と PEP に対応) から, この幾何的關係は位相差 $\hat{\psi}_3^1 \approx 2\beta\pi$ に対応している. 同様に, 脚1-2については, 斜め上方向の赤矢印で示されているように遊脚運動が後ろから前の脚へと伝搬している. 後脚2の接地と前脚1の離地がほぼ同時に起こっている. 前脚1が離地位相は $\phi_1 \approx 2\beta\pi$ であり, 後脚2の接地位相は $\phi_2 \approx 0$ である (Fig. 3.2A). この幾何關係は位相差 $\hat{\psi}_1^1 \approx 2(1-\beta)\pi$ に対応している.

一方で, $\hat{\psi}_2^1$ は一意に決まっていない. Fig. 3.6A-a,b はそれぞれ, $\hat{\psi}_2^1 \approx 2(1-\beta)\pi$, $2\beta\pi$ の場合 (解集合の両境界付近) を表している. これまでの議論と同様, Fig. 3.6A-a では脚3の接地ほぼ同時に脚2が離地し ($\hat{\psi}_2^1 \approx 2(1-\beta)\pi$ に対応), Fig. 3.6A-b では脚2の接地とほぼ同時に脚3が離地する ($\hat{\psi}_2^1 \approx 2\beta\pi$ に対応). $2(1-\beta)\pi \lesssim \hat{\psi}_2^1 \lesssim 2\beta\pi$ の領域すべてが解であるので, その自由度は, 脚2と脚3の遊脚部分がほと

んど重ならない範囲(位相差 $2(1-\beta)\pi \lesssim \hat{\psi}_2^1 \lesssim 2\beta\pi$)で, 脚1-2の足跡図を脚3-4に対して自由にスライドできることを意味している(Fig. 3.6A-a,bで, 脚2の遊脚部分(黄色の四角形)が水平方向の矢印の範囲内におさまるように, 濃い部分を淡い部分に対してスライドできる).

この歩容は, 遊脚運動が脚2と3を基準にして, それぞれ先頭と最後尾に向かって伝搬する歩容になっている. このように, 遊脚運動がある部分からそれぞれ先頭と最後尾に向かって進むような解集合を, わきだし波解集合(Source wave gaits)と呼ぶ. なお, 他の脚を基準とするわき出し波解集合と区別するために, 本研究では後退波の基準となる脚の番号を使って, “脚3基準のわきだし波解集合”と呼ぶ. このような進行波と後退波がわき出す形で共存するような歩容はヤスデにおいて観測されている[73, 74].

Fig. 3.4の Retrograde wave gaits と表記された解集合は, つぎのような位相差を示す.

$$2(1-\beta)\pi \lesssim \hat{\psi}_1^1 \lesssim 2\beta\pi, \hat{\psi}_2^1 \approx 2\beta\pi, \hat{\psi}_3^1 \approx 2\beta\pi$$

この解集合の要素 $\hat{\Psi}^1(p_R) = [3.97 \ 5.29 \ 5.29]^T$ (Fig. 3.4の点 p_R)の足跡図を Fig. 3.6Bに示す. これまでの議論と同様, 脚2を基準にして遊脚運動が前から後ろに向かって伝搬する. 一方, $\hat{\psi}_1^1$ は一意に決まっておらず, 脚1と脚2の遊脚部分がほとんど重ならない範囲($2(1-\beta)\pi \lesssim \hat{\psi}_1^1 \lesssim 2\beta\pi$)で, 脚1の足跡図を脚2-4に対して自由にスライドできる(Fig. 3.6Bで脚1の遊脚部分(黄色の四角形)が水平方向の矢印の範囲内におさまるように, 濃い部分を淡い部分に対してスライドできる). 特に位相差 $\hat{\psi}_1^1 \approx 2\beta\pi$ の場合(Fig. 3.4の境界点 p_{BR} 付近)には, 脚1が接地するとほぼ同時に脚2が浮く. よって, すべての遊脚運動が前から後ろの脚へと伝搬する. この解集合を後退波解集合(Retrograde wave gaits)と呼ぶ. このように遊脚が前から後ろに伝搬する歩容は, ある種のムカデなどにおいて観測される[44].

最後に, Fig. 3.4の Direct wave gaits と表記された解集合は, つぎのような位相差を示す.

$$\hat{\psi}_1^1 \approx 2(1-\beta)\pi, \hat{\psi}_2^1 \approx 2(1-\beta)\pi, 2(1-\beta)\pi \lesssim \hat{\psi}_3^1 \lesssim 2\beta\pi$$

この解集合の要素 $\hat{\Psi}^1(p_D) = [1.13 \ 0.98 \ 1.50]^T$ (Fig. 3.4の点 p_D)の足跡図を Fig. 3.6Cに示す. これまでの議論と同様, 脚3を基準にして遊脚運動が前方に向かって伝搬する. 一方, $\hat{\psi}_3^1$ は一意に決まっておらず, 脚3と脚4の遊脚部分がほとんど重ならない範囲(位相差 $2(1-\beta)\pi \lesssim \hat{\psi}_3^1 \lesssim 2\beta\pi$)で, 脚1-3の足跡図を脚4に対して自由にスライドできる(Fig. 3.6Cで脚3の遊脚部分(黄色の四角形)が水平方向の矢印の範囲内におさまるように, 濃い部分を淡い部分に対してスライドできる). 位相差 $\hat{\psi}_3^1 \approx 2(1-\beta)\pi$ の場合(Fig. 3.4の境界点 p_{BD} 付近)には, 脚4が接

地するとほぼ同時に脚3が浮く。よって、すべての遊脚運動が後ろから前の脚へと伝搬する。この解集合を進行波解集合(Direct wave gaits)と呼ぶ。このような歩容はヤスデなどにおいて観測される[44]。

これらの結果から、本システムには生物で観測される3種類の波(後退波, 進行波, わきだし波)が存在することがわかった。これらの歩容はあらかじめ決められたものではなく、位相リセットを通じた環境との相互作用の結果得られたものである。なお、得られた解の特徴をわかり易く示すために3つの集合に分類したが、これらの解集合は3次元空間上で平面を変えながら鎖状につながっている(Fig. 3.4A)。さらに、この解集合全体の両境界(Fig. 3.4の点 p_{BD} , p_{BR})付近が、進行波と後退波に対応する。この結果を $N+1$ 個の脚をもつシステムに対して一般化し、さらに解の本質的な特徴を理解するために、次節から数理的に解析する。

3.3 多足歩行の数理解析

本章では、シミュレーション結果をふまえて物理的な仮定を導入し、解析解を求める。

3.3.1 物理的仮定

3.2章のシミュレーションでは、 $\omega \ll \sqrt{k_t/m_i}$ であるようなパラメータで運動を分析した。これは腰のバネの振動に対して、振動子で記述される脚の振動が非常に遅いことを意味している。よって、速度・加速度は考えず、静的なつり合い式より運動を分析できると仮定する。具体的には、Fig. 3.1のモデルの地面は剛体であるとし、セグメント間のダンパ係数は $d_t = 0$ とする。

この時、各セグメント i の力のつり合いの式(1次元)は以下の形で書くことができる。

$$\begin{cases} k_t(x_2 - x_1) + R_1 = m_B g & i=1 \\ k_t(x_{i-1} - x_i) + k_t(x_{i+1} - x_i) + R_i = m g & i=[2, N] \\ k_t(x_N - x_{N+1}) + R_{N+1} = m_B g & i=N+1 \end{cases} \quad (3.8)$$

ここで、 R_i は地面から受ける抗力であり、以下の制約条件を満足しなければならない。

$$\begin{cases} R_i = 0, & \text{Leg } i \text{ is in the air } (l(\phi_i) \leq x_i) \\ R_i > 0, & \text{Leg } i \text{ is on the ground } (l(\phi_i) = x_i) \end{cases} \quad (3.9)$$

位相 $\phi_1 \cdots \phi_{N+1}$ の $N+1$ 個が既知であるときに，シンプルモデルの未知量は $x_1 \cdots x_{N+1}$, $R_1 \cdots R_{N+1}$ の $2(N+1)$ 個である．物理的に矛盾のない(3.9)式に矛盾しない接地脚集合 $S = \{i \mid \text{Leg } i \text{ is on the ground}\}$ を選べば，脚が接地している場合 ($i \in S$) は $x_i = l(\phi_i)$ ，脚が浮いている場合 ($i \notin S$) は $R_i = 0$ となり，未知量のうちの $N+1$ 個は既知となる．よって， $N+1$ 個のつり合いの式(3.8)を解くことで，シンプルモデルの未知量が計算できる．つまり，静的なつり合いを仮定することで，シンプルモデルは $N+1$ 個の位相で縮約されたモデルになる．

3.3.2 位相ダイナミクス

3.2章のシミュレーションでは連続性を考慮して一次フィルタを導入したが，時定数 τ は振動子の周期に比べて十分小さかった．よって，解析解を求めるためにはデルタ関数が本質であると考え，解析モデルにおける位相ダイナミクスは，(3.3)式において時定数 τ をゼロにしたものとする．

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + u_i \quad (3.10)$$

以後，変数 ϕ_1 , $\psi_i = \phi_{i+1} - \phi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) を状態量として扱い，(3.10)式のダイナミクスを以下で書き換える．

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \omega + u_1, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= u_{i+1} - u_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.11)$$

脚 j が接地する直前でポアンカレ断面 Σ^j を定義して，断面上の位相差を $\Psi^j \equiv [\psi_1^j \ \psi_2^j \ \dots \ \psi_N^j]^T$ と表す．ポアンカレ断面 Σ^j 上の1周期写像は，(3.11)式を(3.6)式を用いて1周期積分して以下のように書ける．

$$\psi_i^j \mapsto \psi_i^j + \phi_i^{\text{td}} - \phi_{i+1}^{\text{td}} \quad (3.12)$$

なお，1周期の間に各脚は必ず1回だけ位相リセットを経験するものとし，積分時間は $T = \phi_j^{\text{td}}/\omega$ である．この式から，振動子 i の接地位相 ϕ_i^{td} を求めることが出来れば，ポアンカレ写像を計算できる．

3.3.3 接地条件

脚 i が接地する直前に，セグメント i の地面からの高さ x_i と，脚の長さ $l_i (= l(\phi_i^{\text{td}}))$ は一致しなければならない(接地条件)． x_i はつり合いの式(3.8)を解

いて導出できるので，脚 i の接地位相 ϕ_i^{td} に対する位相関係式として表現することができる(接地条件式).

特に，脚 i が接地する直前において，脚 i の両隣りの脚が地面に接地している（なお， $i=1, N+1$ なら片隣りの脚は接地している）場合を考える．この時， $x_{i-1}=l(\phi_{i-1}^i)$ ， $x_i=l(\phi_i^{\text{td}})$ ， $x_{i+1}=l(\phi_{i+1}^i)$ ， $R_i=0$ であるので，脚 i の接地条件式はつり合いの式(3.8)を解いて以下のように簡単に求めることができる．ここで，脚 i が接地する直前の振動子 $j(j \neq i)$ の位相を ϕ_j^i とした．

$$l(\phi_i^{\text{td}}) = \begin{cases} f(\phi_{i-1}^i, \phi_{i+1}^i) & i \in [2, N] \\ f_B(\phi_N^i) & i = N + 1 \\ f_B(\phi_2^i) & i = 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$f(\phi_h, \phi_f) = \frac{1}{2} \{l(\phi_h) + l(\phi_f)\} - \frac{mg}{2k_t} \quad (3.14)$$

$$f_B(\phi) = l(\phi) - \frac{m_B g}{k_t} \quad (3.15)$$

(3.13)式の位相 $\phi_{i-1}^i, \phi_{i+1}^i$ は，(3.7)式において $\phi_i^i = \phi_i^{\text{td}}$ であることを用いて， $\phi_{i-1}^i = \phi_i^{\text{td}} - \psi_{i-1}^i$ ， $\phi_{i+1}^i = \phi_i^{\text{td}} + \psi_i^i$ と表せることに注意する(先頭と最後尾の場合も同様)．なお，脚 i が接地する直前の位相差を ψ_j^i と表した．

3.3.4 わきだし波，後退波解集合の導出と安定解析

本システムは支配方程式(3.8)(3.9)が各脚の接地と離地で切り替わるハイブリッドシステムであり，接地脚集合によって接地条件式は変化する．位相リセットは脚の接地時に起こるため，脚の接地する順番も重要である．以上の要因から，このシステムの解を大域的に分析するのは非常に難しい．本節ではシミュレーション結果から解の特徴を仮定し，その仮定をもとにして解析解を導出する．また，本システムの本質はわきだし波解集合(3.2.3節)であり，後退波解集合も進行波解集合もこの解を基に説明できる．よって，はじめにわきだし波解集合の解の導出について説明する．

本節では，脚 $k-1$ と k の間の位相関係 ψ_{k-1} が一意に定まらない，脚 k 基準のわきだし波解集合の導出を行う(なお， $k \in [2, N]$ であり， $k=2$ の場合は後退波解集合に対応している)．ポアンカレ断面は脚 k が接地する直前 Σ^k で定義し，脚 i が接地するイベントをイベント i と呼ぶ．以後の議論では k を固定して

議論する．また，周期解になるための条件は，(3.12)式より以下で書き表される．

$$\phi_1^{\text{td}} = \phi_2^{\text{td}} = \dots = \phi_{N+1}^{\text{td}} \equiv \hat{\phi}^{\text{td}} \quad (3.16)$$

すなわち，周期解では，すべての脚の接地位相が $\hat{\phi}^{\text{td}}$ となる．このとき，周期解 Ψ^k は以下の手順で導出される．

1. シミュレーション結果の類推から，イベント i 直前の接地脚集合を仮定する．それをもとに，遊脚の波の幾何的な特徴を議論する．
2. 遊脚の波の幾何的特徴をもとに，脚の接地する順番が決定される．これにより，各接地イベントの位相リセットで，位相差がどのように発展するかが議論でき，各脚の接地直前の位相差が Ψ^k と位相リセット量(ϕ_i^{td} の関数)で表せる．
3. 接地条件式(3.13)と周期解条件式(3.16)をつかって Σ^k 上で周期解を求める．
4. 導出した解に対して，手順1で仮定した接地脚集合が物理的に妥当であることを確認する．

解に対する仮定と遊脚の波の幾何的特徴

シミュレーション結果の類推から，接地脚集合と位相に対して以下のように仮定する (Fig. 3.2 参照)．

- (B1) すべての振動子の接地位相は遊脚相の Landing 相に含まれる．
- (B2) 脚 k が接地する直前において，前脚 $k-1$ は接地しており，その位相は支持脚相または遊脚相の Takeoff 相である．後脚 $k+1$ は接地しており，その位相は遊脚相の Takeoff 相である．
- (B3) 各脚 $i \in [k+1, N]^2$ が接地する直前において，前脚 $i-1$ は接地しており，その位相は支持脚相である．後脚 $i+1$ は接地しており，その位相は遊脚相の Takeoff 相である(後退波の性質)．
- (B4) 各脚 $i \in [2, k-1]$ が接地する直前において，前脚 $i-1$ は接地しており，その位相は遊脚相の Takeoff 相である．後脚 $i+1$ は接地しており，その位相は支持脚相である(進行波の性質)．

²本論文では場合分けが多くなるのを防ぐため，区間の定義に矛盾する区間(たとえば $[3, 2]$ など)は空集合として扱う．

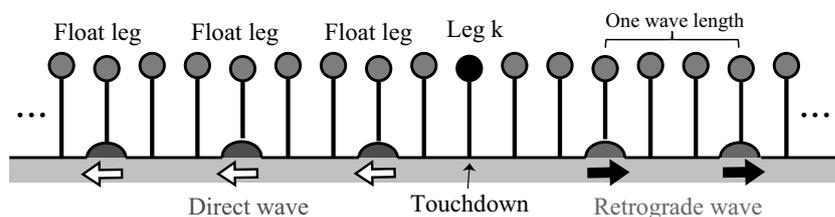


Fig. 3.7: Retrograde wave and Direct wave at Leg k touchdown.

(B5) 先頭の脚1（あるいは最後尾の脚 $N+1$ ）が接地する直前において、隣りの脚2（あるいは脚 N ）は接地しており、その位相は支持脚相である。

以上の仮定より、解の幾何的な特徴が限定される。仮定(B1)は、すべての脚について位相リセットが必ず一度起こることを保証している。仮定(B2,3)は、遊脚の波が脚 k から $N+1$ に向かって進んでいくこと(後退波)を意味しており、脚が接地したあとに後ろ隣りの脚が離地することを意味している。仮定(B4)は、遊脚の波が脚 $k-1$ から1に向かって進んでいくこと(進行波)を意味しており、脚が接地したあとに前隣りの脚が離地することを意味している。 $\beta > 1/2$ であるので、これらの性質から、遊脚1つ分の波が後退(進行)していきることがわかる(遊脚が2つ連続することはない)。

また、後退波部分の脚 $i \in [k+1, N+1]$ に対して、前脚 $i-1$ が接地した瞬間の脚 i の位相を $\phi_i^{\text{fs}} \equiv \phi_i(t_{i-1}^{\text{td}})$ と定義して、 $\phi_i \in (\phi_i^{\text{fs}}, \phi_i^{\text{td}}]$ である脚 i を浮遊脚(float leg)と呼ぶ(この位相範囲で脚が浮いていない場合もあるが、便宜上このように呼称する)。進行波部分の脚 $i \in [1, k-1]$ に対しても同様に、後脚 $i+1$ が接地した瞬間の脚 i の位相を $\phi_i^{\text{fs}} \equiv \phi_i(t_{i+1}^{\text{td}})$ と定義して、 $\phi_i \in (\phi_i^{\text{fs}}, \phi_i^{\text{td}}]$ である脚 i を浮遊脚と呼ぶ。この定義と仮定(B2-4)から、浮遊脚1つが時間とともに進行(後退)していきることがわかる(Fig. 3.7)。

接地イベントにおける位相差発展

これらの幾何的特徴を用いることで、接地イベントが起こる順番が浮遊脚を基準にして決定できる。たとえば Σ^k 上で脚 $j (> k)$ が浮遊脚であり、脚 $k+1$ から脚 $j-1$ が接地している場合に、後退波部分($k \leq i \leq j$)の接地イベント i がどのような順番で起きるかをFig. 3.8のように表すことができる。Fig. 3.8では、脚 k から脚 j の間の位相関係と接地状況を表しており、時間が進むにつれて、脚 k から、脚 $j, k+1, k+2, k+3\dots$ と順に接地していき、最終的には脚 $j-1$

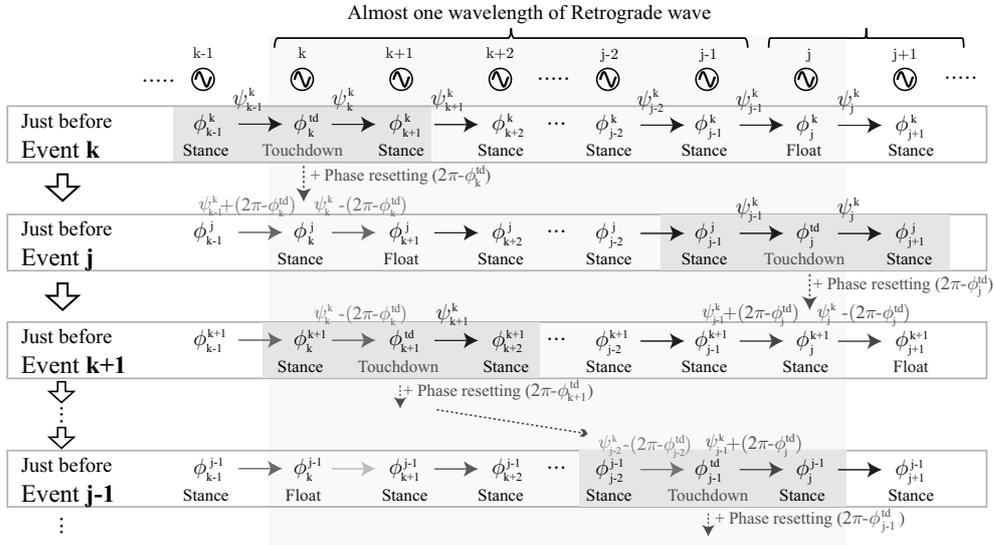


Fig. 3.8: Evolution of phases at touchdown events in the case that Leg j is in the air just before event k . Figure shows the phase and geometrical relations among Leg k -Leg j .

が接地する状況を表している。なお、この接地イベントの順番は、浮遊脚1つ分の波が後ろに進んでいく(B4)という性質を使って導かれる。

これにより位相リセットの起こる順番が決まるため、各イベントでの位相差発展が議論できる。Fig. 3.8では、それぞれのイベントにおける振動子間の位相差が、位相リセットによってどのように発展するかについても表している。振動子 i の隣りとの位相差 ψ_i, ψ_{i-1} は、各イベント i を経験する度に、位相リセット量 $2\pi - \phi_i^{\text{td}}$ に対応する変化を受ける。たとえば、Fig. 3.8のイベント j 直前の位相差 ψ_j^j は、その前のイベント k の影響を受けて脚 k の位相に関連する位相差 ψ_k^j, ψ_{k-1}^j のみが Ψ^k に対して変化していることがわかる。その他の位相差は対応する Ψ^k と同じである。

したがって、 Σ^k 上の浮遊脚 j がわかれば、任意のイベント $s \in [k, j]$ 直前の位相差 ψ_{s-1}^s, ψ_s^s は、ポアンカレ断面 Σ^k 上の位相差 ψ_s^k, ψ_{s-1}^k と接地位相 $\phi_{s-1}^{\text{td}}, \phi_{s+1}^{\text{td}}$ を使って表せる。たとえば、イベント $s \in [k+1, j-2]$ 直前では、前隣りの脚のみが位相リセットを経験しているので、 $\psi_{s-1}^s = \psi_{s-1}^k - (2\pi - \phi_{s-1}^{\text{td}})$, $\psi_s^s = \psi_s^k$ と表すことができる。他のイベント $k, j-1, j$ の場合についてはFig. 3.8に記述してある。なお、この議論は進行波の部分についても同様に展開できる。

周期解の導出

仮定(B2-5)から，任意のイベント*i*直前において脚*i*の両隣りの脚は接地している($i=1, N+1$ なら片隣りの脚は接地している)ため，周期解のすべてのイベントに対する接地条件式は簡単化されて，(3.13)式になる．さらに，イベント*i*直前の振動子*i*の隣りとの位相差 ψ_{i-1}^i, ψ_i^i は，Fig. 3.8の議論を行うことで， Σ^k 上の位相差 ψ_i^k, ψ_{i-1}^k と接地位相 $\phi_{i-1}^{\text{td}}, \phi_{i+1}^{\text{td}}$ を使って表すことができる．つまり，周期解条件式(3.16)を使えば，すべての脚の接地条件式(3.13)は，接地位相と周期解の位相差($\hat{\phi}^{\text{td}}, \hat{\psi}_i^k (i=1, \dots, N)$)のみを使って表すことができる．以上より結局，それぞれのイベント*i*における接地条件式は以下で表わされる．なお，付録B.1に詳細な説明を加えた．

$$l(\hat{\phi}^{\text{td}}) = \begin{cases} f_B(\hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_1^k - 2\pi) & i=1 \in J_D^k, \\ f_B(\hat{\psi}_1^k) & i=1 \notin J_D^k, \\ f_B(\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_N^k) & i=N+1 \in J_R^k \\ f_B(2\pi - \hat{\psi}_N^k) & i=N+1 \notin J_R^k \\ f(\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_{i-1}^k, \hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_i^k - 2\pi) & i \in S_1, \\ f(2\pi - \hat{\psi}_{i-1}^k, \hat{\psi}_i^k) & i \in S_2, \\ f(\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_{i-1}^k, \hat{\psi}_i^k) & i \in S_3, \\ f(2\pi - \hat{\psi}_{i-1}^k, \hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_i^k - 2\pi) & i \in S_4 \end{cases} \quad (3.17)$$

ここで，集合 $S_{1,2,3,4}$ は以下で定義される自然数 $i \in [2, N]$ の集合である．

$$\begin{aligned} S_1 &= \{i \mid i = k, \text{ or } i \in J_D^k, \text{ or } i \in J_R^k\} \\ S_2 &= \{i \mid i-1 \in J_D^k, \text{ or } i+1 \in J_R^k\} \\ S_3 &= \{i \mid i \in [2, k-1], \text{ and } i \notin J_D^k, \text{ and } i-1 \notin J_D^k\} \\ S_4 &= \{i \mid i \in [k+1, N], \text{ and } i \notin J_R^k, \text{ and } i+1 \notin J_R^k\} \end{aligned}$$

なお， $J_D^k(J_R^k)$ は進行波(後退波)部分の浮遊脚集合であり， $J_D^k(J_R^k)$ の要素 $j_D(j_R)$ は， Σ^k において脚 $j_D(j_R)$ が浮遊脚であるという条件を満たす自然数 $j_D \in [1, k-2](j_R \in [k+2, N+1])$ と定義している． $S_{1,2,3,4}$ は浮遊脚に基づく集合であり，イベント*i*までに脚*i*の両隣の脚が位相リセットを経験しているかどうかに応じた4通りの場合分けをあらわしている． S_1 は， k と浮遊脚である脚のインデックス集合であり，両隣の脚は位相リセットを経験していない． S_2 は，前隣りあるいは後ろ隣りの脚が，それぞれ進行波あるいは後退波部分の浮遊脚である脚のインデックス集合であり，両隣の脚が位相リセットを経験している．

$S_3(S_4)$ は、進行波(後退波)部分で、自身と前隣り(後ろ隣り)の脚が浮遊脚ではない脚のインデックス集合であり、後脚(前脚)のみが位相リセットを経験している。周期解の接地条件式(3.17)を仮定(B1-5)を使って解くことで、 $\hat{\phi}^{\text{id}}$ と $\hat{\psi}_i^k (i=1, \dots, N)$ を求めることができる。詳細は付録B.2を参照。接地位相 $\hat{\phi}^{\text{id}}$ は、

$$\hat{\phi}^{\text{id}} = 2\pi - \frac{m_B g}{k_t b} \quad (3.18)$$

と求まり、 $\hat{\psi}_i^k (i=1, \dots, N)$ は以下のように求められる。

$$\hat{\psi}_i^k = \begin{cases} \psi_a & i = k-1, \\ \psi_b & i = k, \\ 2(1-\beta)\pi - \frac{(2m_B - m)g}{k_t b} & i \in J_D^k, \\ 2(1-\beta)\pi - \frac{(3m_B - m)g}{k_t b} & i \in [1, k-2], \text{ and } i \notin J_D^k \\ 2\beta\pi + \frac{(2m_B - m)g}{k_t b} & i+1 \in J_R^k, \\ 2\beta\pi + \frac{(3m_B - m)g}{k_t b} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.19)$$

ここで、 ψ_a は以下を満たす任意の定数であり、

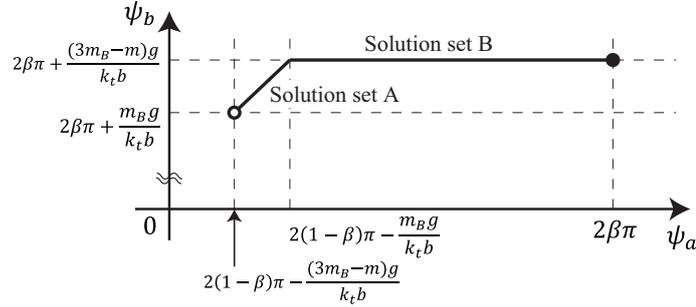
$$2(1-\beta)\pi - \frac{(3m_B - m)g}{k_t b} < \psi_a \leq 2\beta\pi \quad (3.20)$$

ψ_b は ψ_a を使って以下で表わされる。

$$\psi_b = \begin{cases} \psi_a + (4\beta - 2)\pi + \frac{(4m_B - m)g}{k_t b} & \psi_a < C \\ 2\beta\pi + \frac{(3m_B - m)g}{k_t b} & C \leq \psi_a \leq 2\beta\pi \end{cases} \quad (3.21)$$

ここで、 $C = 2(1-\beta)\pi - m_B g / (k_t b)$ 、 $b = a_s / ((1-\beta)\pi)$ である。以上から、解は1自由度分が一意に決まらず、連続する2つの集合にわかれていることがわかる(本論文では順に解集合A、解集合Bと呼称する(Fig. 3.9))。なお、周期解の場合、脚 $j_R \in [k+2, N+1]$ が集合 J_R^k の要素であるかどうかは位相関係で表すことができる。脚 $j_R - 1$ が接地した瞬間の脚 j_R の位相 ϕ_i^{fs} は、仮定(B3)より脚 $j_R - 2$ が支持脚相であることからつり合いの式(3.8)で $\phi_i^{\text{fs}} = 2\beta\pi + (2m_B - m)g / (k_t b)$ で決まる。よって、脚 j_R が断面 Σ^k 上で浮遊脚であるための位相条件は以下で求められる。

$$2\beta\pi + \frac{(2m_B - m)g}{k_t b} < \phi_{j_R}^k \leq \hat{\phi}^{\text{id}} \quad (3.22)$$

Fig. 3.9: Relation between ψ_a and ψ_b

同様にして, J_D^k の要素 j_D は以下の条件を満たす自然数 ($j_D \in [1, k-2]$) となる.

$$2\beta\pi + \frac{(2m_B - m)g}{k_t b} < \phi_{j_D}^k \leq \hat{\phi}^{\text{td}} \quad (3.23)$$

すなわち, ϕ_j^k が (3.22) あるいは (3.23) 式を満足すれば, j は浮遊脚集合 J_R^k あるいは J_D^k に属することがわかる.

仮定した接地脚集合の物理的妥当性の確認

シンプルモデルのパラメータ条件 ($m/2 < m_B < m$, $1/2 < \beta < 1$, $mg < k_t a_s$ (3.2 節参照)) を満たしていれば, 仮定 (B2-5) で仮定した接地脚集合は物理的に妥当であることが確認できる (付録 B.3). ここで, 物理的に妥当であるとは, 仮定した接地脚集合が制約条件 (3.9) に矛盾しないことである.

安定解析

本節では, 求めた周期解 $\hat{\psi}_i^k$ に対して, 外乱 $\Delta\psi_i^k$, ($i = 1, \dots, N$) をイベント k の直前 (ポアンカレ断面 Σ_p^k 上) で与える ($\psi_i^k = \hat{\psi}_i^k + \Delta\psi_i^k$). この外乱の 1 周期分の線形写像 $[DP]$ を求めることで, このシステムの安定性を評価する. なお, 計算の簡単のために, 各イベント i におけるタッチダウン位相 ϕ_i^{td} を, 周期解のタッチダウン位相 $\hat{\phi}^{\text{td}}$ との差 $\Delta\phi_i^{\text{td}}$ を使って $\phi_i^{\text{td}} = \hat{\phi}^{\text{td}} + \Delta\phi_i^{\text{td}}$ のように記述する. 本研究では, 外乱は仮定 S1-5 を破らない, また, 集合 J_D^k , J_R^k の要素を変えないとして安定性の議論を進める.

これらを接地条件式 (3.17) に代入して計算することで, タッチダウン位相の変化量 $\Delta\phi_i^{\text{td}}$ を $\Delta\psi_i^k$ を使って表すことが出来る. この $\Delta\phi_i^{\text{td}}$ を式 (3.12) に代入することで, 1 周期後の誤差発展行列 $[DP]_{N \times N}$ を求めることができ, 固有値の

集合 λ_{sk} がそれぞれ解集合 A,B に対して以下のように計算できる．誤差発展行列等の詳細な導出は付録 B.4 に記す．

$$\lambda_{sk} = \begin{cases} \{1, 1/2, 2/3, \dots, 2/3\}, & 2(1-\beta)\pi - \frac{(3m_B - m)g}{k_t b} < \hat{\psi}_{k-1}^k < 2(1-\beta)\pi - \frac{m_B g}{k_t b} \\ \{1, 2/3, 2/3, \dots, 2/3\}, & 2(1-\beta)\pi - \frac{m_B g}{k_t b} < \hat{\psi}_{k-1}^k < 2\beta\pi \end{cases} \quad (3.24)$$

それぞれの解集合 A,B に対して最大固有値は 1 であるため，それぞれの解は中立安定である．なお，中立安定な固有ベクトルの方向は，それぞれ解が一意に定まらない方向と一致している(付録 B.4)．また，それ以外の固有値は 1 未満のため，中立安定な固有ベクトル方向を除いた空間において，この解は安定であることが分かる．なお，先に議論したように，この安定解析は解集合の境界と集合 J_D^k, J_R^k の切り替わり点においては厳密には意味をなさない．

3.3.5 進行波解集合の導出と安定解析

進行波解集合をシステムの対称性を考慮して導出する．あるポアンカレ断面 Σ^k 上で初期値 $(\phi_1^k, \phi_2^k, \dots, \phi_{N+1}^k)$ を与えた場合の解の流れを， $\Phi^k(t; \phi_1^k, \phi_2^k, \dots, \phi_{N+1}^k)$ と表す．なお， Φ の上付き添え字 k は，初期値を与えた時のポアンカレ断面 Σ^k に対応している．このとき，このシステムの脚番号に対する前後対称性から以下の関係式が成り立つ．

$$\Phi^k(t; \phi_1^k, \phi_2^k, \dots, \phi_{N+1}^k) = \Phi^{N-k+2}(t; \phi_{N+1}^k, \phi_N^k, \dots, \phi_1^k) \quad (3.25)$$

脚 2 基準のわきだし波解集合(後退波解集合)の解集合 B についてこの対称性を使うことで，ポアンカレ断面 Σ^N 上で周期解 $\hat{\psi}_i^N$ ($i = 1, 2, \dots, N$) を得ることができる．具体的には $k=2$ の場合の(3.19)式の $\hat{\psi}_i^2$ を使って， $\hat{\psi}_i^N = 2\pi - \hat{\psi}_{N+1-i}^2$ で求められる．

$$\hat{\psi}_i^N = \begin{cases} \psi_c & i = N \\ 2(1-\beta)\pi - \frac{(2m_B - m)g}{k_t b} & i \in J_D^N \\ 2(1-\beta)\pi - \frac{(3m_B - m)g}{k_t b} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.26)$$

なお， ψ_c は以下を満たす任意の定数である．

$$2(1-\beta)\pi \leq \psi_c \leq 2\beta\pi + \frac{m_B g}{k_t b} \quad (3.27)$$

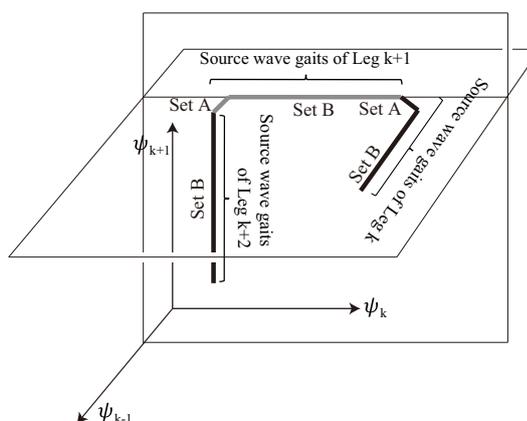


Fig. 3.10: Source wave gaits projected on the $\psi_{k-1}-\psi_k-\psi_{k+1}$ space.

また，集合 J_D^N は， Σ^N における浮遊脚 $j_D \in [1, N-2]$ の集合であり，わきだし波解の場合と同様に求めることができる。

解の安定性についても，対称性を使って脚2基準のわきだし波解の解集合 **B** の場合と同じ議論が出来る．結果，1周期後の誤差発展行列 $[DP]_{N \times N}$ の固有値の集合 λ_D が以下のように計算できる．

$$\lambda_D = \{1, 2/3, 2/3, \dots, 2/3\} \quad (3.28)$$

最大固有値は1であるため，解は中立安定である．なお，中立安定な固有ベクトルの方向は，解が一意に定まらない方向と一致している．また，それ以外の固有値は1未満のため，中立安定な固有ベクトル方向を除いた空間において，この解は安定であることが分かる．

なお，脚 k を基準としたわきだし波解集合の境界(解集合 **A** 側の境界 (Fig. 3.9 の左境界) と，脚 $k+1$ を基準としたわきだし波解集合の境界(解集合 **B** 側の境界 (Fig. 3.9 の右境界)) は，同一ポアンカレ断面上で一致する(概略図を Fig. 3.10 に示す)．また，脚 N 基準のわきだし波解集合の境界(解集合 **A** 側の境界 (Fig. 3.9 の左境界) と，進行波解集合の境界も一致する．つまり，得られたすべての解集合は平面を変えながら鎖状に結合しており (Fig. 3.10)，この全体集合の両境界付近が，生物の進行波，後退波のような歩容に対応している．

3.3.6 シミュレーション結果との比較

本分析の妥当性を検証するために，シミュレーションのパラメータを用いて，シミュレーション結果と解析解をポアンカレ断面 Σ^1 上で比較した (Fig.

3.4). 太い点群がシミュレーション結果に対応しており、線分が解析解に対応している。

シミュレーション結果と解析解は非常によく一致しており、本解析が妥当であることを示している。それぞれの解集合（進行波を除く）は、解析解で導出したように解集合A(斜め方向の直線)とB(軸に平行な直線)で構成されている。また、基準脚2のわきだし波解集合(後退波解集合)と基準脚3のわきだし波解集合がつながっていることも、Fig. 3.4Bで見取れる。さらに、Fig. 3.4Cでは、基準脚3のわきだし波解集合と、進行波解集合がつながっている。なお、解集合がジャンプしているところが解析解において存在するが、これは Σ^1 上における浮遊脚集合が変化したところに対応している。一方、シミュレーションにおいては、位相リセットは1次フィルタで平滑化されているため、解集合は解析解の特徴をとらえて比較的緩やかに変化している。

3.3.7 得られた解析解の空間的な特徴

これまでの議論をまとめて、脚 k 基準のわきだし波解集合の空間的な特徴を議論する。この解は、ある脚 k と $k-1$ を基準にして、それぞれ空間的に等方な波が先頭と最後尾に向かって進んでいくような特徴をもっている。これはヤスデで観測されるようなわきだし波をもつ歩容と対応している。脚間の距離を1と定義すれば、各波の波長 λ と速さ v は、周期解(3.19)から以下のように導出できる。

$$\lambda = \frac{\frac{1}{1-\beta} - \frac{m_B g}{2k_1 a_s}}{1 - \frac{(3m_B - m)g}{2k_1 a_s}}, \quad (3.29)$$

$$v = \frac{\lambda \omega}{2\pi}. \quad (3.30)$$

これより、デューティ比 β が大きい、波の波長 λ は長く、速さ v は大きいことがわかる。一方で、3.3.4節で述べたように、パラメータに依存せずに、1波長の波に含まれる浮遊脚は必ず1つである。解集合で位相差 ψ_{k-1}^k は一意に決まらないので、この等方的な2種類の波（進行波と後退波）の位相関係には自由度がある。

もし基準脚 $k=2$ であり、脚 $k-1$ と k の間の位相差 $\psi_1 \approx 2\beta\pi$ であれば、遊脚の波が波長は(3.29)式、速さは(3.30)式に従い前から後ろにほぼ等方的に進んでいく。これはムカデのような後退波の歩容に対応する。一方で、この議論の前後を入れ替えれば、ヤスデのような進行波の歩容に対応する。よって、 $N+1$ 脚の一般化されたシステムにおいても、進行波、後退波、わきだし波に対応する歩容が解として存在することがわかった。

3.4 議論

3.4.1 センサフィードバックが歩容生成に及ぼす影響

本研究の結果、位相リセットが多足歩行において観測される秩序だった波（進行波，後退波，わきだし波）を生成するのに重要であることが分かった。特に，波を生成するのに可能な限り単純化したモデル（ミニマルモデル）を用いたことにより，胴体の弾性要素を通した環境との相互作用が秩序形成に本質であることが明確になった。また，解析的分析により，この分析が本質的であるパラメータ領域を明確にでき，さらに，脚数に依存しない一般的な現象であることも明確に示した。

このような，センサフィードバックの歩容生成に対する影響を分析した研究は，多足歩行にかかわらず多くの対象に対してなされている。たとえば，4足歩行に対して，足負荷荷重に応じて振動子のリズムを分散的に調節することで，環境との相互作用の結果，トロットやウォークに対応する歩容が得られたもの [30]，位相リセットの結果としてトロットやウォークに対応する歩容が，遷移にヒステリシスを伴って得られることを示したものの [62]，荷重フィードバックでウォーク，トロット，ギャロップ歩容が速度に応じて得られることを示したものの [31] などがある。6足歩行に関しても，位相リセットの結果としてトライポッドやメタクロナル歩容に対応する歩容が得られることを示したもののや [32]，位相リセットの結果として昆虫で観測されない後退波も生成されることを示したものの [76] がある。これらの結果は，胴体の運動を介したセンサフィードバックの影響によって歩容が決定されているという点で，本研究結果と関連している。

これらの関係性を脚数にかかわらずに今後一般化するためにも，本研究で行った解析は重要である。加えて，本システムの解の大域的構造の分析も重要である。たとえば，このシステムで沈みこむような波がなぜ存在しないのかについては，生物と対応した興味深い問題である。

3.4.2 位相差が一意に決まらない物理的解釈

本研究では，解として得られた歩容の位相差に一意に定まらないものがあった。安定解析の固有値1に対応する位相差である。これは，本システムに保存量が存在していることに起因すると考えられる。ポアンカレ断面 Σ

上でスカラー量 Φ^j を以下で定義する.

$$\Phi^j = \sum_{i=1}^N \psi_i^j \quad (3.31)$$

このときに, このスカラー量の 1 周期写像は式(3.12)を用いることで以下のよう書くことができる.

$$\Phi^j \mapsto \Phi^j + \phi_1^{\text{td}} - \phi_{N+1}^{\text{td}} \quad (3.32)$$

ここで, 仮定(B5)が成り立つ場合, $\phi_1^{\text{td}} = \phi_{N+1}^{\text{td}} = \hat{\phi}^{\text{td}}$ (式(3.18))であるから, $\Phi^j \mapsto \Phi^j$ となり, Φ^j が保存量となる. 少なくとも解集合に対して(B5)は成り立っているので, Φ^j は解集合の保存量であり, これに対応して解の位相差が任意になると考えられる.

この保存量の物理的解釈を考えるために, 仮定(B5)下において, ϕ_1^{td} , ϕ_{N+1}^{td} の値を m_1 , m_{N+1} を使って表す.

$$\phi_1^{\text{td}} = 2\pi - \frac{m_1 g}{k_1 b}, \quad (3.33)$$

$$\phi_{N+1}^{\text{td}} = 2\pi - \frac{m_{N+1} g}{k_1 b}, \quad (3.34)$$

この式より, 仮定(B5)下での $\phi_1^{\text{td}} = \phi_{N+1}^{\text{td}}$ の関係式は, $m_1 = m_{N+1}$ という条件下で成り立つ関係であることがわかる. つまり, この保存量は, 本モデルにおける前後対称性 ($m_1 = m_{N+1} = m_B$) に起因していると解釈できる.

以上のように, モデルの前後対称性に起因して解の位相差が一意に定まらず, 進行波, 後退波が共存することが分かった. これらの解の中には, 実際の生物で観測されるような歩容を含んでいる. しかし, ヤスデの場合は前進時に進行波を選択し, U字に屈曲して進む際に, 進行波と後退波がわきだし波で存在する [73, 74]. このような波の選択メカニズムは本研究では説明できていない. しかし, 本議論を基にすると, 前後対称性を崩して保存量をなくすことで, 生物に対応する波の選択メカニズムを説明できる可能性は十分ある. たとえば, 歩幅は前後対称性を崩す重要な要素かもしれない. また, 生物に対して前後対称性を崩したときに何が起こるかという分析も, メカニズムを知るうえで興味深い実験であると示唆できる.

3.4.3 多足生物の歩容生成メカニズムへの知見

本論文では生物の歩容が力学系における安定な解 (あるいは不変集合) として表されるという立場 [61] に立っており, その力学系の構造の本質的な

部分は、重要な要素のみを取り出すことで記述することができると考えている [34]. そして、その理解を積み重ねてモデルを複雑化していくことで、最終的には多くの現象を説明できるようになると考えている. また、本論文では、多くの生物学者が指摘しているような、環境との相互作用の歩容生成・適応性への影響に着目した.

この方針に沿って、位相リセットという単純な環境との相互作用に着目し、生物で観測される進行波、後退波、わきだし波すべてが存在しうるミニマルモデルを見出した. ミニマルモデルは可能な限り単純化したモデルであるために、現象の本質をとらえやすい. つまり、本研究では、静的で、胴体に弾性成分が存在する場合において、位相リセットが秩序だった波（進行波、後退波、わきだし波）を作るのに重要であることを示すことができた. さらに、本現象の原理と、それが起こりうる領域と安定性に関して、解析的に議論を行って明らかにした. これが本論文の歩容メカニズム理解に対する寄与である.

しかしながら、生物で観測される現象のすべてが説明できているわけではない. たとえば、序論で述べたような、ヤスデが進行波を好み、U字歩行においてわき出し波を選択する現象 [73, 74] や、脚が地面と接地していなかった場合に足の動きが止まる現象 [77] は、われわれのモデルでは説明できない. また、ムカデは脚の動きが左右逆相であるのに対してヤスデは左右同相であること [44, 72] については考慮できていない. 特に、本研究では、進行波、後退波、わきだし波の存在は再現できたが、それぞれの波では遊脚一つのみが進んでいく. 生物で観測されるように隣り合う複数の脚が同時に浮いて進んでいく [72] わけではない. この現象は、モデルの構造に依存する結果かもしれないが、理由については本論文で明確にできていない. 今後生物との比較を行うためにも、連続した遊脚が存在しない理由に関して、接地脚集合の仮定をなくして解析を行い、生物との関連を明確に議論する必要がある.

しかし、この分析結果をもとにして、今後これらの現象を議論できる可能性は十分にある. たとえば、前節の議論で示したように、歩幅を考慮するなどしてモデルの前後対称性と保存量をなくせば、波の選択原理に関しても議論することができるであろう. つまり、理解した力学構造をもとに、要素を増やして複雑な現象を再現していくことは、事前知識なしに行うよりも見通しが良いと考えられる. これらのモデルの拡張は、今後の重要な課題である.

3.4.4 適応的なロボット制御系開発への知見

センサフィードバックを用いた脚ロボットの制御系を開発するうえで、センサフィードバックのどの要素が、どの範囲でどのように歩行に影響を及ぼすのかを理解しておくことは重要である。本研究は、ミニマルモデルを用い、かつ、解析解をもちいて、その影響を明確にしようと試みた。結果、前後対称な胴体が弾性要素を持ち、かつ、運動が静的であるとみなせる場合において、あるパラメータ領域で位相リセットが歩容の秩序生成に寄与することが明確になった。これを用いて、多足ロボットの歩容を生成する分散的な制御則を設計することができると考えられる。

ただし、現在は限られた状況での解析にとどまっているので、今後は本研究における単純化をもとに理解した力学構造を基盤として、不整地などより現実的な状況を考慮していきたいと考えている。

3.5 おわりに

本研究では、位相リセットというセンサフィードバックに着目し、多足生物で観測される遊脚の進行波、後退波、わきだし波を生み出すミニマルモデルを構築した。ミニマルモデルは可能な限り単純化したモデルであるために、現象の本質をとらえやすい。本モデルを用いた動力学シミュレーションの結果、それらの波に対応する周期解が少なくとも中立安定に連続して存在することが分かった。ただし、これらの歩容は振動子(神経系)の結合であらかじめ決められていたわけではなく、位相リセットを通じた環境との相互作用によって創発した。

さらに、これらの現象を脚数によらず一般化し、さらに現象の成り立つパラメータ領域を明確にするために、静的なつり合いが成り立つなどの仮定の下で解析解を導出した。結果、シミュレーション結果とよく一致する解析解が得られ、それぞれの解の特徴が明確になった。特に、後退波解集合はわきだし波解集合の一部の場合に対応しており、また、後退波解集合と進行波解集合はシステムの対称性から同一なものであることがわかった。また、解の位相差が一意に定まらず連続に存在する理由は、モデルの前後対称性に由来する保存量の存在によって説明された。

このミニマルモデルを用いた解析により、センサフィードバックが多足歩行の波の生成に及ぼす影響やメカニズムが明確になった。この知見をもとにモデルを拡張することにより、生物で観測される具体的な現象を扱うこ

とができると考えられる。また，センサフィードバックを用いた脚ロボットの制御系を開発するうえで，センサフィードバックの歩行に対する影響とその適用範囲を明確にすることは重要である。ただし，本研究は限られた現象と状況に対する解析にとどまっており，今後は本ミニマルモデルで理解した知見をもとに，より複雑な現象や状況を扱う必要がある。

第4章

感覚情報を用いた4脚ロボットの脆弱な環境における歩行方法

4.1 はじめに

本章ではこれまでの議論をもとに、感覚情報を用いたロボットの歩容生成手法の一例として、脆弱な不整地における4脚ロボットの歩行方法について提案する。

大規模地震等の被災地における救助作業・復旧作業は、作業にあたる方にとって重労働であり、かつ、2次災害によって更なる被害を受ける可能性がある危険な作業である。一方で、要救助者の生存率は72時間を超えると急激に低下してしまうため、被災現場では迅速な救助活動が求められる。近年、このような作業をロボットで行うことが期待されており、我々はそのようなロボットとして、走行能力と適応能力の高さから脚ロボットに注目する。

4脚ロボットが不整地で歩行するために、安定性は重要な要素である。4脚ロボットの静的な歩き方に関して、重心(Center of gravity(COG))を支持脚多角形の内部において歩くという歩き方が初めに提案された[80]。広瀬らは安定に階段を登ることのできる4脚ロボットを設計した[81]。また、安定性を評価する様々な指標(正規化安定余裕)も提案されてきた[82]。安定余裕をできるだけ大きく確保するような周期的な歩き方[83]や、安定性を考慮して足場を選んで歩くような歩行方法なども提案されている[84, 85]。一方で、静的な歩行においては滑りを防ぐことも重要であり、脚先にかかる力を摩擦拘束を満たして分散させる方法が提案されてきた[86, 87, 88, 89]。近年では、力分散をおこなって実際に滑りを防げるようなロボットも開発されている[90]。

しかしながら、不整地で連続して歩行するためには、環境情報に基づいて、ロボットの歩く経路や足場を適切に設定する必要がある。不整地における経路設計手法は、米国のDefense Advanced Research Project Agency (DARPA)によって行われた“Learning Locomotion program”によって大きく進展した。このプロジェクトは5つの研究グループによって進められ、環境情報とロボットの位置が既知としたときに、4脚ロボット(Little Dog [91])で適切な足場を選択し

て不整地を走行できることが示された [92, 93, 94, 95]. このプロジェクトにおいて, 足場を選択するための効率のよいアルゴリズム [93] や, 足場を分類するための手法 [94] などが提案され, 多くの学習手法も用いられた [95].

幾何的な情報だけではなく, 環境の触覚情報などを集めることも安定な歩行において重要である. 触覚フィードバックに基づいて環境を分類する研究が近年多く行われている [96, 97, 98, 99]. 例えば, 足場に力を加えることで環境の滑りやすさを推定し, この情報と視覚情報を組み合わせて視覚情報から環境の滑りやすさを推定する手法が提案されている [96]. また, 脚裏の力分布や圧力変化に基づいて, 脆弱な環境を推定する方法も提案されている [98]. この手法では環境の崩壊を検知できるものの, 足場が脆弱な環境における安定な歩き方(こけない歩き方)については提案されていない.

よって, 本章では, 脆弱な不整地における安定な歩行方法を提案する. 触覚情報をもとに脆弱な足場をどのように見つけて, そしてその情報をもとにどのように歩くかという点に着目する. ロボットの経路計画手法については我々の主眼ではないため着目しない.

我々は以前に, 脚探り歩行という脆弱な環境における歩行方法を提案し, 平坦な環境で実機実験して手法の妥当性を示した. 具体的には, 脚を接地する際, その地面がある力以上で崩壊しないかどうかを確かめ, 崩壊しない地面を選んで脚を接地させる. さらに, 重心を移動させる際には, ここで確かめた力以上が地面にかからないことを保証する. 結果, ロボットはこの手法を用いて, 平面上でこけることなく安定に歩くことが出来る.

本章では, 環境をランダムな斜面に拡張する. 一般的な二次計画法を用いて, 脚先の力を滑らないように, かつ脚探りの拘束を満たすように分散させる. 様々な環境における力分散のシミュレーション結果により, 本手法の妥当性が示される. また, ロボットを用いた実機実験をランダムな斜面上で行い, 我々の手法の有効性も確認した.

4.2 手法

4.2.1 4脚ロボットとモデル

開発されたロボット (Fig. 4.1A) は胴体と4つの脚からなり, それぞれの脚の3つの関節はサーボモータで駆動される. 脚先には床反力を計測するための3軸力センサが搭載されている. 姿勢センサと加速度センサが胴体の中心につけられており, ロボットのパラメータは Table 4.1 に示される.

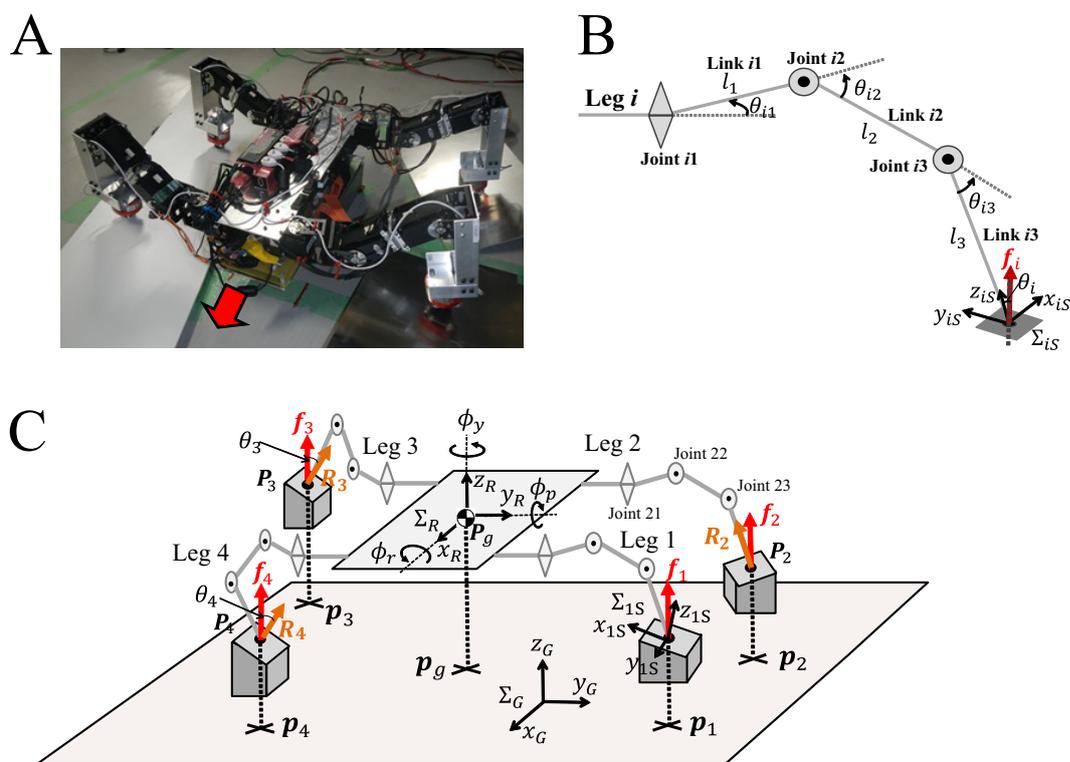


Fig. 4.1: Quadruped robot (A: robot and B,C: model).

Table 4.1: The Parameters of the robot.

Parameters	Value	Parameters	Value
Body width [m]	0.15	Body mass [kg]	4.54
Body length [m]	0.29	Link1 mass [kg]	0.03
Link1 length [m]	0.072	Link2 mass [kg]	0.35
Link2 length [m]	0.109	Link3 mass [kg]	0.25
Link3 length [m]	0.172	Whole mass [kg]	7.06

Fig. 4.1B,Cは、それぞれ脚と前方から見たロボットモデルを表している。胴体と脚のリンクは剛体である。それぞれの脚は、左前から時計まわりに L_1 , L_2 , L_3 , L_4 と呼ぶ。 L_i は根本から順に3つのリンク(リンク $i1, i2, i3$)と関節(関節 $i1, i2, i3$)を持っている。脚 i の関節 $i1$ はヨー軸関節で脚を前後に動かす。関節 $i2, i3$ はピッチ軸関節で脚を上下に動かす。座標系とロボットの変数は以下のように示される (Fig. 4.1B,Cも参照)

- Σ_G : $O_G - x_G y_G z_G$. 環境に固定された基準座標系
 z_G 軸: 重力方向の逆方向
 Σ_R : $O_R - x_R y_R z_R$. ロボットの中心に固定されたロボット座標系
 z_R 軸: ロボットの鉛直上向き方向
 x_R 軸: ロボットの前進方向
 Σ_{is} : $O_{is} - x_{is} y_{is} z_{is}$. L_i の接地点に固定された接地座標系
 z_{is} 軸: 垂直抗力の方向
 x_{is} 軸: 接地面の勾配方向
 M : ロボットの総重量
 g : 重力加速度
 θ_i : z_G 軸と z_{is} 軸の角度 (L_i の接地面の傾斜角)
 \mathbf{r}_R : Σ_R の原点の位置ベクトル
 $\phi_{r,p,y}$: ロボットのロール ϕ_r , ピッチ ϕ_p , ヨー ϕ_y 角
 \mathbf{q}_B : $= [\mathbf{r}_B^T \phi_r \phi_p \phi_y]^T \in R^{6 \times 1}$
 θ_{ij} : 関節 ij の角度
 \mathbf{q}_{Li} : $= [\theta_{i1} \theta_{i2} \theta_{i3}]^T \in R^{3 \times 1}$
 τ_{ij} : 関節 ij のトルク
 $\boldsymbol{\tau}_i$: $= [\tau_{i1} \tau_{i2} \tau_{i3}]^T \in R^{3 \times 1}$
 \mathbf{f}_i : L_i が地面から受ける合力ベクトル
 \mathbf{R}_i : L_i の垂直抗力ベクトル
 \mathbf{P}_g : ロボットの重心の位置ベクトル
 \mathbf{P}_i : L_i の接地点の位置ベクトル
 $\mathbf{p}_g \in R^2$: \mathbf{P}_g を $O_G - x_G y_G$ 平面に射影したベクトル
 $\mathbf{p}_i \in R^2$: \mathbf{P}_i を $O_G - x_G y_G$ 平面に射影したベクトル
 特に表記の無い限り, ベクトルは基準座標系 Σ_G で定義される.

4.2.2 脚探り歩行の戦略

本節では脚探り歩行の戦略について説明する. 初めに対象とする脆弱な環境を定義する. 次に, 脚探り歩行の基本的な戦略を説明し, 最後に, ある1つの脚に対する1周期の脚探り歩行について説明する.

脆弱な環境の定義

本章で対象とするロボットの移動環境は, 建築物が倒壊して瓦礫が散在している環境のように, 外力が加わると破壊や崩壊をまねく可能性がある

脆弱な領域が散在している環境である。このような脆弱な領域について、ある特定の垂直抗力 $R_{\text{break}} \in R^1 (> 0)$ が定義でき、領域にそれ以上の垂直方向の外力がかかると、その領域が崩壊する(つまり、その領域がなくなる)と表現できると仮定する。このような脆弱環境を脚ロボットが歩行する際に、どの足場がロボットの移動にとって危険か否かを判定する必要がある。そのためには、その領域内の環境の形状情報による識別だけではなく、実際に対象領域にある程度の外力を与えて、環境の崩壊の有無を判断する必要がある。ロボットの歩行にとって危険な領域は、 $R_{\text{break}} \leq R_{\text{max}}$ を満たす領域であると定義する。なお、 $R_{\text{max}} \in R^1 (> 0)$ は、1周期歩行(脚探り時は除く)においてすべての脚が受ける垂直床反力の最大値であり、詳細は次節で説明する。単純のために、脚は環境に点接地しており、接地面は垂直抗力を定義できる滑らかな面であるとする。加えて、ロボットは環境の幾何的な形状情報を知っているものとする。

歩行戦略

脆弱な環境において安全な歩行を実現するために、以下の2つの歩行戦略を提案する。

- 1) ロボットが歩行に利用する足場の候補が、ある値 $R_{\text{ref}} \in R^1$ までの外力(足場にかかる垂直方向の力とする)に耐えうるかどうかを調べる。この時、ロボットは仮に足場が崩壊しても転倒しないようにする。
- 2) ロボットが歩行中に受ける脚先の垂直抗力の最大値 R_{max} が、歩行戦略1で設定した R_{ref} 以下になるような歩容で移動する。

特に、歩行戦略1を脚探り動作と呼び、これにより移動に危険な領域を判別する。

脚探り動作は、対象とする領域が崩壊するかどうかを静的に確かめる動作である。具体的には、対象とする領域に脚を接地させた後、脚先が受ける垂直抗力が R_{ref} になるまで徐々に力を加えていく。この時ロボットは4つの脚で接地しているので、この動作で環境が崩壊したとしても、ロボットは残りの3脚で体勢を保つことが出来る。本研究では、脚探り動作中の重心の動きは無視出来るとして定式化を行う。

脚探り動作によって対象領域が崩壊しないことが確かめられたとき、以下の関係が成り立つ。

$$R_{\text{ref}} < R_{\text{break}}. \quad (4.1)$$

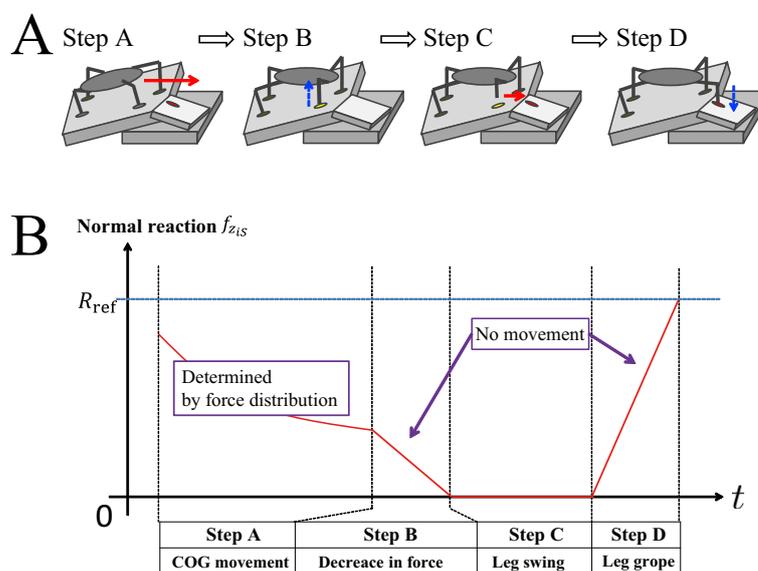


Fig. 4.2: **Process of the leg-grope walk for a right front leg.** **A:** Stick figures of the robot and **B:** Time response of normal reaction of the right front leg. Step A: Robot moves COG standing on four legs. Step B: the robot reduces the force of the groping leg without any movement. Step C: the robot swings the groping leg to the point of the leg-grope. Step D: the robot applies the force to the ground gradually up to R_{ref} .

加えて，歩行戦略2を満たすような歩行を行えば，ロボットは常に体勢を崩すことなく歩行することができる。

脚探り歩行

上述した脚探り動作に基づいて，具体的な1つの脚に対する歩行方法(脚探り歩行)は以下の4つのステップで説明される(Fig. 4.2). Fig. 4.2Aは，右前の脚について脚探りするとき(脚探り脚)の，それぞれのステップA-Dにおけるロボットの状態の概要を示しており，Fig.4.2Bは，それぞれのステップにおける，脚探り脚が環境から受ける垂直抗力の時間遷移を表している。

A 安定な4脚接地状態で重心を移動させる

B 静止した状態で，脚探り脚が地面に及ぼす力を徐々に0にする

C 脚探り脚を脚探りする点に持っていき，脚を接地させる

D 静止した状態で、徐々に R_{ref} の値まで脚探り脚で力を地面にかける(脚探り動作). もし環境が崩壊したとしても、ロボットは他の3つの脚で安定に体勢を保つことができ、ステップCから脚探り動作をやり直すことが出来る.

ロボットが滑らないことと、脚探り抗力 R_{ref} を超える力を環境に加えないことは、力分散手法を用いてすべてのステップで保証されている.

脚探り歩行を行うためには、ステップAで重心を動かせる領域と、ステップDで脚探りできる領域を考えなければならない. さらに、脚先にかける力を分散する方法についても定式化する必要がある.

次節で重心と脚探り点に関する幾何的な領域拘束について説明し、4.2.4節で力分散手法の定式化について説明を行う. 最後に、4.3節でシミュレーションと実験結果について説明する.

4.2.3 脚探りの幾何的領域

本節では、重心と脚探り脚をおくことのできる領域を導出する. 簡単な導出のために、 f_i は重力の方向と平行であると仮定する、つまり、摩擦力は一意に決定される. 脚探り動作は静止して行われるので(Fig. 4.2), 静的なつり合い式のみを考慮する.

力とモーメントのつり合い式

上述した仮定の下、3つの脚 L_i, L_j, L_k が地面に接地している状況(以後 $\Delta(L_i, L_j, L_k)$ と表記する)で、力とモーメントのつり合い式は以下で書ける.

$$\begin{aligned} 1 - h_i - h_j - h_k &= 0, \\ \mathbf{p}_g - h_i \mathbf{p}_i - h_j \mathbf{p}_j - h_k \mathbf{p}_k &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

なお、 $h_n = |\mathbf{f}_n|/Mg$ ($n = 1, 2, 3, 4$)であり、すべての議論が射影平面でできることに注意する. この時、各脚 L_n が環境から受ける垂直抗力の大きさ $R_n = |\mathbf{R}_n|$ と、環境にかける力の大きさ $f_n = |\mathbf{f}_n|$ との関係は、仮定より以下のように表すことができる.

$$R_n = f_n \cos \theta_n. \quad (4.3)$$

よって、垂直抗力 R_{ref} 以上の力をかけて環境が崩壊しないと保証することは、環境の鉛直方向に大きさ $f_{\text{ref}}^n \equiv R_{\text{ref}}/\cos \theta_n$ 以上の力(脚探り力と呼ぶ)をかけて

Table 4.2: The relations of variables h_{ref}^i , h_{ref}^j , h_{ref}^k and $h_{\text{ref}}^{\text{grp}}$ in Fig. 4.3

number	conditions
(a)-(1)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^j \leq 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^k \leq 1, h_{\text{ref}}^k + h_{\text{ref}}^i \leq 1$
(a)-(2)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^j > 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^k \leq 1, h_{\text{ref}}^k + h_{\text{ref}}^i \leq 1$
(a)-(3)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^j \leq 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^k > 1, h_{\text{ref}}^k + h_{\text{ref}}^i \leq 1$
(a)-(4)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^j \leq 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^k \leq 1, h_{\text{ref}}^k + h_{\text{ref}}^i > 1$
(a)-(5)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^j > 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^k > 1, h_{\text{ref}}^k + h_{\text{ref}}^i \leq 1$
(a)-(6)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^j > 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^k \leq 1, h_{\text{ref}}^k + h_{\text{ref}}^i > 1$
(a)-(7)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^j \leq 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^k > 1, h_{\text{ref}}^k + h_{\text{ref}}^i > 1$
(a)-(8)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^j > 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^k > 1, h_{\text{ref}}^k + h_{\text{ref}}^i > 1$
(b)-(1)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^{\text{grp}} < 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^{\text{grp}} < 1$
(b)-(2)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^{\text{grp}} \geq 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^{\text{grp}} < 1$
(b)-(3)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^{\text{grp}} < 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^{\text{grp}} \geq 1$
(b)-(4)	$h_{\text{ref}}^i + h_{\text{ref}}^{\text{grp}} \geq 1, h_{\text{ref}}^j + h_{\text{ref}}^{\text{grp}} \geq 1$

環境が崩壊しないと保証することと同義である． R_{ref} は $Mg/3 \leq f_{\text{ref}}^n \leq Mg$ を満たすように選ばれる．ロボットが静的に3本脚で立っているときの最大床反力は $Mg/3$ より大きい．一方で，脚探り動作でロボットが静的に地面に及ぼすことのできる力の最大値は Mg である．

重心と脚探り点のとりうる領域

重心のとりうる領域は，3脚接地中に，すべての脚先にかかる力の大きさが脚探り力を超えないように選ばれる (Fig. 4.2 のステップ B)．脚探り点のとりうる領域は，脚探り脚の脚先にかかる力の大きさが脚探り力よりも大きく，それ以外の3つの脚の力の大きさが脚探り力より小さくなるように選ばれる．実際には，この3つのうちの1つの脚先にかかる力は0であると仮定する (これを浮遊脚と呼ぶ)．これは，ある脚が浮遊脚であるときに，最大の力を脚探り脚にかけることが出来るからである．

Fig. 4.2 のステップ A において， $\Delta(L_i, L_j, L_k)$ である状況を考え，残りの脚が脚探り脚 L_{grp} であるとする．さらに，一般性を失うことなく，脚 L_k はステップ C (脚探り動作) において浮遊脚であるとする．この状況で，重心と脚探り点のとりうる領域を $O_G - x_G y_G$ 平面で計算する．

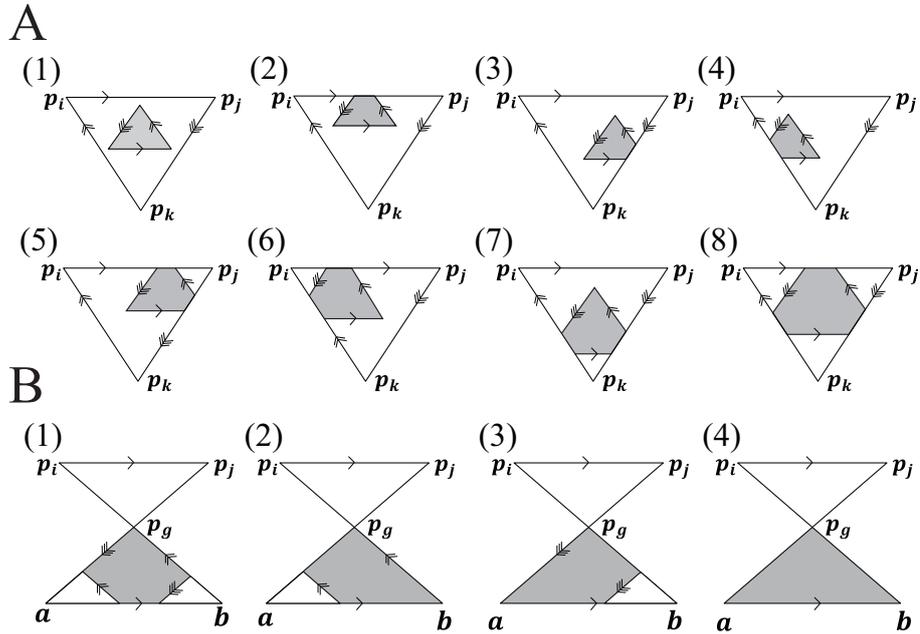


Fig. 4.3: **Admissible region patterns.** **A:** The region for the COG when three legs (position $p_{i,j,k}$) are on the ground and **B:** The region for the groping leg when the COG (position p_g) is fixed on $O_G - x_G y_G$ plane. Admissible regions are colored gray. These patterns are classified depending on the relation of variables h_{ref}^i , h_{ref}^j , h_{ref}^k and $h_{\text{ref}}^{\text{grp}}$ as shown in Table 4.2. On figure **B**, $\Delta p_g p_i p_j$ and $\Delta p_g b a$ are similar and the relation is $(1 - h_{\text{ref}}^{\text{grp}}) |\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_j| = h_{\text{ref}}^{\text{grp}} |\mathbf{p}_g - \mathbf{a}|$.

重心の取りうる領域 $\Delta(L_i, L_j, L_k)$ のとき, 重心の取りうる領域 $\pi_g(L_i, L_j, L_k)$ を計算する. 脚 L_n の力の大きさ f_n は脚探り力 f_{ref}^n より小さくならない:

$$\begin{cases} 0 < h_i \leq h_{\text{ref}}^i \\ 0 < h_j \leq h_{\text{ref}}^j \\ 0 < h_k \leq h_{\text{ref}}^k, \end{cases} \quad (4.4)$$

なお, $h_{\text{ref}}^n \equiv f_{\text{ref}}^n / Mg$ である. これらの拘束式 (4.4)(4.2) より, 重心の射影平面における位置は以下で書ける.

$$\begin{cases} 0 < h_i \leq h_{\text{ref}}^i \\ 0 < h_j \leq h_{\text{ref}}^j \\ 0 < 1 - h_i - h_j \leq h_{\text{ref}}^k, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{p}_g = \{h_i \mathbf{p}_i + (1 - h_i) \mathbf{p}_k\} + h_j (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k). \quad (4.6)$$

(4.5) 式のもとでパラメータ h_i , h_j を変化させることで, 重心の取りうる領域 $\pi_g(L_i, L_j, L_k)$ は (4.6) 式に基づいて計算できる. 領域 $\pi_g(L_i, L_j, L_k)$ は $h_{\text{ref}}^i, h_{\text{ref}}^j, h_{\text{ref}}^k$ の

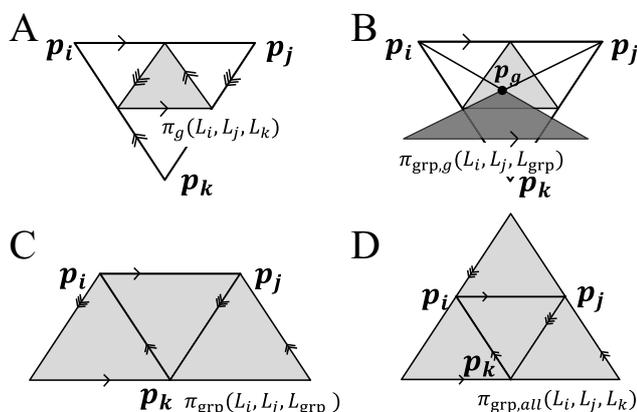


Fig. 4.4: **Process to determine the region where the groping leg can be set.** This figure shows the process in the case ($h_{\text{ref}}^i = h_{\text{ref}}^j = h_{\text{ref}}^k = h_{\text{ref}}^{\text{grp}} = 1/2$) on $O_G - x_{Gy}y_G$ plane. In figure **A**, when three legs (position $\mathbf{p}_{i,j,k}$) are on the ground, the admissible region of COG can be calculated as in the gray triangle, where each top point of the grey triangle is the middle point of the side of $\Delta\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j\mathbf{p}_k$. Then, in figure **B**, the admissible region of the groping leg for fixed COG (position \mathbf{p}_g) and a particular float leg (L_k) can be calculated as in the dark gray triangle, where the dark gray triangle and $\Delta\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j\mathbf{p}_g$ are congruent. In figure **C**, the admissible region of the groping leg for all admissible COG positions (grey triangle in figure **A**) for a particular float leg (L_k) can be calculated as in the gray trapezoid. Finally, in figure **D**, by repeating the same procedure for the other float legs ($L_{i,j}$), the admissible region of groping leg can be calculated as in the gray triangle.

関係 (Table 4.2) に応じて 8 つの幾何形状 (Fig. 4.3A) に分類できる。特定の場合 ($h_{\text{ref}}^i = h_{\text{ref}}^j = h_{\text{ref}}^k = 1/2$) の例として、領域 $\pi_g(L_i, L_j, L_k)$ は Fig. 4.4A の灰色の三角形で示される。

浮遊脚と重心を固定した時に脚探り点の取りうる領域 重心を固定した時の脚探り点の領域 $\pi_{\text{grp},g}(L_i, L_j, L_{\text{grp}})$ を計算する

脚探り動作において、脚 L_k が浮遊脚であるとし、 $\Delta(L_i, L_j, L_{\text{grp}})$ である状態を考える。(4.2) 式から、力とモーメントのつり合いの式は以下で表すことが出来る。

$$\begin{aligned} 1 - \hat{h}_i - \hat{h}_j - h_{\text{grp}} &= 0, \\ \mathbf{p}_g - \hat{h}_i\mathbf{p}_i - \hat{h}_j\mathbf{p}_j - h_{\text{grp}}\mathbf{p}_{\text{grp}} &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

なお、(4.7) 式の変数は以前のものとは区別するために “^” を付けて表した。脚

探り脚の力の大きさ f_{grp} が脚探り力 $f_{\text{ref}}^{\text{grp}}$ より大きく、それ以外の脚の力が $f_{\text{ref}}^{\text{grp}}$ より小さいという条件は以下で書ける。

$$\begin{cases} h_{\text{ref}}^{\text{grp}} \leq h_{\text{grp}} < 1 \\ 0 < \hat{h}_i \leq h_{\text{ref}}^i \\ 0 < \hat{h}_j \leq h_{\text{ref}}^j, \end{cases} \quad (4.8)$$

なお、 $h_{\text{ref}}^{\text{grp}} = f_{\text{ref}}^{\text{grp}}/Mg$ である。(4.7)(4.8)式を使うことで以下を得る。

$$\mathbf{p}_{\text{grp}} = \mathbf{p}_g + \frac{\hat{h}_i}{1 - \hat{h}_i - \hat{h}_j}(\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_i) + \frac{\hat{h}_j}{1 - \hat{h}_i - \hat{h}_j}(\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_j), \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{\hat{h}_i}{1 - \hat{h}_i - \hat{h}_j} \leq \frac{h_{\text{ref}}^i}{h_{\text{ref}}^{\text{grp}}} \\ 0 < \frac{\hat{h}_j}{1 - \hat{h}_i - \hat{h}_j} \leq \frac{h_{\text{ref}}^j}{h_{\text{ref}}^{\text{grp}}}. \end{cases} \quad (4.10)$$

(4.9)(4.10)式であらわされる領域 $\pi_{\text{grp},g}(L_i, L_j, L_{\text{grp}})$ は、 $h_{\text{ref}}^i, h_{\text{ref}}^j, h_{\text{ref}}^{\text{grp}}$ の関係 (Table 4.2) に応じて4つの幾何形状 (Fig. 4.3B) に分類される。特定の場合の例においては、固定された \mathbf{p}_g に対して、領域 $\pi_{\text{grp},g}(L_i, L_j, L_{\text{grp}})$ は濃い灰色の三角形 (Fig. 4.4B) であらわされる。

特定の浮遊脚に対して脚探り点の取りうる領域 浮遊脚 L_k に対して、脚探り点の取りうる領域 $\pi_{\text{grp}}(L_i, L_j, L_{\text{grp}})$ を計算する。領域は、 $\pi_g(L_i, L_j, L_k)$ 内のすべての \mathbf{p}_g に対して、 $\pi_{\text{grp},g}(L_i, L_j, L_{\text{grp}})$ の和を取ることで得られる。特定の場合の例において、 π_{grp} は灰色の台形 (Fig. 4.4C) であらわされる。

脚探り点の取りうる領域 ここまで、浮遊脚 L_k に対して脚探り点の取りうる領域を計算してきたが、ここでは脚 L_i と L_j に関しても同様の計算を行う。脚探り点の取りうる領域 $\pi_{\text{grp},\text{all}}(L_i, L_j, L_k)$ は、3つの浮遊脚に対する π_{grp} の和を取ることで得られる。特定の場合の例において、 $\pi_{\text{grp},\text{all}}$ は灰色の三角形 (Fig. 4.4D) によってあらわされる。

以上の議論から、脚探り点は領域 $\pi_{\text{grp},\text{all}}$ 内で選ばれ、重心位置は脚探り点を脚探りできるように領域 π_g 内で選ばれる。実用的には、モデル化誤差や脚探り時の重心の移動を考慮して、脚探り点や重心位置はそれぞれの領域の内部で(境界から離れて)選ばれる。

4.2.4 力分散手法

本章では，前節の幾何的領域に基づき，滑りを考慮した力分散問題の定式化を行う．

ロボットダイナミクス

ロボットの胴体と脚の運動方程式は以下のようにあらわされる．

$$M_B(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}_B(\mathbf{q}) + J_B \mathbf{f} = \mathbf{0} \in R^{6 \times 1} \quad (4.11)$$

$$M_L(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}_L(\mathbf{q}) + J_L \mathbf{f} = \boldsymbol{\tau} \in R^{12 \times 1} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{q} := [\mathbf{q}_B^T \ \mathbf{q}_{L1}^T \ \mathbf{q}_{L2}^T \ \mathbf{q}_{L3}^T \ \mathbf{q}_{L4}^T]^T \in R^{18 \times 1}$$

$$\mathbf{f} := [\mathbf{f}_1^T \ \mathbf{f}_2^T \ \mathbf{f}_3^T \ \mathbf{f}_4^T]^T \in R^{12 \times 1}$$

$$\boldsymbol{\tau} := [\boldsymbol{\tau}_1^T \ \boldsymbol{\tau}_2^T \ \boldsymbol{\tau}_3^T \ \boldsymbol{\tau}_4^T]^T \in R^{12 \times 1}$$

$M_B(\mathbf{q})$: 胴体の慣性行列 [6 × 18]

$M_L(\mathbf{q})$: 脚の慣性行列 [12 × 18]

$\mathbf{h}_B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: 胴体のコリオリ項 [6 × 1]

$\mathbf{h}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: 脚のコリオリ項 [12 × 1]

$\mathbf{g}_B(\mathbf{q})$: 胴体の重力項 [6 × 1]

$\mathbf{g}_L(\mathbf{q})$: 脚の重力項 [12 × 1]

J_B : 胴体のヤコビ行列 [6 × 12]

J_L : 脚のヤコビ行列 [12 × 12]

脚が特異姿勢 ($\theta_{i3} = n\pi$, n は整数) にない限り， J_L は正則行列である．脚探りの幾何的関係を満たし，かつ特異姿勢にならないようにロボットの運動が設定されているとする．つまり， $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ が時間関数として与えられているとする．この時，上記の運動方程式は以下で書ける．

$$\mathbf{b} = A\boldsymbol{\tau} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{f} = J_L^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_o), \quad (4.14)$$

なお， $\mathbf{b} \in R^{6 \times 1}$, $A \in R^{6 \times 12}$, $\boldsymbol{\tau}_o \in R^{12 \times 1}$ は (4.11)(4.12) 式と設定された $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ から計算される． $\boldsymbol{\tau}$ は 12 個の要素を持ち，6 つの線形等式拘束を満たす ((4.13) 式)．これは力とモーメントのつり合い式に対応する．一方， $\boldsymbol{\tau}$ は (4.14) 式で書かれるように，力ベクトル \mathbf{f} と一対一対応する．よって，それぞれの時間ステップにおいて，6 つの等式拘束 (4.13) と，脚探りのための拘束，滑らないための拘束を満たすような最適な $\boldsymbol{\tau}$ を決定する必要がある．

これまでに、さまざまな力分散手法が提案されてきた。例えば、疑似逆行列を用いた方法 [88] や、線形計画法 (LP 法) [86]、二次計画法 (QP 法) [100, 101] を用いた手法などである。本章では、不等式拘束と2次の評価関数を扱うために、標準的な二次計画法を用いる。

拘束式

滑らないための不等式拘束 接地している脚 L_i に対して、脚先の力の鉛直成分は以下の不等式拘束を満たす:

$${}^iS f_{iz} \geq 0, \quad (4.15)$$

また、水平方向の力成分は、滑らないために以下の不等式拘束を満たせばよい:

$$\sqrt{({}^iS f_{ix})^2 + ({}^iS f_{iy})^2} \leq \mu |{}^iS f_{iz}|, \quad (4.16)$$

なお、 μ は静止摩擦係数であり、 $({}^iS f_{ix}, {}^iS f_{iy}, {}^iS f_{iz})$ は f_i の Σ_{iS} における各成分である。二次計画法を適用するために、(4.16) 式は、以下の線形不等式拘束 (過制約条件) に書き換えられる。

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{\sqrt{2}} {}^iS f_{iz} - \frac{1}{\sqrt{2}} {}^iS f_{ix} - \frac{1}{\sqrt{2}} {}^iS f_{iy} &\leq -s, \\ -\frac{\mu}{\sqrt{2}} {}^iS f_{iz} + \frac{1}{\sqrt{2}} {}^iS f_{ix} + \frac{1}{\sqrt{2}} {}^iS f_{iy} &\leq -s, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{\sqrt{2}} {}^iS f_{iz} + \frac{1}{\sqrt{2}} {}^iS f_{ix} - \frac{1}{\sqrt{2}} {}^iS f_{iy} &\leq -s, \\ -\frac{\mu}{\sqrt{2}} {}^iS f_{iz} - \frac{1}{\sqrt{2}} {}^iS f_{ix} + \frac{1}{\sqrt{2}} {}^iS f_{iy} &\leq -s, \end{aligned} \quad (4.18)$$

なお、滑りにくさ指標 $s > 0$ を定義した。この値は、摩擦制約の境界からどれだけ余裕があるかを示しており、最大化することで滑りにくさを担保できる。

脚探りのための拘束 垂直抗力が R_{ref} を超えないことを保証するために、以下の不等式拘束をそれぞれの接地脚 L_i に対して課す。

$${}^iS f_{iz} \leq R_{\text{ref}} \quad (4.19)$$

加えて、脚探り脚 L_k に対する脚探り歩行のステップ B において、 ${}^kS f_{kz}$ は Fig. 4.2B のように線形に 0 に向かっていくように拘束する。ステップ D においては、Fig. 4.2B のように、 ${}^kS f_{kz}$ は R_{ref} まで線形に増加するように拘束する。これ

まで、力ベクトル f_i が重力方向と平行と仮定したうえで、脚探りの拘束を満たすための幾何的關係式を導出してきた。よって、少なくとも f_i が重力方向になるように力分散することで、脚探り脚の垂直抗力は R_{ref} を実現できる。

最小化する関数

これらの等式拘束と不等式拘束に基づいて、 τ に s を加えたものを操作量 $\hat{\tau}$ としてやれば、二次計画問題の概要はそれぞれのステップ $i(i=A, B, C, D)$ で以下のように得られる。

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} \tau \\ s \end{bmatrix}_{13 \times 1}, \quad \hat{b}_i = \hat{A}_i \hat{\tau}, \quad \hat{G}_i \hat{\tau} \leq \hat{d}_i, \quad (4.20)$$

なお、 \hat{A}_i と \hat{b}_i は等式拘束(4.13)と脚探りのための等式拘束を表している。 \hat{G}_i と \hat{d}_i はここまでで議論した不等式拘束をまとめて表している。これらの行列とベクトルは、設定された (q, \dot{q}, \ddot{q}) を用いて表される。

最小化される関数は3つの項から構成される。

$$\Phi(\hat{\tau}) = C\hat{\tau} + \frac{1}{2}\hat{\tau}^T W_\tau \hat{\tau} + \frac{1}{2}(\hat{\tau} - \hat{\tau}_b)^T W_c (\hat{\tau} - \hat{\tau}_b) \quad (4.21)$$

$$C = [\mathbf{0}_{1 \times 12} \mid h_s]_{1 \times 13}$$

$$W_\tau = \begin{bmatrix} \text{diag}[h_{\tau 1}, h_{\tau 2}, \dots, h_{\tau 12}] & \mathbf{0}_{12 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 12} & 0 \end{bmatrix}_{13 \times 13} \quad (4.22)$$

$$W_c = \begin{bmatrix} \text{diag}[h_{c1}, h_{c2}, \dots, h_{c12}] & \mathbf{0}_{12 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 12} & 0 \end{bmatrix}_{13 \times 13}$$

なお、 τ_b は以前の時間ステップにおける入力トルクベクトルである。 C は滑りにくさ指標 s を最大化するための重みベクトルであり、 W_τ はトルクのノルムを最小化するための重み行列、 W_c はトルクの連続性を評価するための重み行列である。 $h_s < 0, h_{\tau 1 \dots 12} > 0, h_{c 1 \dots 12} > 0$ であり、 W_τ と W_c は正定行列である。

二次計画法を各時間ステップで解くことにより、関節への入力トルクが計算される。このトルクを用いて制御すれば、脚先の力を最適に分散することが出来る。力分散手法のシミュレーション結果は次の節で示される。

4.3 結果と議論

4.3.1 シミュレーション

力分散手法のシミュレーション結果について示す。

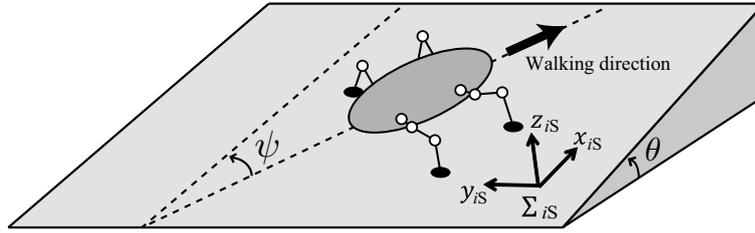


Fig. 4.5: **Definition of the environment where the robot walks in the simulation.** The robot walks on a simple slope whose inclination angle is θ . The angle between the walking direction and the gradient vector of the slope is defined as ψ .

設定

本シミュレーションでは，ロボットは様々な斜面を様々な方向に脚探り戦略を用いて1周期分歩行する．斜面の傾斜角と歩く方向は $\theta[\text{rad}]$ と $\psi[\text{rad}]$ であらわされる (Fig. 4.5)．様々な $\theta = (-\pi/2, \pi/2)$ と $\psi = [-\pi/2, \pi/2]$ に対して，脚探り歩行の力分散問題を解く．なお，脚探りのための設定パラメータは以下で説明する．

脚探りのための幾何的關係の設定 脚探り抗力は，傾斜角 θ に応じて $R_{\text{ref}} = \frac{1}{2}Mg \cos \theta$ と設定する．ロボットは説明した脚探り手法を用いて，4つの脚 L_2, L_1, L_3, L_4 を順に動かす．それぞれの脚探り脚の接地点と重心の位置はFig. 4.6のように $O_G - x_G y_G$ 平面上であらわされる．

力分散手法のための設定 ロボットと脚の運動を，上述した幾何的關係を満たすように設計する．なお，胴体の運動の最大加速度と速度はそれぞれ $a_{\text{max}} = 0.15 [\text{m/s}^2]$ と $v_{\text{max}} = 0.1 [\text{m/s}]$ で設定し，胴体は斜面に対して常に平行であるような運動を設計した．

力分散問題の評価関数のパラメータは， $h_s = -2, h_{\tau 1 \dots 12} = 1, h_{c 1 \dots 12} = 80$ と設定した． $-h_s$ と $h_{\tau 1 \dots 12}$ が大きくなれば，それぞれ滑りにくさとエネルギー効率が良くなるが，脚が接地・離地した時の入力トルクの変化が急激になる． $h_{c 1 \dots 12}$ が大きくなると，入力トルクの変化が滑らかになる．本シミュレーションでは，滑らかなトルク変化を得るために， $h_{c 1 \dots 12}$ に大きな値を設定した．

環境の静止摩擦係数と時間ステップは， $\mu = 0.45, dt = 15 [\text{ms}]$ とそれぞれ設定した．コンピュータ (CPU: Core i7 4 GHz; Memory: 16 GB) で MATLAB の “quadprog” 関数を用いて力分散の計算を行った．

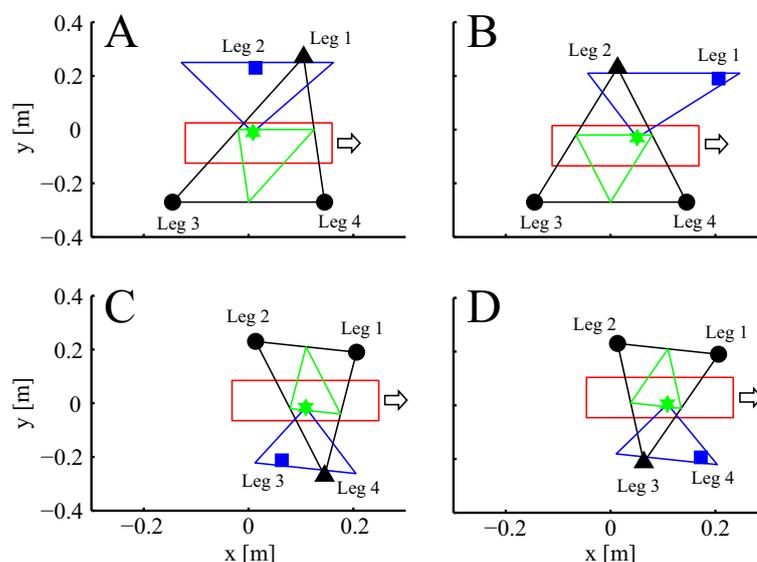


Fig. 4.6: **Geometrical relations of leg-grope for the simulation and experiments.** Each figure shows the relation in the case of the groping leg **A**: L_2 , **B**: L_1 , **C**: L_3 and **D**: L_4 on $O_G - x_G y_G$. For one walking cycle, the robot moves its COG and swings four groping legs L_2 , L_1 , L_3 and L_4 in sequence by following these geometrical relations. In each graph (**A-D**), an arrow and a red rectangle represent the moving direction of the robot and the shape of the robot body, respectively. The blue square point is the targeted point of the groping leg, and the other three points (two black circles and black triangle) represent the contact points of the other three legs. The biggest black triangle region represents the supporting leg polygon, except for the groping leg. The green triangle region represents the admissible region of the COG π_g , and the green asterisk point represents the targeted position of the COG. The blue triangle region represents the admissible region of the position of the groping leg for the COG $\pi_{grp,g}$, where the float leg is shown by the black triangle point.

結果

斜面の傾斜角 θ がおよそ $0.40[\text{rad}]$ 以下であれば、すべての進行方向 ψ で矛盾なく力分散を実現できた。傾斜角が閾値以上の値になると、ロボットは滑りを防ぎきれず、力分散に失敗した。

剛体が斜面上で静止しているときに、滑らずに静止できる最大の傾斜角は $\theta = \arctan(\mu) = 0.42[\text{rad}]$ で計算される。この値は前述した閾値の値とほぼ一致するため、提案した力分散手法が妥当であったことが分かる。実際には、ロボットは加速度を持っているので、傾斜角の閾値は静的な場合より小さく

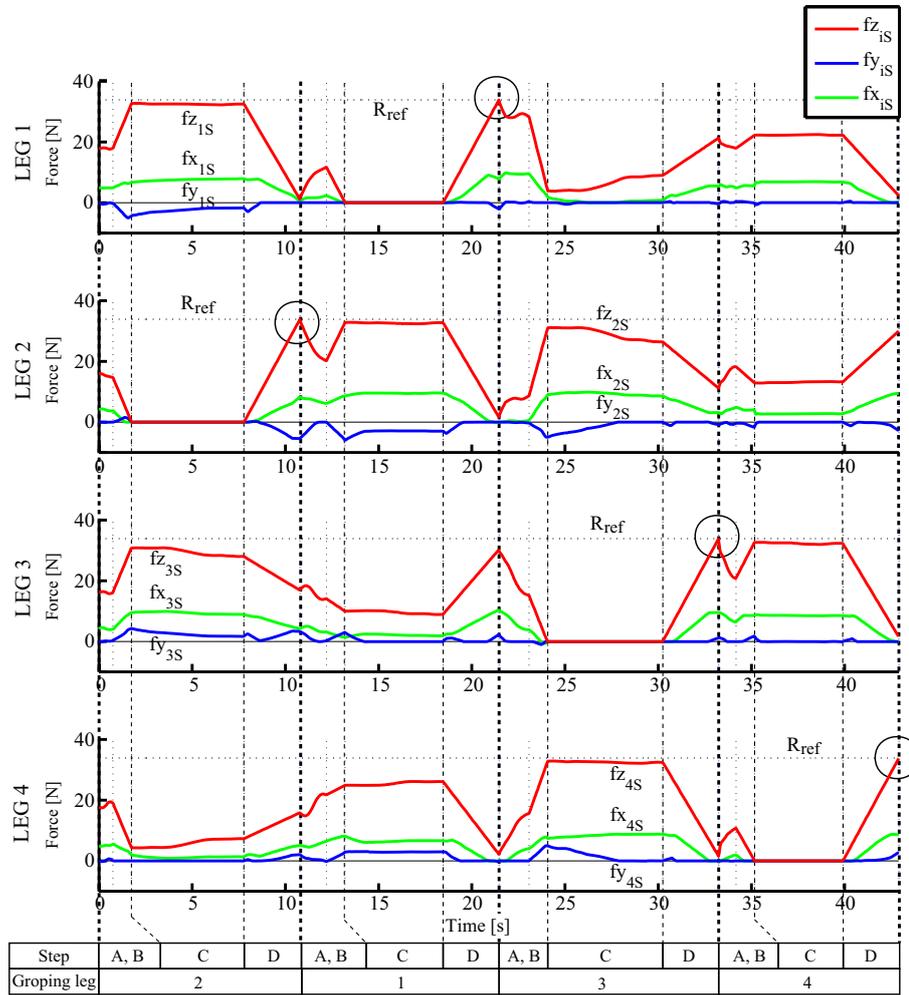


Fig. 4.7: Time response of the force distributions on Σ_{iS} of the simulation. Each leg applies normal reaction R_{ref} in the leg-grope movement as marked with the black circles. Aside from that, each normal reaction is less than R_{ref} . The red line, the blue line and the green line represent the z_{iS} , y_{iS} and x_{iS} elements of the force with respect to Σ_{iS} , respectively. Each dotted horizontal line represents R_{ref} .

なっている。また、2次計画法を計算するのにかかる時間は、ロボットの1周期歩行の実時間よりも短い。

1周期の脚探り歩行の一例 $((\theta, \psi) = (\pi/12, 0))$ の場合として、Fig. 4.7に Σ_{iS} での f_i の時間発展を示す。なお、水平鎖線は R_{ref} を示している。時間とともに、ロボットは重心を4脚接地して移動させて、脚探り脚にかかる力を減らしていく(ステップA,B)。その後、脚さぐり脚を浮かせて脚探り点に移動させ(ス

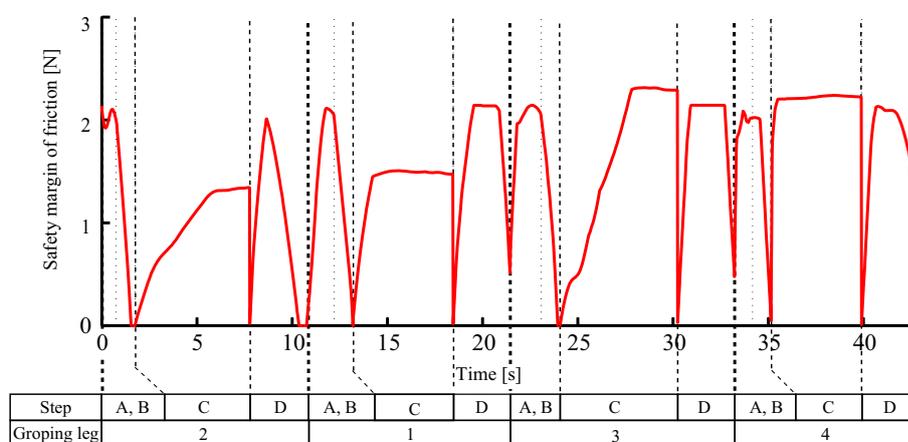


Fig. 4.8: Time response of the safety margin of the friction s of the simulation. The value is never less than 0, which means that distributed forces prevent slippage successfully.

テップC), 力をかけて脚探りを行う(ステップD). この脚探り歩行を4つの脚についてそれぞれ繰り返す. 脚探り時(ステップD)において, ロボットは R_{ref} 分の力を地面に垂直に及ぼしている(Fig. 4.7の黒丸), 一方で, それ以外の状況においては, 垂直抗力の大きさは R_{ref} よりも小さい. さらに, Fig. 4.8は滑りにくさ指標 s の時間発展を表しており, s は負の値をもたないことが分かる. つまり滑りは起きていない. Fig. 4.9は入力トルクの時間依存を表している. 入力トルクは評価関数で設定したように, 時間に対して滑らかに変化している. 以上より, 提案する脚探り歩行を実現するトルク入力を計算できていることが分かる.

4.3.2 実機実験

設定

提案手法の有効性を評価するために, 実環境においていくつかの実験を行った. 実ロボットの関節は位置制御のサーボモータで構成されるため, 力分散手法の結果は使うことが出来ない. そこで, 摩擦に対する仮定のもとで導いた幾何的な関係のみを考慮して, 脚探り歩行を実機で行う. そのため, 実機実験での脚探り動作(ステップD)は2つのステップで置き換えられる: ステップD'-1, D'-2(以下で説明)実機実験での脚探り歩行は以下の5ステップで構成される.

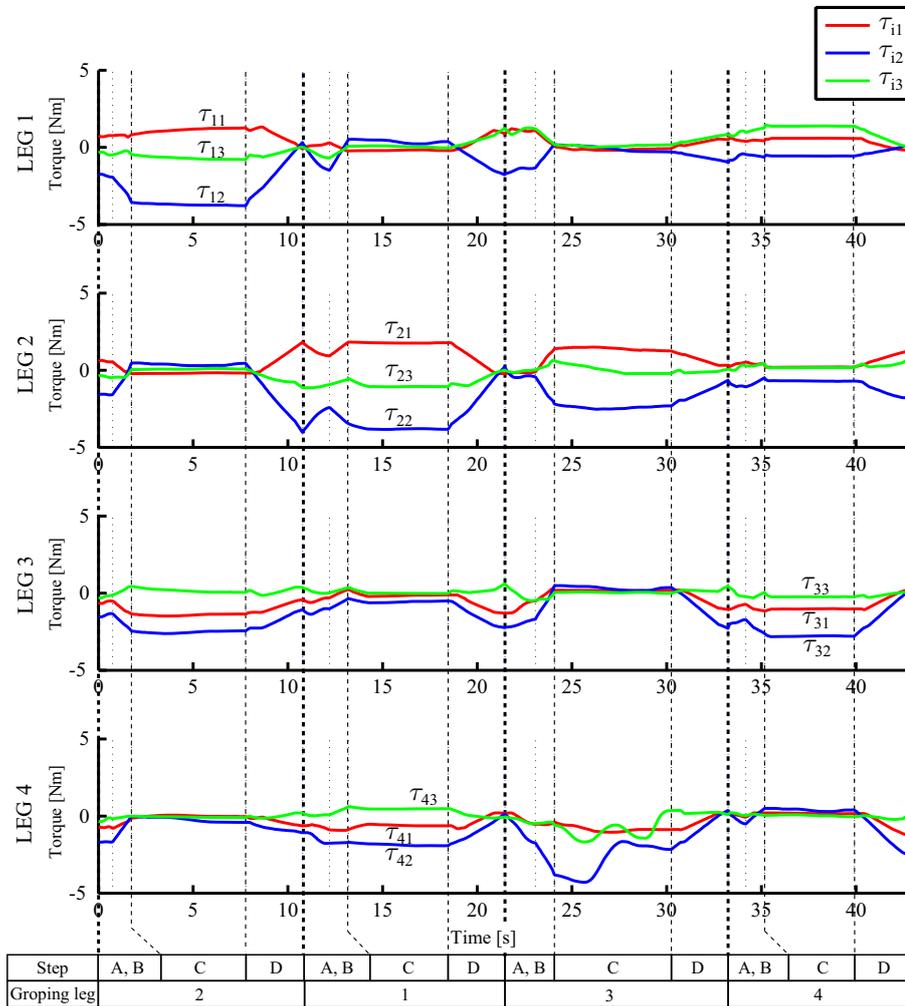


Fig. 4.9: Time response of the torque inputs of the simulation. The value changes smoothly.

A' 4脚接地状態で重心の位置を移動させる．移動先の重心位置は脚探り時の重心位置とは異なる(支持脚多角形のより内側).

B' 脚探り脚の脚先を，抗力が0になるまで徐々に持ち上げる．

C 脚探り脚を浮かせて脚探り点に移動させ，脚を接地させる．

D'-1 4脚接地状態で重心を脚探り時の重心位置に移動させる．結果，脚探り脚の抗力が徐々に増加する．

D'-2 脚探り脚の脚先を，垂直抗力の値が R_{ref} を超えるまで徐々に下げていく．

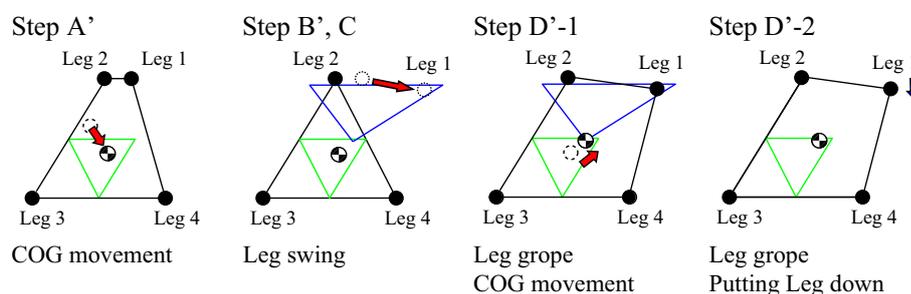


Fig. 4.10: **Process of the leg-grope walk for the leg 1 on $O_G - x_G, y_G$ for experiments.** The black circles are the contact points of the leg toe. The green triangle and blue triangle represent the admissible region of the COG and the groping leg, respectively. Step A': The robot moves the COG inside of the admissible region of the COG while standing on four legs. Step B', C: the robot moves the groping leg up and swings it to the point of the leg-grope, and the leg touches down. Step D'-1: the robot moves the COG to the position for the leg-grope. Step D'-2: the robot pushes the groping leg down gradually until the normal reaction is over R_{ref} .

Fig. 4.10にこの脚探り歩行の例を示す. ステップA', D'-1に修正したことで, ロボットは遊脚時の重心位置を支持脚多角形のより内側に出来る. なお, ステップB', D'-1, 2では, ロボットは位置制御で環境に力をかけている.

この方法を用いて, 単純な斜面とランダムな斜面上で, 1周期の脚探り歩行を行った. また, 足場が崩壊してもロボットが体勢を崩さないことを確認するために, 足場が脆弱な環境における実験も行った. それぞれの環境に対して3回実験を行い, 典型的な1つを結果として示している. 実験のパラメータは, 斜面の傾斜角 $\pi/12$ [rad], 脚探り抗力 $R_{\text{ref}} = \frac{1}{2}Mg \cos(\pi/12)$ と設定し, 脚探りの幾何的關係は, シミュレーションと同様に Fig. 4.6に従った.

斜面における歩行結果

シミュレーションと同様に, ロボットが斜面を脚探り歩行でのぼる実験を行った ($\theta = \pi/12, \psi = 0$ [rad]). Fig. 4.11は, 1周期歩行の Σ_{is} における f_i の各成分の時間依存を表しており, 表記の仕方は Fig. 4.7と同じである. シミュレーション結果 (Fig. 4.7) と同様に, 脚探り時 (ステップD') において, ロボットは R_{ref} 以上の力を地面に垂直に及ぼしている (Fig. 4.11の黒丸), 一方で, それ以外の状況においては, 垂直抗力の大きさは R_{ref} よりも小さい. よって, 斜面上での脚探り歩行の妥当性は示された.

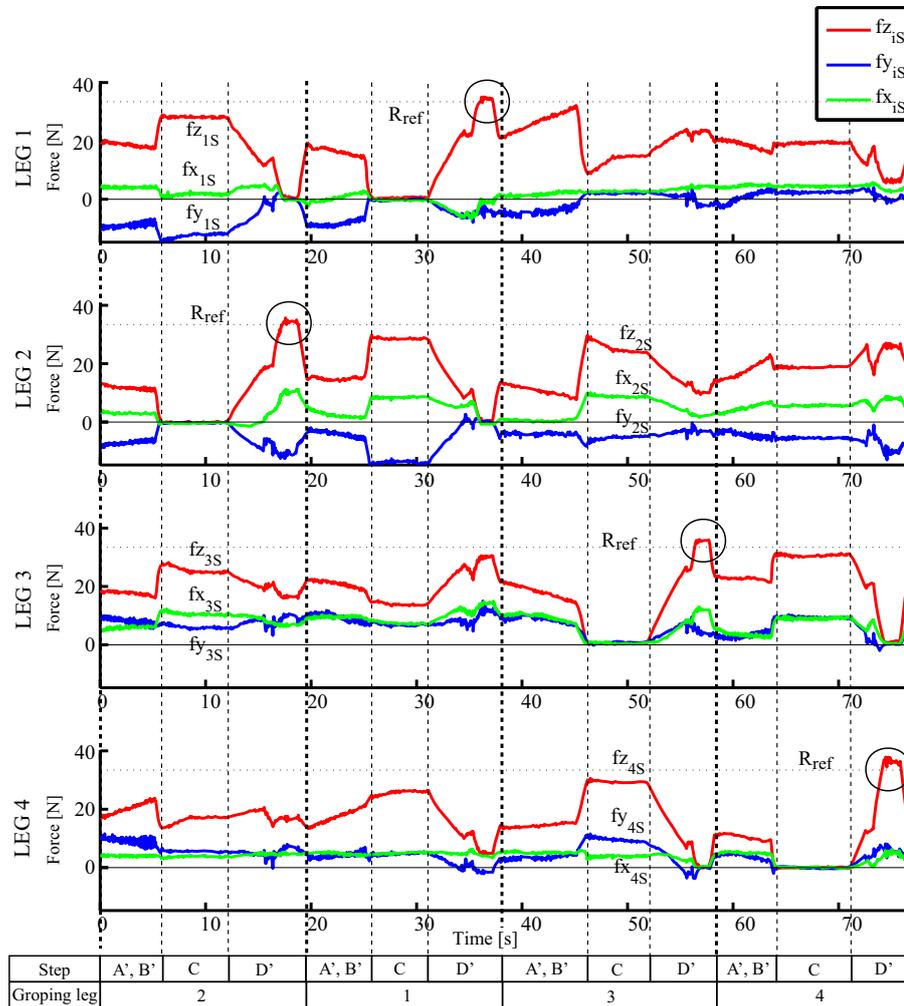


Fig. 4.11: Time response of the resultant forces of the experiment on the simple slope. Each leg applies normal reaction over R_{ref} in the leg-grope movement as marked with the black circles. Aside from that, each normal reaction is less than R_{ref} . The red line, the blue line and the green line represent the z_{iS} , y_{iS} and x_{iS} elements of the resultant force with respect to Σ_{iS} , respectively. Each dotted horizontal line represents R_{ref} .

ランダム斜面における歩行結果

環境は傾斜角 $\theta = \pi/12[\text{rad}]$ の傾斜方向が異なる斜面から構成される (Fig. 4.1A). Fig. 4.12 は, 1 周期歩行の Σ_{iS} における f_i の各成分の時間変化を表しており, 表記の仕方は Fig. 4.7 と同じである. 斜面の場合と同様に, 脚探り時 (ステップ D') において, ロボットは R_{ref} 以上の力を地面に垂直に及ぼしている

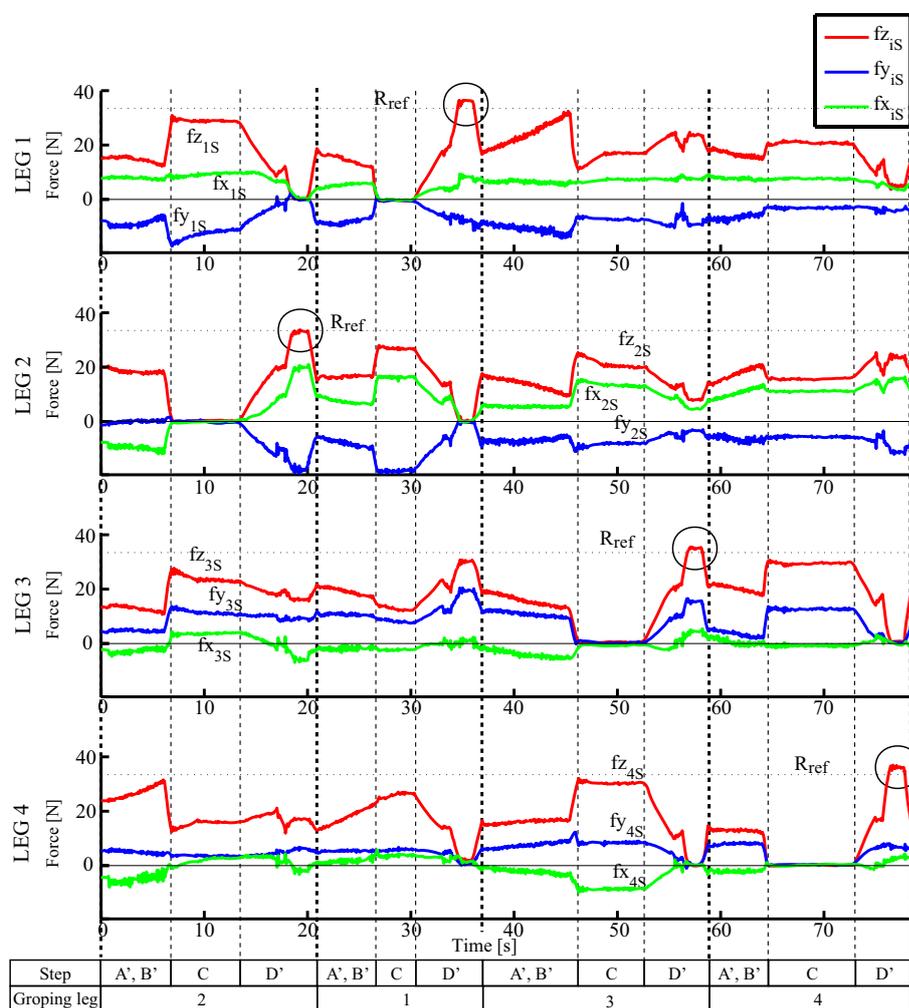


Fig. 4.12: Time response of the resultant force of the experiment on the irregular slope. Each leg applies normal reaction over R_{ref} in the leg-grope movement as marked with the black circles. Aside from that, each normal reaction is less than R_{ref} . The method of representation is the same as in Fig. 4.11.

(Fig. 4.12の黒丸), 一方で, それ以外の状況においては, 垂直抗力の大きさは R_{ref} よりも小さい. よって, ランダム斜面上での脚探り歩行の妥当性も示された.

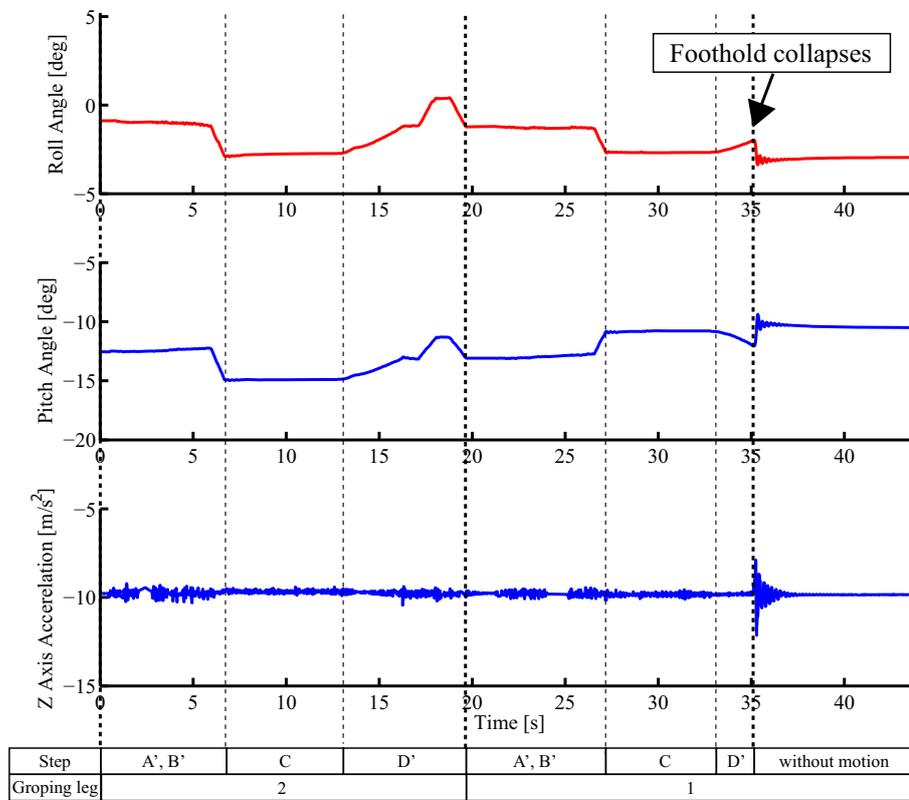


Fig. 4.13: Time responses of attitudes and z_R -axis acceleration in the case of foothold collapse. The robot keeps its attitude angles (roll and pitch angle) and never stumbles when and after the foothold of leg L_1 collapses.

脆弱な環境における歩行結果

斜面環境($\theta = \pi/12, \psi = 0$ [rad])において, 脚 L_1 の足場が脆弱である場合を考える. なお, 本実験では, 足場の崩壊の判別とともに歩行をやめるものとした. Fig. 4.13 は, 姿勢(ロール, ピッチ)と鉛直方向(z_R 軸)の加速度の時間変化を表している. 矢印で示された時間(35[s] 付近)において, 脚 L_1 の足場が崩壊する. それに伴うロボットの姿勢変化はたかだか2度程度で, 環境崩壊後も体勢を崩さない. Fig. 4.14 は Σ_{is} における f_i の各成分の時間変化を表している. 環境の崩壊したあたりで, 脚 L_2 の垂直床反力が R_{ref} を一瞬超えている (Fig. 4.14 の青丸)が, それ以外はこれまで同様の望ましい傾向を示している. ロボットの脚は完全な剛体ではない(関節のバックラッシュ, 関節のPD制御のコンプライアンスなど)ので, 足場が突然に崩壊すると, 胴体の姿勢が急激に変化する. この姿勢変化によって, 鉛直方向に無視できない加速度が生

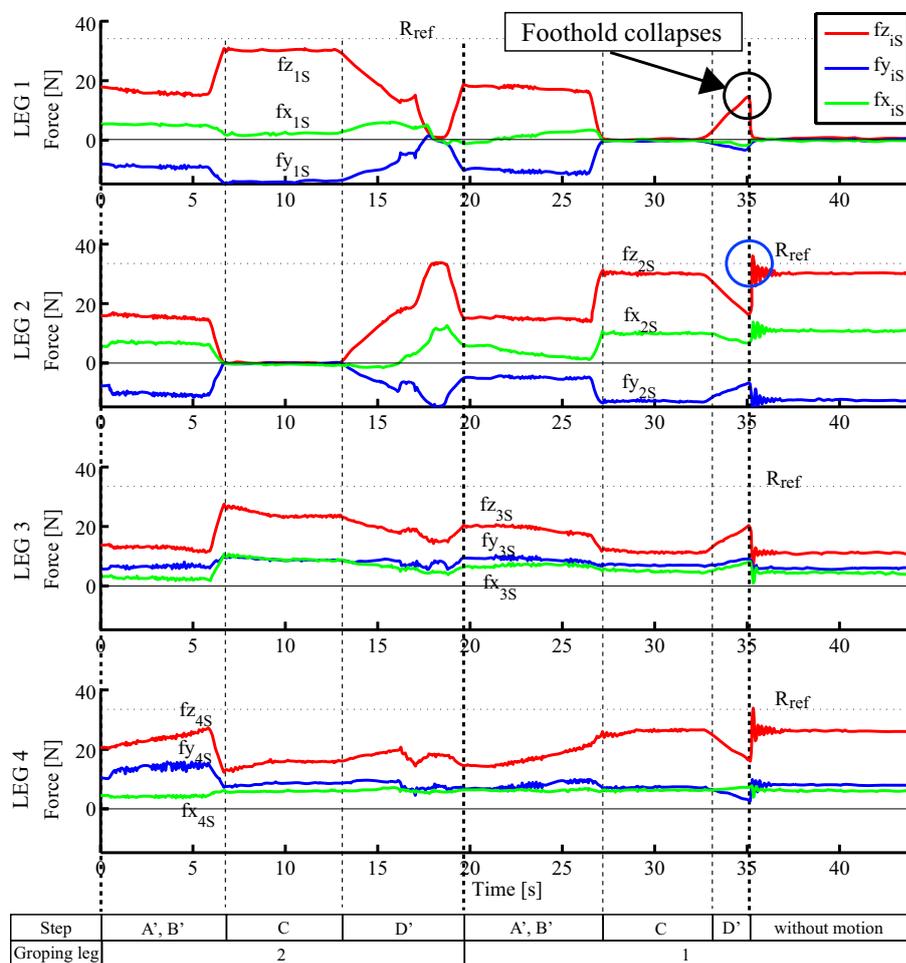


Fig. 4.14: Time response of the resultant force in the case of foothold collapse. When the foothold of leg L_1 collapses, the ground reaction becomes zero, as shown with the black circle. Conversely, the normal reactions of the other legs are still less than R_{ref} after the collapse, except for the impulse as shown with the blue circle. The method of representation is the same as in Fig. 4.11.

まれ，垂直抗力が R_{ref} を超える (Fig. 4.13)。このようなロボットの設計に起因する限界はあるものの，脚探り歩行でロボットは体勢を崩すことなく歩くことができる。

4.4 結論

本章では，滑りを考慮した脆弱な環境における脚探り歩行を力分散を用いて提案した．シミュレーションによって，滑りを考慮して適切に力を分散できるトルク入力の実現できることが示された．さまざまなロボット実験を行い，この手法の有効性が示された．ロボットは足場を確かめながら安定に歩くことができ，足場が崩壊したとしても，ロボットは姿勢を保ってこけることはない．よって，脆弱な不整地において安全に歩行するための有用な手法が提案できた．

限界として，摩擦制約を満たすことは保証したが，滑りによって足場が崩壊する場合については考慮できていない．また，ロボットの関節は位置制御でコントロールされていたので，力分散手法はロボットで実現できていない．よって，我々はロボット実験を摩擦についての仮定の下で行った．にも関わらず，本手法の妥当性は仮定のもとでも示された．今後，我々は関節がトルク入力によって制御できるロボットを作り，力分散手法の有効性を示す必要がある．

実用的には，本手法は静的なつり合い式の上で定式化したので，ロボットは早く歩行することはできない．近年の動的な歩行方法 [1, 102, 103, 104, 105] と比べると，本手法は歩行速度の点で劣る．しかし，がれきが散在するような脆弱な環境において，本手法は有用である．本手法は，垂直抗力をできるだけ小さくして，かつ安全に歩くための唯一の方法である．LittleDog [93, 94, 95] で実装されたように，実際にはロボットは環境に合わせて歩行方法を選択するのが重要だと考えられる．

この手法と環境の分類手法 [96] を組み合わせるのも今後の重要な課題である．例えば，脚探りで脆弱であると分かった環境を教示データとして，環境を視覚情報をもとに分類するのは今後の興味深いテーマである．

第5章

結論と今後の展望

5.1 結論

本論文では，昆虫や多足生物を対象にして，センサフィードバックの歩容生成に対する影響を明らかにした．特に，単に現象の確認にとどまらず，影響の解析的表現を通して背景の数理メカニズムについても明らかにした．さらに，その応用例として，感覚情報を用いたロボットの歩行方法の提案を行い，これまで適応不可能であった環境における安全な歩行が実現された．

第2章では，昆虫(ナナフシのような生物)の歩容生成におけるセンサフィードバックの影響を解析した．シミュレーションとロボットを用いた実験を行い，遊脚が前に進んでいく昆虫のような歩容(進行波歩容)と，後ろに進んでいく歩容(後退波歩容)がセンサフィードバックの効果により創発することを示した．さらに，シンプルモデルを用いた解析の結果，胴体の回転を通じた歩容生成メカニズムが明確にされた．また，シンプルモデル解析にあたり用いた仮定により，本現象がoccurする範囲が明確になった．このようなメカニズムを解析的に表現して明らかにした研究は，本研究が初めてである．

第3章では，前章で得られた進行波・後退波の数理構造をより明確にするため，多足生物(ヤスデのような生物)の歩容生成におけるセンサフィードバックの影響を解析した．シミュレーションを用いた解析を行い，ヤスデやムカデに似た進行波，後退波をもつ歩容が創発することを示した．さらに，ヤスデで観測例のある，進行波と後退波が共存するような現象(わきだし波)も確認された．これらの数理メカニズムは解析的表現を用いて明確にされ，脚数によらずにおこる現象であることが示された．

第4章では，センサフィードバックを用いたロボットの設計例として，感覚情報を用いた脆弱な不整地における4脚ロボットの歩行方法を提案した．感覚情報を用いることで，これまで適応不可能であった環境における安全な歩行方法が提案できた．この手法の妥当性は，シミュレーションと実機実験によって示された．

5.2 今後の展望

本研究の前半(2章と3章)では, 生物の制御系の分散的な構造に着目し, 以下のようにシステムを限定してセンサフィードバックの歩容生成への影響を議論した.

1. 平地(均一な環境)における歩容生成を対象とした
2. 静的な運動(昆虫, 多足生物の運動)を対象とした

結果, センサフィードバックが歩容生成に及ぼす影響をシンプルモデルを用いて解析的に明らかにし, その歩容が生成されうる範囲が明確になった.

しかし, センサフィードバックを用いたロボットの適応的な歩行方法の設計論という視点では, 均一な環境で歩容が生成できるだけでは不十分である. センサフィードバックの適応的な歩行に対する影響を解析するためには, 環境が変化する場合(不均一な環境(不整地))や, 胴体に変化する場合(脚がなくなる場合など)における運動を分析する必要がある. また, 生物におけるセンサフィードバックの役割は, 運動が動的か静的かに応じて異なっていることが示唆されており[12], 動的な運動を対象にした分析も今後行う必要がある. さらには本研究で対象にした以外のセンサフィードバックも歩容に重要な影響を及ぼしていると考えられる.

このような課題を踏まえて今後の課題と展望を述べる. 本結果により, 歩容生成現象を表すことのできるシンプルなモデルを導出することができた. 今後は, このモデルをもとにして, 上述した課題に対して見通しをもって分析を進めていくことができると考えられる. 例えば, 環境や胴体の不均一性は本モデルのパラメタを不均一にすることで模擬することができる. また, 本モデルを用いた動的な運動の解析も可能である. さらに, 位相リセットのみにとどまらず, 生物で観測されるさまざまなセンサフィードバックが歩容に及ぼす影響を本モデルを用いて分析することも可能であると考えられる. 本モデルは非常にシンプルであるため, 複雑な歩行現象の重要な部分を取り出すのに有効と期待され, このアプローチを通して, センサフィードバックの適応的な歩容に対する影響に関して理解を深めることができると期待される.

一方で, 本研究の後半(4章)では, センサフィードバックを用いた歩容設計例として, 感覚情報を用いた脆弱な不整地における4脚ロボットの歩行方法を理論的に提案した. 感覚情報を用いることで, これまで適応不可能であった環境における安全な歩行方法が提案でき, 手法の有効性が検証され

た．本手法では，ロボットの制御器が各脚のセンシング情報（脚の角度，足先の力）をすべて知覚していることを前提とし，4つの脚の動かし方を制御器が中央集権的に決定している．この観点で，前半で着目してきた分散的なロボットの歩容生成手法とは異なったアプローチとなっている．

これら双方の手法のどちらが良いかは，ロボットの目的や状況に応じて変化するものであると考えられる．将来的には，これら双方の知見を徐々に積み重ねてゆくことで，状況に応じた適応的な歩容生成手法を体系的に構築できると考えられる．

参考文献

- [1] M. Raibert, K. Blankespoor, G. Nelson, R. Playter, and the BigDog Team, “BigDog, the rough-terrain quadruped robot,” in *Proceedings of 17th IFAC World Congress*, 2008, pp. 10 822–10 825.
- [2] R. M. Alexander and A. S. Jayes, “A dynamic similarity hypothesis for the gaits of quadrupedal mammals,” *Journal of Zoology*, vol. 201, no. 1, pp. 135–152, 1983.
- [3] D. M. Wilson, “Insect walking,” *Annual review of entomology*, vol. 11, pp. 103–122, 1966.
- [4] D. Hoyt and C. Taylor, “Gait and the energetics of locomotion in horses,” *Nature*, vol. 292, pp. 239–240, 1981.
- [5] C. Farley and C. Taylor, “A mechanical trigger for the trot-gallop transition in horses,” *Science*, vol. 253, pp. 306–308, 1991.
- [6] A. Wosnitza, T. Bockemühl, M. Dübbert, H. Scholz, and A. Büschges, “Inter-leg coordination in the control of walking speed in *Drosophila*,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 216, pp. 480–491, 2013.
- [7] J. S. Martyna Grabowska, Elzbieta Godlewska and S. Daun-Gruhn, “Quadrupedal gaits in hexapod animals ? inter-leg coordination in free-walking adult stick insects,” *The Journal of Experimental Biology*, vol. 215, pp. 4255–4266, 2012.
- [8] A. Isakov, S. M. Buchanan, B. Sullivan, A. Ramachandran, J. K. S. Chapman, E. S. Lu, L. Mahadevan, and B. de Bivort, “Recovery of locomotion after injury in drosophila depends on proprioception,” *Journal of Experimental Biology*, 2016. [Online]. Available: <http://jeb.biologists.org/content/early/2016/03/17/jeb.133652>
- [9] A. J. Ijspeert, “Central pattern generators for locomotion control in animals and robots: A review,” *Neural Networks*, vol. 21, no. 4, pp. 642 – 653, 2008.

- [10] H. Forssberg and S. Grillner, “The locomotion of the acute spinal cat injected with clonidine i.v.” *Brain Research*, vol. 50, no. 1, pp. 184 – 186, 1973.
- [11] A. Büschges, J. Schmitz, and U. Bässler, “Rhythmic patterns in the thoracic nerve cord of the stick insect induced by pilocarpine,” *The journal of Experimental Biology*, vol. 198, pp. 435–456, 1995.
- [12] S. Daun-Gruhn and A. Büschges, “From neuron to behavior: dynamic equation-based prediction of biological processes in motor control,” *Biological Cybernetics*, vol. 105, no. 1, pp. 71–88, 2011.
- [13] T. Buschmann, A. Ewald, A. von Twickel, and A. Büschges, “Controlling legs for locomotion? insights from robotics and neurobiology,” *Bioinspiration & Biomimetics*, vol. 10, no. 4, p. 041001, 2015. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/1748-3190/10/i=4/a=041001>
- [14] I. Poulakakis, E. Papadopoulos, and M. Buehler, “On the stability of the passive dynamics of quadrupedal running with a bounding gait,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 25, no. 7, pp. 669–687, 2006.
- [15] H. Geyer, A. Seyfarth, and R. Blickhan, “Compliant leg behaviour explains basic dynamics of walking and running,” *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, vol. 273, no. 1603, pp. 2861–2867, 2006.
- [16] F. Delcomyn, “Insect walking and robotics,” *Annual Review of Entomology*, vol. 49, pp. 51–70, 2004.
- [17] A. Büschges, T. Akay, J. P. Gabriel, and J. Schmidt, “Organizing network action for locomotion: Insights from studying insect walking,” *Brain Research Reviews*, vol. 57, no. 1, pp. 162 – 171, 2008, networks in Motion.
- [18] A. J. Ijspeert, “Central pattern generators for locomotion control in animals and robots: A review,” *Neural Networks*, vol. 21, no. 4, pp. 642–653, 2008, robotics and Neuroscience.
- [19] H. Cruse, “The functional sense of central oscillations in walking,” *Biological Cybernetics*, vol. 86, no. 4, pp. 271–280, 2002.
- [20] U. Bässler and A. Büschges, “Pattern generation for stick insect walking movements? multisensory control of a locomotor program,” *Brain Research Reviews*, vol. 27, pp. 65–88, 1998.

- [21] R. F. Chapman, *The insects: structure and function*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [22] T. Akay, S. Haehn, J. Schmitz, and A. Büschges, “Signals from load sensors underlie interjoint coordination during stepping movements of the stick insect leg,” *Journal of Neurophysiology*, vol. 92, no. 1, pp. 42–51, 2004.
- [23] H. Cruse, V. Dürr, and J. Schmitz, “Insect walking is based on a decentralized architecture revealing a simple and robust controller,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 365, no. 1850, pp. 221–250, 2007.
- [24] H. Cruse, T. Kindermann, M. Schumm, J. Dean, and J. Schmitz, “Walknet—a biologically inspired network to control six-legged walking,” *Neural Networks*, vol. 11, no. 7-8, pp. 1435–1447, 1998.
- [25] V. Dürr, J. Schmitz, and H. Cruse, “Behaviour-based modelling of hexapod locomotion: linking biology and technical application,” *Arthropod Structure & Development*, vol. 33, no. 3, pp. 237–250, 2004.
- [26] M. Schilling, T. Hoinville, J. Schmitz, and H. Cruse, “Walknet, a bio-inspired controller for hexapod walking,” *Biological Cybernetics*, vol. 107, no. 4, pp. 397–419, 2013. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s00422-013-0563-5>
- [27] Ö. Ekeberg, M. Blümel, and A. Büschges, “Dynamic simulation of insect walking,” *Arthropod Structure & Development*, vol. 33, no. 3, pp. 287 – 300, 2004, arthropod Locomotion Systems: from Biological Materials and Systems to Robotics.
- [28] N. Szczecinski, A. Brown, J. Bender, R. Quinn, and R. Ritzmann, “A neuromechanical simulation of insect walking and transition to turning of the cockroach *blaberus discoidalis*,” *Biological Cybernetics*, vol. 108, no. 1, pp. 1–21, 2014.
- [29] K. Pearson, O. Ekeberg, and A. Büschges, “Assessing sensory function in locomotor systems using neuro-mechanical simulations,” *Trends in Neurosciences*, vol. 29, no. 11, pp. 625 – 631, 2006.
- [30] D. Owaki, T. Kano, K. Nagasawa, A. Tero, and A. Ishiguro, “Simple robot suggests physical interlimb communication is essential for quadruped walking,” *Journal of The Royal Society Interface*, vol. 10, no. 78, p. 20120669, 2012.

- [31] Y. Fukuoka, Y. Habu, and T. Fukui, “A simple rule for quadrupedal gait generation determined by leg loading feedback: a modeling study,” *Scientific Reports*, vol. 5, no. 8169, 2015.
- [32] S. Fujiki, S. Aoi, T. Funato, N. Tomita, K. Senda, and K. Tsuchiya, “Hysteresis in the metachronal-tripod gait transition of insects: A modeling study,” *Physical Review E*, vol. 88, p. 012717, 2013.
- [33] S. Kimura, M. Yano, and H. Shimizu, “A self-organizing model of walking patterns of insects,” *Biological Cybernetics*, vol. 69, no. 3, pp. 183–193, 1993.
- [34] R. J. Full and D. E. Koditschek, “Templates and anchors: Neuromechanical hypotheses of legged locomotion on land,” *The Journal of Experimental Biology*, vol. 202, pp. 3325–3332, 1999.
- [35] M. H. Raibert, “Legged robots,” *Communications of the ACM*, vol. 29, no. 6, pp. 499–514, 1986.
- [36] M. Raibert, “Trotting, pacing and bounding by a quadruped robot,” *Journal of Biomechanics*, vol. 23, no. 1, pp. 79–98, 1990.
- [37] R. M. Alexander, *Principles of animal locomotion*. Princeton: Princeton University Press, 2006.
- [38] A. S. Jayes and R. M. Alexander, “Mechanics of locomotion of dogs (*Canis familiaris*) and sheep (*Ovis aries*),” *Journal of Zoology*, vol. 185, no. 3, pp. 289–308, 1978.
- [39] D. Graham, “A behavioural analysis of the temporal organisation of walking movements in the 1st instar and adult stick insect (*Carausius morosus*),” *Journal of Comparative Physiology*, vol. 81, no. 1, pp. 23–52, 1972.
- [40] H. Cruse, “What mechanisms coordinate leg movement in walking arthropods?” *Trends in Neurosciences*, vol. 13, no. 1, pp. 15–21, 1990.
- [41] G. M. Hughes, “The Co-Ordination of insect movements: I The walking movements of insects,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 29, pp. 267–285, 1952.
- [42] F. Delcomyn, “The locomotion of the cockroach *Periplaneta americana*,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 54, pp. 443–452, 1971.

- [43] J. A. Bender, E. M. Simpson, B. R. Tietz, K. A. Daltorio, R. D. Quinn, and R. E. Ritzmann, “Kinematic and behavioral evidence for a distinction between trotting and ambling gaits in the cockroach *Blaberus discoidalis*,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 214, pp. 2057–2064, 2011.
- [44] R. J. Full, *The handbook of comparative physiology*. Oxford: Oxford University Press, 1997.
- [45] S. Daun-Gruhn, “A mathematical modeling study of inter-segmental coordination during stick insect walking,” *Journal of Computational Neuroscience*, vol. 30, no. 2, pp. 255–278, 2011.
- [46] T. Kindermann, “Behavior and adaptability of a six-legged walking system with highly distributed control,” *Adaptive Behavior*, vol. 9, no. 1, pp. 16 – 41, 2001.
- [47] S. Steingrube, M. Timme, F. Wörgötter, and P. Manoonpong, “Self-organized adaptation of a simple neural circuit enables complex robot behaviour,” *Nature Physics*, vol. 6, pp. 224–230, 2010.
- [48] U. P. Poramate Manoonpong and F. Wörgötter, “Neural control and adaptive neural forward models for insect-like, energy-efficient, and adaptable locomotion of walking machines,” *Frontiers in Neural Circuits*, vol. 7, no. 12, 2013.
- [49] X. Xiong, F. Wörgötter, and P. Manoonpong, “Neuromechanical control for hexapedal robot walking on challenging surfaces and surface classification,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 62, pp. 1777–1789, 2014.
- [50] X. Xiong, F. Worgotter, and P. Manoonpong, “Adaptive and energy efficient walking in a hexapod robot under neuromechanical control and sensorimotor learning,” *Cybernetics, IEEE Transactions on*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, 2015.
- [51] P. Arena, L. Fortuna, M. Frasca, and G. Sicurella, “An adaptive, self-organizing dynamical system for hierarchical control of bio-inspired locomotion,” *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, vol. 34, no. 4, pp. 1823–1837, Aug 2004.
- [52] G. Martius, “Software lpzrobots [cited 23 June 2015].” in: Research Network for Self-Organization of Robot Behavior [Internet]. [Online]. Available: <http://robot.informatik.uni-leipzig.de/software/>

- [53] S. Grillner, H. Markram, E. D. Schutter, G. Silberberg, and F. E. LeBeau, “Microcircuits in action – from CPGs to neocortex,” *Trends in Neurosciences*, vol. 28, no. 10, pp. 525–533, 2005.
- [54] S. N. Zill, J. Schmitz, S. Chaudhry, and A. Büschges, “Force encoding in stick insect legs delineates a reference frame for motor control,” *Journal of Neurophysiology*, vol. 108, no. 5, pp. 1453–1472, 2012.
- [55] S. N. Zill, S. Chaudhry, A. Büschges, and J. Schmitz, “Force feedback reinforces muscle synergies in insect legs,” *Arthropod Structure & Development*, vol. 44, no. 6, Part A, pp. 541–553, 2015.
- [56] A. Büschges, “Sensory control and organization of neural networks mediating coordination of multisegmental organs for locomotion,” *Journal of Neurophysiology*, vol. 93, no. 3, pp. 1127–1135, 2005.
- [57] A. Büschges, “Role of local nonspiking interneurons in the generation of rhythmic motor activity in the stick insect,” *Journal of Neurobiology*, vol. 27, pp. 488–512, 1995.
- [58] S. Aoi, N. Ogiwara, Y. Sugimoto, and K. Tsuchiya, “Simulating adaptive human bipedal locomotion based on phase resetting using foot-contact information,” *Advanced Robotics*, vol. 22, no. 15, pp. 1697–1713, 2008.
- [59] K. Akimoto, S. Watanabe, and M. Yano, “An insect robot controlled by the emergence of gait patterns,” *Artificial Life and Robotics*, vol. 3, no. 2, pp. 102–105, 1999.
- [60] S. Kimura, M. Yano, and H. Shimizu, “A self-organizing model of walking patterns of insects II. The loading effect and leg amputation,” *Biological Cybernetics*, vol. 70, no. 6, pp. 505–512, 1994.
- [61] G. Schöner, W. Y. Jiang, and J. A. S. Kelso, “A synergetic theory of quadrupedal gaits and gait transitions,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 142, no. 3, pp. 359–391, 1990.
- [62] S. Aoi, D. Katayama, S. Fujiki, N. Tomita, T. Funato, T. Yamashita, K. Senda, and K. Tsuchiya, “A stability-based mechanism for hysteresis in the walk – trot transition in quadruped locomotion,” *Journal of the Royal Society Interface*, vol. 10, p. 20120908, 2013.
- [63] F. J. Diedrich and J. William H. Warren, “Why change gaits? dynamics of the walk-run transition,” *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, vol. 21, no. 1, pp. 183–202, 1995.

- [64] J. E. Seipel, P. J. Holmes, and R. J. Full, “Dynamics and stability of insect locomotion: a hexapedal model for horizontal plane motions,” *Biological Cybernetics*, vol. 91, no. 2, pp. 76–90, 2004.
- [65] R. P. Kukillaya and P. J. Holmes, “A hexapedal jointed-leg model for insect locomotion in the horizontal plane,” *Biological Cybernetics*, vol. 97, no. 5-6, pp. 379–395, 2007.
- [66] D. L. Jindrich and R. J. Full, “Dynamic stabilization of rapid hexapedal locomotion,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 205, pp. 2803–2823, 2002.
- [67] V. Dürr, “Context-dependent changes in strength and efficacy of leg coordination mechanisms,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 208, pp. 2253 – 2267, 2005.
- [68] D. Graham and S. Epstein, “Behaviour and motor output for an insect walking on a slippery surface: II. backward walking,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 118, no. 1, pp. 287–296, 1985.
- [69] P. Holmes, R. J. Full, D. E. Koditschek, and J. Guckenheimer, “The dynamics of legged locomotion: models, analyses, and challenges,” *SIAM Review*, vol. 48, no. 2, pp. 207–304, 2006.
- [70] A. J. Ijspeert, “Biorobotics: Using robots to emulate and investigate agile locomotion,” *Science*, vol. 346, no. 6206, pp. 196–203, 2014.
- [71] R. Pfeifer, M. Lungarella, and F. Iida, “Self-organization, embodiment, and biologically inspired robotics,” *Science*, vol. 318, no. 5853, pp. 1088–1093, 2007.
- [72] S. Kuroda, I. Kunita, Y. Tanaka, A. Ishiguro, R. Kobayashi, and T. Nakagaki, “Common mechanics of mode switching in locomotion of limbless and legged animals,” *Journal of The Royal Society Interface*, vol. 11, p. 20140205, 2014.
- [73] E. Satou, T. Tamura, and K. Inoue, “Experimental investigation of walking pattern adjustment of millipedes,” in *27th Symposium of Distributed autonomous system*, 1 2015, pp. 149 – 152.
- [74] T. Tamura, E. Satou, and K. Inoue, “Constructive understanding of decentralized leg motion control mechanism of myriapods,” in *28th Symposium of Distributed autonomous system*, 1 2016, pp. 149 – 152.

- [75] Y. Tanaka, K. Ito, T. Nakagaki, and R. Kobayashi, “Mechanics of peristaltic locomotion and role of anchoring,” *Journal of The Royal Society Interface*, vol. 9, pp. 222 – 233, 2012.
- [76] Y. Ambe, T. Nachstedt, P. Manoonpong, F. Wörgötter, and F. Matsuno, “Embodied sensorimotor interaction for insect locomotion,” in *The First International Symposium on Swarm Behavior and Bio-Inspired Robotics*, 2015, pp. 340 – 343.
- [77] K. Sakai, K. Yasui, T. Kano, D. Owaki, and A. Ishiguro, “Interlimb coordination for myrapod-like robot by using local force feedback,” in *28th Symposium of Distributed autonomous system*, 1 2016, pp. 67 – 72.
- [78] Y. Sugimoto, H. Yoshioka, and K. Osuka, “The realization of the super multilegged passive dynamic walking,” *Journal of Robotics Society of Japan*, vol. 28, no. 8, pp. 961 – 969, 2010.
- [79] S. Aoi, N. Ogihara, Y. Sugimoto, and K. Tsuchiya, “Simulating adaptive human bipedal locomotion based on phase resetting using foot-contact information,” *Advanced Robotics*, vol. 22, no. 15, pp. 1697–1713, 2008.
- [80] R. McGhee and A. Frank, “On the stability properties of quadruped creeping gaits,” *Mathematical Biosciences*, vol. 3, pp. 331 – 351, 1968.
- [81] S. Hirose, K. Yoneda, K. Arai, and T. Ibe, “Design of prismatic quadruped walking vehicle TITAN VI,” in *5th International Conference on Advanced Robotics*, vol. 1, 1991, pp. 723–728.
- [82] S. Hirose, H. Tsukagoshi, and K. Yoneda, “Normalized energy stability margin and its contour of walking vehicles on rough terrain,” in *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*, vol. 1, 2001, pp. 181–186.
- [83] A. Konno, K. Ogasawara, Y. Hwang, E. Inohira, and M. Uchiyama, “An adaptive gait for quadruped robots to walk on a slope,” in *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, vol. 1, 2003, pp. 589–594.
- [84] J. Estremera and P. G. de Santos, “Free gaits for quadruped robots over irregular terrain,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 21, no. 2, pp. 115–130, 2002.
- [85] J. Estremera and P. de Santos, “Generating continuous free crab gaits for quadruped robots on irregular terrain,” *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 21, no. 6, pp. 1067–1076, Dec 2005.

- [86] C. Klein and S. Kittivatcharapong, “Optimal force distribution for the legs of a walking machine with friction cone constraints,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, no. 1, pp. 73–85, 1990.
- [87] D. Zhou, K. H. Low, and T. Zielinska, “An efficient foot-force distribution algorithm for quadruped walking robots,” *Robotica*, vol. 18, pp. 403–413, 7 2000.
- [88] L. Martins-Filho and R. Prajoux, “Locomotion control of a four-legged robot embedding real-time reasoning in the force distribution,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 32, no. 4, pp. 219 – 235, 2000.
- [89] Z. Li, S. S. Ge, and S. Liu, “Contact-force distribution optimization and control for quadruped robots using both gradient and adaptive neural networks,” *Neural Networks and Learning Systems, IEEE Transactions on*, vol. 25, no. 8, pp. 1460–1473, Aug 2014.
- [90] H. Marco, G. Christian, B. Michael, H. Mark, and S. Roland, “Walking and running with StarLETH,” in *The 6th International Symposium on Adaptive Motion of Animals and Machines (AMAM)*, 2013.
- [91] M. P. Murphy, A. Saunders, C. Moreira, A. A. Rizzi, and M. Raibert, “The LittleDog robot,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 30, no. 2, pp. 145–149, 2011.
- [92] K. Byl, A. Shkolnik, S. Prentice, N. Roy, and R. Tedrake, “Reliable dynamic motions for a stiff quadruped,” in *the 11th International Symposium on Experimental Robotics (ISER)*, 2008.
- [93] P. D. Neuhaus, J. E. Pratt, and M. J. Johnson, “Comprehensive summary of the institute for human and machine cognition’s experience with LittleDog,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 30, no. 2, pp. 216–235, 2011.
- [94] M. Kalakrishnan, J. Buchli, P. Pastor, M. Mistry, and S. Schaal, “Learning, planning, and control for quadruped locomotion over challenging terrain,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 30, no. 2, pp. 236–258, 2011.
- [95] J. Z. Kolter and A. Y. Ng, “The Stanford LittleDog: A learning and rapid replanning approach to quadruped locomotion,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 30, pp. 150 – 174, 2011.

- [96] M. Hoepflinger, M. Hutter, C. Gehring, M. Bloesch, and R. Siegwart, “Unsupervised identification and prediction of foothold robustness,” in *Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference on*, May 2013, pp. 3293–3298.
- [97] M. Hoepflinger, C. Remy, M. Hutter, L. Spinello, and R. Siegwart, “Haptic terrain classification for legged robots,” in *Robotics and Automation (ICRA), 2010 IEEE International Conference on*, May 2010, pp. 2828–2833.
- [98] K. Tokuda, T. Toda, Y. Koji, M. Konyo, S. Tadokoro, and P. Alain, “Estimation of fragile ground by foot pressure sensor of legged robot,” in *Advanced Intelligent Mechatronics, 2003. AIM 2003. Proceedings. 2003 IEEE/ASME International Conference on*, vol. 1, July 2003, pp. 447–453.
- [99] J. Degraeve, R. Van Cauwenbergh, F. Wyffels, T. Waegeman, and B. Schrauwen, “Terrain classification for a quadruped robot,” in *Machine Learning and Applications (ICMLA), 2013 12th International Conference on*, vol. 1, Dec 2013, pp. 185–190.
- [100] J. S. Chen, F. T. Cheng, K. T. Yang, F. C. Kung, and Y. Y. Sun, “Optimal force distribution in multilegged vehicles,” *Robotica*, vol. 17, pp. 159–172, 3 1999.
- [101] M. Erden and K. Leblebicioglu, “Torque distribution in a six-legged robot,” *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 23, no. 1, pp. 179–186, Feb 2007.
- [102] J. Estremera and K. J. Waldron, “Thrust control, stabilization and energetics of a quadruped running robot,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 27, no. 10, pp. 1135–1151, 2008.
- [103] D. J. Hyun, S. Seok, J. Lee, and S. Kim, “High speed trot-running: Implementation of a hierarchical controller using proprioceptive impedance control on the MIT Cheetah,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 33, no. 11, pp. 1417–1445, 2014.
- [104] C. Semini, V. Barasuol, T. Boaventura, M. Frigerio, M. Focchi, D. G. Caldwell, and J. Buchli, “Towards versatile legged robots through active impedance control,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 34, no. 7, pp. 1003–1020, 2015.
- [105] M. Hutter, C. Gehring, M. Hopflinger, M. Blosch, and R. Siegwart, “Toward combining speed, efficiency, versatility, and robustness in an autonomous quadruped,” *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 30, no. 6, pp. 1427–1440, Dec 2014.

研究業績

学術論文

- [1] Yuichi Ambe and Fumitoshi Matsuno, ““Leg-grope walk”–strategy for walking on fragile irregular slopes as a quadruped robot by force distribution”, *ROBOMECH Journal*, vol. 3, no. 1, 7, (2016)
- [2] 安部祐一, 青井伸也, 土屋和雄, 松野文俊, “位相リセットが多足歩行に及ぼす影響のシンプルモデルを用いた解析–進行波, 後退波, わきだし波の存在–”, 計測自動制御学会論文集, vol. 52, no. 11, pp.639-652, (2016)
- [3] Yuichi Ambe, Shinya Aoi, Timo Nachstedt, Poramate Manoonpong, Florentin Wörgötter and Fumitoshi Matsuno, “A simple analytical model reveals the functional role of embodied sensorimotor interaction for hexapod gaits” (投稿中)

査読あり講演論文

- [1] Yuichi Ambe and Fumitoshi Matsuno, “Leg-grope-walk – walking strategy on weak and irregular slopes for a quadruped robot by force distribution”, in *Proc. of the 2012 International Conference on Robotic System(IROS)*, pp. 1840-1845, (2012)
- [2] Yuichi Ambe, Timo Nachstedt, Poramate Manoonpong, Florentin Wörgötter, Shinya Aoi and Fumitoshi Matsuno, “Stability analysis of a hexapod robot driven by distributed non-linear oscillators with a phase modulation mechanism”, in *Proc. of the 2013 International Conference on Robotic System(IROS)*, pp. 5087-5092, (2013)
- [3] Yuichi Ambe, Shinya Aoi, Timo Nachstedt, Poramate Manoonpong, Florentin Wörgötter and Fumitoshi Matsuno, “Embodied sensorimotor interaction for insect locomotion”, in *The First International Symposium on Swarm Behavior and Bio-inspired Robotics*, pp.340-343, (2015)

口頭発表

- [1] 安部祐一, 金テヒョン, 山崎隆太, 豊島聡, 花本惣平, 松野文俊, “足場が脆弱な傾斜環境における4脚ロボットの歩行方法” 第12回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会, (2011)

- [2] 安部祐一, Timo Nachstedt, Poramate Manoonpong, Florentin Wörgötter, 青井伸也, 松野文俊, ”位相調整機構を用いた非線形振動子によって駆動される6脚ロボットの安定解析”, 第26回自律分散システム・シンポジウム, (2014)
- [3] Yuichi Ambe, “Insect gait mechanism through neuromechanical interaction: A modeling study”, Invited talk in *The First International Symposium on Swarm Behavior and Bio-inspired Robotics*, (2015)
- [4] 安部祐一, 青井伸也, 松野文俊, 土屋和雄, “位相リセットが多足歩行に及ぼす影響の単純モデルを用いた解析”, 第28回自律分散システム・シンポジウム, (2016)

本研究に直接関係しない学術論文

- [1] 金子克哉, 伊藤公一, 安部祐一, “火山観測用自走式センサー「ほむら」の開発”, 火山, 特定非営利法人日本火山学会, 55(2), pp109-118, (2010).
- [2] 金子克哉, 安部祐一, 伊藤公一, 岩堀功大, “火山観測用小型ロボット-火山観測用自走式センサー「ほむら」の開発とフィールド試験報告”, 遊・星・人: 日本惑星科学会誌, 21(2), pp130-137, (2012).
- [3] Aman Arora, Yuichi Ambe, Tea Hyon Kim, Ryo Ariizumi and Fumitoshi Matsuno, “Development of a maneuverable flexible manipulator for minimally invasive surgery with varied stiffness”, *Artificial Life and Robotics*, vol. 19, no. 4, pp.340-346, (2014).
- [4] Masayasu Tanase, Yuichi Ambe, Shinya Aoi and Fumitoshi Matsuno, “A galloping quadruped model using left-right asymmetry in touchdown angles”, *Journal of Biomechanics*, vol. 48, no. 12, pp.3383-3389, (2015).
- [5] Tomoya Kamimura, Yuichi Ambe, Shinya Aoi and Fumitoshi Matsuno, “Body flexibility effects on foot loading based on quadruped bounding models”, *Artificial Life and Robotics*, vol. 20, no. 3, pp.270-275, (2015).

本研究に直接関係しない査読あり講演論文

- [1] Hayato Shin, Kazuyuki Kon, Hiroki Igarashi, Yuichi Ambe, TaeHyon Kim, Sohei Hanamoto, Ryuta Yamasaki, Satoshi Toyoshima, Noritaka Sato, Tetsushi Kamegawa and Fumitoshi

- Matsuno, “Hardware-Software Integration of a Practical Mobile Robot Platform”, *2011 IEEE/SICE International Symposium on System Integration*, F4-1, (2011).
- [2] Timo Nachstedt, Florentin Wörgötter, Poramate Manoonpong, Ryo Ariizumi, Yuichi Ambe, Fumitoshi Matsuno, “Adaptive Neural Oscillators with Synaptic Plasticity for Locomotion Control of a Snake-Like Robot with Screw-Drive Mechanism”, in *Proc. of the 2013 International Conference on Robotics and Automation(ICRA)*, WeDInt.31, (2013).
- [3] Ryuta Yamasaki, Yuichi Ambe, Shinya Aoi and Fumitoshi Matsuno, “Quadrupedal Bounding with Spring-damper Body Joint”, in *Proc. of the 2013 International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp.2345-2350, (2013).
- [4] Tomoya Kamimura, Yuichi Ambe, Shinya Aoi and Fumitoshi Matsuno, “Investigation of the effect of the flexible body on bounding gait of a quadruped robot”, *International Symposium on Artificial Life and Robotics 2015 (AROB 20th'15)*, (2015).
- [5] Yuichi Ambe, Tomonari Yamamoto, Shotaro Kojima, Eri Takane, Kenjiro Tadakuma, Masashi Konyo, and Satoshi Tadokoro, “Use of active scope camera in the Kumamoto Earthquake to investigate collapsed houses”, *Proc. of the 2016 International Symposium on Safety, Security, and Rescue Robotics (SSRR)*, pp.21-27, (2016).
- [6] Eri Takane, Kenjiro Tadakuma, Masahiro Fujita, Hirone Komatsu, Akito Nomura, Tomoya Ichimura, Tomonari Yamamoto, Yuichi Ambe, Masashi Konyo and Satoshi Tadokoro, “Two axes orthogonal drive transmission for omnidirectional crawler with surface contact”, *Proc. of the 2016 International Symposium on Safety, Security, and Rescue Robotics (SSRR)*, pp.378-383, (2016).

本研究に直接関係しない口頭発表，ポスター発表

- [1] 金子克哉，伊藤公一，安部祐一，“火山観測用自走式センサーの開発”，日本地球惑星科学連合，(2009)
- [2] 金子克哉，伊藤公一，安部祐一，“火山観測用自走式センサー「ほむら」の開発”，日本火山学会秋季大会，(2009)
- [3] 金子克哉，伊藤公一，安部祐一，“火山観測用自走式センサー「ほむら」の開発およびフィールド試験報告”，日本地球惑星科学連合，(2010)

- [4] 金テヒョン, 根和幸, 安部祐一, 新隼人, 五十嵐広希, 松野文俊, 田所諭, 高森年, 齋藤俊久, “自律と操縦に対応した移動ロボット用RTCの開発第22報速度制約領域を考慮した軌道計画の改良と検証”, 第12回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会, (2011)
- [5] 根和幸, 金テヒョン, 新隼人, 安部祐一, 花本惣平, 山崎隆太, 五十嵐広希, 佐藤徳孝, 亀川哲志, 松野文俊, “災害対応を想定した移動ロボットプラットフォームの開発第2報:遠隔と自律に対応したソフトウェアモジュールの開発”, 第12回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会, (2011)
- [6] 金子克哉, 伊藤公一, 安部祐一, 岩堀功大, “火山観測用自走式センサー「ほむら」の開発: FOMAによる無線通信”, 日本火山学会, (2013)
- [7] 松下光次郎, 成岡健一, 西川鋭, 築地原里樹, 安部祐一, Qi An, 大脇大, “若手研究者によるブレインストーミングと実践から垣間見る表面筋電信号計測・解析システムの応用可能性-第19回創発システムシンポジウムワークショップにおける成果”, 計測自動制御学会システム・情報部門学術講演会 (SSI), (2013)
- [8] 安部祐一, 昆陽雅司, 田所諭, “柔軟索状体の先端浮上安定化方法の提案”, 第34回日本ロボット学会学術講演会, (2016)
- [9] 神尾柊太, 安部祐一, 安藤久人, 昆陽雅司, 多田隈建二郎, 圓山重直, 田所諭, “ワイヤーを用いた受動平行機構による空気噴射型能動スコープカメラの先端浮上の安定化”, 第34回日本ロボット学会学術講演会, (2016)
- [10] 安部祐一, 安藤久人, 神尾柊太, 昆陽雅司, 多田隈建二郎, 田所諭, “柔軟索状体の胴体浮上安定化手法の提案”, 第17回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会, (2016)
- [11] 神尾柊太, 安部祐一, 安藤久人, 昆陽雅司, 多田隈建二郎, 円山重直, 田所諭, “柔軟受動平行機構を用いた空気噴射型能動スコープカメラの瓦礫乗り越え”, 第17回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会, (2016)
- [12] 上村知也, 安部祐一, 青井伸也, 土屋和雄, 松野文俊, “シンプルな力学モデルを用いた体幹柔軟性をもつ四脚ロボットのバウンド歩容の動

- 力学解析”，第17回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会，(2016)
- [13] 安藤久人，神尾柊太，安部祐一，多田隈建二郎，昆陽雅司，田所諭，円山重直，“水噴射による索状体の能動化システムの開発”，第17回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会，(2016)
- [14] 石井昭裕，神尾柊太，安藤久人，安部祐一，昆陽雅司，多田隈建二郎，田所諭，“複数の空気噴射孔を持った能動スコープカメラの開発”，第17回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会，(2016)

謝辞

本研究を遂行するにあたり、長きに渡り適切な御指導と御助言を頂きました京都大学工学研究科松野文俊教授に心より感謝申し上げます。研究を通して本当にいろいろなものを学ばせていただきました。また、本論文の副査を引き受けて頂き、様々な御意見、御助言を頂きました。京都大学工学研究科榎木哲夫教授、泉田啓教授に深く感謝致します。異なる研究室でありながらも、京都大学工学研究科土屋和雄名誉教授、青井伸也講師には研究に対して的確なアドバイスを頂きました。深く感謝いたします。南デンマーク大学のPoramate Manoonpong准教授には多くの意見を頂きました。また、ゲッティンゲン大学のTimo Nachstedt氏のおかげで実験を終えることが出来ました。重ねてお礼申し上げます。結果が出なくて苦しい時期に励まし、ともに戦った京都大学メカトロニクス研究室の仲間、特に有泉亮氏、金テヒョン氏、馬カキン氏には本当にお世話になりました。そして研究生活を支えて下さった友人に感謝致します。最後に、経済的な面でも精神的な面でもずっと支えて頂いた家族に深く感謝します。

付録 A

6脚シンプルモデルの解析解導出に関する付録

A.1 左右の位相拘束が位相リセット量に及ぼす効果

本付録では，仮定 A6,7(2.3.1 節) が位相ダイナミクスの式 (2.1) の位相リセット項に及ぼす影響について説明する．仮定 A7($\tau = 0$) より，左右脚の位相ダイナミクスは以下でかける．

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_r &= \omega - k_c \sin(\phi_r - \phi_l - \pi) + k_r^r, \\ \dot{\phi}_l &= \omega - k_c \sin(\phi_l - \phi_r - \pi) + k_l^l,\end{aligned}\tag{A.1}$$

なお， $(r, l) = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ である．リセット項が 0 ($k_r^i = 0$) であった場合，位相差のダイナミクスは以下の式で書くことができ，

$$\frac{d}{dt}(\phi_r - \phi_l) = -2k_c \sin(\phi_r - \phi_l - \pi).\tag{A.2}$$

安定な平衡点 $\phi_r - \phi_l = \pi$ 近傍で一次近似した位相差の時間発展は以下の式で表せる．

$$\phi_r(t) - \phi_l(t) = (\phi_r(t_0) - \phi_l(t_0) - \pi) e^{-2k_c(t-t_0)} + \pi.\tag{A.3}$$

$t = t_0$ で位相 ϕ_r にリセットがかかる状況を考え，位相 ϕ_r の時間発展を解析的に計算する．位相がリセットされる直前において，初期値を $(\phi_r(t_0^-), \phi_l(t_0^-)) = (2\pi - \Delta, \pi - \Delta)$ とする．この場合，位相のリセット後には $(\phi_r(t_0^+), \phi_l(t_0^+)) = (0, \pi - \Delta)$ と位相が変化する． $\Delta > 0$ は十分小さい値であるとする．近似解 (A.3) を使って，位相リセット後の位相 ϕ_r のダイナミクスは以下のように書くことができる．

$$\dot{\phi}_r = \omega - k_c \sin(\Delta e^{-2k_c(t-t_0)}) + k_r^r, \quad t > t_0.\tag{A.4}$$

左右の振動子に次の位相リセットがかかるまでの間，この式は Δ で一次近似して解ける．

$$\phi_r = \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\Delta e^{-2k_c(t-t_0)} - \frac{1}{2}\Delta, \quad t > t_0.\tag{A.5}$$

位相リセットが起きてから十分長い時間 ($\gg 1/k_c$) がたつと, ϕ_r は $\omega(t-t_0) - \frac{1}{2}\Delta$ となる. つまり, 仮定 A6,7 によって, 位相リセットの大きさは Δ から $\frac{1}{2}\Delta$ に減る. よって, 式(2.17)のリセット量を $1/2$ にした.

A.2 進行波歩容における接地イベント時の接地脚集合の推定

本付録では，各イベント直前における接地脚集合の推定方法について説明する．シミュレーション結果から得られているように，位相差が $(\psi_1, \psi_2) = (2(1-\beta)\pi, 2(1-\beta)\pi)$ であり，左右の位相差は π であるとする．各イベントでタッチダウンする脚 i の位相を $\phi_i = 0$ とすると，各脚の位相は β を使ってFig. A.1のようにあらわすことが出来る．この時， $1/2 < \beta < 2/3$ の範囲のデューティー比 β に対して，位相が $0 < \phi_i \leq 2\beta\pi$ の範囲にある脚は接地脚(離地する直前の脚を含む)，位相が $2\beta\pi < \phi_i \leq 2\pi$ の範囲にある脚(タッチダウンする脚も含む)を浮いている脚とした．これらより，式(2.18)のように接地脚集合が与えられる(Fig. A.1上で塗りつぶした接地点の脚に対応)．

ただし，解析解は $\psi_1 = \psi_2 = 2(1-\beta)\pi + O((K^*)^{-1})$ となるため((2.19)式)，この推定は $\phi_i \sim 2\beta\pi$ ，あるいは $\phi_i \sim 2\pi$ の場合に $O((K^*)^{-1})$ 分正しくない可能性がある．特に $\beta \sim 1/2, 2/3$ の場合には，この状況が起こりうる．しかし，本研究では主に $1/2 < \beta < 2/3$ の領域の大域的振る舞いに興味があるため，この状況は無視している．

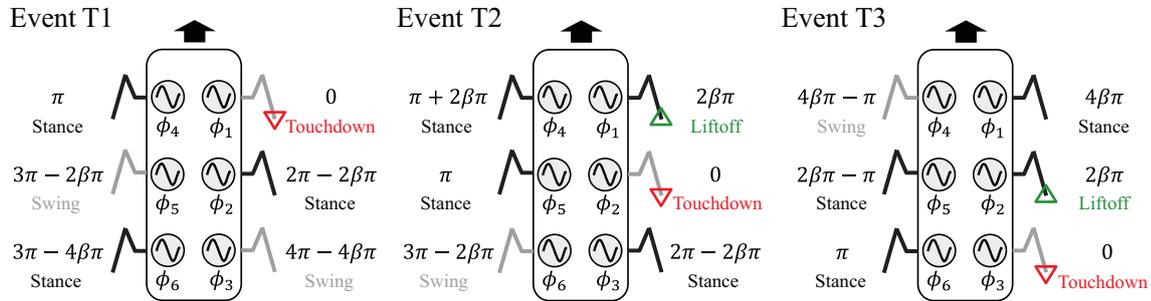


Fig. A.1: Oscillator phase values at events T1, T2, and T3

A.3 進行波歩容の周期解の導出

本付録では，2.3.2節で示した進行波解の詳細な求め方を説明する．イベントT2直前における $\hat{\phi}_2^{\text{id}}, \hat{\psi}_1^{\text{T2}}, \hat{\psi}_2^{\text{T2}}$ を未知量とする．周期解条件 $\hat{\phi}_1^{\text{id}} = \hat{\phi}_2^{\text{id}} = \hat{\phi}_3^{\text{id}}$ をもとに各イベント(T1, T2, T3)の位相を未知量で表し，各イベントにおける接地条件($\Delta l_i^* = 0$)を導出する．その得られた接地条件を解いて未知量を決定する．

1) イベントT1直前における位相と接地条件($\Delta l_1^* = 0$)

イベントT1直前における位相は，周期解条件とFig. 2.11の関係をもとに以下のように未知量を使って表すことが出来る．

$$\begin{aligned}\phi_1^{\text{T1}} &= \hat{\phi}_2^{\text{id}}, \\ \phi_2^{\text{T1}} &= \frac{1}{2}\hat{\phi}_2^{\text{id}} + \hat{\psi}_1^{\text{T2}} - \pi, \\ \phi_3^{\text{T1}} &= \frac{1}{2}\hat{\phi}_2^{\text{id}} + \hat{\psi}_1^{\text{T2}} + \hat{\psi}_2^{\text{T2}} - \pi.\end{aligned}\tag{A.6}$$

式(2.18)の S_{T1} とつり合いの式(2.14)(2.15)(2.16)より，イベントT1直前における脚1の付け根と地面までの距離 L_1^* は以下のように求められる．(位相には一切よらない式になっていることに注意)

$$L_1^* = 1 - \frac{1}{2K^*}.\tag{A.7}$$

脚1が接地する条件として，脚1の付け根と地面の距離 L_1^* は，脚1の接地時の位相 ϕ_1^{T1} で決まる脚の長さとも一致しなければならない($\Delta l_1^* = 0$)，よって，以下の位相関係式が得られる．

$$L_1^* = 1 - \frac{(2\pi - \phi_1^{\text{T1}})d^*}{2(1 - \beta)} + O((K^*)^{-2}),\tag{A.8}$$

ただし， $2\pi - \phi_1^{\text{T1}} \sim O((K^*)^{-1})$ である．

2) イベントT2直前における位相と接地条件($\Delta l_2^* = 0$)

イベントT2直前における位相は，周期解条件とFig. 2.11の関係をもとに以下のように未知量を使って表すことが出来る．

$$\begin{aligned}\phi_1^{\text{T2}} &= \hat{\phi}_2^{\text{id}} - \hat{\psi}_1^{\text{T2}}, \\ \phi_2^{\text{T2}} &= \hat{\phi}_2^{\text{id}}, \\ \phi_3^{\text{T2}} &= \hat{\phi}_2^{\text{id}} + \hat{\psi}_2^{\text{T2}} - 2\pi.\end{aligned}\tag{A.9}$$

つり合い式(2.14)(2.15)(2.16)と式(2.18)の S_{T2} より，イベントT2直前における，脚2の付け根と地面までの距離 L_2^* は， $(\phi_1^{\text{T2}}, \phi_2^{\text{T2}}, \phi_3^{\text{T2}})$ の関数として求められる．

$$L_2^* = 1 + \left(a_{\text{T2}} - \frac{1}{2}\right) \frac{(\phi_1^{\text{T2}} - 2\beta\pi)d^*}{2(1 - \beta)} + \left(b_{\text{T2}} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{K^*} + O((K^*)^{-2}),\tag{A.10}$$

なお,

$$\begin{aligned} a_{T2} &= \frac{1}{5a^*} \{\Delta x_1^*(\phi_1^{T2}) - 2\Delta x_2^*(\phi_2^{T2}) + \Delta x_3^*(\phi_3^{T2})\}, \\ b_{T2} &= -\frac{1}{20a^*} \{\Delta x_1^*(\phi_1^{T2}) - 2\Delta x_2^*(\phi_2^{T2}) + \Delta x_3^*(\phi_3^{T2})\}, \end{aligned}$$

ただし, $2\beta\pi \leq \{\phi_1^{T2}, \phi_2^{T2}\} < 2\pi, 0 \leq \phi_3^{T2} < 2\beta\pi, \phi_1^{T2} - 2\beta\pi \sim O((K^*)^{-1})$.

さらに, 脚2が接地する条件として, 脚2の付け根と地面の距離 L_2^{r*} は, 脚2の接地時の位相 ϕ_2^{id} で決まる脚の長さとも一致しなければならない ($\Delta l_2^* = 0$). よって, 以下の位相関係式を得る.

$$L_2^{r*} = 1 - \frac{(2\pi - \phi_2^{T2})d^*}{2(1-\beta)} + O((K^*)^{-2}), \quad (\text{A.11})$$

ただし, $2\pi - \phi_2^{T2} \sim O((K^*)^{-1})$ である.

3) イベント T3 直前における位相と接地条件 ($\Delta l_3^* = 0$)

イベント T3 直前における位相は, 周期解条件と Fig. 2.11 の関係をもとに, 以下のように未知量を使って表すことが出来る.

$$\begin{aligned} \phi_1^{T3} &= \hat{\phi}_2^{\text{id}} - \hat{\psi}_1^{T2} - \hat{\psi}_2^{T2}, \\ \phi_2^{T3} &= \frac{1}{2}\hat{\phi}_2^{\text{id}} - \hat{\psi}_2^{T2} + \pi, \\ \phi_3^{T3} &= \hat{\phi}_2^{\text{id}}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

式(2.14)(2.15)(2.16)と式(2.18)の S_{T3} より, イベント T3 直前における, 脚3の付け根と地面までの距離 L_3^{r*} は $(\phi_1^{T3}, \phi_2^{T3}, \phi_3^{T3})$ の関数として求められる.

$$L_3^{r*} = 1 + \left(a_{T3} - \frac{5}{4}\right) \frac{(\phi_2^{T3} - 2\beta\pi)d^*}{2(1-\beta)} + \left(b_{T3} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{K^*} + O((K^*)^{-2}), \quad (\text{A.13})$$

なお,

$$\begin{aligned} a_{T3} &= \frac{1}{4a^*} \{-\Delta x_1^*(\phi_1^{T3}) - \Delta x_2^*(\phi_2^{T3}) + 2\Delta x_3^*(\phi_3^{T3}) + 3\Delta x_5^*(\phi_2^{T3} + \pi) - 3\Delta x_6^*(\phi_3^{T3} + \pi)\}, \\ b_{T3} &= -\frac{3}{8a^*} \{\Delta x_1^*(\phi_1^{T3}) + \Delta x_2^*(\phi_2^{T3}) + \Delta x_5^*(\phi_2^{T3} + \pi) + \Delta x_6^*(\phi_3^{T3} + \pi)\}. \end{aligned}$$

ただし, $2\beta\pi \leq \{\phi_2^{T3}, \phi_3^{T3}\} < 2\pi, 0 \leq \phi_1^{T3} < 2\beta\pi, \phi_2^{T3} - 2\beta\pi \sim O((K^*)^{-1})$.

さらに, 脚3が接地する条件として, 脚3の付け根と地面の距離 L_3^{r*} は, 脚3の接地時の位相 ϕ_3^{id} で決まる脚の長さとも一致しなければならない ($\Delta l_3^* = 0$) ので, 以下の位相関係式を得る.

$$L_3^{r*} = 1 - \frac{(2\pi - \phi_3^{T3})d^*}{2(1-\beta)} + O((K^*)^{-2}), \quad (\text{A.14})$$

なお, $2\pi - \phi_3^{\text{T3}} \sim O((K^*)^{-1})$.

4) 周期解の導出

未知量 $\hat{\phi}_2^{\text{ld}}$ は, 接地条件 ($\Delta l_1^* = 0$) ((A.8) 式) から以下のように求めることが出来る.

$$\hat{\phi}_2^{\text{ld}} = 2\pi - (1 - \beta) \frac{1}{d^* K^*} + O((K^*)^{-2}). \quad (\text{A.15})$$

未知量 $\hat{\psi}_1^{\text{T2}}, \hat{\psi}_2^{\text{T2}}$ は, 接地条件 ($\Delta l_2^* = 0$) ($\Delta l_3^* = 0$) (式 (A.11) (A.14)) を s^* に対して摂動展開することで, K^* の2次以上の微小量を見捨て (2.19) 式のように求まる.

A.4 進行波歩容の安定解析

本付録では，2.3.2節にて得られた誤差発展行列((2.20)式)を導出する．イベントT2直前において十分小さな摂動($\Delta\psi_1, \Delta\psi_2$)を加えた時，各イベント(T2,T3,T1)におけるセンサフィードバックの量を順に計算して，半周期分の誤差発展行列を求める．なお，摂動のオーダーは $O(K^{*-1})$ として，接地脚集合(S_{T1}, S_{T2}, S_{T3})を変えないとした．

1) イベントT2での位相リセット量

イベントT2直前において摂動が加わった時に，イベントT2直前の各振動子の位相は，摂動($\Delta\psi_1, \Delta\psi_2$)を使って以下のようにかける．

$$\begin{aligned}\phi_1^{T2} &= \phi_2^{\text{id}} - \psi_1^{T2}, \\ \phi_2^{T2} &= \phi_2^{\text{id}}, \\ \phi_3^{T2} &= \phi_2^{\text{id}} + \psi_2^{T2} - 2\pi,\end{aligned}\tag{A.16}$$

なお，

$$\begin{aligned}\psi_1^{T2} &= \hat{\psi}_1^{T2} + \Delta\psi_1, \\ \psi_2^{T2} &= \hat{\psi}_2^{T2} + \Delta\psi_2.\end{aligned}$$

ϕ_2^{id} は，(A.16)式を(A.10)(A.11)式に代入して，摂動展開することで得られる．

$$\begin{aligned}\phi_2^{\text{id}} &= 2\pi - (1-\beta)\frac{1}{d^*K^*} + 2(1-c_1)\Delta\psi_1, \\ c_1 &= \frac{5}{6} - \frac{4}{45\beta} \frac{s^*}{a^*}.\end{aligned}\tag{A.17}$$

Fig. 2.11より，イベントT2における位相リセット量は $(1-\beta)/(2d^*K^*) - (1-c_1)\Delta\psi_1$ と表される．

2) イベントT3での位相リセット量

イベントT2での位相リセット量をつかって，イベントT3直前の位相は以下でかける (Fig. 2.11):

$$\begin{aligned}\phi_1^{T3} &= \phi_3^{\text{id}} - \psi_1^{T3} - \psi_2^{T3}, \\ \phi_2^{T3} &= \phi_3^{\text{id}} - \psi_2^{T3}, \\ \phi_3^{T3} &= \phi_3^{\text{id}},\end{aligned}\tag{A.18}$$

なお，

$$\begin{aligned}\psi_1^{T3} &= \hat{\psi}_1^{T2} + \frac{1}{2}(1-\beta)\frac{1}{d^*K^*} + c_1\Delta\psi_1, \\ \psi_2^{T3} &= \hat{\psi}_2^{T2} - \frac{1}{2}(1-\beta)\frac{1}{d^*K^*} + (1-c_1)\Delta\psi_1 + \Delta\psi_2.\end{aligned}$$

ϕ_3^{id} は, (A.18)式を(A.13)(A.14)式に代入して, 摂動展開することで得られる.

$$\begin{aligned}\phi_3^{\text{id}} &= 2\pi - (1-\beta)\frac{1}{d^*K^*} + 2(1-c_2)(1-c_1)\Delta\psi_1 + 2(1-c_2)\Delta\psi_2, \\ c_2 &= \frac{13}{18} + \frac{4}{81\beta}\frac{s^*}{a^*}.\end{aligned}\tag{A.19}$$

Fig. 2.11 より, イベント T3 における位相リセット量は $(1-\beta)/(2d^*K^*) - (1-c_2)(1-c_1)\Delta\psi_1 - (1-c_2)\Delta\psi_2$ と表される.

3) イベント T1 での位相リセット量

イベント T3 での位相リセット量を使って, イベント T1 直前の位相は以下で書ける (Fig. 2.11):

$$\begin{aligned}\phi_1^{\text{T1}} &= \phi_1^{\text{id}}, \\ \phi_2^{\text{T1}} &= \phi_1^{\text{id}} + \psi_1^{\text{T1}} - 2\pi, \\ \phi_3^{\text{T1}} &= \phi_1^{\text{id}} + \psi_1^{\text{T1}} + \psi_2^{\text{T1}} - 2\pi,\end{aligned}\tag{A.20}$$

なお,

$$\begin{aligned}\psi_1^{\text{T1}} &= \hat{\psi}_1^{\text{T2}} + \frac{1}{2}(1-\beta)\frac{1}{d^*K^*} + c_1\Delta\psi_1, \\ \psi_2^{\text{T1}} &= \hat{\psi}_2^{\text{T2}} + c_2(1-c_1)\Delta\psi_1 + c_2\Delta\psi_2.\end{aligned}$$

ϕ_1^{id} は, (A.7)(A.8)式から以下で得られる.

$$\phi_1^{\text{id}} = 2\pi - (1-\beta)\frac{1}{d^*K^*}.\tag{A.21}$$

Fig. 2.11 から, イベント T1 における位相リセット量は $(1-\beta)/(2d^*K^*)$ と求まる.

4) 1周期後の位相差発展

イベント T1 における位相リセット量を用いて, 半周期後のイベント T2 直前の位相差 ($\psi_1^{\text{T2}'}, \psi_2^{\text{T2}'}$) は以下で求まる (Fig. 2.11 参考).

$$\begin{aligned}\psi_1^{\text{T2}'} &= \hat{\psi}_1^{\text{T2}} + c_1\Delta\psi_1, \\ \psi_2^{\text{T2}'} &= \hat{\psi}_2^{\text{T2}} + c_2(1-c_1)\Delta\psi_1 + c_2\Delta\psi_2.\end{aligned}\tag{A.22}$$

残りの半周期についても同じ議論が適用できるため(脚の接地順序は同じ), 摂動の誤差発展行列は(2.20)式で得られる.

付録 B

多足シンプルモデルの解析解導出に関する付録

B.1 解に対する仮定(B1-5)に基づく接地条件式(3.17)の導出方法

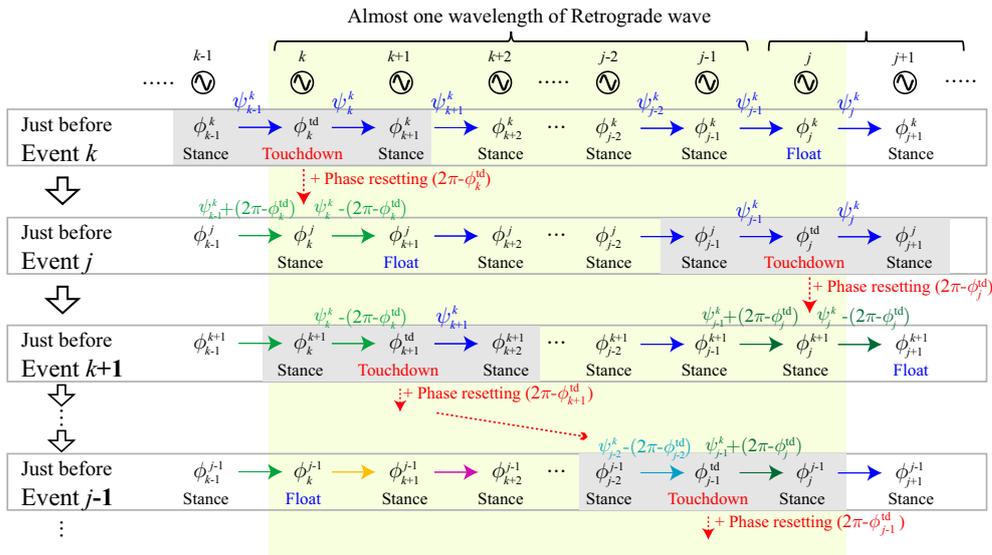


Fig. B.1: Evolution of phases at touchdown events in the case that Leg j is in the air just before event k . Figure shows the phase and geometrical relations among Leg k -Leg j .

本資料では，脚 k 基準のわきだし波解集合に対する接地条件式(3.17)の導出方法を説明する．それぞれ後退波部分と進行波部分に分けて議論を行う．はじめに，解に対する仮定(B1-5)を使うことで，脚 i が接地する直前の隣の脚との位相差 (ψ_{i-1}^i, ψ_i^i) が，断面 Σ_p^k 上の位相差 (ψ_{i-1}^k, ψ_i^k) と接地位相 $(\phi_{i-1}^{td}, \phi_{i+1}^{td})$ を使って表せることを示す．その後，得られた結果を使って周期解の接地条件式(3.17)の導出方法を簡単に述べる

1) 脚*i*の接地直前の位相差(ψ_{i-1}^i, ψ_i^i)について

A) 後退波部分について

仮定(B2,3)から，浮遊脚¹の波が脚*k*から脚*N+1*に向かって進んでいくことが分かる．なお，隣あう2つの脚が浮遊脚になることはなく，ある浮遊脚の脚が接地すると同時に，後ろ隣りの脚が浮遊脚になる．つまり，1波長の後退波に浮遊脚は1つだけ存在する．

これらの特徴を用いることで，例えば Σ_p^k 上で脚*j*($j > k$)が浮遊脚であり，脚*k+1*から脚*j-1*が接地している場合に，後退波部分($k \leq i \leq j$)の接地イベント*i*がどのような順番で起きるかをFig. B.1のようにあらわすことが出来る(Fig. B.1はFig. 3.8をカラーにして分かりやすくしたものである)．以後この図の場合を例に議論を進める．この図の場合において，断面 Σ_p^k 上で脚*k*が接地の直前であり，脚*j*は浮遊脚である．そのため，脚*k*-脚*j-1*間は後退波のおよそ1波長に対応している．また，解に対する仮定から1つの遊脚が後ろに進んでいくので，時間が進むにつれて，脚*j, k+1, k+2, k+3...*と順に接地していき，最終的には脚*j-1*が接地することが分かる．つまり，区間 $[k, j]$ における脚*i*の接地する順番は決定される．

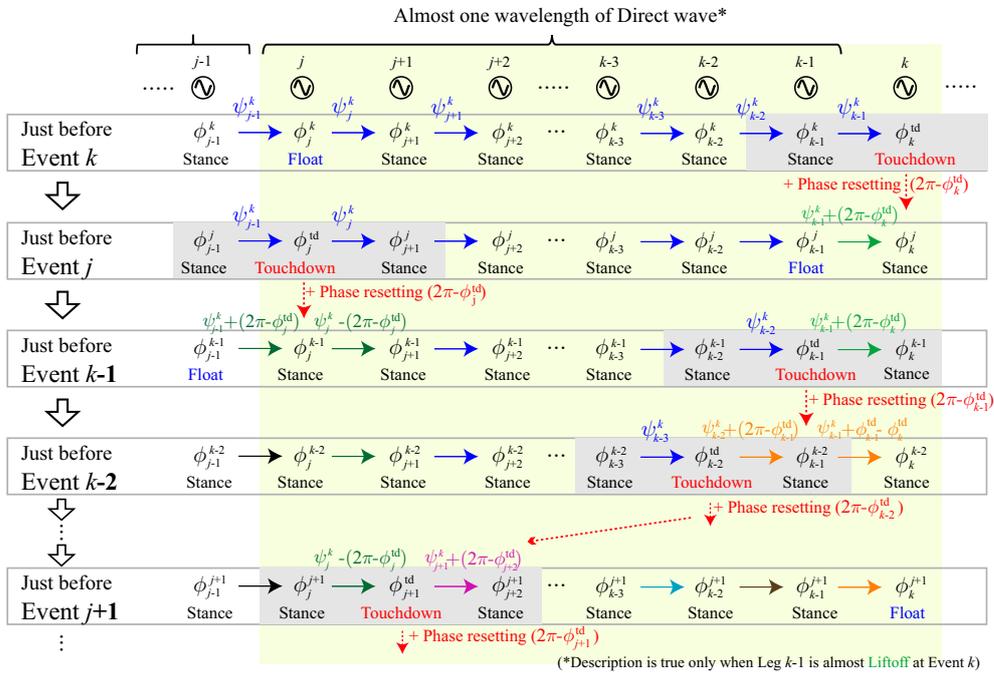
局所的な脚の接地する順番が決まるため，断面 Σ_p^k から脚*i* $\in [k, j]$ が接地する直前までに，その両隣の脚*i-1, i+1*が位相リセットを経験しているかどうか分かる．例えば，脚*k, j*の場合，両隣の脚はまだ接地していないので位相リセットを経験していない．脚*j-1*の場合は，接地イベントは最後に起きるので，両隣の脚は位相リセットを経験している．脚*i* $\in [k+1, j-2]$ の場合，前脚は位相リセットを経験しているが，後ろ脚については経験していない．なお，ここまでは，断面 Σ_p^k 上で脚*j*が浮遊脚であるとして， $i \in [k, j]$ の範囲で議論を行った(およそ1波長分の後退波に対する議論)が，この議論は容易に*i* $\in [k, N+1]$ の範囲に一般化可能である．なぜなら，議論の本質は，前から後ろに接地イベントが起こるという関係が，断面 Σ_p^k 上で脚*k*または浮遊脚(*k, j, \dots*)を起点に始まり，次の浮遊脚の手前(*j-1, \dots*)で終わるという点にあるからである．一般化を行った結果，集合 $S_{1,2,4}$ を用いてTable B.1のように位相リセットの経験の仕方が分類できる．

最後に，断面 Σ_p^k から脚*i*が接地する直前までの間に，隣の脚との位相差(ψ_{i-1}, ψ_i)は，それぞれ脚*i-1*と脚*i+1*が経験する位相リセットの影響のみを受ける．これは，(3.12)式でまだ接地していない脚*i*の接地位相 ϕ_i^d の項を取り除けば明らかである．つまり，隣の脚の位相リセットの経験の有無が分かれば，脚*i*が接地する直前の位相差(ψ_{i-1}^i, ψ_i^i)を，ポアンカレ断面上の位相差

¹これは本文の定義に従う．脚が浮いていない場合もある．

Table B.1: Phase differences just before Leg i touches down.

Set	Was phase resetting?		ψ_{i-1}^i	ψ_i^i
	Leg $i-1$	Leg $i+1$		
$i \in S_1$	No	No	ψ_{i-1}^k	ψ_i^k
$i \in S_2$	Yes	Yes	$\psi_{i-1}^k - (2\pi - \phi_{i-1}^{\text{td}})$	$\psi_i^k + (2\pi - \phi_{i+1}^{\text{td}})$
$i \in S_3$	No	Yes	ψ_{i-1}^k	$\psi_i^k + (2\pi - \phi_{i+1}^{\text{td}})$
$i \in S_4$	Yes	No	$\psi_{i-1}^k - (2\pi - \phi_{i-1}^{\text{td}})$	ψ_i^k

Fig. B.2: Evolution of phases at touchdown events in the case that Leg j is in the air just before event k . Figure shows the phase and geometrical relations among Leg j -Leg k .

(ψ_{i-1}^k, ψ_i^k) と、脚 $i-1$ と脚 $i+1$ の接地位相 $(\phi_{i-1}^{\text{td}}, \phi_{i+1}^{\text{td}})$ を使って表せる。分かりやすいように、Fig. B.1 にそれぞれの位相差が位相リセット後にどのように発展するかが表されている。よって、Table B.1 のように脚 i が接地する直前の位相差を断面 Σ_p^k 上の位相差で表すことが出来る。

B) 進行波部分について

基本的に後退波部分の場合と同様の議論が展開できる。仮定(B4)から、浮遊脚の波が脚 $k-1$ から脚 1 に向かって進んでいくことが分かる。なお、隣あ

う2つの脚が浮遊脚になることはなく、ある浮遊脚の脚が接地すると同時に、前隣の脚が浮遊脚になる。つまり、1波長の進行波に浮遊脚は1つだけ存在する。

これらの特徴を用いることで、例えば Σ_p^k 上で脚 $j(< k-1)$ が浮遊脚であり、脚 $j+1$ から脚 $k-1$ が接地している場合に、進行波部分($j \leq i \leq k-1$)の接地イベント i がどのような順番で起きるかをFig. B.2のようにあらわすことが出来る。以後この図の場合を例に議論を進める。解に対する仮定から1つの浮遊脚が前に進んでいくので、時間が進むにつれて、脚 $j, k-1, k-2, k-3\dots$ と順に接地していき、最終的には脚 $j+1$ が接地することが分かる。つまり、区間 $[j, k]$ における脚 i の接地する順番は決定される。

局所的な脚の接地する順番が決まるため、後退波の場合と同様に、断面 Σ_p^k から脚 $i \in [j, k]$ が接地する直前までに、その両隣の脚 $i-1, i+1$ が位相リセットを経験しているかどうか分かる。例えば、脚 k, j の場合、両隣の脚はまだ接地していないので位相リセットを経験していない。脚 $j+1$ の場合は、接地イベントは最後に起きるので、両隣の脚は位相リセットを経験している。脚 $i \in [j+2, k-1]$ の場合、後ろ脚は位相リセットを経験しているが、前脚については経験していない。なお、ここまでは、断面 Σ_p^k 上で脚 j が浮遊脚であるとして、 $i \in [j, k]$ の範囲で議論を行ったが、この議論は容易に $i \in [1, k]$ の範囲に一般化可能である。なぜなら、議論の本質は、後ろから前に接地イベントが起こるという関係が、断面 Σ_p^k 上での脚 k か浮遊脚(k, j, \dots)を起点に始まり、次の浮遊脚の後ろ隣り($j+1, \dots$)で終わるという点にあるからである。一般化を行った結果、集合 $S_{1,2,3}$ を用いてTable B.1のように位相リセットの経験の仕方が分類できる。

最後に、後退波の部分と同様に、隣の脚の位相リセットの経験の有無が分かれば、脚 i が接地する直前の位相差(ψ_{i-1}^i, ψ_i^i)を、ポアンカレ断面上の位相差(ψ_{i-1}^k, ψ_i^k)と、脚 $i-1$ と脚 $i+1$ の接地位相($\phi_{i-1}^{\text{id}}, \phi_{i+1}^{\text{id}}$)を使って表せる。なお、Fig. B.2にそれぞれの位相差が位相リセット後にどのように発展するかが表されている。結果、Table B.1のように脚 i が接地する直前の位相差を断面 Σ_p^k 上の位相差で表すことが出来る。

ここまでの議論では、境界($i = 1, N$)の場合については特に議論してこなかった。境界におけるリセットの経験の有無と隣の脚との位相差については、本質的に同様の議論を行うことで、Table B.2のように位相差を求められる。また、断面上で浮遊脚が無い場合や、 $k = 2, N$ で進行波か後退波部分が存在しない場合についても議論しなかった。これら場合については、Table B.1, B.2で対応する集合が空集合になることで矛盾なく議論が進むことは明

Table B.2: Phase differences just before Legi touches down.

Set	Was phase resetting?		ψ_{i-1}^i	ψ_i^i
	Legi-1	Legi+1		
$i = 1 \in J_D^k$	-	No	-	ψ_i^k
$i = 1 \notin J_D^k$	-	Yes	-	$\psi_i^k + (2\pi - \phi_{i+1}^{\text{td}})$
$i = N+1 \in J_R^k$	No	-	ψ_{i-1}^k	-
$i = N+1 \notin J_R^k$	Yes	-	$\psi_{i-1}^k - (2\pi - \phi_{i-1}^{\text{td}})$	-

らかであろう。

2) 周期解の接地条件式 (3.17) の導出

仮定(B2-5)によって、任意の脚*i*が接地する直前において脚*i*の両隣の脚は接地している($i=1, N+1$ なら片隣の脚は接地している)ため、周期解のすべてのイベントに対する接地条件式は(3.13)式で簡単化される。ここまでの結果を使うことで、脚*i*が接地する直前の隣との位相差 ψ_{i-1}^i, ψ_i^i は、脚*i*の属す集合に応じてTable B.1, B.2のように表すことが出来る。(3.13)式の右辺の関数の引数 $\phi_{i-1}^i, \phi_{i+1}^i$ が、 $\phi_{i-1}^i = \phi_i^{\text{td}} - \psi_{i-1}^i, \phi_{i+1}^i = \phi_i^{\text{td}} + \psi_i^i$ と表せることに注意すれば、これまでの結果を代入して以下の接地条件式を得ることが出来る。

$$l(\phi_i^{\text{td}}) = \begin{cases} f_B(\phi_1^{\text{td}} + \psi_1^k - 2\pi) & i = 1 \in J_D^k, \\ f_B(\phi_1^{\text{td}} + \psi_1^k - \phi_2^{\text{td}}) & i = 1 \notin J_D^k, \\ f_B(\phi_{N+1}^{\text{td}} - \psi_N^k) & i = N+1 \in J_R^k, \\ f_B(\phi_{N+1}^{\text{td}} - \psi_N^k + 2\pi - \phi_N^{\text{td}}) & i = N+1 \notin J_R^k, \\ f(\phi_i^{\text{td}} - \psi_{i-1}^k, \phi_i^{\text{td}} + \psi_i^k - 2\pi) & i \in S_1, \\ f(\phi_i^{\text{td}} - \psi_{i-1}^k + 2\pi - \phi_{i-1}^{\text{td}}, \phi_i^{\text{td}} + \psi_i^k - \phi_{i+1}^{\text{td}}) & i \in S_2, \\ f(\phi_i^{\text{td}} - \psi_{i-1}^k, \phi_i^{\text{td}} + \psi_i^k - \phi_{i+1}^{\text{td}}) & i \in S_3, \\ f(\phi_i^{\text{td}} - \psi_{i-1}^k + 2\pi - \phi_{i-1}^{\text{td}}, \phi_i^{\text{td}} + \psi_i^k - 2\pi) & i \in S_4 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

なお、(B.1)式の右辺の関数の引数は、 $[0, 2\pi)$ の範囲に収まるように 2π を足し引きして調整されている。この式に周期解条件(3.16)を代入することで、本論文で議論した周期解の接地条件式(3.17)が導出される。

B.2 わきだし波解集合の周期解の詳細な導出

わきだし波解集合の周期解の導出の詳細を説明する． $N+1$ 個の未知量 $\hat{\psi}_i^k$ と $\hat{\phi}^{\text{td}}$ に対して， $N+1$ 個の代数方程式(式(3.17))を解けばよい．以下，仮定(B1-5)を用いて，式(3.17)をそれぞれの i に対して解いていく．

1) $i = N+1$ の場合 (後ろ境界)

この時， $i \in J_R^k$ かどうかによらず，仮定B5より隣の脚 N は支持脚相である．さらに，接地位相に対して仮定B1 ($\hat{\phi}^{\text{td}} \in [(1+\beta)\pi, \pi)$) がなり立つことも使うと，式(3.17)の $i = N+1$ の場合の式は，式(3.4)(3.15)を用いて以下のように書くことができる．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}}) = L - \frac{m_B g}{k_t} \quad (\text{B.1})$$

なお， $b = a_s / (1 - \beta)\pi$ である．以上より，未知量 $\hat{\phi}^{\text{td}}$ が決定できる．

$$\hat{\phi}^{\text{td}} = 2\pi - \frac{m_B g}{k_t b} \quad (\text{B.2})$$

2) $i = 1$ の場合 (前境界)

この時， $i \in J_D^k$ かどうかによらず，仮定B5より隣の脚2は支持脚相である．さらに，接地位相に対して仮定B1がなり立つことも使うと，式(3.17)の $i = 1$ の場合の式は，式(3.4)(3.15)を用いて以下のように書くことができる．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}}) = L - \frac{m_B g}{k_t} \quad (\text{B.3})$$

これは，式(B.1)そのものである．

3) $i \in J_D^k$ の場合

仮定B4より前脚 $i-1$ は遊脚相Takeoffであり，後ろ脚 $i+1$ は支持脚相である．さらに，接地位相に対して仮定B1がなり立つことも使うと，式(3.17)の $i \in J_D^k$ の場合の式は，式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことができる．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_{i-1}^k - 2\beta\pi) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.4})$$

これを解いて位相差が求まる．

$$\hat{\psi}_{i-1}^k = 2(1 - \beta)\pi - \frac{(3m_B - m)g}{k_t b} \quad (\text{B.5})$$

4) $i \in J_R^k$ の場合

仮定B3より前脚 $i-1$ は支持脚相であり，後ろ脚 $i+1$ はTakeoff相である．さら

に，接地位相に対して仮定B1がなり立つことも使うと，式(3.17)の $i \in J_R^k$ の場合の式は，式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことができる．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_i^k - 2\pi - 2\beta\pi) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.6})$$

これを解いて位相差が求まる．

$$\hat{\psi}_i^k = 2\beta\pi + \frac{(3m_B - m)g}{k_t b} \quad (\text{B.7})$$

5) $i-1 \in J_D^k$ の場合

仮定B4より前脚 $i-1$ は遊脚相Takeoffであり，後ろ脚 $i+1$ は支持脚相である．さらに，接地位相に対して仮定B1がなり立つことも使うと，式(3.17)の $i-1 \in J_D^k$ の場合の式は，式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことができる．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(2\pi - \hat{\psi}_{i-1}^k - 2\beta\pi) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.8})$$

これを解いて位相差が求まる．

$$\hat{\psi}_{i-1}^k = 2(1 - \beta)\pi - \frac{(2m_B - m)g}{k_t b} \quad (\text{B.9})$$

6) $i+1 \in J_R^k$ の場合

仮定B3より前脚 $i-1$ は支持脚相であり，後ろ脚 $i+1$ はTakeoff相である．さらに，接地位相に対して仮定B1がなり立つことも使うと，式(3.17)の $i+1 \in J_R^k$ の場合の式は，式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことができる．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\psi}_i^k - 2\beta\pi) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.10})$$

これを解いて位相差が求まる．

$$\hat{\psi}_i^k = 2\beta\pi + \frac{(2m_B - m)g}{k_t b} \quad (\text{B.11})$$

7) $i \in [2, k-1]$ and $i \notin J_D^k$ and $i-1 \notin J_D^k$ の場合

仮定B4より前脚 $i-1$ は遊脚相Takeoffであり，後ろ脚 $i+1$ は支持脚相である．さらに，接地位相に対して仮定B1がなり立つことも使うと，式(3.17)の対応する式は，式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことができる．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_{i-1}^k - 2\beta\pi) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.12})$$

これを解いて位相差が求まる．

$$\hat{\psi}_{i-1}^k = 2(1-\beta)\pi - \frac{(3m_B - m)g}{k_1 b} \quad (\text{B.13})$$

8) $i \in [k+1, N]$ and $i \notin J_R^k$ and $i+1 \notin J_R^k$ の場合

仮定B3より前脚 $i-1$ は支持脚相であり，後ろ脚 $i+1$ はTakeoff相である．さらに，接地位相に対して仮定B1がなり立つことも使うと，式(3.17)の対応する場合の式は，式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことが出来る．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{id}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\phi}^{\text{id}} + \hat{\psi}_i^k - 2\pi - 2\beta\pi) - \frac{mg}{2k_1} \quad (\text{B.14})$$

これを解いて位相差が求まる．

$$\hat{\psi}_i^k = 2\beta\pi + \frac{(3m_B - m)g}{k_1 b} \quad (\text{B.15})$$

9) $i = k$ の場合

仮定B2より，前脚 $k-1$ は支持脚相の場合とTakeoff相の場合の二通りがある．また，後ろ脚 $k+1$ は仮定からTakeOff中であるとする．

9-A) 脚 $k-1$ が遊脚相Takeoffの場合(解集合Aに対応)

この場合，脚 $k-1$ と脚 $k+1$ はTakeoff相なので，位相条件は以下のようにかける．

$$2\beta\pi < 2\pi - \frac{m_B g}{k_1 b} - \hat{\psi}_{k-1}^k < (1+\beta)\pi \quad (\text{B.16})$$

$$2\beta\pi < \hat{\psi}_k^k - \frac{m_B g}{k_1 b} < (1+\beta)\pi \quad (\text{B.17})$$

この時，式(3.17)の対応する部分は以下のように展開できる．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{id}}) = L - \frac{1}{2}b(2\hat{\phi}^{\text{id}} - \hat{\psi}_{k-1}^k + \hat{\psi}_k^k - 2\pi - 4\beta\pi) - \frac{mg}{2k_1} \quad (\text{B.18})$$

これを解くことで以下の式が得られる．

$$\hat{\psi}_k^k = \hat{\psi}_{k-1}^k + 2(2\beta - 1)\pi + \frac{(4m_B - m)g}{k_1 b} \quad (\text{B.19})$$

なお，この関係と式(B.16)(B.17)を組み合わせることで，不等式条件を以下でまとめることが出来る．

$$2(1-\beta)\pi - \frac{(3m_B - m)g}{k_1 b} < \hat{\psi}_{k-1}^k < 2(1-\beta)\pi - \frac{m_B g}{k_1 b} \quad (\text{B.20})$$

9-B) 脚 $k-1$ が支持脚相の場合 (解集合Bに対応)

このときの脚 $k-1$ の位相条件は,

$$0 \leq 2\pi - \frac{m_B g}{k_1 b} - \hat{\psi}_{k-1}^k \leq 2\beta\pi \quad (\text{B.21})$$

とかける. 一方, 脚 $k-1$ が接地した時に, 脚 k は支持脚相なので(仮定B4), 以下の不等式を得る.

$$0 \leq \hat{\psi}_{k-1}^k \leq 2\beta\pi \quad (\text{B.22})$$

よって, 脚 $k-1$ の位相条件は合わせて以下の形でかける.

$$2(1-\beta)\pi - \frac{m_B g}{k_1 b} \leq \hat{\psi}_{k-1}^k \leq 2\beta\pi \quad (\text{B.23})$$

この時, 式(3.17)の対応する式は以下のように展開できる.

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{id}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\phi}^{\text{id}} + \hat{\psi}_k^k - 2\pi - 2\beta\pi) - \frac{mg}{2k_1} \quad (\text{B.24})$$

よって,

$$\hat{\psi}_k^k = 2\beta\pi + \frac{(3m_B - m)g}{k_1 b} \quad (\text{B.25})$$

と得られる

ここまでの結果をまとめると, 本稿で議論した周期解(式(3.19))が得られる.

B.3 仮定した接地脚集合の物理的妥当性の確認

仮定(B2-5)で仮定した接地脚集合が，得られた解に対して物理的に妥当であることを示すには，接地していると仮定した脚 i の長さ $l(\phi_i) = x_i$ をつり合いの式(3.8)に代入し，制約条件(3.9)に矛盾しない($R_i > 0$ である)ことを確認すれば良い．しかし， R_i を求めるためには， x_{i-1}, x_{i+1} を求める必要がある((3.8)式)．これらを求めるには，脚 $i-1, i+1$ が接地しているかどうかとも知る必要があり，これは容易ではない．

そのため，本付録では，脚 i が制約条件(3.9)に矛盾なく接地しているための，位相 ϕ_i の十分条件を導出する(B.3.1節)．この十分条件をもとにして，仮定(B2-5)を満足する接地脚集合が物理的に妥当であるための位相条件を導出する(B.3.2節)．そして，議論するパラメータ領域($m/2 < m_B < m, 1/2 < \beta < 1, mg < k_t a_s$ (3.2節参照))において，得られた解がこの位相条件に矛盾していないことを確認する(B.3.3節)．

B.3.1 準備

Theorem 1 ある脚 $i \in [1, N+1]$ の位相が支持脚相($0 \leq \phi_i \leq 2\beta\pi$)であれば，その脚は(3.9)式に矛盾なく接地している

Proof 支持脚相の位相において脚 i の長さは最大値 L を取る((3.4)式)．つり合いの式(3.8)から $x_{i-1} - x_i < 0$ かつ $x_{i+1} - x_i < 0$ であるので，明らかに $R_i > 0$ である．これは制約条件(3.9)に矛盾しない． □

Theorem 2 ある脚 $i \in [2, N]$ が浮いている時に，隣りの脚 k ($k = i+1$ あるいは， $k = i-1$)が(3.9)式に矛盾なく接地しており，かつその位相が遊脚相のTakeoff相であるための十分条件は以下の条件である．

$$2\beta\pi < \phi_k < 2\beta\pi + \frac{mg}{k_t b} \quad (\text{B.26})$$

Proof 定理の位相条件が遊脚相のTakeoff相である($2\beta\pi < \phi_k < (1+\beta)\pi$)ことは， b の定義と， $mg/k_t < a_s$ を使うことで証明できる．ここでは，(B.26)式が，脚 k が接地しているための十分条件になっていることを証明すればよい．2つの場合に分けて背理法を用いて十分性を証明する．

a) $k \in [3, N-1]$ のとき

脚 k が浮いていると仮定する．このとき，セグメント k の地面からの高さ x_k

の最大値 $x_k^{\max1}$ を求める．これは，明らかに脚 k の隣りの脚 $j(\neq i)$ と，脚 i の隣りの脚 $n(\neq k)$ が長さ L で接地している場合 ($x_j = x_n = L$) であり，(3.8) 式の i と k に対応する部分を x_k について解けば， $x_k^{\max1}$ は以下のように求められる．

$$x_k^{\max1} = L - \frac{mg}{k_t} \quad (\text{B.27})$$

この時，定理の位相条件 (B.26) より， $l(\phi_k) > x_k^{\max1}$ が成り立っている．これは脚が浮いているための制約条件 $l(\phi_k) \leq x_k$ (3.9) 式) に矛盾している．つまり，脚 k は必ず接地している．

b) $k \in \{1, N+1\}$ のとき

同様に，脚 k が浮いていると仮定したときの，セグメント k の地面からの高さ x_k の最大値 $x_k^{\max2}$ を求める．これは，明らかに脚 i の隣りの脚 $j \neq k$ の長さが L で接地している場合 ($x_j = L$) であり，以下のように求められる．

$$x_k^{\max2} = L - \frac{(m + m_B)g}{k_t} \quad (\text{B.28})$$

この時，定理の位相条件 (B.26) より， $l(\phi_k) > x_k^{\max2}$ が成り立っている．これは脚が浮いているための制約条件 $l(\phi_k) \leq x_k$ (3.9) 式) に矛盾している．つまり，脚 k は必ず接地している．以上の議論から，定理は証明できた． \square

B.3.2 接地脚集合が物理的に妥当であるための位相条件

それぞれの仮定 (B2-5) に対して，接地脚集合が物理的に妥当であるための位相条件の導出を行う．

1) 仮定 (B2) が物理的に妥当であるための位相条件

仮定 (B2) が物理的に妥当であるための十分条件は，脚 k が接地する直前の隣りの脚の位相 $\phi_{k-1}^k, \phi_{k+1}^k$ に対して以下の位相条件で表すことができる．

$$0 \leq \phi_{k-1}^k < 2\beta\pi + \frac{mg}{k_t b} \quad (\text{B.29})$$

$$2\beta\pi < \phi_{k+1}^k < 2\beta\pi + \frac{mg}{k_t b} \quad (\text{B.30})$$

この導出過程を説明する．(B2) では，脚 k が接地する直前 (脚 k は浮いている) に，前脚 $k-1$ は接地しており，その位相は支持脚相または遊脚相の Takeoff 相であると仮定した．ここで，定理 1 を使うことで，前脚 $k-1$ が支持脚相 ($0 \leq \phi_{k-1}^k \leq 2\beta\pi$) であれば前脚 $k-1$ は接地していることがわかる．さらに，定理 2 を使うことで，前脚 $k-1$ が遊脚相の Takeoff 相で接地しているための位相条

件 $(2\beta\pi < \phi_{k-1}^k < 2\beta\pi + \frac{mg}{k_1 b})$ がわかる. これらを組み合わせると, 前脚 $k-1$ が接地しているための十分条件が (B.29) 式で得られる.

一方, 後脚 $k+1$ に対しては, 脚 k が接地する直前(脚 k は浮いている)に接地しており, その位相は遊脚相の Takeoff 相であると仮定した (B2). 定理 2 を使うことで, 後脚 $k+1$ が遊脚相の Takeoff 相で接地しているための位相条件 $(2\beta\pi < \phi_{k+1}^k < 2\beta\pi + \frac{mg}{k_1 b})$ がわかる ((B.30) 式).

2) 仮定 (B3) が物理的に妥当であるための位相条件

同様に, 定理 1,2 を使うことによって, 仮定 (B3) が物理的に妥当であるための位相条件は, 脚 $i \in [k+1, N]$ が接地する直前の位相 $\phi_{i-1}^i, \phi_{i+1}^i$ に対して以下の位相条件で書くことができる.

$$0 \leq \phi_{i-1}^i \leq 2\beta\pi \quad (\text{B.31})$$

$$2\beta\pi < \phi_{i+1}^i < 2\beta\pi + \frac{mg}{k_1 b} \quad (\text{B.32})$$

3) 仮定 (B4) が物理的に妥当であるための位相条件

同様に, 定理 1,2 を使うことによって, 仮定 (B4) が物理的に妥当であるための十分条件は, 脚 $i \in [2, k-1]$ が接地する直前の隣りの脚の位相 $\phi_{i-1}^i, \phi_{i+1}^i$ に対して以下の位相条件で書くことができる.

$$2\beta\pi < \phi_{i-1}^i < 2\beta\pi + \frac{mg}{k_1 b} \quad (\text{B.33})$$

$$0 \leq \phi_{i+1}^i \leq 2\beta\pi \quad (\text{B.34})$$

4) 仮定 (B5) が物理的に妥当であるための位相条件

同様に, 定理 1 を使って, 仮定 (B5) が物理的に妥当であるための十分条件は, 脚 $i \in \{1, N+1\}$ が接地する直前の位相 ϕ_k^i (脚 k は脚 i のとなりの脚) に対して以下の位相条件で書くことができる.

$$0 \leq \phi_k^i \leq 2\beta\pi \quad (\text{B.35})$$

B.3.3 解が位相条件を満たすことの確認

導出した解 (3.19) が, パラメータ領域 $(m/2 < m_B < m, 1/2 < \beta < 1, mg < k_1 a_s)$ (3.2 節参照) において, それぞれの仮定 (B2-5) に対する位相条件を満たすことの確認を行う.

1) 仮定 (B2) の位相条件を満たすことの確認

仮定 (B2) は脚 k が接地する直前の状態を議論しており, この時の位相 $\phi_{k-1}^k, \phi_{k+1}^k$ は周期解を使って以下であらわされる.

$$\phi_{k-1}^k = \hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_{k-1}^k \quad (\text{B.36})$$

$$\phi_{k+1}^k = \hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_k^k - 2\pi \quad (\text{B.37})$$

これに，解(3.19)(3.18)を代入することで，以下の関係式が得られる．

$$2(1-\beta)\pi - \frac{m_B g}{k_1 b} \leq \phi_{k-1}^k < 2\beta\pi + \frac{(2m_B - m)g}{k_1 b} \quad (\text{B.38})$$

$$2\beta\pi < \phi_{k+1}^k \leq 2\beta\pi + \frac{(2m_B - m)g}{k_1 b} \quad (\text{B.39})$$

議論するパラメータ領域(3.2節参照)において，この関係式は(B.29)(B.30)式に矛盾しないことがわかる．したがって，制約条件(3.9)を満足することが証明でき，ここで仮定した接地脚集合が物理的に妥当であることがわかった．

紙面の都合上省略するが，議論するパラメータ領域(3.2節参照)において，得られた解がすべての仮定(B2-5)の位相条件に矛盾しないことが同様の手順で確認できる．以上より，導出した解に対して，仮定した接地脚集合が物理的に妥当であったことが示された．

B.4 わきだし波解集合の安定解析

わきだし解の安定性の導出の詳細を説明する．各接地イベントにおけるタッチダウン位相の変化量 $\Delta\phi_i^{\text{td}}$ の関係式は，接地条件式(3.17)に， $\phi_i^{\text{td}} = \hat{\phi}^{\text{td}} + \Delta\phi_i^{\text{td}}$ ， $\psi_i^k = \hat{\psi}_i^k + \Delta\psi_i^k$ を代入することによって以下のように得られる．

$$l(\hat{\phi}^{\text{td}} + \Delta\phi_i^{\text{td}}) = \begin{cases} g_{\text{B}}(\hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_1^k - 2\pi + (\Delta\phi_1^{\text{td}} + \Delta\psi_1^k)) & i = 1 \in J_{\text{D}}^k, \\ g_{\text{B}}(\hat{\psi}_1^k + (\Delta\phi_1^{\text{td}} - \Delta\phi_2^{\text{td}} + \Delta\psi_1^k)) & i = 1 \notin J_{\text{D}}^k, \\ g_{\text{B}}(\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_N^k + (\Delta\phi_{N+1}^{\text{td}} - \Delta\psi_N^k)) & i = N + 1 \in J_{\text{R}}^k, \\ g_{\text{B}}(2\pi - \hat{\psi}_N^k + (\Delta\phi_{N+1}^{\text{td}} - \Delta\phi_N^{\text{td}} - \Delta\psi_N^k)) & i = N + 1 \notin J_{\text{R}}^k, \\ g(\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_{i-1}^k + (\Delta\phi_i^{\text{td}} - \Delta\psi_{i-1}^k), \hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_i^k - 2\pi + (\Delta\phi_i^{\text{td}} + \Delta\psi_i^k)) & i \in S_1, \\ g(2\pi - \hat{\psi}_{i-1}^k + (\Delta\phi_i^{\text{td}} - \Delta\phi_{i-1}^{\text{td}} - \Delta\psi_{i-1}^k), \hat{\psi}_i^k + (\Delta\phi_i^{\text{td}} - \Delta\phi_{i+1}^{\text{td}} + \Delta\psi_i^k)) & i \in S_2, \\ g(\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_{i-1}^k + (\Delta\phi_i^{\text{td}} - \Delta\psi_{i-1}^k), \hat{\psi}_i^k + (\Delta\phi_i^{\text{td}} - \Delta\phi_{i+1}^{\text{td}} + \Delta\psi_i^k)) & i \in S_3, \\ g(2\pi - \hat{\psi}_{i-1}^k + (\Delta\phi_i^{\text{td}} - \Delta\phi_{i-1}^{\text{td}} - \Delta\psi_{i-1}^k), \hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_i^k - 2\pi + (\Delta\phi_i^{\text{td}} + \Delta\psi_i^k)) & i \in S_4 \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

式(B.40)の関数 g の引数に対して仮定(B1-5)を考慮すると，式(B.40)はそれぞれ以下のように書き下していくことが出来る．

1) $i = N + 1$ の場合(後ろ境界)

この時， $i \in J_{\text{R}}^k$ かどうかによらず，仮定(B5)より隣の脚 N は接地相である．タッチダウン位相に対して仮定(B1)がなり立つことも使うと，式(B.40)の $i = N + 1$ の場合の式は，式(3.4)(3.15)を用いて以下のように書くことが出来る．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}} - \Delta\phi_{N+1}^{\text{td}}) = L - \frac{m_{\text{B}}g}{k_{\text{t}}} \quad (\text{B.41})$$

わきだし波の周期解(式(3.19)(3.18))を代入することで，位相リセットの変化量 $\Delta\phi_{N+1}^{\text{td}} = 0$ が決定できる．

2) $i = 1$ の場合(前境界)

この時， $i \in J_{\text{D}}^k$ かどうかによらず，仮定(B5)より隣の脚 2 は接地相である．さらに，タッチダウン位相に対して仮定(B1)がなり立つことも使うと，式(B.40)の $i = 1$ の場合の式は，式(3.4)(3.15)を用いて以下のように書くことが出来る．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}} - \Delta\phi_1^{\text{td}}) = L - \frac{m_{\text{B}}g}{k_{\text{t}}} \quad (\text{B.42})$$

わきだし波の周期解(式(3.19)(3.18))を代入して，位相リセットの変化量 $\Delta\phi_1^{\text{td}} = 0$ が決定できる．

3) $i \in J_D^k$ の場合

仮定(B4)より前脚 $i-1$ は離地相 Takeoff であり, 後ろ脚 $i+1$ は接地相である. さらに, タッチダウン位相に対して仮定(B1)がなり立つことも使うと, 式(B.40)の $i \in J_D^k$ の場合の式は, 式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことが出来る.

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}} - \Delta\phi_i^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_{i-1}^k - 2\beta\pi + (\Delta\phi_i^{\text{td}} - \Delta\psi_{i-1}^k)) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.43})$$

わきだし波の周期解(式(3.19)(3.18))を代入して, 位相リセットの変化量 $\Delta\phi_i^{\text{td}}$ が決定できる.

$$\Delta\phi_i^{\text{td}} = \frac{1}{3}\Delta\psi_{i-1}^k \quad (\text{B.44})$$

4) $i \in J_R^k$ の場合

仮定(B3)より前脚 $i-1$ は接地相であり, 後ろ脚 $i+1$ は Takeoff 相である. さらに, タッチダウン位相に対して仮定(B1)がなり立つことも使うと, 式(B.40)の $i \in J_R^k$ の場合の式は, 式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことが出来る.

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}} - \Delta\phi_i^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_i^k - 2\pi - 2\beta\pi + (\Delta\phi_i^{\text{td}} + \Delta\psi_i^k)) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.45})$$

わきだし波の周期解(式(3.19)(3.18))を代入して解けば, 位相リセットの変化量 $\Delta\phi_i^{\text{td}}$ が決定できる.

$$\Delta\phi_i^{\text{td}} = -\frac{1}{3}\Delta\psi_i^k \quad (\text{B.46})$$

5) $i-1 \in J_D^k$ の場合

仮定(B4)より前脚 $i-1$ は離地相 Takeoff であり, 後ろ脚 $i+1$ は接地相である. さらに, タッチダウン位相に対して仮定(B1)がなり立つことも使うと, 式(B.40)の $i-1 \in J_D^k$ の場合の式は, 式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことが出来る.

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}} - \Delta\phi_i^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(2\pi - \hat{\psi}_{i-1}^k - 2\beta\pi + (\Delta\phi_i^{\text{td}} - \Delta\phi_{i-1}^{\text{td}} - \Delta\psi_{i-1}^k)) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.47})$$

わきだし波の周期解(式(3.19)(3.18))と, $\Delta\phi_{i-1}^{\text{td}}$ にここまでの結果を代入することで, 位相リセットの変化量 $\Delta\phi_i^{\text{td}}$ が決定できる.

$$\Delta\phi_i^{\text{td}} = \begin{cases} \frac{1}{3}\Delta\psi_{i-1}^k & i = 2 \\ \frac{1}{3}\Delta\psi_{i-1}^k + \frac{1}{9}\Delta\psi_{i-2}^k & i \neq 2 \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

6) $i+1 \in J_R^k$ の場合

仮定(B3)より前脚 $i-1$ は接地相であり, 後ろ脚 $i+1$ は Takeoff 相である. さ

に，タッチダウン位相に対して仮定(B1)がなり立つことも使うと，式(B.40)の $i+1 \in J_R^k$ の場合の式は，式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことが出来る．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}} - \Delta\phi_i^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\psi}_i^k - 2\beta\pi + (\Delta\phi_i^{\text{td}} - \Delta\phi_{i+1}^{\text{td}} + \Delta\psi_i^k)) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.49})$$

わきだし波の周期解(式(3.19)(3.18))と， $\Delta\phi_{i+1}^{\text{td}}$ にここまでの結果を代入することで，位相リセットの変化量 $\Delta\phi_i^{\text{td}}$ が決定できる．

$$\Delta\phi_i^{\text{td}} = \begin{cases} -\frac{1}{3}\Delta\psi_i^k & i = N \\ -\frac{1}{3}\Delta\psi_i^k - \frac{1}{9}\Delta\psi_{i+1}^k & i \neq N \end{cases} \quad (\text{B.50})$$

7) $i \in [2, k-1]$ and $i \notin J_D^k$ and $i-1 \notin J_D^k$ の場合

仮定(B4)より前脚 $i-1$ は離地相Takeoffであり，後ろ脚 $i+1$ は接地相である．さらに，タッチダウン位相に対して仮定(B1)がなり立つことも使うと，式(B.40)の対応する式は，式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことが出来る．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}} - \Delta\phi_i^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_{i-1}^k - 2\beta\pi + (\Delta\phi_i^{\text{td}} - \Delta\psi_{i-1}^k)) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.51})$$

わきだし波の周期解(式(3.19)(3.18))を代入して，位相リセットの変化量 $\Delta\phi_i^{\text{td}}$ が決定できる．

$$\Delta\phi_i^{\text{td}} = \frac{1}{3}\Delta\psi_{i-1}^k \quad (\text{B.52})$$

8) $i \in [k+1, N]$ and $i \notin J_R^k$ and $i+1 \notin J_R^k$ の場合

仮定(B3)より前脚 $i-1$ は接地相であり，後ろ脚 $i+1$ はTakeoff相である．さらに，タッチダウン位相に対して仮定(B1)がなり立つことも使うと，式(B.40)の対応する場合の式は，式(3.4)(3.14)を用いて以下のように書くことが出来る．

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}} - \Delta\phi_i^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b(\hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_i^k - 2\pi - 2\beta\pi + (\Delta\phi_i^{\text{td}} + \Delta\psi_i^k)) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.53})$$

わきだし波の周期解(式(3.19)(3.18))を代入して，位相リセットの変化量 $\Delta\phi_i^{\text{td}}$ が決定できる．

$$\Delta\phi_i^{\text{td}} = -\frac{1}{3}\Delta\psi_i^k \quad (\text{B.54})$$

9) $i = k$ の場合

仮定S2より，後ろ脚 $k-1$ は接地相の場合とTakeoff相の場合の二通りがある．また，前側の脚 $k+1$ は仮定からTakeOff中であるとする．

9-A) 脚 $k-1$ が離地相 Takeoff の場合 (解集合 A に対応)

この場合, 脚 $k-1$ と脚 $k+1$ は Takeoff 相なので, 位相条件は以下のようにかける.

$$2(1-\beta)\pi - \frac{(3m_B - m)g}{k_t b} < \hat{\psi}_{k-1}^k < 2(1-\beta)\pi - \frac{m_B g}{k_t b} \quad (\text{B.55})$$

この時, 式 (B.40) の対応する部分は以下のように展開できる.

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}} - \Delta\phi_i^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b \left(2\hat{\phi}^{\text{td}} - \hat{\psi}_{k-1}^k + \hat{\psi}_k^k - 2\pi - 4\beta\pi + (2\Delta\phi_k^{\text{td}} + \Delta\psi_k^k - \Delta\psi_{k-1}^k) \right) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.56})$$

わきだし波の周期解 (式 (3.19)(3.18)) を代入して,

$$\Delta\phi_k^{\text{td}} = -\frac{1}{4}\Delta\psi_k^k + \frac{1}{4}\Delta\psi_{k-1}^k \quad (\text{B.57})$$

と得られる

9-B) 脚 $k-1$ が接地相の場合 (解集合 B に対応)

このときの脚 $k-1$ の位相条件は,

$$2(1-\beta)\pi - \frac{m_B g}{k_t b} \leq \hat{\psi}_{k-1}^k \leq 2\beta\pi \quad (\text{B.58})$$

この時, 式 (B.40) の対応する式は以下のように展開できる.

$$L - b(2\pi - \hat{\phi}^{\text{td}} - \Delta\phi_i^{\text{td}}) = L - \frac{1}{2}b \left(\hat{\phi}^{\text{td}} + \hat{\psi}_k^k - 2\pi - 2\beta\pi + (\Delta\phi_i^{\text{td}} + \Delta\psi_i^k) \right) - \frac{mg}{2k_t} \quad (\text{B.59})$$

わきだし波の周期解 (式 (3.19)(3.18)) を代入して,

$$\Delta\phi_k^{\text{td}} = -\frac{1}{3}\Delta\psi_k^k \quad (\text{B.60})$$

と得られる

ここまでの結果をポアンカレ写像の式 (3.12) に代入することで, 1 周期の誤差の発展写像を求めることが出来る. それぞれの解集合について分けて説明する.

1. $2(1-\beta)\pi - \frac{(3m_B - m)g}{k_t b} < \hat{\psi}_{k-1}^k < 2(1-\beta)\pi - \frac{m_B g}{k_t b}$ の場合 (解集合 A に対応)
この時, k の値に応じて 3 通りに分けて誤差発展写像を求める.

A) $k=2$ の場合

この場合の誤差発展写像関係は以下の形で求めることができる。

$$\Delta\psi_i^2 \mapsto \begin{cases} \frac{3}{4}\Delta\psi_1^2 + \frac{1}{4}\Delta\psi_2^2 & i = 1 \\ \frac{1}{4}\Delta\psi_1^2 + \frac{3}{4}\Delta\psi_2^2 + \frac{1}{3}\Delta\psi_2^2 & i = 2 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_N^2 & i = N \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^2 + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i+1}^2 + \frac{1}{9}\Delta\psi_{i+2}^2 & i + 2 \in J_{\mathbb{R}}^2, \text{ and } i \neq N - 1 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^2 + \frac{2}{9}\Delta\psi_{i+1}^2 & i + 1 \in J_{\mathbb{R}}^2 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^2 + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i+1}^2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B.61})$$

この位相差の誤差発展行列 $[DP]$ は、2行2列目から N 行 N 列目までのブロック行列が上三角行列である(例えば以下のような行列である)。

$$[DP] = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 & 1/3 & 1/9 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2/3 & 2/9 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.62})$$

よって、 $xI - [DP]$ の行列式 ($[DP]$ の固有方程式) は、この行列の1列目に対して余因子展開することで簡単に求まる。

$$\Phi(x) = (x-1) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right)^{N-2} \quad (\text{B.63})$$

なお、固有値1に対応する固有ベクトルは $[\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0 \dots 0]^T$ ($k-1, k$ 成分のみが値をもつ) であり、解が一意に定まらない方向と一致している。

B) $2 < k < N$ の場合

この場合の誤差発展写像関係は以下の形で求めることが出来る。

$$\Delta\psi_i^k \mapsto \begin{cases} \frac{2}{3}\Delta\psi_1^k & i = 1 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_N^k & i = N \\ \frac{1}{3}\Delta\psi_{k-2}^k + \frac{3}{4}\Delta\psi_{k-1}^k + \frac{1}{4}\Delta\psi_k^k & i = k - 1 \\ \frac{1}{4}\Delta\psi_{k-1}^k + \frac{3}{4}\Delta\psi_k^k + \frac{1}{3}\Delta\psi_{k+1}^k & i = k \\ \frac{2}{9}\Delta\psi_{i-1}^k + \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k & i \in J_D^k \\ \frac{1}{9}\Delta\psi_{i-2}^k + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i-1}^k + \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k & i - 1 \in J_D^k, \text{ and } i \neq 2 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i+1}^k + \frac{1}{9}\Delta\psi_{i+2}^k & i + 2 \in J_R^k, \text{ and } i \neq N - 1 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k + \frac{2}{9}\Delta\psi_{i+1}^k & i + 1 \in J_R^k \\ \frac{1}{3}\Delta\psi_{i-1}^k + \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k & i \in [2, k - 2] \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i+1}^k & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B.64})$$

この位相差の誤差発展行列 $[DP]$ は、1行1列目から $k-1$ 行 $k-1$ 列目までのブロック行列が下三角行列であり、 k 行 k 列目から N 行 N 列目が上三角行列である（例えば以下のような行列である）。

$$[DP] = \begin{bmatrix} 2/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2/3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 2/9 & 2/3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1/9 & 1/3 & 2/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/3 & 3/4 & 1/4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/4 & 3/4 & 1/3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 2/3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 & 1/3 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.65})$$

よって、 $xI - [DP]$ の行列式 ($[DP]$ の固有方程式) は、この行列の $k-1$ 列目に対して余因子展開することで簡単に求まる。

$$\Phi(x) = (x-1) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right)^{N-2} \quad (\text{B.66})$$

なお、固有値1に対応する固有ベクトルは $[0 \dots 0, \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0 \dots 0]^T$ ($k-1, k$ 成分のみが値をもつ)であり、解が一意に定まらない方向と一致している。

C) $k = N$ の場合

この場合の誤差発展写像関係は以下の形で求めることができる。

$$\Delta\psi_i^k \mapsto \begin{cases} \frac{2}{3}\Delta\psi_1^N & i = 1 \\ \frac{1}{4}\Delta\psi_{N-1}^N + \frac{3}{4}\Delta\psi_N^N & i = N \\ \frac{1}{3}\Delta\psi_{N-2}^N + \frac{3}{4}\Delta\psi_{N-1}^N + \frac{1}{4}\Delta\psi_N^N & i = N-1 \\ \frac{2}{9}\Delta\psi_{i-1}^N + \frac{2}{3}\Delta\psi_i^N & i \in J_D^N \\ \frac{1}{9}\Delta\psi_{i-2}^N + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i-1}^N + \frac{2}{3}\Delta\psi_i^N & i-1 \in J_D^N, \text{ and } i \neq 2 \\ \frac{1}{3}\Delta\psi_{i-1}^k + \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B.67})$$

この位相差の誤差発展行列 $[DP]$ は、1行1列目から $N-1$ 行 $N-1$ 列目までのブロック行列が下三角行列である(例えば以下のような行列である)。

$$[DP] = \begin{bmatrix} 2/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2/3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 2/9 & 2/3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1/9 & 1/3 & 2/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/3 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.68})$$

よって、 $xI - [DP]$ の行列式($[DP]$ の固有方程式)は、この行列の N 列目に対して余因子展開することで簡単に求まる。

$$\Phi(x) = (x-1) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right)^{N-2} \quad (\text{B.69})$$

なお、固有値1に対応する固有ベクトルは $[0 \dots 0, \frac{1}{2} \frac{1}{2}]^T$ ($k-1, k$ 成分のみが値をもつ)であり、解が一意に定まらない方向と一致している。

以上3つの場合分けの議論より、固有値は共通して式(3.24)の解集合Aの部分に対応する形でかける。

2. $2(1-\beta)\pi - \frac{m\beta g}{k_b} < \hat{\psi}_{k-1}^k < 2\beta\pi$ の場合 (解集合Bに対応)

この時、 k の値に応じて2通りに分けて誤差発展写像を求める。

A) $k = 2$ の場合

この場合の誤差発展写像関係は以下の形で求めることが出来る。

$$\Delta\psi_i^2 \mapsto \begin{cases} \Delta\psi_1^2 + \frac{1}{3}\Delta\psi_2^2 & i = 1 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_N^2 & i = N \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^2 + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i+1}^2 + \frac{1}{9}\Delta\psi_{i+2}^2 & i + 2 \in J_R^2 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^2 + \frac{2}{9}\Delta\psi_{i+1}^2 & i + 1 \in J_R^2 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^2 + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i+1}^2 & otherwise \end{cases} \quad (\text{B.70})$$

以上より、位相差の誤差発展行列 $[DP]$ は上三角行列になっている（例えば以下のような行列）。

$$[DP] = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 & 1/3 & 1/9 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2/3 & 2/9 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.71})$$

固有値は対角成分の値で決定される。なお、固有値1に対応する固有ベクトルは $[100 \dots 0]^T$ ($k-1$ 成分のみ値をもつ) であり、解が一意に定まらない方向と一致している。

B) $k > 2$ の場合

この場合の誤差発展写像関係は以下の形で求めることができる。

$$\Delta\psi_i^k \mapsto \begin{cases} \frac{2}{3}\Delta\psi_1^k & i = 1 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_N^k & i = N \\ \frac{1}{3}\Delta\psi_{k-2}^k + \Delta\psi_{k-1}^k + \frac{1}{3}\Delta\psi_k^k & i = k - 1 \\ \frac{2}{9}\Delta\psi_{i-1}^k + \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k & i \in J_D^k \\ \frac{1}{9}\Delta\psi_{i-2}^k + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i-1}^k + \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k & i - 1 \in J_D^k, \text{ and } i \neq 2 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i+1}^k + \frac{1}{9}\Delta\psi_{i+2}^k & i + 2 \in J_R^k, \text{ and } i \neq N - 1 \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k + \frac{2}{9}\Delta\psi_{i+1}^k & i + 1 \in J_R^k \\ \frac{1}{3}\Delta\psi_{i-1}^k + \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k & i \in [2, k - 2] \\ \frac{2}{3}\Delta\psi_i^k + \frac{1}{3}\Delta\psi_{i+1}^k & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B.72})$$

この位相差の誤差発展行列 $[\mathbf{DP}]$ は、1行1列目から $k-1$ 行 $k-1$ 列目までのブロック行列が下三角行列であり、 k 行 k 列目から N 行 N 列目が上三角行列である（例えば以下のような行列である）。

$$[\mathbf{DP}] = \begin{bmatrix} 2/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2/3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 2/9 & 2/3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1/9 & 1/3 & 2/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/3 & 1 & 1/3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2/3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 & 1/3 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.73})$$

よって、 $xI - [\mathbf{DP}]$ の行列式($[\mathbf{DP}]$ の固有方程式)は、この行列の $k-1$ 列目に対して余因子展開することで簡単に求まる。

$$\Phi(x) = (x - 1) \left(x - \frac{2}{3} \right)^{N-1} \quad (\text{B.74})$$

なお、固有値1に対応する固有ベクトルは $[0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]^T$ ($k-1$ 成分のみ値をもつ)であり、解が一意に定まらない方向と一致している。

以上2つの場合の議論により, 固有値は共通して式(3.24)の解集合Bに対応する形でかける.