数理解析研究所講究録 1346 巻 2003 年 70-79

バイ・ラグランジュ対称空間のコンパクト化の成層分解と自己同型群への応用

日本工業大学・工学部　　金行壮二（Soji Kaneyuki）
Nihon Institute of Technology

幾何学における基本的な問題の一つとして、与えられた多様体上のある幾何構造に対してそれを不変にする変換全体のなす群、即ちその幾何構造の自己同型群を決定する事という問題がある。ここでは、単純リー群 G のバイ・ラグランジュ対称空間（パラエルミート対称空間ともいう）に対して、その上の二重葉層構造の自己同型群を決定する事。この種の対称空間の特別なケイスとして、自然な（半）順序構造が入る場合がある。これはケイリー型対称空間と言われている。上の事の応用として、この順序構造の自己同型群を決定する事。以上二つについて述べたい。上のバイ・ラグランジュ対称空間は群 G の随伴双曲軌道としての実現を持つ事、ケイリー型対称空間は管状既約対称領域と密接に関連し、リー群の表現論の分野で特に興味を持たれている対称空間である事に注意しておこう。

1．コンパクト化の軌道構造

<u>定義1</u>．　G を単純リー群、H を閉部分群、$M = G/H$ を対称空間、ω を M 上の G 不変シンプレクテイック形式、$F^{\pm}$ を M 上の２つの G 不変な完全積分可能なラグランジュ分布とする。三組（$M = G/H$, ω, $F^{\pm}$）を<u>バイ・ラグランジュ対称空間</u>（又は<u>パラエルミート対称空間</u>）という。($F^{\pm}$)を M 上の<u>バイ・ラグランジュ構造</u>という。

上の定義の M の接ベクトル束 TM は $F^{\pm}$ の Whitney 和　$TM = F^{+} \oplus F^{-}$ と表わされる。又シンプレクテイック形式 ω を与える代りに $F^{\pm}$ を totally isotropic な部分空間に持つ G 不変擬リーマン計量 h を与えてもよい。R^3 内で方程式 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ で定義される一葉双曲面 $\mathcal{H}$ は、二つの母線族を（$F^{\pm}$）とするバイ・ラグランジュ対称空間である。

バイ・ラグランジュ対称空間は第１種階別リー環（GLA）で記述され得る。そこで第１種単純 GLA

$$g = g_{-1} + g_0 + g_1 \tag{1.1}$$

を考えよう。　Z をこの GLA の特性元、τ を g の階別反転 Cartan 対合とする。リー環 g の自己同型群 Aut g のいくつかの部分群を定義しよう。

G_0 ：　GLA　g の自己同型群、これは Aut g でとった Z の中心化群 C(Z) と一致する、

G　：　G_0 と随伴群 Ad g で生成された Aut g の開部分群、

$U^{\pm} := G_0 \cdot \exp \mathfrak{g}_{\pm 1}$ はGの極大放物型部分群、
旗多様体 $M^{\pm} := G/U^{\pm}$ は対称R空間であり、 rをその階数とする。
単純第1種GLAに対して次の命題は基本的である。

命題1.1([10, 5]). 単純GLA (1.1) に対して、次の性質を持つ階別部分環 $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_{-1} + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1$ が存在する:

(i) sはr個の sl(2,R)-triplet

$$sl(2,\mathbb{R})_i = \langle E_{-i}, \check{\beta}_i, E_i \rangle, \qquad 1 \le i \le r,$$

のリー環の直和である。又 $\tau(E_i) = -E_{-i}$ である。

(ii)

$$\mathfrak{a}_{\pm 1} = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}E_{\pm i} \subset \mathfrak{g}_{\pm 1},$$

$$\mathfrak{a}_0 = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}\check{\beta}_i \subset \mathfrak{g}_0 .$$

(iii) $\mathfrak{a}_0$ に関する$\mathfrak{g}$ のルート系 Δ が存在する。 Δ はBC_r 型又はC_r 型である。
Δ をGLA $\mathfrak{g}$ のルート系という。

対称R空間$M^{\pm}$ の原点を$0^{\pm}$ で表わす。 GはG×Gの対角線部分群として $\tilde{M} := M^{-} \times M^{+}$ に作用する。 この時、次の定理が成立つ.

定理1.2([3, 7]). Gの元 a_k を $a_0 = 1$ 且

$$a_k = \exp \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{k} (E_i - E_{-i}), \quad 1 \le k \le r,$$

と定義し、 $\tilde{M}$ 上のG軌道 $M_k := G(0^{-}, a_{r-k}0^{+})$, $0 \le k \le r$, を考える。 この時

(1) $\tilde{M}$ は

$$\tilde{M} = M_r \amalg M_{r-1} \amalg \cdots\cdots \amalg M_0 \qquad (1.2)$$

と軌道分解される。 そして $\dim M_{k+1} > \dim M_k$ である。

(2) M_k の閉包 $\overline{M}_k$ は $M_{\le k} := \amalg_{i=0}^{k} M_i$ と一致する。

(3) $M := M_r = G(0^{-}, 0^{+}) = G/G_0$ は$\tilde{M}$ の稠密開集合であり、$\tilde{M}$ の直積構造から引起される二重葉層構造 $F^{\pm}$ に関して bi-Lagrange 対称空間になる。特に$\tilde{M}$ はMのG同変コンパクト化である。

(4) 最小次元の軌道M_0 は旗多様体である。GLA $\mathfrak{g}$のルート系 Δ がBC_r 型ならば、M_0 は

$\tilde{M}$の直積構造から引起される二重葉層構造$F_0^{\pm}$を持つ(これをpartial bi-Lagrange 構造という)。Δ がC_r型の時は商空間としては$M_0 = M^-$ が成立つ。この場合$F_0^{\pm}$ は自明になる。 最小次元の閉軌道M_0をMの特性境界と呼ぶ。

Mは連結であり、$G_0 = C(Z)$なる事から、MはGのリー環g内にZを通る、随伴群Adgの軌道として実現され、従ってMはシンプレクテイック構造を持つ。群GはMに作用する Aut g の最大の開部分群である事に注意しておこう。

2．$\tilde{M}$の成層分解とC^∞一安定性

定義 2. 実解析多様体 M の分割 $M = \coprod_{k=0}^{s} A_k$ が M の成層分解 (stratification) であるとは次の３条件が充たされる事である：

(1) 各A_kはMの実解析部分多様体である、

(2) A_kの閉包$\overline{A}_k$は M の実解析集合であり、それは $A_{\leq k} := \coprod_{i=0}^{k} A_i$ に一致する ($0 \leq k \leq s$)、

(3) $\overline{A}_k$の特異点集合 $\mathrm{Sing}(\overline{A}_k)$は$A_{\leq k-1}$ と一致する ($1 \leq k \leq s-1$)。

定理２.１ ([7]) . (1) $r \geq 2$ とすると、$\tilde{M}$のG軌道分解は$\tilde{M}$の成層分解である。
(2) fを$\tilde{M}$の滑らかな (=C^∞級) 微分同型とする。もしfがM_rを保つならば、fは他のすべてのM_k ($0 \leq k \leq r-1$) を保つ。

以下この定理の証明の概略を述べる。詳細は [7, 6] を参照されたい。

命題 2.2. (1.1) の GLA g において、ルート系 Δ がBC$_r$型ならば、

1) gは次の様な第２種の階別付をもつ：

$$g = \sum_{k=-2}^{2} \overline{g}_k , \tag{2.1}$$

$$\overline{g}_{\pm 1} = \overline{g}_{\pm 1}^{+} + \overline{g}_{\pm 1}^{-} . \tag{2.2}$$

ここに４つの部分空間 $\overline{g}_{\pm 1}^{\pm}$ は可換な部分空間であり、ad$\overline{g}_0$- 不変且同次元である。
(2.2)を充たす第２種 GLA (2.1)を pseudo-product GLA という。

2) 上の pseudo-product な階別付は元の第１種階別付に associ ate している。即ち

$$g_{-1} = \bar{g}_{-2} + \bar{g}_{-1}^{+}, \qquad g_0 = \bar{g}_{-1}^{-} + \bar{g}_0 + \bar{g}_1^{+}$$
$$g_1 = \bar{g}_1^{-} + \bar{g}_2 \tag{2.3}$$

が成立つ。

3) Δ が C_r 型ならば、$\bar{g}_{\pm 1} = (0)$ である。従って、(2.1)は (1.1)に帰する。

$\tilde{M}$ の原点を $(0^-, a_r \cdot 0^+)$ にとると、$\tilde{M}$ は商空間として

$$\tilde{M} = G/U^- \times G/a_r U^+ a_r^{-1} \tag{2.4}$$

と表わされる。 $G_{\pm 1} := \exp g_{\pm 1}$ とおく。ベクトル群 $G_1 \times a_r G_{-1} a_r^{-1}$ のこの原点を通る軌道 Ω は $\tilde{M}$ で開稠密、且このベクトル群と微分同型である。よってリー環 $g_1 \oplus (\mathrm{Ad}\, a_r) g_{-1}$ を Ω と同一視する。そこで $\tilde{M}$ の各 G 軌道の Ω に含まれる部分 $M_k^* := M_k \cap \Omega$, $0 \leq k \leq r$, を考えると

$$\Omega = M_r^* \amalg M_{r-1}^* \amalg \cdots \amalg M_0^* \tag{2.5}$$

が成立つ。この時 $M_{\leq k}^* := M_{\leq k} \cap \Omega$ は Ω 内のアフィン代数多様体になる。他方階別部分空間 $\bar{g}_2$ は、第2種単純 GLA の分類 ([4]) から、複素又は実の、古典型又は例外型の正方行列の空間になる。そして $M_{\leq k}^*$ は、$\bar{g}_2$ 内の階数がk以下の行列のなす行列式多様体 (determi nantal variety) 上のファイバーがアフィン空間の自明な fiber variety になる。これより代数多様体 $M_{\leq k}^*$ の特異点集合 $\mathrm{Sing}(M_{\leq k}^*)$が決定出来て、$r \geq 2$ なら、(2.5)は Ω の成層分解を与える事がわかる。これより群 G の作用を用いて定理 2.1(1)が得られる。定理 2.1(2)については [7, 6]を参照。

3. バイ・ラグランジュ対称空間の自己同型群 (BC_r 型の場合)

先ず partial bi-Lagrange 旗多様体 (田中[11]の意味での pseudo-product 構造を持つ旗多様体) についてのべよう。

<u>定義3</u>. 連結単連結リー群 G の旗多様体 N = G/U と、N 上の2つの完全積分可能な同次元の G 不変分布 $D^{\pm}$ に対して、次の 1)—3)が成立つ時、$(N = G/U, D^{\pm})$ を <u>partial bi-Lagrange 旗多様体</u>という。

1) $D^{+} \cap D^{-} = (0)$,

2) N の接ベクトル束を TN とすると、$D := D^{+} \oplus D^{-} \subsetneq TN$,

3) N 上のベクトル場は、D の局所基底と、その基底に属する 2 つのベクトル場の交換子積達の 1 次結合で表わされる。

(2.1) の pseudo-product 単純リー環から partial bi-Lagrange 旗多様体を構成する田中 [11]の方法を思出そう。(2.1)の階別リー環の特性元は $Z_r = \sum_{i=1}^{r} \check{\beta}_i$ で与えられ、この GLA の階別保存自己同型群は Aut g で取った Z_r の中心化群 $C(Z_r)$ と一致する。GLA g の部分環 $g_+ = \bar{g}_2 + \bar{g}_1$ の階別保存自己同型群 $\mathrm{Aut}_{gr}\, g_+$ の部分群 G_0' を

$$G_0' = \left\{ a \in \mathrm{Aut}_{gr} g_+ : \quad a(\bar{g}_1^{\pm}) = \bar{g}_1^{\pm} \right\}$$

により定義する。 G_0' は $C(Z_r)$の開部分群になる。 Aut g の部分群

$$G' := G_0'(\mathrm{Ad}\, g), \qquad Q_r' := G_0' \exp(\bar{g}_{-2} + \bar{g}_{-1})$$

を考える。旗多様体 $M_0' = G'/Q_r'$ は $\bar{g}_1^{\pm}$ から引起される partial bi-Lagrange 構造 $F_0'^{\pm}$ を持つ。 この時 $F_0'^{\pm}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M_0', F_0'^{\pm})$ は次で与えられる。

<u>定理 3.1</u> (田中[11]). $\mathrm{Aut}(M_0', F_0'^{\pm}) = G'$.

さて我々の場合に戻ろう。バイ・ラグランジュ対称空間 M の特性境界 M_0 は G の商空間として $M_0 = G/Q_r$ と表わされる。ここに $Q_r = U^- \cap a_r U^+ a_r^{-1}$.

<u>補題 3.2.</u> (1) 放物型部分群 Q_r は次の様に表わされる :([7])

$$Q_r = C(Z, Z_r) \cdot \exp(\bar{g}_{-2} + \bar{g}_{-1}).$$

ここに $C(Z, Z_r)$は Z と Z_r 両方の中心化群で Q_r の Levi 部分群であり、$\mathrm{Lie}\, C(Z, Z_r) = \bar{g}_0$. $\exp(\bar{g}_{-2} + \bar{g}_{-1})$ は冪零根基である。
(2) $C(Z, Z_r) = G_0'$ ([7]).

これより $G' = G$, $M_0 = G/Q_r = G'/Q_r' = M_0'$ が得られる。更に $F_0'^{\pm} = F_0^{\pm}$ も示され、定理 3.1 より $\mathrm{Aut}(M_0, F_0^{\pm}) = G$ が得られる。

<u>定理 3.3</u>[7].GLA (1.1)のルート系 Δ が BC_r型ならば、対称空間 M のバイ・ラグランジュ構造 $F^{\pm}$ を不変にする M の滑らかな微分同型のなす群 $\mathrm{Aut}(M, F^{\pm})$は [7])

$$\mathrm{Aut}(M, F^{\pm}) = \mathrm{Aut}(M_0, F_0^{\pm}) = G.$$

証明。 二重束 $M^- = G/U^- \longleftarrow M = G/G_0 \longrightarrow M^+ = G/U^+$ のファイバー達は F^+ 及び F^- の葉体達である。 $f \in \mathrm{Aut}(M,F^{\pm})$をとる。fは $F^{\pm}$ の葉体を $F^{\pm}$ の葉体に写すから、上の fibering のファイバーをファイバーに写す。よってfは底空間の微分同型 $f^+: M^+ \longrightarrow M^+$ と $f^-: M^- \longrightarrow M^-$を引起す。 $\tilde{f} = f^- \times f^+$ は $\tilde{M}$ の微分同型で、それの $M_r = M$ への制限は元のfである。よって定理 2.1 よりfは特性境界 M_0 を保つ。fの M_0 への制限を f_0 とする。対応 $f \longmapsto f_0$は $\mathrm{Aut}(M,F^{\pm})$から $\mathrm{Aut}(M_0, F_0^{\pm})$への準同型である。この対応が上への同型なる事も容易にわかる。QED.

4．バイ・ラグランジュ対称空間の自己同型群（C_r 型の場合）

定理 1.2 (4) で Δ が C_r 型の時は $M_0 = M^-$ である事を述べたが、それについて少し詳しく述べよう。

補題 4.1. Δ が C_r 型の時、 次式が成立つ：

$$a_r U^+ a_r^{-1} = U^- \tag{4.1}$$

これより

$$a_r o^+ = o^-$$

従って $\tilde{M}$ の原点 $(o^-, a_r o^+)$ は (o^-, o^-) になる。この点での $G \times G$ の固定部分群は $U^- \times U^-$ であるから、$\tilde{M} = G/U^- \times G/U^- = M^- \times M^-$ と表わされる。又 $M_0 = G(o^-, a_r o^+) = G(o^-, o^-)$ であり、G の作用が diagonal であるから、M_0 は $\tilde{M} = M^- \times M^-$ の対角線集合である。

次に旗多様体 $M^- = G/U^-$ の原点 o^- での接空間 $T_{o^-}(M^-)$を $\mathfrak{g}_1$ と同一視する。 固定部分群 U^- の線型 isotropy 群は G_0 である。 $\mathfrak{g}_1$内の同次元の G_0軌道の合併を V_k とすると、

$$\mathfrak{g}_1 = V_r \amalg V_{r-1} \amalg \cdots\cdots\cdots \amalg V_0$$

と表わされる（[5]）。 但し $\dim V_k > \dim V_{k-1}$ 且 V_r は Zariski 開集合、$V_0 = (0)$ である。 (1.1)の単純階別リー環の分類と実現より、$\mathfrak{g}_1$ は古典型又は例外型の種々の行列空間である。 V_k の添字 k は本質的には行列のランクである。特異 G_0 軌道の合併 $\partial V_r = V_{\leq r-1}$ は Gindikin-Kaneyuki [1] の意味での一般化された錐であり、これは M^- 上の G 不変な錐の場 $\mathcal{K}$（一般化された共形構造） に拡張される。この $\mathcal{K}$ の自己同型群（一般化された共形変換群） $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{K})$ は [1] で決定されている。

第2節で述べた同一視 $\Omega = \mathfrak{g}_1 \oplus (\mathrm{Ad}\, a_r)\mathfrak{g}_{-1}$ は C_r 型の場合 $\Omega = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$ となる。

そして $M^{*}_{\leq k}$ と $\mathfrak{g}_1$ 内の行列式多様体との対応は次の様に与えられる。

命題 4.2 ([7]). 線型写像 $\Phi: \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_1$ を $\Phi(X,Y) = Y - X$ で定義すると

$$M^{*}_{\leq k} = \Phi^{-1}(V_{\leq k}), \qquad 0 \leq k \leq r-1、$$

となる。 ここに $V_{\leq k} = \coprod_{i=0}^{k} V_i$ である。

さて $f \in \mathrm{Aut}(M, F^{\pm})$ とする。 定理 3.3 の証明中に与えられた f の $\tilde{M}$ への拡張 $\tilde{f}$ は M の直積構造を保つ。 分解 $\tilde{M} = M^{-} \times M^{-}$ は直積構造に adapt しているので、$\tilde{f} = f_1 \times f_2$ と表わされる。ここに f_1、f_2 は M^{-} の微分同型である。定理 2.1 より $\tilde{f}$ は M_0 を保つ。M_0 は $M^{-} \times M^{-}$ の対角線集合なる事から、$f_1 = f_2$ である事が従う。つまり $\tilde{f} = f_1 \times f_1$ と表わされる。命題 4.2 を用いて次の補題が得られる。

補題 4.3. $\tilde{f} = f_1 \times f_1$ が点 $(o^{-}, o^{-}) \in \tilde{M} = M^{-} \times M^{-}$ を固定しているならば、o^{-} での f_1 の微分 $(f_1)_{*o^{-}}$ は錐 $\partial V_r = V_{\leq r-1}$ を保つ。

定理 4.4 ([7]). ルート系 Δ が C_r 型ならば、バイ・ラグランジュ対称空間 ($M = G/G_0$, $F^{\pm}$) の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M, F^{\pm})$ は

$$\mathrm{Aut}(M, F^{\pm}) = \mathrm{Aut}(M^{-}, \mathcal{K}) = \begin{cases} G, & r \geq 2, \\ \mathrm{Diffeo}(M^{-}), & r = 1, \end{cases}$$

で与えられる。ここに $\mathrm{Diffeo}(M^{-})$ は M^{-} の滑らかな微分同型のなす群である。

証明。 $f \in \mathrm{Aut}(M, F^{\pm})$ とし、f の $\tilde{M}$ への拡張 $\tilde{f} = f_1 \times f_1$ を考える。 補題 4.3 より f_1 は $M_0 = M^{-}$ 上の一般化された共形構造 $\mathcal{K}$ の自己同型になる。 よって対応 $f \longmapsto f_1$ は $\mathrm{Aut}(M, F^{\pm}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(M^{-}, \mathcal{K})$ への準同型になる。 この対応が同型になる事も容易にわかり、[1] の結果から定理が従う。

5. ケイリー型対称空間の順序構造の自己同型群

この節では常に、(1.1) の GLA において単純リー環 $\mathfrak{g}$ はエルミート型であるとする。この場合ルート系 Δ は C_r 型である。エルミート型の GLA (1.1) に対応するバイ・ラグランジュ対称空間 ($M = G/G_0$, $F^{\pm}$) はケイリー型対称空間といわれる。この場合、群 G は Aut $\mathfrak{g}$ 自身に一致する事に注意しておこう。 $\mathbb{R}^3$ 内の一様双曲面 $\mathcal{H} = SU(1,1)/SO(1,1)$

はケイリー型対称空間で $F^{\pm}$ はその上の２つの母線族である。

リー環 g はある管状既約有界対称領域 D の正則変換群 G(D) のリー環になっており、M^- は D のシロフ境界と同一視される。M と D は同次元である。群 G は Bergman 計量に関する D の等長変換群になる(E. Cartan の定理)。 そして G(D)は G の指数２の正規部分群になる。対称空間 M は G(D)の商空間として

$$M = G(D)/G_0(D)$$

と表わされる。ここに $G_0(D) = G(D) \cap G_0$ である。 GLA g はエルミート型なので、その部分空間 $g_{\pm1}$ はコンパクト単純ジョルダン代数の構造を持つ。その単位元は $E^{\pm} = \sum_{i=1}^{r} E_{\pm i}$ で与えられ、その軌道 $V^{\pm} = G(D)E^{\pm}$ は $g_{\pm1}$ 内の自己共役な開凸錐（対称錐ともいう）になる。これの閉包 $C^{\pm} := \overline{V^{\pm}}$ は $g_{\pm1}$ 内の因果錐になる。$C^{\pm}$ の直和 $C = C^+ \oplus C^- \subset g_1 \oplus g_{-1} = T_0(M)$ は $G_0(D)$不変は因果錐である。C を G(D)不変な M 上の錐の場(i.e.因果構造) $\mathcal{C}$ に拡張する。かくしてケイリー型対称空間 ($M = G(D)/G_0(D)$, $\mathcal{C}$) は因果構造付対称空間になる。これは所謂 noncompactly causal symmetric space (Hilgert-Ólafsson[2])である、即ち、M 上に自明でない閉じた因果曲線は存在しない。次の定理は一般の noncompactly causal 対称空間で成立つが、ケイリー型で述べておく。商空間 M の原点を o で表わす.

定理 5.1 (Ol'shanski, Ólafsson, cf. [9,2]). M 上の錐の場 $\mathcal{C}$ は積分可能である。即ち、次の自然な対応 φ

$$g_1 \oplus g_{-1} \supset C \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Exp}\, C := (\exp C)o \subset M$$

は C から Exp C の上への位相同型で C の内部で微分同型である (Exp C は M 内の頂点 o の curved cone である)。

これを用いると M 上に順序が次の様に定義される。 M の２点 go ($g \in G(D)$)と x に対して、$go \leq x$ であるとは、$x \in g(\mathrm{Exp}\, C)$ なる事と定める。すると $\leq$ は M 上の G(D)不変な順序になる。

定義。 M の順序構造 $\leq$ の自己同型群 Aut(M, $\leq$)を次の様に定義する：

$$\mathrm{Aut}(M, \leq) = \{\, f \in \mathrm{Diffeo}(M) \;:\; x \leq y \text{ iff } f(x) \leq f(y), \text{ for } x,y \in M\}$$

リー環 g の対合 $\sigma = \mathrm{Ad}\exp \pi i Z$ に対して、$\tilde{\sigma}(a) = \sigma a \sigma$ とおくと、$\tilde{\sigma}$ は G_0 を決め

るGの対合である。

定理 5.2 ([8]). ($M = G(D)/G_0(D)$, $\leqslant$)を順序構造付ケイリー型対称空間とし、D を GLA g に対応する管状既約有界対称領域とする。この時、D の正則変換群 G(D)の D 上の作用はシロフ境界 $M^{\sim} = M_0$ へ延びて更にM上へ拡張される、そして次式が成立つ：

$$\mathrm{Aut}(M, \leqslant) = \begin{cases} G(D) \ltimes Z_2, & r \geqslant 2, \\ \mathrm{Diffeo}^{+}(S^1) \ltimes Z_2, & r = 1. \end{cases}$$

ここに $Z_2 = \langle \theta \rangle$ で、 θ は

$$\theta(go^-, go^+) = (\tilde{\sigma}(g)a_r o^-, \tilde{\sigma}(g)a_r o^+), \quad g \in G(D),$$

で与えられ、o での微分 θ_{*o} は $C^{\pm}$ を $C^{\mp}$ に写す。 $\mathrm{Diffeo}^{+}(S^1)$は円周 S^1 の向きを保つ微分同型のなす群を表わす。

証明 (方針)。 (i) $\mathrm{Aut}(M, \leqslant)$が因果構造 $\mathcal{C}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{C})$と一致する事、(ii) $\Gamma := \mathrm{Aut}(M, \mathcal{C}) \cap \mathrm{Aut}(M, F^{\pm})$を定理 4.4 を用いてきめる事、これは G(D)になる。(iii) $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{C}) = \Gamma \amalg \theta\Gamma$ と表わされる事。

Bibliography

[1] S. Gindikin and S. Kaneyuki, On the automorphism groups of the generalized conformal structure of a symmetric R-spaces, Differential Geometry and its Applications, 8(1998), 21-33.

[2] J. Hilgert and G. Ólafsson, Causal Symmetric Spaces: Geometry and Harmonic Analysis, Academic Press, 1997.

[3] S. Kaneyuki, On orbit structure of compactifications of parahermitian symmetric spaces, 13(1987), 333-370.

[4] S. Kaneyuki, On the subalgebras $\mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{ev}$ of semisimple graded Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, 45(1993), 1-19.

[5] S. Kaneyuki, The Sylvester's law of inertia in simple graded Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, 50(1998), 593-614.

[6] S. Kaneyuki, Stratifications of Jordan triple systems and applications to

symmetric spaces, in Representations of Noncommutative Algebraic Systems and Harmonic Analysis, RIMS Reports No.1294, 2002, pp.8-26 (in Japanese).

[7] S. Kaneyuki, Compactification of parahermitian symmetric spaces and its applications, II : Stratifications and automorphism groups, J. Lie Theory, 13(2003), 535-563.

[8] S. Kaneyuki, On the automorphism groups of ordered symmetric spaces of Cayley type, in preparation.

[9] G.I. Ol'shanskii, Convex cones in symmetric Lie algebras, Lie semigroups, and invariant causal (ordered) structures on pseudo-Riemannian symmetric spaces, Sov. Math. Dokl. 26(1982), 97-101.

[10] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces II, Tsukuba J. Math.,3(1979), 1-29.

[11] N. Tanaka, On affine symmetric spaces and the automorphism groups of product manifolds, Hokkaido Math. J., 14(1985), 277-351.

Soji Kaneyuki
Department of Mathematics
Nihon Institute of Technology
Miyashiro-cho, Saitama,
345-8501
kaneyuki@hoffman.cc.sophia.ac.jp