論文内容の要旨

論文題目: Hodge-Tate conditions for Landau-Ginzburg models (Landau-Ginzburg 模型に対する Hodge-Tate 条件)

社本陽太

1　はじめに

この論文では、Katzarkov-Kontsevich-Pantev ([KKP]) が提唱した, Landau-Ginzburg 模型に対する予想について考察した. この予想は, Fano 多様体と Landau-Ginzburg 模型の間のホモロジー的ミラー対称性の観点から Landau-Ginzburg 模型の一般化された Hodge 理論的性質を予測したものである. この論文の主結果は次の二つにまとめられる:

1. [KKP] の予想の修正版に対して, 混合 Hodge 構造を用いた十分条件を与えた.
2. Landau-Ginzbrug 模型のいくつかの例について, 予想の修正版を証明した.

以下, この論文の内容を各節ごとに要約する.

2　第 2 節

この節では, 以降の節への準備として, 再縮尺構造 (rescaling structure) の概念を導入し, その性質を調べた. より具体的には, ベキ零な再縮尺構造 $\mathcal{H}$ に対して, Hodg-Tate 条件, 2 種類の Hodge 数 $f^{p,q}(\mathcal{H})$, $h^{p,q}(\mathcal{H})$ を定義した. そして, $\mathcal{H}$ が Hodge-Tate 条件をみたすとき, 二つの Hodge 数が一致すること: $f^{p,q}(\mathcal{H}) = h^{p,q}(\mathcal{H})$ および, $\mathcal{H}$ のあるアフィン直線への制限が「特殊 (special)」と呼ばれる性質をみたすことを示した. 再縮尺構造の応用例は, 第 3 節および付録 A で与えられる.

3　第 3 節

この節が本論文の中心となる節である. ここでは, あるクラスの Landau-Ginzburg 模型について, それから自然に得られる再縮尺構造を調べた. 本論文で扱った Landau-Ginzburg 模型のクラスは, $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数多様体 X と, 平坦な射影的射 $f : X \to \mathbb{P}^1$ の組 (X, f) であって, スキーム論的なファイバー $D := f^*(\infty)$ が被約な単純正規交差因子となるものである.

この Landau-Ginzburg 模型に対して, Kontsevich 複体 $(\Omega^{\bullet}_f, d + df\wedge)$ を二つのパラメータ λ と τ で変形したドラーム複体 $(\Omega_{f,\lambda,\tau}, d + \lambda^{-1}\tau df\wedge)$ をとり, この複体の X に沿った高次順像をとることで, 再縮尺構造 $\mathcal{H}_f$ を得る. ここで, 高次順像が再縮尺構造を与えることは, [ESY] および [Moc] から従う. また, Hodge フィ

ルターの比較によって, Hodge 数 $f^{p,q}(\mathcal{H}_f)$ が $H^q(X, \Omega_f^p)$ の次元で与えられる (したがって, 適切な修正のもとで [KKP] で与えられた Hodge 数の定義と一致する.) ことも従う.

この節の残りは, Hodge 数 $h^{p,q}(\mathcal{H}_f)$, 言い換えると, 制限 $\mathcal{H}_{f|\lambda=1}$ に対する $\tau = 0$ に於ける留数写像を調べることにあてられる. これは, 次の 2 段階で行われる.

1. 留数写像を相対コホモジー $H^*(Y, Y_b)$ が与える Gauss-Manin 系の無限遠における留数写像とみなす.
2. 1 の留数写像に対するモノドロミーウェイトフィルターが混合 Hodge 構造 $(H^*(Y, Y_\infty), F, W)$ のウェイトフィルターに一致することを示す.

ここで, $Y := X \setminus D$, $Y_b := f^{-1}(b)$ $(b \in \mathbb{C})$ であり, Gauss-Manin 系は b が ∞ の近傍を動いて得られる局所系から導かれる. また, $(H^*(Y, Y_\infty), F, W)$ は, Y のコホモロジー群に混合 Hodge 構造を与える混合 Hodge 複体と $1/f$ の近接サイクルコホモロジー群に混合 Hodge 構造を与える混合 Hodge 複体の写像錐複体を用いて得られる.

以上の考察から本論文の一つめの主結果が得られる. すなわち, 再縮尺構造 $\mathcal{H}_f$ が Hodge-Tate 条件をみたすことと, 混合 Hodge 構造 $(H^*(Y, Y_\infty), F, W)$ が (Deligne [Del] の意味で) Hodge-Tate 型であることは同値である. 第 2 節の結果より, 再縮尺構造の Hodge-Tate 条件は, 2 種類の Hodge 数の一致と「特殊」性の十分条件であった. Landau-Ginzburg 模型に対してこれらが成り立つというのが [KKP] の予想であったから,「はじめに」の節で述べた主結果 1 が得られる.

4　第 4 節

この節では, 「はじめに」の節で述べた主結果の 2 を示した. すなわち, いくつかの Landau-Ginzburg 模型に対して混合 Hodge 構造 $(H^*(Y, Y_\infty), F, W)$ が Hodge-Tate 型であることを示した. 取り扱った例は, X の次元が 2 と 3 の場合に大きく分けられる.

X の次元が 2 のとき, X が有理楕円曲面であって, f の無限遠のファイバー D が I_d 型 $(2 \leq d \leq 9)$ である場合に対して, $(H^*(Y, Y_\infty), F, W)$ が Hodge-Tate 型であることを示した. これは, Auroux-Katzarkov-Orlov [AKO] によって次数 d の del Pezzo 曲面とホモロジー的ミラー対称性で対応することが示された例である. この例に対しては, Luntz-Przyjalkowski [LP] によって Hodge 数の計算がなされていたが, 特殊性についての予想は検証されていなかった.

また, X の次元が 3 のときには, 非特異 Fano トーリック多様体のミラーとなることが期待される Landau-Ginzburg 模型に対して, $(H^*(Y, Y_\infty), F, W)$ が Hodge-Tate 型であることを示した. この例については, A. Harder [Har] が Hodge 数 $f^{p,q}(\mathcal{H}_f)$ を計算していたが, それが $h^{p,q}(\mathcal{H}_f)$ と一致することや, 特殊性については検証されていなかった.

5　付録 A

この付録では, $\mathbb{C}$ 上の (非特異)Fano 多様体 F に対して, その量子 $\mathcal{D}$ 加群から得られる再縮尺構造を調べた. まず, 半整数に対する Tate 捩りにあたるものを導入し, 量子 $\mathcal{D}$ 加群に対してこの Tate 捩りを適切に与えることによって, 再縮尺構造 $\mathcal{H}_{\mathrm{F}}$ が得られる. この $\mathcal{H}_{\mathrm{F}}$ が Hodge-Tate 条件をみたすこと, および, 二つの Hodge 数 $f^{p,q}(\mathcal{H}_{\mathrm{F}}), h^{p,q}(\mathcal{H}_{\mathrm{F}})$ が F の Hodge 数 $h^{n-p,q}(\mathrm{F})$ に等しいことを示した. このことから, Fano 多様体のミラーとなる LG 模型については, Hodge-Tate 条件が成り立つことが必要であると考えられる.

6　付録 B

この付録では, [KKP] の設定とこの論文での設定の比較, [KKP] の予想をどのように修正したかを説明した. 第 1 節から第 4 節までの内容は, ここで修正された予想について調べたものである.

参考文献

[AKO] D. Auroux, L. Katzarkov, and D. Orlov. Mirror symmetry for del Pezzo surfaces: vanishing cycles and coherent sheaves. Invent. Math., 166(3):537-582, 2006.

[Del] P. Deligne. Local behavior of Hodge structures at infinity. In Mirror symmetry, II, volume 1 of AMS/IP Stud. Adv. Math., pages 683-699. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[ESY] H. Esnault, C. Sabbah, and J-D. Yu. E1-degeneration of the irregular Hodge filtration (with an appendix by M. saito). Journal für die reine und angewandte Mathematik, 2015.

[Har] A. Harder. The Geometry of Landau-Ginzburg models. PhD thesis, University of Alberta, 2016.

[KKP] L. Katzarkov, M. Kontsevich, and T. Pantev. Bogomolov-Tian-Todorov theorems for Landau-Ginzburg models. J. Differential Geom., 105(1):55-117, 2017.

[LP] V. Lunts and V. Przyjalkowski. Landau-Ginzburg Hodge numbers for mirrors of del Pezzo surfaces. arXiv:1607.08880, 2016.

[Moc] T. Mochizuki. A twistor approach to the Kontsevich complexes. arXiv:1501.04145, 2015.