数理解析研究所講究録 第2098巻 2018年 35-40

ADIABATIC LIMITS, THETA FUNCTIONS, AND GEOMETRIC QUANTIZATION (ANNOUNCEMENT)

吉田尚彦
明治大学理工学部数学科
TAKAHIKO YOSHIDA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
MEIJI UNIVERSITY

1. Introduction

Lagrange fibration の幾何学的量子化において，Spin^c Dirac 作用素の指数と Bohr-Sommerfeld ファイバーと呼ばれる離散的に現れるファイバーの個数とが一致する現象が，様々な例で確認されている [1, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 18, 10, 14, 15]． これについて，ある条件の下，非特異 Lagrange fibration （つまり，Lagrange ファイバー束）に対して，Bohr-Sommerfeld 点で添え字づけられた正則切断の族で

(1) 正則切断の空間の基底をなし，
(2) 各々の切断のサポートは，断熱極限の下で，対応する Bohr-Sommerfeld 点の周りに集中する

ようなものが構成できたので，論文 [17] にまとめている．本稿はこの論文 [17] の予報である． [17] では本稿の内容よりも一般的な状況も論じる予定である．

2. Lagrange ファイバー束

2.1. **整アファイン構造．** (M,ω) をシンプレクティック多様体とする．

定義 2.1. (M,ω) を全空間とするファイバー束 $\pi\colon (M,\omega)\to B$ で，ファイバーが Lagrange 部分多様体であるようなものを **Lagrange ファイバー束**とよぶ．

例 2.2. n 次元トーラス $T^n=(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ の余接束の全空間 $(\mathbb{R}^n\times T^n,\sum_i dx_i\wedge dy_i)$ から $\mathbb{R}^n$ への射影 $\pi\colon(\mathbb{R}^n\times T^n,\sum_i dx_i\wedge dy_i)\to\mathbb{R}^n$ は Lagrange ファイバー束である．ここで，x_i は $\mathbb{R}^n$ 方向の，y_i は T^n 方向の標準的な座標とする．

例 2.2 は，Lagrange ファイバー束の局所モデルを与える．

定理 2.3 (Arnold-Liouville の定理 [2])**.** *ファイバーがコンパクト，弧状連結であるような Lagrange ファイバー束は，局所的には例 2.2 の* $(\mathbb{R}^n\times T^n,\sum_i dx_i\wedge dy_i)\to\mathbb{R}^n$ *と同一視できる．*

以下では断らない限り，Lagrange ファイバー束は全てファイバーがコンパクト，弧状連結と仮定する．

定義 2.4. Lagrange ファイバー束 $\pi\colon(M,\omega)\to B$ の切断 u で $u^*\omega=0$ となるものを **Lagrange 切断**とよぶ．

補題 2.5. *$\psi\colon(\mathbb{R}^n\times T^n,\sum_i dx_i\wedge dy_i)\to(\mathbb{R}^n\times T^n,\sum_i dx_i\wedge dy_i)$ を例 2.2 の Lagrange ファイバー束 $\pi\colon(\mathbb{R}^n\times T^n,\sum_i dx_i\wedge dy_i)\to\mathbb{R}^n$ のファイバーを保つシンプレクティック同相とする．このとき，行列 $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，定数 $c\in\mathbb{R}^n$ と π の Lagrange 切断 $u\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times T^n\colon x\mapsto(x,\widetilde{u}(x))$ が存在して，ψ は*

$$\psi(x,y)=\left(Ax+c,{}^tA^{-1}y+\widetilde{u}(x)\right)$$

と表せる．

Partly supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 15K04857.

特に，補題 2.5 から次のことが分かる．

命題 2.6. $\pi\colon (M^{2n},\omega) \to B^n$ を *Lagrange* ファイバー束とする．このとき，B の座標近傍系 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ と各 $\alpha\in A$ に対してシンプレクティック同相 $\psi_\alpha\colon \left(\pi^{-1}(U_\alpha),\omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}\right) \to (\varphi_\alpha(U_\alpha)\times T^n, \sum_i dx_i\wedge dy_i)$ で次の図式が可換になるようなものがある

$$
\begin{tikzcd}
(\pi^{-1}(U_\alpha),\omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}) \arrow[r, "\psi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & (\varphi_\alpha(U_\alpha)\times T^n, \sum_i dx_i\wedge dy_i) \arrow[d] \\
U_\alpha \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & \varphi_\alpha(U_\alpha).
\end{tikzcd}
$$

さらに，各 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上の局所定数な写像 $A_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，$c_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta\to\mathbb{R}^n$ と *Lagrange* 切断 $u_{\alpha\beta}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta) \to (\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times T^n, \sum_i dx_i\wedge dy_i)$ が存在して，

$$
\psi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}(x,y) = \left(A_{\alpha\beta}x + c_{\alpha\beta}, {}^tA_{\alpha\beta}^{-1}y + u_{\alpha\beta}\left(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}(x)\right)\right)
$$

とかける．

定義 2.7. 命題 2.6 の B の座標近傍系 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ を**整アファイン構造**とよび，多様体と整アファイン構造の組を**整アファイン多様体**とよぶ．

例 2.8. (1) $a_1,\dots,a_n$ を実線型空間 $\mathbb{R}^n$ の基底とする．このとき，$\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用

$$
\phi_\gamma(x) = x + \sum_{i=1}^n \gamma_i a_i \qquad (\gamma\in\mathbb{Z}^n, x\in R^n)
$$

による商空間 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ には，整アファイン構造が入る． この商空間は位相的には T^n である．
(2) n を自然数，a,b をともに正の実数とする．このとき，$\mathbb{Z}^2$ の $\mathbb{R}^2$ への作用を

$$
\phi_{e_1}(x) := x + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{e_2}(x) := \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \qquad (x\in R^2)
$$

で定める．ここで，$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．この作用の商空間には，整アファイン構造が入る．この商空間は位相的には T^2 であるが，この作用から誘導される整アファイン構造は (1) のものとは同型でないことが Mishachev によって知られている [16, Theorem A]．
(3) $m,n\in\mathbb{Z}^3$ に対して， 積 $m\cdot n\in\mathbb{Z}^3$ を

$$
m\cdot n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{m_1} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}
$$

で定める．$\mathbb{Z}^3$ は積 $\cdot$ に関して，非可換な群になる．次に，群 $(\mathbb{Z}^3,\cdot)$ の $\mathbb{R}^3$ への作用を

$$
\phi_n(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{n_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (n\in(\mathbb{Z}^3,\cdot), x\in\mathbb{R}^3)
$$

で定めると，商空間には整アファイン構造が入る．
(4) $l,m\in\mathbb{Z}^n$ に対して， 積 $l\cdot m\in\mathbb{Z}^n$ を

$$
l\cdot m := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (-1)^{l_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{l_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}
$$

で定める．$\mathbb{Z}^n$ は積 $\cdot$ に関して非可換な群になる．次に，群 $(\mathbb{Z}^n,\cdot)$ の $\mathbb{R}^n$ への作用を

$$\phi_m(x) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (-1)^{m_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{m_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \quad (m \in (\mathbb{Z}^n,\cdot), x \in \mathbb{R}^n)$$

で定めると，商空間には整アファイン構造が入る． $n=2$ の時，この商空間はクラインの壺である．

(5) 整数 $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}$ に対して， $\mathbb{Z}^n$ の積を

$$\gamma' \cdot \gamma := \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & & & \\ & 1 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{\gamma'_n} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} \qquad (\gamma',\gamma \in \mathbb{Z}^n)$$

で定める．$\mathbb{Z}^n$ は積 $\cdot$ に関して非可換な群になる．次に，群 $(\mathbb{Z}^n,\cdot)$ の $\mathbb{R}^n$ への作用を

$$\phi_\gamma(x) := \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & & & \\ & 1 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{\gamma_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \qquad (\gamma \in (\mathbb{Z}^n,\cdot), x \in \mathbb{R}^n)$$

で定めると，商空間には整アファイン構造が入る．

命題 2.9. *B を多様体とする．B が Lagrange ファイバー束の底空間であるための必要充分条件は，B が整アファイン構造を許容することである．*

2.2. **Developing map と completeness.** $\pi\colon (M^{2n},\omega) \to B^n$ を Lagrange ファイバー束，$p\colon \widetilde{B} \to B$ を B の普遍被覆とする． $\Gamma := \pi_1(B)$ とおくと， $\widetilde{B}$ への Γ 作用の $p^*(M,\omega) \to \widetilde{B}$ への持ち上げが存在する．このとき，次が知られている．

命題 2.10. *$\mathbb{R}^n$ の開集合 O， O 上の Lagrange ファイバー束 $(\widetilde{M},\widetilde{\omega}) \to O$，$\widetilde{B}$ から O への全射はめ込み $\mathrm{dev}\colon \widetilde{B} \to O \subset \mathbb{R}^n$，及び $p^*(M,\omega)$ から $(\widetilde{M},\widetilde{\omega})$ へのファイバーを保つシンプレクティック同相写像 $\widetilde{\mathrm{dev}}\colon p^*(M,\omega) \to (\widetilde{M},\widetilde{\omega})$ で dev をカバーするものが存在する． さらに，Γ の $\mathbb{R}^n$ への整アファイン作用 $\phi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n)$ と Γ の $(\widetilde{M},\widetilde{\omega})$ への作用 φ が存在し， 次が成り立つ．*

(1) *ϕ は O を保つ．*
(2) *φ は ϕ をカバーする．*
(3) *dev と $\widetilde{\mathrm{dev}}$ は Γ 同変写像．*

定義 2.11. $\mathrm{dev}\colon \widetilde{B} \to B$ を **developing map** とよぶ．また，$\widetilde{B}$ と $\mathbb{R}^n$ が整アファイン多様体として同型であるとき[1]，B は **complete であるという．**

例 2.12. 例 2.8 にある整アフィン多様体は全て complete である．

例 2.13 (complete でない整アファイン多様体の例)**.** $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}$ の $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ への自然な作用による商空間は整アファイン多様体であるが，$n \geq 2$ の場合は complete でない．

Bieberbach の定理 [3, 4] より，次が従う．

命題 2.14. *B がコンパクトな平坦 Riemann 多様体ならば，complete である．*

---

[1] このとき，$O = \mathbb{R}^n$ で，dev は $\widetilde{B}$ から $\mathbb{R}^n$ への，整アファイン多様体としての同型を与えることが知られている

Duistermaat による Lagrange ファイバー束の分類定理 [6] により，次が分かる．

補題 2.15. B が *complete* ならば，$(\widetilde{M},\widetilde{\omega}) = (\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i)$ ととることができ，$\widetilde{\mathrm{dev}}$ は $p^*(M,\omega) \to \widetilde{B}$ から $(\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i) \to \mathbb{R}^n$ へのファイバーを保つシンプレクティック同相写像で dev をカバーする．

$(L,\nabla) \to (M,\omega)$ を前量子化束とする．(L,∇) の $p^*(M,\omega)$ への引き戻しも $p^*(L,\nabla)$ と表すことにする．定義より，$p^*(M,\omega)$ への Γ 作用の $p^*(L,\nabla)$ への持ち上げが存在する．

補題 2.16. B は *complete* とする．このとき，$p^*(L,\nabla)$ から $(\mathbb{R}^n \times T^n \times \mathbb{C}, d - 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n x_i dy_i)$ への束同型で $\widetilde{\mathrm{dev}}$ をカバーするものが存在する．

注 2.17. 補題 2.16 この同一視の下，Γ の $(\mathbb{R}^n \times T^n \times \mathbb{C}, d - 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n x_i dy_i)$ への作用を $\widetilde{\varphi}$ で表すことにする．

以上、まとめると次のようになる．

定理 2.18. B が *complete* ならば，前量子化束付き *Lagrange* ファイバー束 $(L,\nabla) \to (M,\omega) \to B$ は，$(\mathbb{R}^n \times T^n \times \mathbb{C}, d - 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n x_i dy_i) \to (\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i) \to \mathbb{R}^n$ を Γ 作用でわった商空間として得られる．

3. 主定理

3.1. Bohr-Sommerfeld 点.

$\pi\colon (M^{2n},\omega) \to B^n$ を Lagrange ファイバー束，$(L,\nabla) \to (M^{2n},\omega)$ を前量子化束とする．

定義 3.1. $b \in B$ が **Bohr-Sommerfeld** であるとは，$(L,\nabla)|_{\pi^{-1}(b)} \to \pi^{-1}(b)$ が非自明な平行切断を許容するときをいう．

以下では，B は complete と仮定する． また，N を自然数とする．

$$(\widetilde{M},\widetilde{\omega}) := (\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i)$$

$$(\widetilde{L},\widetilde{\nabla}) := (\mathbb{R}^n \times T^n \times \mathbb{C}, d - 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n x_i dy_i)$$

とおくと，定理 2.18 から，$(L,\nabla)^{\otimes N} \to (M, N\omega) \to B$ は $(\widetilde{L},\widetilde{\nabla})^{\otimes N} \to (\widetilde{M}, N\widetilde{\omega}) \to \widetilde{B} \cong \mathbb{R}^n$ への $\Gamma := \pi_1(B)$ 作用による商空間として得られる．このとき，

命題 3.2. $x \in \mathbb{R}^n$ が $(\widetilde{L},\widetilde{\nabla})^{\otimes N} \to (\widetilde{M}, N\widetilde{\omega}) \to \mathbb{R}^n$ の *Bohr-Sommerfeld* 点である為には，$x \in \dfrac{1}{N}\mathbb{Z}^n$ であることが必要十分である．特に，$\mathbb{R}^n$ への Γ 作用の基本領域を F，$(L,\nabla)^{\otimes N} \to (M, N\omega) \to B$ の *Bohr-Sommerfeld* 点全体のなす集合を B_{BS} とすると，$F \cap \dfrac{1}{N}\mathbb{Z}^n$ と B_{BS} は一対一に対応する．

3.2. 概複素構造.

定理 2.18 より，$N\omega$ と整合的な $(M, N\omega)$ の概複素構造は $N\widetilde{\omega}$ と整合的な $(\widetilde{M}, N\widetilde{\omega})$ 上の Γ 同変概複素構造と一対一に対応する．ここで，

$$\mathcal{S} := \{Z = X + \sqrt{-1}Y \in M_n(\mathbb{C}) \mid X, Y \in M_n(\mathbb{R}), {}^tZ = Z, Y \text{ は正定値 }\}$$

とすると（$\mathcal{S}$ を **Siegel 上半空間**という），$C^\infty(\widetilde{M},\mathcal{S})$ と $(\widetilde{M}, N\widetilde{\omega})$ 上の $N\widetilde{\omega}$ と整合的な概複素構造全体の集合は，対応

$$C^\infty(\widetilde{M},\mathcal{S}) \ni Z \mapsto J_Z := \begin{pmatrix} XY^{-1} & -Y - XY^{-1}X \\ Y^{-1} & -Y^{-1}X \end{pmatrix} : T_{(x,y)}\widetilde{M} = T_x\mathbb{R}^n \oplus T_yT^n \circlearrowleft$$

で一対一に対応することが知られている．

3.3. Γ **作用．** 定理 2.18 から，$(L,\nabla)^{\otimes N} \to (M,N\omega) \to B$ は $(\widetilde{L},\widetilde{\nabla})^{\otimes N} \to (\widetilde{M},N\widetilde{\omega}) \to \widetilde{B}$ への $\Gamma := \pi_1(B)$ 作用による商空間として得られる．そこで，$\widetilde{B}$，$(\widetilde{M},\widetilde{\omega})$，$(\widetilde{L},\widetilde{\nabla})$ への Γ 作用を，$\gamma \in \Gamma$ に対してそれぞれ ϕ_γ，φ_γ，$\widetilde{\varphi}_\gamma$ とすると，補題 2.5 より，$A_\gamma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，$c_\gamma \in \mathbb{R}^n$，及び Lagrange 切断 u_γ が存在して，φ_γ と ϕ_γ はそれぞれ

$$\phi_\gamma(x) = A_\gamma x + c_\gamma,\ \varphi_\gamma(x,y) = (\phi_\gamma(x), {}^tA_\gamma^{-1}y + u_\gamma(x))$$

と表せる．このとき，

補題 3.3. $Z \in C^\infty(\widetilde{M},\mathcal{S})$ に対応する $(\widetilde{M},N\widetilde{\omega})$ 上の $N\widetilde{\omega}$ と整合的な概複素構造 J_Z が Γ 作用で保たれる為には，

$$\begin{cases} XY^{-1}A_\gamma - (Y+XY^{-1}X)Du_\gamma = A_\gamma XY^{-1} \\ (Y+XY^{-1}X)^tA_\gamma^{-1} = A_\gamma(Y+XY^{-1}X) \\ Y^{-1}A_\gamma - Y^{-1}XDu_\gamma = Du_\gamma XY^{-1} + {}^tA_\gamma^{-1}Y^{-1} \\ Y^{-1}X^tA_\gamma^{-1} = Du_\gamma(Y+XY^{-1}X) + {}^tA_\gamma^{-1}Y^{-1}X \end{cases}$$

が成り立つことが必要十分である．ここで，Du_γ は u_γ のヤコビ行列である．

また，$\widetilde{\varphi}_\gamma$ については，直接計算により次が分かる．

補題 3.4. 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して，$\widetilde{\varphi}_\gamma$ が $\widetilde{\nabla}$ を保つ為には，$c_\gamma \in \dfrac{1}{N}\mathbb{Z}^n$ であることが必要十分である．またこのとき，$\widetilde{\varphi}_\gamma$ は

$$\widetilde{\varphi}_\gamma(x,y,w) = \left(\varphi_\gamma(x,y), g_\gamma \exp 2\pi\sqrt{-1}N\left[\frac{1}{2}{}^tx({}^tDu_\gamma A_\gamma)x + {}^tx^tDu_\gamma c_\gamma + {}^t(A_\gamma^{-1}c_\gamma)y\right]w\right)$$

（$(x,y,w) \in \widetilde{L}$）と表せる．ここで，$g_\gamma$ は $g \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^\times)$ の γ における値である．

3.4. **主定理．** $(L,\nabla) \to (M,\omega) \to B$ を前量子化束付き Lagrange ファイバー束，N を自然数とする．また，J を $N\omega$ と整合的な $(M,N\omega)$ の概複素構造とする．次が成り立つ．

定理 3.5. B は *complete* であると仮定する．また，J の $(\widetilde{M},\widetilde{\omega})$ への引き戻しに対応する $Z \in C^\infty(\widetilde{M},\mathcal{S})$ は定値写像であると仮定する[2]．このとき，各 $\frac{m}{N} \in F \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n$ に対して，L の切断 $\vartheta_{\frac{m}{N}}$ を

$$\begin{aligned}\vartheta_{\frac{m}{N}}(x,y) := \sum_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma \exp\pi\sqrt{-1}N[&-\frac{{}^tm}{N}(\Omega + {}^tA_\gamma Du_\gamma)\frac{m}{N} \\ &+ {}^t\left(\phi_{\gamma^{-1}}(x) - \frac{m}{N}\right)(\Omega + {}^tA_\gamma Du_\gamma)\left(\phi_{\gamma^{-1}}(x) - \frac{m}{N}\right) \\ &- 2\frac{{}^tm}{N}{}^tA_\gamma u_\gamma(0) - 2^tc_\gamma u_\gamma(0) + 2^t\phi_\gamma(\frac{m}{N})y]\end{aligned}$$

と定義すると，全ての g_γ のノルムが $|g_\gamma| < 1$ ならば $\vartheta_{\frac{m}{N}}$ は L の正則切断であり，$\{\vartheta_{\frac{m}{N}}\}_{\frac{m}{N}\in F\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n}$ は $H^0(M;\mathcal{O}_L)$ の基底をなす．

定理 3.5 の証明の概要を述べる．定理 2.18 より， (M,ω) の概複素構造に付随した L 係数 Spin^c Dirac 作用素の核に含まれる L の切断を求めるためには，$(\widetilde{L},\widetilde{\nabla}) \to (\widetilde{M},\widetilde{\omega}) \to \widetilde{B}$ 上で同様の問題の Γ 同変版を考えればよい．そこで，$(\widetilde{L},\widetilde{\nabla}) \to (\widetilde{M},\widetilde{\omega}) \to \widetilde{B}$ 上で微分方程式を解き，Γ 同変という条件を考慮すると，$\vartheta_{\frac{m}{N}}$ が得られる．

注 3.6. 定理 3.5 における概複素構造についての仮定があると，M は平坦 Riemann 多様体になる．論文 [17] では，この仮定を弱めた場合を論じる予定である．

---

[2] このとき，(M,J,ω) は Kähler であり，L には正則直線束の構造が入る．

References

1. J. E. Andersen, *Geometric quantization of symplectic manifolds with respect to reducible non-negative polarizations*, Comm. Math. Phys. **183** (1997), no. 2, 401–421.
2. V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, second ed., Graduate texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989.
3. L. Bieberbach, *über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume*, Math. Ann. **70** (1911), no. 3, 297–336.
4. ______, *über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume (Zweite Abhandlung.) Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich*, Math. Ann. **72** (1912), no. 3, 400–412.
5. V. Danilov, *The geometry of toric varieties (Russian)*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), no. 2, 85–134, English translation: Russian Math. Surveys 33 (1978), no. 2, 97–154.
6. J. J. Duistermaat, *On global action-angle coordinates*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), no. 6, 687–706.
7. H. Fujita, M. Furuta, and T. Yoshida, *Torus fibrations and localization of index I*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **17** (2010), no. 1, 1–26.
8. ______, *Torus fibrations and localization of index II*, Comm. Math. Phys. **326** (2014), no. 3, 585–633.
9. ______, *Torus fibrations and localization of index III*, Comm. Math. Phys. **327** (2014), no. 3, 665–689.
10. M. D. Grossberg and Y. Karshon, *Equivariant index and the moment map for completely intergrable torus actions*, Adv. Math. **133** (1998), no. 2, 185–223.
11. V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math. **67** (1982), no. 3, 515–538.
12. L. Jeffrey and J. Weitsman, *Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), no. 3, 593–630.
13. Y. Kamiyama, *The cohomology of spatial polygon spaces with anticanonical sheaf*, Int. J. Appl. Math. **3** (2000), no. 3, 339–343.
14. Y. Karshon and S. Tolman, *The moment map and line bundles over presymplectic toric manifolds*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 3, 465–484.
15. M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans, and equivariant index*, Tohoku Math. J. **51** (1999), no. 2, 237–265.
16. K. N. Mishachev, *The classification of lagrangian bundles over surface*, Differential Geom. Appl. **6** (1996), no. 4, 301–320.
17. T. Yoshida, *Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization*, in preparation.
18. ______, *On counting lattice points and Riemann-Roch numbers in Lagrangian fibrations*, Talk at University of Toronto, January 2008.

Department of Mathematics, School of Science and Technology, Meiji University, 1-1-1 Higashimita, Tama-ku, Kawasaki, 214-8571, Japan

E-mail address: `takahiko@meiji.ac.jp`