Near Miss abc-Triples in General Number Fields (要約)

河口祐輝

互いに素な有理整数の 3 つ組 (a,b,c) で $a+b+c=0$ を満たすものを abc 3 つ組という。abc 予想の主張は，任意の $\varepsilon>0$ についてある $C_\varepsilon>0$ が存在し任意の abc 3 つ組 (a,b,c) について

$$\max\{|a|,|b|,|c|\}<C_\varepsilon\left(\prod_{\substack{p:\text{素数}\\ p|abc}}p\right)^{1+\varepsilon}$$

が成り立つことである。Masser 等はニアミス abc 3 つ組と呼ぶべき，漸近的にこの不等式の反例に近い振る舞いをする abc 3 つ組の列を構成した。

本論文では一般の数体について Masser による結果と類似の性質を満たす (定義を拡張した)abc-3 つ組の列を構成した。さらに例外を除いた (Galois 群を用いて特徴づけられる) クラスの数体について，その列に現れる abc 3 つ組を，真の部分体の abc-3 つ組の定数倍とならないように取ることができることを証明した。

定義 0.1. L を数体とする。$a,b,c\in L$ について (a,b,c) が強 abc 3 つ組であるとは a,b,c が L の整数環の単位イデアルを生成する非零元であり $a+b+c=0$ を満たすことをいう。強 abc 3 つ組 (a,b,c) についてその導手を

$$P_L(a,b,c)=\prod_{\substack{v\in\mathbb{V}^{\mathrm{non}}(L)\\ ||abc||_v<1}}\mathrm{N}_L(\mathfrak{p}_v)$$

で，また高さを

$$H_L(a,b,c)=\prod_{v\in\mathbb{V}^{\mathrm{arc}}(L)}\max\{||a||_v,||b||_v,||c||_v\}$$

で定義する。ここで $\mathbb{V}^{\mathrm{non}}(L),\mathbb{V}^{\mathrm{arc}}(L)$ はそれぞれ L の有限素点の集合，無限素点の集合，$||\cdot||_v$ は v に付随する正規化された L 上の絶対値，$\mathfrak{p}_v$ は有限素点 v に付随する L の整数環の素イデアル，$\mathrm{N}_L(\cdot)$ は L におけるイデアルノルムを表す。

本論文の主定理は以下である。

Theorem 0.1. L を虚 2 次体とし，唯一の L の無限素点により L を $\mathbb{C}$ の部分体とみなす。$\gamma<\dfrac{1}{2}$ なる正の実数 γ,P_0 について，次を満たす強 abc 3 つ組 (a,b,c) が存在する：

- $P_L(a,b,c)>P_0$;
- $|abc|^2>P_L(a,b,c)^3\exp\left((\log P_L(a,b,c))^{\frac{1}{2}-\gamma}\right)$.

Theorem 0.2. L を数体とし，u_0 を 1 の冪根でない L の単数とする。$\delta<1$ なる正の実数 δ,P_0 について，次を満たす正整数 l が存在する：$a=-1,b=u_0^l,c=1-u_0^l$ とすると

- (a,b,c) は強 abc 3 つ組である;
- $P_L(a,b,c)>P_0$;
- $H_L(a,b,c)>P_L(a,b,c)(\log P_L(a,b,c))^{1-\delta}$.