

A Study of Approximations and Transformations of Markov Processes and their Applications to Credit Risk Analysis

Rusudan Kevkhishvili

要約

本論文は、マルコフ過程の近似及び変換を研究し、その理論的成果をクレジットリスク分析（第2～4章）と派生証券価格付け（第5章）へ応用している。第1章では、各章における研究の意義・目的・成果をまとめ、研究方法について概説した。研究方法として、特に、クレジットリスク分析において、Merton[1974]による option-theoretic アプローチを用いた。具体的には、企業の自己資本を観察不可能な企業総資産（企業価値）の上に書かれたヨーロピアンコールオプションと見なし、行使価格を満期時点の負債として定めた。このアプローチは、確率過程で表した企業総資産の動学に基づいて、クレジットリスクを分析する structural モデルにおいて使われている (McNeil et al. [2015, Sec. 10.3]参照)。

第2章では、企業資産の動学を表す新しいモデルを作り、上述の structural アプローチを用いて、任意の一つの業界に属する企業の同時デフォルト確率を分析した。このモデルは、企業固有リスクのみを含む Merton[1974]の幾何ブラウン運動 (GBM) モデルを改善したものである。デフォルト相関を捉えるために、企業固有リスク以外に、業界の全ての企業に共通のショットノイズ (ショック) 過程を資産のモデルに直接導入した。但し、ショックに対する反応は企業ごとに異なると仮定した。ショットノイズは企業に対する、累積した負のショックの影響を表している。資産の GBM モデルを拡張する先行研究と違って、本研究では、データから資産モデルのパラメータを求める、計算負荷の小さい方法を考案した。そのために、ショットノイズをマルコフ過程で近似することによって (Dassios and Jang [2005])、自己資本と資産の関係を explicit に求めた。銀行業界を実証分析した結果、新しい資産モデルは GBM モデルより負のショックの影響を捉え、同時デフォルトリスクに対するシグナルをより早く出すことが判明した。

第3章では、CDS スプレッドに関連する新しい指標 EMS を構成し、EMS の CDS スプレッド動学に対する説明力を分析した。EMS はデフォルト確率と残存確率から構成されており、これらの確率を求めるために structural アプローチと第2章で構築した資産のモデルを用いた。EMS を求めるために、CDS 契約に関する premium leg と default leg の概念 (Capiński and Zastawniak[2017, Sec. 4.3]参照) を使った。CDS スプレッドの動学を決める主要な変数に関して先行研究ではコンセンサスが得られていない。この章では、2008年6月–2009年9月における素材業界の三社を分析した結果、EMS は CDS スプレッドより早く上昇を始め、将来の CDS スプレッドの動きをよく説明できることが判明した。

第4章では、線形拡散過程について、任意の一点 α の最終通過時刻の分布を求めるためのテクニックを提示し、Salminen[1984]の結果を補完した。また、拡散過程を逆向きのプロセスに変換する時間反転の理論 (Nagasawa[1964]) を利用し、拡散過程が点 α を最後に通っ

てから消滅するまでの残存時間の分布を導出した。この理論的結果は、時間に伴い変化する企業のレバレッジ過程（資産過程の負債に対する比率）へ応用した。具体的には、レバレッジ過程が、債務超過リスクの高い領域と、そうでない領域の境界点を最後に通る時刻と、債務超過までの残存期間を研究した。更に、クレジットリスクが高い領域と、そうでない領域の境界点をリスク管理の観点から見て最適な水準として求める方法を考案した。境界点を低く設定した場合、その点の最終通過時刻から債務超過までの期間が短くなり、債務超過を回避することが難しくなる。他方、境界点が高い場合、レバレッジ過程がその点以下である期間（リスクが高い領域にいる期間）が長くなる。このトレードオフに基づき、最適化問題を設定した。実際に倒産した企業を分析した結果、上述の境界点の最終通過時刻と債務超過までの残存期間に関する情報が経営者にとって有益であることが確認できた。

第5章では、標準的な仮定の下で、2つのレジームにおいてスイッチする拡散過程に関する最適停止問題の一般的な確率的解法を与えた。先行研究では、レジームスイッチ最適停止問題を解く方法として、数値計算法による近似、あるいは特殊な問題にのみ適用可能な代数法だけが提案されている。それに対して、本研究では、価値関数と最適停止時刻を求める systematic かつ explicit な方法を考案した。そのために、まず、状態変数がスイッチする最適停止問題を、スイッチを含まない最適停止問題のペアに変換した。次に、スイッチのない問題の価値関数が満たす変分不等式 (Pham[2009, Sec. 5.2]参照) を用いて、価値関数の形状を求めた。本章では、スイッチのない問題を解く幾何学的方法 (Dayanik and Karatzas[2003]) に基づいて、容易に最適停止政策を決定できる方法を構成した。最後に、研究成果の応用として、数値計算法と代数法では解けない、レジームスイッチする株価を状態変数とする Perpetual Capped Call オプションの価値を求める最適停止問題を解いた。

参考文献

- M. Capiński and T. Zastawniak. *Credit Risk*. Cambridge University Press, 2017.
- A. Dassios and J. W. Jang. Kalman-Bucy filtering for linear systems driven by the Cox process with shot noise intensity and its application to the pricing of reinsurance contracts. *Journal of Applied Probability*, 42(1):93-107, 2005.
- S. Dayanik and I. Karatzas. On the optimal stopping problem for one-dimensional diffusions. *Stochastic Processes and their Applications*, 107(2):173-212, 2003.
- A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, revised edition, 2015.
- R. C. Merton. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, 29(2):449-470, 1974.
- M. Nagasawa. Time reversions of Markov processes. *Nagoya Math J.*, 24:177-204, 1964.

- H. Pham. *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, volume 61 of Stochastic Modeling and Applied Probability. Springer, Berlin Heidelberg, 2009.
- P. Salminen. One-dimensional diffusions and their exit spaces. *Math. Scand.*, 54:209-220, 1984.