数理解析研究所講究録 第2098巻 2018年 76-82

旗多様体上のあるベクトル束に現れる正則Poisson構造と完全可積分系について

阿部 拓
大阪市立大学 数学研究所

1 序

複素ベクトル空間$\mathbb{C}^n$の旗多様体$Fl(\mathbb{C}^n)$は$\mathbb{C}^n$の線形部分空間の列からなる空間として次のように定義される：

$$Fl(\mathbb{C}^n)=\{V_0\subseteq V_1\subseteq\cdots\subseteq V_n \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の線型部分空間で } \dim_{\mathbb{C}} V_i=i\ (1\leq i\leq n)\}.$$

ヘッセンバーグ多様体は旗多様体$Fl(\mathbb{C}^n)$の代数的部分集合であり，Springer fiberやPeterson variety，ルート系に付随するトーリック多様体といった，$Fl(\mathbb{C}^n)$のよく知られた部分多様体を統一的に記述する．

本稿では，ある特別なヘッセンバーグ多様体の族の上に正則なポアソン構造を与え，それが開かつ稠密なシンプレクティック葉をもち，さらに完全可積分系を許容していることを観察する．同時に，重要な可積分系の一つである戸田格子との関係も考察する．本研究はPeter Crooks氏（Northeastern University大学）との共同研究である（[1]）．ここではA_{n-1}型を用いて説明するが，一般型でも同様である（[1]）．

2 戸田格子

戸田格子にはいくつかの種類があり，詳しくは[4, 6, 11, 12, 13, 9, 10]などを参照されたい．ここでは，[9, 10]に基づいて戸田格子を復習する[1]．まず，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$を行列式が1の$n\times n$複素行列からなる特殊線形群とし（$n\geq 2$），そのリー環を$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$と書く．また，$B,B_-\subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$をそれぞれ上三角行列，下三角行列からなるボレル部分群とし，それぞれのリー環を$\mathfrak{b},\mathfrak{b}_-\subseteq\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$と書く．

行列のトレースを用いることで，$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})\cong\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^*$が$X\mapsto \mathrm{tr}(X\cdot)$により得られ，このペアリングは$\mathfrak{b}_-\cong\mathfrak{b}^*$を誘導する．これにより，$B$の余随伴表現は，$B$の$\mathfrak{b}_-$への表現と

[1]正確には[9, 10]の設定とは若干異なるが，本質的に同じものである

同一視される．この下で，$\mathfrak{b}_-$ の元

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の B-軌道を $\mathcal{O}_{\mathrm{Toda}}(\subseteq \mathfrak{b}_-)$ と書く．具体的には

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Toda}} = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 & & & & \\ u_1 & -p_1+p_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & u_{n-2} & -p_{n-2}+p_{n-1} & \\ & & & u_{n-1} & -p_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{c} p_i \in \mathbb{C},\ u_i \in \mathbb{C}^\times \\ (1 \le i \le n-1) \end{array} \right\}$$

である．構成より，$\mathcal{O}_{\mathrm{Toda}}$ は B の余随伴軌道を $\mathfrak{b}_-$ の中に実現したものであり，余随伴軌道は Kirillov-Kostant-Souriau 形式によって正則シンプレクティック多様体になっているので，$\mathcal{O}_{\mathrm{Toda}}$ もまた自然に正則シンプレクティック多様体になる．

さて，$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 上の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$-不変な多項式関数からなる環 $\mathbb{C}[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}$ は，$n-1$ 個の代数的に独立な斉次多項式によって生成される $\mathbb{C}$ 上の多項式環である（Chevalley の定理）．$f_1, \dots, f_{n-1}$ を $\mathbb{C}$-代数としての $\mathbb{C}[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}$ の生成元とする．つまり，$\mathbb{C}[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$．このような関数の構成法としては，例えば，$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の元 x の特性多項式 $\det(tE - x)$ の t のべき展開の係数を読み取ればよい．今，

$$\zeta := \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

とおき，$1 \le i \le n-1$ に対して

$$\sigma_i : \mathcal{O}_{\mathrm{Toda}} \to \mathbb{C} \quad ; \quad x \mapsto f_i(x+\zeta)$$

を考える．次の定理については例えば [9, 10] を参照されたい．

定理 2.1. $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ は $\mathcal{O}_{\mathrm{Toda}}$ 上の完全可積分系をなす．

3　正則軌道の Slodowy スライス

リー環 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の元は，その随伴軌道が最大次元をもつとき，正則元であるという．$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の正則元全体の集合は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の稠密な開集合であり，各正則元の軌道を正則軌道と呼ぶ．

$X, H, Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ が $\mathfrak{sl}_2$-三つ組であるとは,

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y$$

を満たすことをいう．このとき，X と Y は同じ随伴軌道に属する．X（または Y）が正則元のとき，(X, H, Y) は正則 $\mathfrak{sl}_2$-三つ組であるという．今，(X, H, Y) を正則 $\mathfrak{sl}_2$-三つ組とするとき，

$$S_{\mathrm{reg}} := X + \ker(\mathrm{ad}_Y) \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$$

は各正則軌道との交わりが 1 点のみでかつ横断的であることが知られている（[8, Lemma 13, Theorem 8]）．この意味で，S_{reg} は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の正則軌道たちのスライスである．

以下，積空間 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}}$ が自然な正則シンプレクティック構造をもつことを説明する．ここで，$Z \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ は群としての中心である．

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ の左作用を用いて $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ の余接束 $T^*\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ を $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^*$ と同一視し，さらに 2 節と同様に行列のトレースを用いて $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ と $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^*$ を同一視すると，$T^*\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ が得られる．余接束 $T^*\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ は標準的な正則シンプレクティック形式をもっており，これを上記の同一視で移植することで $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 上に正則シンプレクティック形式が定まる．このとき，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times S_{\mathrm{reg}} \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ はシンプレクティック部分多様体であり（例えば [5] の (1.19) より従う），さらに $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}}$ 上のシンプレクティック形式を自然に誘導する．この様にして，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}}$ を正則シンプレクティック多様体とみなす．

さて，2 節で考察した $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 上の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$-不変多項式 $f_1, \ldots, f_{n-1}$ を思い出し，$d_i := \deg(f_i)$ $(1 \le i \le n-1)$ とおく．$\zeta \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ を (1) 式で定めた元とし，$f_i(x + t\zeta)$ をパラメーター t に関してテイラー展開したときの t^j の係数を $f^{\zeta}_{i,j}(x) \in \mathbb{C}[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]$ と書くと，$f^{\zeta}_{i,0}(x) = f_i(x)$ および $f^{\zeta}_{i,d_i}(x) = 0$ であり，分解

$$f_i(x + \zeta) = f^{\zeta}_{i,0}(x) + f^{\zeta}_{i,1}(x) + \cdots + f^{\zeta}_{i,d_i-1}(x)$$

が得られる．これら $f^{\zeta}_{i,j}$ $(0 \le j \le d_i - 1)$ は全部で $\dim B$ 個あるので，これらの多項式を一斉に並べたものを改めて $f^{\zeta}_1, \ldots, f^{\zeta}_{\dim B}$ と書き，

$$\tau_i : \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} \to \mathbb{C} \quad ; \quad (gZ, x) \mapsto f^{\zeta}_i(gxg^{-1})$$

を考える．

定理 3.1. (Crooks-Rayan [2]) 関数 $\tau_1, \ldots, \tau_{\dim B}$ は $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}}$ 上の完全可積分系をなす [2]．

[2] 正確には，[2] は $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times S_{\mathrm{reg}}$ 上で考えている．

次の定理は本研究で得られた結果の一つであり，可積分系としての埋め込み $\mathcal{O}_{\mathrm{Toda}} \hookrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}}$ が存在するということを主張するものである．

定理 3.2. ([1]) シンプレクティック多様体としての埋め込み $\mathcal{O}_{\mathrm{Toda}} \hookrightarrow SL_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}}$ が存在し，τ_j $(1 \leq j \leq \dim B)$ を $\mathcal{O}_{\mathrm{Toda}}$ に制限して得られる関数たちの $\mathbb{C}$ 上の一次結合をとることで全ての σ_i が得られる．

4　ヘッセンバーグ多様体とその族

[3] や [14] に基づいて，Hessenberg variety の定義を復習しておく[3]．リー環の元 $x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ と B-安定な線形部分空間 $\mathfrak{b} \subseteq H \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ に対して，これらに付随するヘッセンバーグ多様体 $X(x, H)$ は

$$X(x, H) := \{gB \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B \mid g^{-1}xg \in H\}$$

で定義される．

定義より，H に付随するヘッセンバーグ多様体の族は，

$$\mathcal{X}(H) := \{(gB, x) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid g^{-1}xg \in H\}$$

で与えられる．今，$H \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は B-安定なので，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B$ 上のベクトル束

$$X(H) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H$$

が自然に定まる．ここで，右辺は直積 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times H$ を B 作用が定める同値関係

$$(g, x) \sim (gb^{-1}, bxb^{-1}) \quad (g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), x \in H, b \in B)$$

で割って得られる空間である．この下で，同型

$$\mathcal{X}(H) \overset{\cong}{\to} X(H) \quad ; \quad (gB, x) \mapsto [g, x]$$

があるので，本稿ではむしろ $X(H) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H$ をヘッセンバーグ多様体の族と見なす．

以下では，H として

$$H_0 := \{x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid x_{ij} = 0 \ (i - j \geq 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & * \\ & & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

を考え，H_0 に付随するヘッセンバーグ多様体の族 $X(H_0) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H_0$ について考察する．

[3] ここでは A_{n-1} 型での定義のみを述べる．

以下，$X(H_0)$ がポアソン多様体であることを概説する．3 節で得られた正則シンプレクティック多様体 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は自然なポアソン構造を持っている．詳細は [1] に譲るが，運動量写像を用いて考えることで，このポアソン構造はその商空間 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ にポアソン構造を誘導し，部分多様体 $X(H_0) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ はポアソン部分多様体であることが従う．

ここで，

$$H_0^\times := \{x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid x_{i,j} = 0 \ (i - j \geq 2), x_{i+1,i} \neq 0\} \subseteq H_0 \tag{2}$$

とおくと，やはり詳細は [1] に譲るが，ザリスキー開集合 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H_0^\times \subseteq X(H_0)$ は開かつ稠密なシンプレクティック葉である．

定理 4.1. ([1]) 写像 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow X(H_0)$; $(gB, x) \mapsto [g, x]$ は開埋め込みであり，シンプレクティック葉 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H_0^\times \subseteq X(H_0)$ へのシンプレクティック同相写像である．

ポアソン多様体 $X(H_0)$ 上に完全可積分系を与えるために写像

$$\mu_0 : X(H_0) \to \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \quad ; \quad [g, x] \mapsto gxg^{-1}$$

を考え，3 節で定義した $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 上の関数 $f_i^\zeta(x) \in \mathbb{C}[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]$ $(1 \leq i \leq \dim B)$ をこの写像 μ_0 によって引き戻したものを $\tilde{\tau}_i (:= f_i^\zeta \circ \mu_0)$ と書く．

定理 4.2. ([1]) 関数 $\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_{\dim B}$ はポアソン多様体 $X(H_0)$ 上の完全可積分系をなし，各 $\tilde{\tau}_i$ の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}}$ への制限は τ_i と一致する．

この意味で，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H_0$ は完全可積分系としての埋め込みである．

5 応用

$x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ と H_0 に付随するヘッセンバーグ多様体は

$$X(x, H_0) = \{gB \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B \mid g^{-1}xg \in H_0\}$$

であった．(2) 式で定めた開集合 $H_0^\times \subseteq H_0$ を思い出し，

$$X(x, H_0^\times) := \{gB \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B \mid g^{-1}xg \in H_0^\times\}$$

と定めると，$X(x, H_0^\times) \subseteq X(x, H_0)$ はザリスキー開集合である．

定理 4.1 に現れた開埋め込み $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow X(H_0)$ は次の可換図式を満たす．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} \arrow[rr] \arrow[dr, "\mu"'] & & X(H_0) \arrow[dl, "\mu_0"] \\ & \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) & \end{tikzcd}$$

ただし，$\mu : \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は $\mu(gZ, x) = gxg^{-1}$ $(gZ \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z,\ x \in S_{\mathrm{reg}})$ で定まる写像である．μ の像は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の正則元全体のなす部分集合と一致しており，各正則元のファイバーは非特異である（[2]）．

一般に，ヘッセンバーグ多様体 $X(x, H_0)$ は特異性を持つ代数多様体であるが，x が正則元のときは，定理 4.1 の応用として次が得られる．

系 5.1. ([1]) $x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ を正則元とする．このとき，$X(x, H_0)$ のザリスキー開集合 $X(x, H_0^\times)$ は非特異である．特に，

$$\mathrm{sing}(X(x, H_0)) \subseteq \{gB \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B \mid g^{-1}xg \in H_0 \setminus H_0^\times\}.$$

ここで，$\mathrm{sing}(X(x, H_0))$ は $X(x, H_0)$ の特異点集合を意味する．

x として冪零な正則元をとるとき，$X(x, H_0)$ は Peterson 多様体と呼ばれている．この場合については，その特異点集合が明示的に決定されている（[7]）．

参考文献

[1] H. Abe and P. Crooks, *Hessenberg varieties, Slodowy slices, and integrable systems*, arXiv:1807.07792.

[2] P. Crooks and S. Rayan, *Abstract integrable systems on hyperkähler manifolds arising from Slodowy slices*, arxiv:1706.05819. To appear in Math. Res. Lett.

[3] F. De Mari, C. Procesi and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*. Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529-534.

[4] H. Flaschka, *On the Toda lattice, I*, Phys. Rev. B **9** (1974), 1924-1925; II, Progr. Theor. Phys. **51** (1974). 703-716.

[5] V. Guillemin and S. Sternberg, *On collective complete integrability according to the method of Thimm*, Ergodic Theory Dynam. Systems. **3** (1983), no. 2, 219-230.

[6] R. Hermann, *Toda Lattices, Cosymplectic manifolds, Backlund Transformations, Kinks*; Part A, 15, Part B, 18, “Interdisciplinary Mathematics”, Math. Sci. Press.

[7] E. Insko and A. Yong, *Patch ideals and Peterson varieties*, Transform. Groups **17** (2012), no. 4, 1011–1036.

[8] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **85** (1963), 327-404.

[9] B. Kostant, *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*, Adv. in Math. **34** (1979), no. 3, 195-338.

[10] B. Kostant, *Flag manifold quantum cohomology, the Toda lattice, and the representation with highest weight ρ*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), no. 1, 43-91.

[11] J. Moser, *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential-an integrable system*, Dynamical systems, theory and applications (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974), pp. 467-497. Lecture Notes in Phys., Vol. 38, Springer, Berlin, 1975.

[12] Toda, Morikazu Studies of a non-linear lattice. Phys. Rep. **18C** (1975), no. 1, 1-123.

[13] P. van Moerbeke, *The spectrum of Jacobi matrices*, Invent. Math. **37** (1976), no. 1, 45-81.

[14] J. Tymoczko, *Paving Hessenberg varieties by affines*, Selecta Math. (N.S.) **13** (2007), no. 2, 353-367.